$\mathbb{Z}$トポロジカル不変量が量子化することの直接証明

塩崎　謙

February 5, 2024

- dとδの関係を追加する．

Chern数

$$ch = (\frac{i}{2\pi})^n \int_{M_{2n}} \mathrm{tr}\,[F^n] \tag{1}$$

が量子化することを直接示す．微小変化に対してchが変化しないことを示せば良い．被積分関数が微小変換に対して完全形式であることを示せば良い．

等価な表式がいくつかある．係数を別にして，

$$ch \sim \int_{M_{2n}\times\mathbb{R}} \mathrm{tr}\,[GdG^{-1}]^{2n+1}, \tag{2}$$

$$ch \sim \int_{M_{2n}} \mathrm{tr}\,[P(dP)^{2n}]. \tag{3}$$

$n=1$かつ，Pが1次元に限れば，

$$ch \sim \int_{M_2} \langle d\psi | d\psi \rangle\,. \tag{4}$$

1　$\mathrm{tr}\,[F^n]$

$$\delta \mathrm{tr}\,[F^n] = dn\mathrm{tr}\,[\delta A F^{n-1}]. \tag{5}$$

ここで，δAはM_{2n}上の大域的$(2n)$形式として良い：ゲージ場Aは各パッチで定義され，パッチ変換はゲージ変換

$$A^U = A^V + d\chi \quad \text{on} \ \ U\cap V, \tag{6}$$

で与えられる．微小変化$\delta A = A' - A$はトポロジカルセクターを変化させないから，パッチ変換χは不変として良い：

$$\delta\chi = 0. \tag{7}$$

すると，パッチの共通部分において，

$$\delta A^U = \delta A^V \quad \text{on} \ \ U\cap V, \tag{8}$$

が成立するから，ゲージ場の微小変化δAは大域的1形式として良い．

$$\delta A \in \Omega^{(1)}(M_{2n}). \tag{9}$$

よって，

$$n\mathrm{tr}\,[deltaAF^{n-1}] \in \Omega^{(2n-1)}(M_{2n}) \tag{10}$$

は大域的$(2n-1)$形式であり，よって，

$$\delta \mathrm{tr}\,[F^n] = dn\mathrm{tr}\,[\delta A F^{n-1}] \tag{11}$$

は完全形式である．

2 $\mathrm{tr}\,[GdG^{-1}]^{2n+1}$

$$G : M_{2n} \times \mathbb{R} \to GL_m(\mathbb{C}) \tag{12}$$

である．

$$\begin{align} &\frac{1}{(2n+1)}\delta\mathrm{tr}\,[GdG^{-1}]^{2n+1} \tag{13}\\ &= \mathrm{tr}\,[\delta(GdG^{-1})(GdG^{-1})^{2n}] \tag{14}\\ &= \mathrm{tr}\,[(\delta GdG^{-1} + Gd\delta G^{-1})(GdG^{-1})^{2n}] \tag{15}\\ &= \mathrm{tr}\,[(\delta GdG^{-1} - dG\delta G^{-1})(GdG^{-1})^{2n} - G\delta G^{-1}d(GdG^{-1})^{2n}] + d\mathrm{tr}\,[G\delta G^{-1}(GdG^{-1})^{2n}]. \tag{16} \end{align}$$

ここで，

$$d(GdG^{-1}) = dGdG^{-1} = -GdG^{-1}GdG^{-1} \tag{17}$$

に注意すると，

$$d(GdG^{-1})^{2n} = 0. \tag{18}$$

また，

$$\mathrm{tr}\,[(\delta GdG^{-1} - dG\delta G^{-1})(GdG^{-1})^{2n}] = \mathrm{tr}\,[(-G\delta G^{-1}GdG^{-1} + GdG^{-1}G\delta G^{-1})(GdG^{-1})^{2n}] = 0. \tag{19}$$

よって，

$$\delta\mathrm{tr}\,[GdG^{-1}]^{2n+1} = d(2n+1)\mathrm{tr}\,[G\delta G^{-1}(GdG^{-1})^{2n}]. \tag{20}$$

3 $\mathrm{tr}\,[P(dP)^{2n}]$

まず，閉形式であることは，

$$d\mathrm{tr}\,[P(dP)^{2n}] = \mathrm{tr}\,[dP(dP)^{2n}] \tag{21}$$

であるが，$P = P^2$より$dP = dPP + PdP, PdPP = 0$に注意して，

$$= \mathrm{tr}\,[(dPP + PdP)(dP)^{2n}] = 2\mathrm{tr}\,[P(dP)^{2n+1}] = 2\mathrm{tr}\,[P^2(dP)^{2n+1}] = 2\mathrm{tr}\,[P(dP)^{2n+1}P] = 2\mathrm{tr}\,[P(dP)P(dP)^{2n}] = 0. \tag{22}$$

4 $\langle d\psi | d\psi \rangle$

パッチ変換を

$$|\psi^U\rangle = |\psi^V\rangle e^{i\theta} \quad \text{on} \;\; U \cap V \tag{23}$$

とするとBerry接続の変換性は

$$\langle \psi^U | d\psi^U \rangle = \langle \psi^V | d\psi^V \rangle + id\theta. \tag{24}$$

フレーム$|\psi\rangle$の微小変化において，セクターを変化させないから，パッチ変換は不変にとって良い．

$$\delta\theta = 0. \tag{25}$$

すると，Berry接続の微小変化は

$$\delta \langle \psi^U | d\psi^U \rangle = \delta \langle \psi^V | d\psi^V \rangle \quad \text{on} \;\; U \cap V. \tag{26}$$

よって，Berry接続の微小変化$\delta \langle \psi | d\psi \rangle$は大域的1形式

$$\delta \langle \psi | d\psi \rangle \in \Omega^{(1)}(M_2). \tag{27}$$

よって，

$$\delta \langle d\psi | d\psi \rangle = d\delta \langle \psi | d\psi \rangle \tag{28}$$

は完全形式．