チェイン複体，コチェイン複体，降下方程式

塩崎　謙

August 5, 2022

[2]のIV節の計算を追う．[1, 3]も参考にした．

1　チェイン複体，コチェイン複体

Λを$\mathbb{R}^D$における集積点を持たない離散集合とする．（有限集合でも良い？）$n \geq 0$に対して，$A = \{A_{p_0\cdots p_n}\}_{p_0,\dots,p_n\in\Lambda}$が$n$チェインであるとは，$A_{p_0\cdots p_n}$が$p_0,\dots,p_n$に対して完全反対称であり，かつ対角線$p_0 = p_1 = \cdots = p_n$から離れたときに指数関数的に減衰する場合を言う．$n$チェインの集合を$C_n(\Lambda)$と書く．境界作用素を以下で定める．

$$\partial : C_n(\Lambda) \to C_{n-1}(\Lambda), \quad (\partial A)_{p_1\cdots p_n} := \sum_{p_0\in\Lambda} A_{p_0\cdots p_n}. \tag{1}$$

$p_0 \in \Lambda$の和は，高々$O(1)$倍であるため，∂Aも指数関数的減衰の性質を保つ．$A_{p_0\cdots p_n}$の完全反対称性より，

$$(\partial^2 A)_{p_2\cdots p_n} = \sum_{p_1\in\Lambda} (\partial A)_{p_1\cdots p_n} = \sum_{p_0,p_1\in\Lambda} A_{p_0p_1\cdots p_n} = 0. \tag{2}$$

つまり，$\partial^2 = 0$であるので，$\bigoplus_{n\geq 0} C_n(\Lambda)$はチェイン複体．

$\alpha : \Lambda^{n+1} \to \mathbb{R}$が$n$コチェインであるとは，関数$\alpha(p_0,\dots,p_n)$が有界かつ$p_0,\dots,p_n$について完全反対称であり，さらに$C_n(\Lambda)$と$C^n(\Lambda)$のペアリング

$$\langle A, \alpha\rangle = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{p_0,\dots,p_n} A_{p_0\cdots p_n}\alpha(p_0,\dots,p_n) \tag{3}$$

が収束するように関数αに制限をつける．例えば$n = 1$のとき，形式的に

$$\langle A, \alpha\rangle = \frac{1}{2}\sum_{p,q} A_{pq}\alpha(p,q) \tag{4}$$

と書くと，対角線の近傍が寄与するから，

$$\langle A, \alpha\rangle \sim \sum_p \sum_\delta A_{p,p+\delta}\alpha(p,p+\delta) \tag{5}$$

と書くと，仮に$A_{p,p+\delta}\alpha(p,p+\delta)$が任意の$p$に対して$O(1)$であれば，発散する．ここでは，

- αの台とΛ^{n+1}の対角線集合の近傍との共通部分が有限集合である，

とする [1]．（cocontrolledと呼ばれる性質らしい．）

コバウンダリ作用素

$$\delta : C^n(\Lambda) \to C^{n+1}(\Lambda) \tag{6}$$

を，

$$\langle A, \delta\alpha\rangle := \langle \partial A, \alpha\rangle \tag{7}$$

で定める．右辺は

$$\frac{1}{(n+1)!}\sum_{p_1,\dots,p_{n+1}}(\partial A)_{p_1\cdots p_{n+1}}\alpha(p_1,\dots,p_{n+1}) = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{p_0,p_1,\dots,p_{n+1}}A_{p_0\cdots p_n}\alpha(p_1,\dots,p_{n+1}) \tag{8}$$

$$= (n+2)\frac{1}{(n+2)!}\sum_{p_0,p_1,\dots,p_{n+1}}A_{p_0\cdots p_n}\alpha(p_1,\dots,p_{n+1}) \tag{9}$$

より，

$$(\delta\alpha)(p_0,\dots,p_{n+1}) \sim (n+2)\alpha(p_1,\dots,p_{n+1}) \tag{10}$$

