カイラル指数，及び巻き付き数について

塩崎　謙

October 20, 2022

[1]

一般に，異なる既約表現間で，カイラリティを比較する方法は，ない．例えば，”total chirality”などは，定義できない場合もある．この点についてまとめる．

群を$G = G_0 + \Gamma G_0$とする． G_0の既約表現αに対して，$\Gamma\alpha \sim \alpha$とする．すると，一般論より，$G_0 + \Gamma G_0$の既約表現$\alpha\pm$であって，

$$\chi^{\alpha\pm}_{g\in G_0} = \chi^{\alpha}_{g}, \quad \chi^{\alpha-}_{g\in\Gamma G_0} = -\chi^{\alpha+}_{g} \tag{1}$$

を満たすものが存在する． $\alpha+$と$\alpha-$を$G_0 + \Gamma G_0$の既約表現から選ぶ標準的な方法はないことに注意する．

1　カイラル指数

$\alpha+, \alpha-$を固定したとき，カイラル指数は

$$\#(\alpha+ \ \text{ irreps}) - \#(\alpha- \ \text{ irreps}) = \frac{1}{|G_0 + \Gamma G_0|}\sum_{g\in G_0+\Gamma G_0}(\chi^{\alpha+}_g - \chi^{\alpha-}_g)^* \mathrm{tr}\,[u_g] = \frac{1}{|G_0|}\sum_{g\in\Gamma G_0}(\chi^{\alpha+}_g)^* \mathrm{tr}\,[u_g] \tag{2}$$

と定義される．ここで，u_gは表現行列であり，

$$P_{\alpha\pm} = \frac{1}{|G_0 + \Gamma G_0|}\sum_{g\in G_0+\Gamma G_0}(\chi^{\alpha\pm}_g)^* u_g \tag{3}$$

は既約表現$\alpha\pm$への射影である．

G_0の別の既約表現βが存在し，$\Gamma\beta \sim \beta$とする．このとき，既約表現$\beta+$を$G_0 + \Gamma G_0$の既約表現の集合から選ぶことにより， βセクターの正のカイラリティが定まる． αセクターの正のカイラリティ$\alpha+$とは一般には無関係であることに注意する．

部分群$H \subset G$に対して， Hがカイラル対称性を有する場合を考える． $H = H_0 + \Gamma H_0$． H_0の既約表現γに対して，$\Gamma\gamma \sim \gamma$とする．すると，γセクターの正のカイラリティが，$H_0 + \Gamma H_0$の既約表現から$\gamma+$を選ぶことにより定まる．

$\alpha+, \beta+$は$G_0 + \Gamma G_0$の既約表現なので，部分群$H_0 + \Gamma H_0$の既約表現である$\gamma\pm$と内積を取ることができる．部分群Hに制限したときの$\alpha+$のカイラル指数の変化が以下で与えられる．

$$(\gamma+, \alpha+) - (\gamma-, \alpha+) = \frac{1}{|H_0|}\sum_{g\in\Gamma H_0}(\chi^{\gamma+}_g)^* \chi^{\alpha+}_g. \tag{4}$$

この変化が有限値である場合は，カイラル指数の変化を通して，$\alpha+$と$\beta+$の正のカイラリティを比較することができる．

“total chirality”が定義できない例は， $G = \mathbb{Z}_4 = \{e, \sigma^2\} + \sigma\{e, \sigma^2\}$の場合．このとき，カイラル演算子を含むような$G$の意味のある部分群が存在しない．

[1]（動機）AHSSの第一微分$d_1^{p,-n}$において，奇数のnについては，カイラル演算子のため，群元を２倍に拡張する必要があるが，なんとか群元を増やさずに第一微分の計算ができないだろうか？結論は，異なるセクター間のカイラリティを比較する方法は一般には存在しないので，群元を２倍にすることは避けられない．

2 巻き付き数

空間$2n-1$次元のパラメータ空間に依存したハミルトニアン$H(\boldsymbol{k})$が群$G_0+\Gamma G_0$の以下の対称性を有するとする．

$$u_g H(\boldsymbol{k}) u_g^{-1} = \begin{cases} H(\boldsymbol{k}) & (g \in G_0), \\ -H(\boldsymbol{k}) & (g \in \Gamma G_0). \end{cases} \tag{5}$$

