$c_1(E) \equiv w_2(E_{\mathbb{R}})$について

塩崎　謙

March 26, 2024

1　準備

1.1　$U(n) \to SO(2n)$

$u \in U(n)$に対して，

$$u = a + ib, \quad a = (u+u^*)/2, \quad b = (u-u^*)/(2i), \tag{1}$$

として，

$$u \mapsto R(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \tag{2}$$

で与えられる．準同型であること$R(uv) = R(u)R(v)$は確認できる．単射であることも，$R(u) = 1_{2n}$のとき，$a = 1_n, b = 0$より．また，$u = \gamma\Lambda\gamma^\dagger, \Lambda = \mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \dots)$と対角化すると，$R(\gamma)R(\gamma^\dagger) = 1_{2n}$より$R(\gamma^\dagger) = R(\gamma)^\top$に注意して，

$$\det R(u) = \det R(\gamma)^2 \det R(\Lambda) = \prod_i \det e^{-i\sigma_y\theta_i} = 1 \tag{3}$$

より．

1.2　$SO(2n) \to Spin(2n)$

xy平面の回転行列は

$$e^{-i\sigma_y\theta} = e^{\theta L} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad L = -i\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

で与えられる．一般に，$SO(n)$行列Rは

$$R = e^{\sum_{i<j}\theta_{ij}L_{ij}}, \quad [L_{ij}]_{kl} = -\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}, \tag{5}$$

と表示される [1] この表示を用いて$SO(n) \to Spin(n)$は

$$R \mapsto \tilde{R} = \pm e^{\sum_{ij}\theta_{ij}\Sigma_{ij}}, \quad \Sigma_{ij} = \frac{[\gamma_i, \gamma_j]}{-4}, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 2\delta_{ij}, \tag{6}$$

で与えられる．

[1] 与えられた$R \in SO(n)$から$n(n-1)/2$個の実パラメータθ_{ij}を決める方法はhttps://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~ken.shiozaki/doc/Compute_Homotopy_SO.pdfを見よ．

1.3 リフトと一意性

$p : C \to X$を被覆写像とする．連続全射$p : C \to X$が被覆写像であるとは，任意の$x \in X$に対してxの開近傍Uが存在して逆像$p^{-1}(U)$が共通部分を持たないCの開集合であり，各開集合がpによりUに同相であること．

Yを弧状連結（かつ局所連結）な空間とし，連続写像$f : Y \to X$を考える． $p(c) = f(y)$なる“$f(y)$の上にある”点$c \in C$をひとつ固定する．このとき，fのリフト，つまり連続写像

$$\tilde{f} : Y \to C \tag{7}$$

であって

$$p \circ \tilde{f} = f, \quad \tilde{f}(y) = c, \tag{8}$$

を満たすものが存在するかどうかを知りたい．

例えば，Cが普遍被覆，つまり単連結であり，$\pi_1(Y, y)$が非ゼロでかつ，fにより$\pi_1(Y, y)$が消えていない場合は，$\pi_1(Y, y)$の非自明なループ上の点を追っていくと，$\tilde{f}$は$\tilde{f}(z) = c$に戻らず，連続であり得ない．

fによって誘導されるπ_1間の準同型を$f_* : \pi_1(Y, y) \to \pi_1(X, f(y))$と書く．

- リフト$\tilde{f}$が存在する必要十分条件は

$$f_*(\pi_1(Y, y)) \subset p_*(\pi_1(C, c)) \tag{9}$$

  が成立すること．また，リフト$\tilde{f}$は存在すれば一意である．

  特に，Cが普遍被覆（Cが単連結）の場合にリフト$\tilde{f}$が存在する必要十分条件は

$$f_*(\pi_1(Y, y)) = 0 \tag{10}$$

  が成立すること．$\tilde{f}$は一意的．

証明は保留するが，直感的には，fの像$f(Y) \subset X$が単連結であるため，$f(Y)$内に非自明なループが存在せず，パスに関するリフトの存在と一意性より従う．パスに関するリフトの存在と一意性は，Xの任意の開集合Uに対して同相$U \cong p^{-1}(U)$があることから従う．