であるが，反対称化して，

$$(\delta\alpha)(p_0,\dots,p_{n+1}) = \sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j\alpha(p_1,\dots,p_{j-1},p_{j+1},\cdots p_{n+1}) \tag{11}$$

を得る．例えば，$0,1$コチェインのコバウンダリは

$$(\delta\alpha)(p_0,p_1) = \alpha(p_1)-\alpha(p_0), \tag{12}$$

$$(\delta\alpha)(p_0,p_1,p_2) = \alpha(p_1,p_2)-\alpha(p_0,p_2)+\alpha(p_0,p_1). \tag{13}$$

コチェイン間のカップ積

$$\cup : C^n(\Lambda)\times C^m(\Lambda)\to C^{n+m}(\Lambda) \tag{14}$$

は，表式

$$\alpha(p_0,\dots,p_n)\gamma(p_n,\dots,p_{n+m}) \tag{15}$$

を反対称化して，

$$(\alpha\cup\gamma)(p_0,\dots,p_{n+m}) = \frac{1}{(n+m+1)!}\sum_{\sigma\in S_{n+m+1}}(-1)^{\mathrm{sgn}\sigma}\alpha(p_{\sigma(0)},\dots,p_{\sigma(n)})\gamma(p_{\sigma(n)},\dots,p_{\sigma(n+m)}) \tag{16}$$

と定義する． $\mathrm{sgn}(\sigma\sigma') = \mathrm{sgn}\sigma\mathrm{sgn}\sigma'$であるので，反対称性が保たれることは明らか．例えば，0コチェインと1コチェインのカップ積は

$$(\alpha\cup\gamma)(p_0,p_1) = \frac{1}{2}(\alpha(p_0)\gamma(p_0,p_1)-\alpha(p_1)\gamma(p_1,p_0)) \tag{17}$$

1コチェインと1コチェインのカップ積は

$$(\alpha\cup\gamma)(p_0,p_1,p_2) = \frac{1}{3!}(\alpha(p_0,p_1)\gamma(p_1,p_2)+\alpha(p_1,p_2)\gamma(p_2,p_0)+\alpha(p_2,p_0)\gamma(p_0,p_1) \tag{18}$$

$$-\alpha(p_1,p_0)\gamma(p_0,p_2)-\alpha(p_2,p_1)\gamma(p_1,p_0)-\alpha(p_0,p_2)\gamma(p_2,p_1)). \tag{19}$$

また，$\alpha\cup\gamma$の和には

$$(-1)^{\frac{(n+m)(n+m+1)}{2}}\alpha(p_{n+m},\cdots,p_m)\gamma(p_m,\dots,p_0) \tag{20}$$

が含まれるが，

$$(-1)^{\frac{(n+m)(n+m+1)}{2}}\alpha(p_{n+m},\cdots,p_m)\gamma(p_m,\dots,p_0) \tag{21}$$

$$= (-1)^{\frac{(n+m)(n+m+1)}{2}}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}\gamma(p_0,\dots,p_m)\alpha(p_m,\cdots,p_{n+m}) \tag{22}$$

$$= (-1)^{nm}\gamma(p_0,\dots,p_m)\alpha(p_m,\cdots,p_{n+m}) \tag{23}$$

であるので，

$$\alpha \cup \gamma = (-1)^{nm} \gamma \cup \alpha \tag{24}$$

が成立．（$\alpha \cup \gamma \propto \gamma \cup \alpha$も示す必要あり．）

$$\delta(\alpha \cup \gamma) = \delta\alpha \cup \gamma + (-1)^n \alpha \cup \delta\gamma \tag{25}$$

が成立する．直接示しておくと，

$$(\delta(\alpha \cup \gamma))(p_0, \ldots, p_{n+m+1}) \tag{26}$$

$$= \sum_{j=0}^{n+m+1} (-1)^j (\alpha \cup \gamma)(p_0, \ldots, p_{j-1}, p_{j+1}, \ldots, p_{n+m+1}) \tag{27}$$

