

# 非エルミート系における対称性指標

塩崎 謙 京大基研  
小野 清志郎 東大物工

2020年9月11日  
日本物理学会@Zoom

KS and S. Ono, in preparation.

## まずは簡単な例：巻き付き数とある種の反転対称性

- ▶  $H(k)$ :  $k \in [0, 2\pi]$ 上で定義された, 可逆な ( $\det H(k) \neq 0$ ) 行列とする. (エルミート性は課さない)
- ▶ 整数に値を取る, 巻き付き数が定義できる. (ex:  $H(k) = e^{ik}$ .)

$$W = \frac{1}{2\pi i} \oint d \log \det H(k) \in \mathbb{Z}.$$

- ▶ 次の“反転対称性”を課す.

$$H(k)^\dagger = H(-k).$$

- ▶ 特に対称点  $\Gamma = 0, \pi$ においては,

$$\text{sign det } H(\Gamma) = \pm 1, \quad \Gamma \in \{0, \pi\}.$$

- ▶ これから, 巻き付き数の偶奇について次が成立.

$$(-1)^W = \exp \frac{1}{2} \left( \int_0^\pi + \int_{-\pi}^0 \right) d \log \det H(k) = \exp \int_0^\pi d \arg \det H(k) = \frac{\text{sgn det } H(\pi)}{\text{sgn det } H(0)}.$$

- ▶ 最右辺が非自明 ( $\text{sgn det } H(\pi)/\text{sgn det } H(0) = -1$ ) であれば, 巻き付き数の計算を実行することなく, 巻き付き数が非ゼロであることがわかる.

## 非エルミート系のトポロジカル相

- ▶ 非エルミート表皮効果 Yao-Wang

PBCにおいて1次元巻き付き数 $W$ が非ゼロ  $\Rightarrow$  OBCにおいて非エルミート表皮効果 Zhang-Yang-Fang, Okuma-Kawabata-KS-Sato

- ▶ 例外点の存在

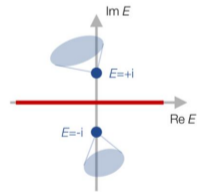
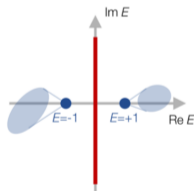
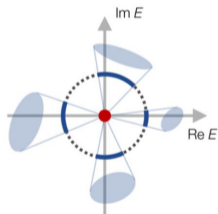
一般の行列は、対角化不可能である場合がある。 “PT対称性の破れ”

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

例外点はバルクにおいては対で存在する。(Nielsen-二宮)

$\Rightarrow$  ある種の非自明相は、端において奇数個の例外点。例えば, Denner-Skurativska-Schindler-Fischer-Thomale-Bzdušek-Neupert

- ▶ P: 点ギャップ  $\det H \neq 0$ .
- ▶  $L_r$ : 実線ギャップ  $\operatorname{Re} E \neq 0$ .
- ▶  $L_i$ : 純虚線ギャップ  $\operatorname{Im} E \neq 0$ .



## セットアップ (2) 空間群“対称性”

- ▶ 本研究では、以下の対称性を考えた。
  - ▶  $G$ , 空間群.
  - ▶  $c: G/T \rightarrow \{\pm 1\}$ , 点群の符号表現.
  - ▶  $z_{g,h}, g, h \in G$ , スピンレス/スピフル電子系における乗数系. (電子系を想定しているわけではないが, 計算例として.)
- ▶ 対称性と乗数系

$$A_g H_k B_g^\dagger = \begin{cases} H_{gk} & (c_g = 1), \\ -H_{gk}^\dagger & (c_g = -1), \end{cases}$$

$$z_{g,h} A_{gh} = \begin{cases} A_g A_h & (c_h = 1) \\ B_g A_h & (c_h = -1) \end{cases}, \quad z_{g,h} B_{gh} = \begin{cases} B_g B_h & (c_h = 1) \\ A_g B_h & (c_h = -1) \end{cases}.$$

ここで,  $A_g, B_g$  は独立なユニタリ行列.