上記は，連続群の場合も成立する． Gを連続群，Hを弧状連結な連続群とする． $\tilde{G}$をGの普遍被覆群とし，$p : \tilde{G} \to G$を準同型な被覆写像とする． $f : H \to G$は準同型連続写像とし，$f_*[\pi_1[H]] = 0$とする．このとき，連続なリフト$\tilde{f} : H \to \tilde{G}$が存在し，$\tilde{f}(e) = e$と選ぶことができる． pの準同型性より$p(\tilde{f}(hh')) = p(\tilde{f}(h)\tilde{f}(h'))$が成立する． Hの弧状連結性より，$h(t \in [0, 1])$として$h(0) = e, h(1) = h$なるパスが存在するが，$t = 0$近傍では全射pの同相性より$\tilde{f}(h(t)h') = \tilde{f}(h(t))\tilde{f}(h')$が成立する．パス$h(t)$をパッチで$t = 0$から$t = 1$まで覆うことにより，$t \in [0, 1]$に対して$\tilde{f}(h(t)h') = \tilde{f}(h(t))\tilde{f}(h')$が示される．

1.4 直和とリフト

$SO(n) \times SO(m) \to SO(n + m)$を行列をブロック対角的に並べる自然な埋め込みとする．独立なリフト

$$SO(n) \ni R_1 \mapsto \tilde{R}_1 \in Spin(n), \tag{11}$$

$$SO(m) \ni R_2 \mapsto \tilde{R}_2 \in Spin(m), \tag{12}$$

に対して，リフト$SO(n + m) \to Spin(n + m)$が決まるか？注意として，

$$\begin{pmatrix} R_1 & \\ & R_2 \end{pmatrix} \mapsto “\begin{pmatrix} \tilde{R}_1 & \\ & \tilde{R}_2 \end{pmatrix}” \tag{13}$$

と書いても，右辺は$Spin(n + m)$群の元としての意味を持たない．

表示(4)をもとにして考える． x_1x_2空間のθ_{12}回転，x_3x_4空間のθ_{34}回転をそれぞれ$SO(2)$行列として

$$R_1 = e^{-i\sigma_y\theta_{12}}, \tag{14}$$

$$R_2 = e^{-i\sigma_y\theta_{34}} \tag{15}$$

と書く．直和は$SO(4)$行列として

$$R = \begin{pmatrix} e^{-i\sigma_y\theta_{12}} & \\ & e^{-i\sigma_y\theta_{34}} \end{pmatrix} \tag{16}$$

と書かれる．これは

$$R = e^{\theta_{12}L_{12}+\theta_{34}L_{34}} = e^{\theta_{12}L_{12}}e^{\theta_{34}L_{34}} \tag{17}$$

とも書くことができる．これは表記

$$R = \begin{pmatrix} R_1 & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & R_2 \end{pmatrix} \tag{18}$$

に対応する．

$Spin(4)$へのリフトは

$$\tilde{R} = e^{\theta_{12}\Sigma_{12}+\theta_{34}\Sigma_{34}} \tag{19}$$

で与えられる．具体的には，例えば

$$(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) = (\sigma_x\tau_z, \sigma_y\tau_z, \tau_x, \tau_y) \tag{20}$$

と置くと，

$$\Sigma_{12} = -i\sigma_z/2, \quad \Sigma_{34} = -i\tau_z/2 \tag{21}$$

より，

$$\tilde{R} = e^{-i\theta_{12}\sigma_z/2}e^{-i\theta_{34}\tau_z/2} \tag{22}$$

となる．$\tilde{R}_1, \tilde{R}_2$のリフトの符号の不定性は$\tilde{R}$に対して積で効くことに注意．直和でなく積

$$\tilde{R} = \widetilde{i_1(R_1)}\widetilde{i_2(R_2)} \tag{23}$$

が正しい関係式である．ここで，i_1, i_2はそれぞれ埋め込み$SO(2) \to SO(4)$を表す．より一般に，リフト

$$SO(n) \ni R_1 = e^{\sum_{1\le i<j\le n}\theta_{ij}L_{ij}} \to \tilde{R}_1 = \pm e^{\sum_{1\le i<j\le n}\theta_{ij}\Sigma_{ij}} \in Spin(n), \tag{24}$$

$$SO(m) \ni R_2 = e^{\sum_{n+1\le i<j\le n+m}\theta_{ij}L_{ij}} \to \tilde{R}_2 = \pm e^{\sum_{n+1\le i<j\le n+m}\theta_{ij}\Sigma_{ij}} \in Spin(m) \tag{25}$$