であるが，これは

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \alpha(p_0, \ldots, p_{j-1}, p_{j+1}, \ldots, p_{n+1}) \gamma(p_{n+1}, \ldots, p_{n+m+1}) \tag{28}$$

$$+ \alpha(p_0, \ldots, p_n) \sum_{j=n+1}^{n+m+1} (-1)^j \gamma(p_n, \ldots, p_{j-1}, p_{j+1}, \ldots, p_{n+m+1}) \tag{29}$$

$$= \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \alpha(p_0, \ldots, p_{j-1}, p_{j+1}, \ldots, p_{n+1}) \gamma(p_{n+1}, \ldots, p_{n+m+1}) - (-1)^{n+1} \alpha(p_0, \ldots, p_n) \gamma(p_{n+1}, \ldots, p_{n+m+1}) \tag{30}$$

$$+ \alpha(p_0, \ldots, p_n) \sum_{j=n}^{n+m+1} (-1)^j \gamma(p_n, \ldots, p_{j-1}, p_{j+1}, \ldots, p_{n+m+1}) - (-1)^n \alpha(p_0, \ldots, p_n) \gamma(p_{n+1}, \ldots, p_{n+m+1}) \tag{31}$$

$$= \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \alpha(p_0, \ldots, p_{j-1}, p_{j+1}, \ldots, p_{n+1}) \gamma(p_{n+1}, \ldots, p_{n+m+1}) \tag{32}$$

$$+ (-1)^n \alpha(p_0, \ldots, p_n) \sum_{j=n}^{n+m+1} (-1)^{j-n} \gamma(p_n, \ldots, p_{j-1}, p_{j+1}, \ldots, p_{n+m+1}) \tag{33}$$

$$= (\delta\alpha)(p_0, \ldots, p_{n+1}) \gamma(p_{n+1}, \ldots, p_{n+m+1}) + (-1)^n \alpha(p_0, \ldots, p_n)(\delta\gamma)(p_n, \ldots, p_{n+m+1}) \tag{34}$$

を反対称化することにより得られる．

通常通り，

$$B_n(\Lambda) = \mathrm{Im}\,[\partial : C_{n+1}(\Lambda) \to C_n(\Lambda)], \tag{35}$$

$$Z_n(\Lambda) = \mathrm{Ker}\,[\partial : C_n(\Lambda) \to C_{n-1}(\Lambda)], \tag{36}$$

$$H_n(\Lambda) = B_n(\Lambda)/Z_n(\Lambda), \tag{37}$$

$$B^n(\Lambda) = \mathrm{Im}\,[\delta : C^{n-1}(\Lambda) \to C^n(\Lambda)], \tag{38}$$

$$Z^n(\Lambda) = \mathrm{Ker}\,[\delta : C^n(\Lambda) \to C^{n+1}(\Lambda)], \tag{39}$$

$$H^n(\Lambda) = B^n(\Lambda)/Z^n(\Lambda) \tag{40}$$

と定める．ペアリングは

$$\langle\ ,\ \rangle : H_n(\Lambda) \times H^n(\Lambda) \to \mathbb{R} \tag{41}$$

を定める．また，

$$\delta((\alpha + \delta\beta) \cup (\gamma + \delta\epsilon)) = \delta(\alpha + \delta\beta) \cup (\gamma + \delta\epsilon) + (-1)^n (\alpha + \delta\beta) \cup \delta(\gamma + \delta\epsilon) \tag{42}$$

$$= \delta\alpha \cup (\gamma + \delta\epsilon) + (-1)^n (\alpha + \delta\beta) \cup \delta\gamma \tag{43}$$

$$= \delta(\alpha \cup \gamma) + \delta(\alpha \cup \delta\epsilon + (-1)^n \beta \cup \delta\gamma) \tag{44}$$

であるので，カップ積は

$$\cup : H^n(\Lambda) \times H^m(\Lambda) \to H^{n+m}(\Lambda) \tag{45}$$

としてwell-defined.