G_0の既約表現αに対して，マップされた表現$\Gamma\alpha$がユニタリ同値$\Gamma\alpha \sim \alpha$であれば，整数値に値を取る巻き付き数が定義できる．既約表現αの群$G_0+\Gamma G_0$への拡張$\alpha\pm$を固定する．巻き付き数は以下で定義される．

$$W^{\alpha}_{2n-1} = \frac{n!}{(2\pi i)^n (2n)!} \int \mathrm{tr}\,[(H^{-1}dH)^{2n-1}(P_{\alpha+}-P_{\alpha-})] \tag{6}$$

$$= \frac{n!}{(2\pi i)^n (2n)!} \int \frac{1}{|G_0|} \sum_{g\in\Gamma G_0} (\chi^{\alpha+}_g)^* \mathrm{tr}\,[(H^{-1}dH)^{2n-1}u_g] \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

注意として，この定義ではαの表現次元によらず，W^{α}_{2n-1}の取る値は任意の整数値である．

最も簡単な例は$G_0+\Gamma G_0=\{e\}+\{\gamma\}$の場合で，$u_\gamma^2=1$なる乗数系の場合は，表現の拡張は$\chi_\gamma=\pm1$の2通り存在する． $\chi^{\pm}_\gamma=\pm1$とすると，巻き付き数は

$$W^{\alpha}_{2n-1} = \frac{n!}{(2\pi i)^n (2n)!} \int \mathrm{tr}\,[(H^{-1}dH)^{2n-1}u_\gamma] \tag{8}$$

となり，既存の定義に一致する．

非自明な例を挙げる．

$$G_0+\Gamma G_0 = \{e, m_x, m_y, c_z\} + \{\gamma, m_x\gamma, m_y\gamma, c_z\gamma\} \tag{9}$$

として，

$$u_{m_x}^2 = u_{m_y}^2 = u_{c_z}^2 = -1, \tag{10}$$

$$u_{m_x}u_{m_y} = -u_{m_y}u_{m_x}, \tag{11}$$

$$u_\gamma u_{m_x} = -u_{m_x}u_\gamma, \quad u_\gamma u_{m_y} = u_{m_y}u_\gamma, \tag{12}$$

$$u_\gamma^2 = 1, \quad u_{m_y\gamma} = u_{m_y}u_\gamma, \tag{13}$$

の場合を考える． G_0の既約表現は唯一であり，

$$\begin{array}{c|cccc} & e & m_x & m_y & c_z \\ \hline \chi_g & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}. \tag{14}$$

この既約表現の$G_0+\Gamma G_0$への拡張は，$u_{m_y\gamma}$が他の全てと可換であることと，$u^2_{m_y\gamma}=u^2_{m_y}u^2_\gamma=-1$に注意すると，

$$\begin{array}{c|cccc|cccc} & e & m_x & m_y & c_z & \gamma & m_x\gamma & m_y\gamma & c_z\gamma \\ \hline \chi^{\pm}_g & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pm 2i & 0 \end{array}. \tag{15}$$

巻き付き数は，

$$W^{\alpha}_{2n-1} = \frac{n!}{(2\pi i)^n (2n)!} \int \frac{1}{|G_0|} \sum_{g\in\{\gamma, m_x\gamma, m_y\gamma, c_z\gamma\}} (\chi^{+}_g)^* \mathrm{tr}\,[(H^{-1}dH)^{2n-1}u_g] \tag{16}$$

$$= \frac{n!}{(2\pi i)^n (2n)!} \int \frac{1}{4}(2i)^* \mathrm{tr}\,[(H^{-1}dH)^{2n-1}u_{m_y\gamma}] \tag{17}$$

となる．空間1次元の模型例は

$$H(k) = \sin k\tau_x + \cos k\tau_y, \tag{18}$$

$$u_{m_x} = i\sigma_x, \quad u_{m_y} = i\sigma_y, \quad u_\gamma = \sigma_y\tau_z. \tag{19}$$

このとき，$u_{m_y\gamma}=i\tau_z$であるから，

$$W_1=\frac{1}{4\pi i}\oint\frac{-i}{2}\mathrm{tr}\left[(\sin k\tau_x+\cos k\tau_y)(\cos k\tau_x-\sin k\tau_y)(i\tau_z)\right]dk=-1 \tag{20}$$

となる．