に対して，$(R_1, R_2) \mapsto (R_1 \oplus R_2) \to i_1(R_1)i_2(R_2) \in SO(n+m)$のリフトは

$$R \mapsto (\pm)(\pm)\tilde{R}_1\tilde{R}_2 \tag{26}$$

で与えられる．

2 $c_1 \equiv w_2$

$E \to X$をランクnの複素ベクトル束とする． Xのgood covering $\{U_i\}_i$をひとつ取ると，Eは変換関数のデータで与えられる．

$$t_{ij} : U_{ij} \to U(n), \quad t_{ij}t_{jk}t_{ki} = 1_n. \tag{27}$$

$$e^{i\theta_{ij}} = \det t_{ij} \tag{28}$$

と書き，リフト$U(1) \to \mathbb{R}, \theta_{ij} \mapsto \tilde{\theta}_{ij}$をひとつ取る．コサイクル条件より

$$(\delta\tilde{\theta})_{ijk} = \tilde{\theta}_{ij} + \tilde{\theta}_{jk} + \tilde{\theta}_{ki} \in 2\pi\mathbb{Z} \tag{29}$$

である．

$$c_1(E) = [\delta\tilde{\theta}/(2\pi)] \tag{30}$$

と定める．

ランク$2n$の実ベクトル束$E_{\mathbb{R}}$を，変換関数のデータ

$$R(t_{ij}) : U_{ij} \to SO(2n) \tag{31}$$

によって定める． U_{ij}上でリフト

$$R(t_{ij}) \mapsto \tilde{R}(t_{ij}) \in Spin(2n) \tag{32}$$

を取ると，

$$\tilde{R}(t_{ij})\tilde{R}(t_{jk})\tilde{R}(t_{ki}) = e^{\pi i s_{ijk}}\mathbf{1}, \tag{33}$$

によって$s_{ijk} \in \{0,1\}$が決まる．

$$w_2(E_{\mathbb{R}}) = [s] \tag{34}$$

である．主張は

$$c_1(E) \equiv w_2(E_{\mathbb{R}}) \mod 2. \tag{35}$$

(証明) 準同型

$$f : U(n) \to SO(2n+2) \tag{36}$$

を

$$t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} R(t) & \\ & e^{-i\sigma_y \log\det t} \end{pmatrix} \tag{37}$$

として定める [2]． $R(t_{ij}), e^{-i\sigma_y \log\det t_{ij}}$の，埋め込み先$SO(2n+2)$からのリフトを取る．具体的には，

$$R_1(t_{ij}) = e^{\sum_{1\le i<j\le 2n}\theta_{ij}L_{ij}} \to \widetilde{R_1(t_{ij})} = e^{\sum_{1\le i<j\le 2n}\theta_{ij}\Sigma_{ij}}, \tag{38}$$

$$R_2(t_{ij}) = e^{\theta_{2n+1,2n+2}L_{2n+1,2n+2}} \to \widetilde{R_2(t_{ij})} = e^{\tilde{\theta}_{2n+1,2n+2}\Sigma_{2n+1,2n+2}}, \quad e^{i\theta_{2n+1,2n+2}} = \det t_{ij}, \tag{39}$$

で与えられる．するとリフト

$$f(t_{ij}) = R(t_{ij}) \oplus e^{-i\sigma_y \log\det t_{ij}} \to \widetilde{f(t_{ij})} = \widetilde{R_1(t_{ij})}\widetilde{R_2(t_{ij})} : U_{ij} \to Spin(2n+2) \tag{40}$$

が定まる．構成より，

$$\widetilde{f(t_{ij})}\widetilde{f(t_{jk})}\widetilde{f(t_{ki})} = e^{\pi i s_{ijk}} e^{i(\delta\tilde{\theta})_{ijk}/2}\mathbf{1} \tag{41}$$

が成立する．一方で， $f_*(\pi_1(U(n))) = 0$であるから [3]，リフト

$$\tilde{f} : U(n) \to Spin(2n+2) \tag{42}$$

が存在する． $\tilde{f}$の準同型性より

$$\tilde{f}(t_{ij})\tilde{f}(t_{jk})\tilde{f}(t_{ki}) = \tilde{f}(t_{ij}t_{jk}t_{ki}) = \tilde{f}(1_n) = \mathbf{1} \tag{43}$$

が成立する．よって，2コサイクル$e^{\pi i s_{ijk}} e^{i(\delta\tilde{\theta})_{ijk}/2}$は自明なコホモロジー元を定める． □

注：一般に，

$$c_i(E) \equiv w_{2i}(E_{\mathbb{R}}), \quad i = 1, 2, \ldots \tag{44}$$

が成立する．

---

[2] https://www.youtube.com/watch?v=CjW2vRwR6Vo&list=PLESK1T0IJLino5qgZcx10NliXtvUcoG9B&index=6

[3] $R_* : \pi_1(U(n)) \to \pi_1(SO(2n))$が$1 \mapsto 1$というマップである． $U(n)$の非自明ループの像は，非対角成分を用いて$SO(2n+2)$内で潰すことができる