Λとして，集積点が存在しないことに加えて，$\mathbb{R}^D$の任意の点に対して，半径δ内にΛの点が存在するとき，

$$H^n(\Lambda) \cong H^n(\mathbb{R}^D) = \begin{cases} \mathbb{R} & (n = D), \\ 0 & (\text{else}), \end{cases} \tag{46}$$

が成立するらしい． $H^D(\Lambda)$は

$$\delta f_1 \cup \cdots \cup \delta f_D \tag{47}$$

で生成される．ここで，f_jは，

$$f_j(x_1, \ldots, x_D) = 1 \quad \text{for} \qquad x_j \gg 0, \tag{48}$$

$$f_j(x_1, \ldots, x_D) = 0 \quad \text{for} \qquad x_j \ll 0 \tag{49}$$

を満たす関数である．

$$(\delta f_j)(p, q) = f_j(q) - f_j(p) \tag{50}$$

に注意.

2 降下方程式

上ではコチェインは$\mathbb{R}$値としたが，多様体X上の$(n+2)$形式値nコチェイン

$$F^{(n+2)} = \{F^{(n+2)}_{p_0 \cdots p_n}\} \tag{51}$$

を考える． 2形式0コチェイン$F^{(2)}_p$から出発して，降下方程式

$$dF^{(n+1)} = \partial F^{(n+2)}, \quad n \geq 1, \tag{52}$$

によって$(n+2)$形式nコチェイン$F^{(n+2)}$を定義する． Λの足を書くと，降下方程式は

$$dF^{(n+1)}_{p_1 \cdots p_n} = \sum_{p_0 \in \Lambda} F^{(n+2)}_{p_0 \cdots p_n}. \tag{53}$$

$F^{(n+1)}$が与えられたとき，降下方程式の解はnサイクル

$$F^{(n+2)} \mapsto F^{(n+2)} + B^{(n+2)}, \quad \partial B^{(n+2)} = 0, \tag{54}$$

だけの不定性がある．

ペアリングは$(n+2)$形式を定める．

$$\langle F^{(n+2)}, \alpha \rangle \in \Omega^{(n+2)}(X). \tag{55}$$

外微分は降下方程式より，

$$d \langle F^{(n+2)}, \alpha \rangle = \langle dF^{(n+2)}, \alpha \rangle = \langle \partial F^{(n+3)}, \alpha \rangle = \langle F^{(n+3)}, \delta\alpha \rangle \tag{56}$$

となる．積分$\int_{C_n} \langle F^{(n+2)}, \alpha \rangle$がサイクル$C_n \in Z_n(X)$の選び方に依存しないための十分条件は，$\delta\alpha = 0$，つまり，$\alpha$が$n$コサイクル$\alpha \in Z^n(\Lambda)$なること．一方で$\alpha$がコバウンダリ$\alpha = \delta\beta$のときは，

$$\langle F^{(n+2)}, \delta\beta \rangle = \langle \partial F^{(n+2)}, \beta \rangle = \langle dF^{(n+1)}, \beta \rangle = d \langle F^{(n+1)}, \beta \rangle \tag{57}$$

であり，サイクル$C_n \in Z_n(X)$上の積分がゼロ．よって，$[\alpha] \in H^n(\Lambda)$のみサイクル$C_n \in Z_n(X)$上の積分値が非自明になる． $H^n(\Lambda)$は$n = D$次のみ非自明で，生成子は上でコメントした．よって積分値に意味のある閉形式は

$$\Omega^{(D+2)}(f_1, \ldots, f_n) = \langle F^{(D+2)}, \delta f_1 \cup \cdots \cup \delta f_D \rangle \tag{58}$$

のみ． gを有限の台を持つ関数として，$f_1 \mapsto f_1 + g$と変化すると， $\Omega^{(D+2)}(f_1, \ldots, f_D)$の変化は，

$$\Omega^{(D+2)}(g, f_2, \ldots, f_D) = \langle F^{(D+2)}, \delta g \cup \delta f_2 \cup \cdots \cup \delta f_D \rangle . \tag{59}$$

ここでgは有限の台をもつから，$g \cup \delta f_2 \cup \cdots \cup \delta f_D$は$D$コチェインであるので，

$$\begin{aligned}
\Omega^{(D+2)}(g, f_2, \ldots, f_D) &= \langle F^{(D+2)}, \delta(g \cup \delta f_2 \cup \cdots \cup \delta f_D) \rangle && (60)\\
&= \langle \partial F^{(D+2)}, g \cup \delta f_2 \cup \cdots \cup \delta f_D \rangle && (61)\\
&= \langle dF^{(D+1)}, g \cup \delta f_2 \cup \cdots \cup \delta f_D \rangle && (62)\\
&= d \langle F^{(D+1)}, g \cup \delta f_2 \cup \cdots \cup \delta f_D \rangle && (63)
\end{aligned}$$

となり，完全形式であるので，積分値は不変．

問題は$F^{(D+2)} \mapsto F^{(D+2)} + B^{(D+2)}$, $\partial B^{(D+2)} = 0$の不定性の，積分値への影響であるが，

$$\langle B^{(D+2)}, \delta f_1 \cup \cdots \cup \delta f_D \rangle \tag{64}$$

これは$(D+2)$形式値のペアリング$H^D(\Lambda) \times H_D(\Lambda) \to \Omega^{(D+2)}(X)$ に他ならないため，一般には消えず，閉形式でもない．例として，$D = 1$の場合は，

$$\langle B^{(3)}, \delta f \rangle = \frac{1}{2} \sum_{pq} B^{(3)}_{pq} (f(q) - f(p)). \tag{65}$$

$f(q) - f(p)$は cocontrolledであるが，$f(p), f(q)$は個別にはcocontrolledではない．

$$\sum_{pq} B^{(3)}_{pq} f(q) = \sum_q f(q) \sum_p B^{(3)}_{pq} = 0 \tag{66}$$

などと計算したいが，和の順番を入れ替えると，

$$\sum_q B^{(3)}_{pq} f(q) \tag{67}$$

は発散する．

[3]によると，

$$F^{(2)}_p = \frac{i}{2} \oint \frac{dz}{2\pi i} \mathrm{Tr}(GdHG^2dH_p) \tag{68}$$

から出発した場合に，

$$\partial B^{(n+2)} = 0 \tag{69}$$

は自明解

$$B^{(n+2)} = \partial C^{(n+1)} \tag{70}$$

のみを持つことがKapustinとSpodyneikoによって議論されている，と書かれている（[3]の[48]の引用）．これを認めると，降下方程式の解の不定性は

$$F^{(n+2)} + \partial C^{(n+2)} \tag{71}$$

となり，対応して，$F^{(n+3)}$を決める降下方程式は

$$d(F^{(n+2)} + \partial C^{(n+2)}) = \partial F^{(n+3)}, \tag{72}$$

つまり，

$$dF^{(n+2)} = \partial(F^{(n+3)} - dC^{(n+2)}) \tag{73}$$

となる．$d^2 = 0$であるので，不定性$\partial C^{(n+2)}$は$F^{(n+4)}$を決める降下方程式には影響がない．形式的に，$F^{(2)}$も$F^{(1)}$から降下方程式

$$dF^{(1)} = \partial F^{(2)} \tag{74}$$

によって決まるものと思うと，不定性

$$F_p^{(2)} \to F^{(2)} + \partial C^{(2)} \tag{75}$$

を仮定するのは自然．$n > 0$に対する$F^{(n+2)}$の不定性は

$$F^{(n+2)} \to F^{(n+2)} + \partial C^{(n+2)} + dC^{(n-1)} \tag{76}$$

によって与えられる[3].

References

[1] Anton Kapustin, Lev Spodyneiko *Thermal Hall conductance and a relative topological invariant of gapped two-dimensional systems*, arXiv:1905.06488.

[2] Anton Kapustin and Lev Spodyneiko, *Higher-dimensional generalizations of Berry curvature*, PHYSICAL REVIEW B 101, 235130 (2020).

[3] Xueda Wen, Marvin Qi, Agnès Beaudry, Juan Moreno, Markus J. Pflaum, Daniel Spiegel, Ashvin Vishwanath, Michael Hermele, *Flow of (higher) Berry curvature and bulk-boundary correspondence in parametrized quantum systems*, arXiv:2112.07748.