## セットアップ (2) 空間群“対称性”

- ▶ 普通の意味での対称性ではない.

$$\tilde{H}_k = \begin{pmatrix} & H_k \\ H_k^\dagger & \end{pmatrix}, \quad \tilde{U}_g = \begin{cases} \begin{pmatrix} A_g & \\ & B_g \end{pmatrix} & (c_g = 1), \\ \begin{pmatrix} & B_g \\ A_g & \end{pmatrix} & (c_g = -1), \end{cases}$$

と定義すると、エルミートなハミルトニアン $\tilde{H}_k$ はクラスAIIIの対称性を満たす.

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma} \tilde{H}_k \tilde{\Gamma}^\dagger &= -H_k, \\ \tilde{U}_g \tilde{H}_k \tilde{U}_g^\dagger &= H_{gk}, \\ \tilde{U}_g \tilde{\Gamma} &= c_g \tilde{\Gamma} \tilde{U}_g. \end{aligned}$$

- ▶ 問題が、クラスAIIIに帰着.

## 非エルミート系における自明相, 及び, 対称性指標の定義

- ▶ 対称性指標[Po-Vishwanath-Watanabe]を定義するため, 非エルミート系における“自明相”を定義したい.

自明相 = 定数ハミルトニアンに点ギャップを閉じることなく連続的に繋がる相

と定義するのが良いだろう.

- ▶ ハミルトニアンはWyckoff位置における自由度の上に定義されるため, 自明相はWyckoff位置から生成される.

⇒ Po-Vishwanath-Watanabeの計算手法をクラスAIIIに適用すれば良い.

- ▶ 対称性指標の定義は, Po-Vishwanath-Watanabeと同様のものを用いる.
  - ▶  $\{BS\}$ を, 対称点における $\mathbb{Z}$ トポロジカル不変量の集合であり, 両立関係を満たすものによって生成される格子とする.
  - ▶  $\{AI\}$ を, 原子絶縁体によって生成される,  $\{BS\}$ の部分格子とする.
  - ▶ 対称性指標を

$$X := \frac{\{BS\}}{\{AI\}}$$

と定義する.

- ▶ 空間 3 次元, 乗数系は自明な場合.

$G$	Sign rep.	$X$
$P\bar{1}$	$A_u$	$\mathbb{Z}_2^{\times 3} \times \mathbb{Z}_4^{\times 3} \times \mathbb{Z}_8$
$P2$	$B$	$\mathbb{Z}_2^{\times 2} \times \mathbb{Z}_4$
$C2$	$B$	$\mathbb{Z}_2$
$Pm$	$A''$	$\mathbb{Z}_2$
$P2/m$	$A_u$	$\mathbb{Z}_2^{\times 5} \times \mathbb{Z}_4$
$P2/m$	$B_g$	$\mathbb{Z}_2$
$P2/m$	$B_u$	$\mathbb{Z}_2^{\times 6} \times \mathbb{Z}_4^{\times 3}$
$P2_1/m$	$A_u$	$\mathbb{Z}_2^{\times 3} \times \mathbb{Z}_4$
$P2_1/m$	$B_u$	$\mathbb{Z}_2^{\times 2} \times \mathbb{Z}_4$
$\vdots$		
$Ia\bar{3}d$	$A_{2u}$	$\mathbb{Z}_2^{\times 2}$



- ▶ 空間2次元, 層群 (layer group), 乗数系は自明な場合.

$G$	Sign rep.	$X$
$p\bar{1}$	$A_u$	$\mathbb{Z}_2^{\times 2} \times \mathbb{Z}_4$
$p112$	$B$	$\mathbb{Z}_2^{\times 2} \times \mathbb{Z}_4$
$p112/m$	$A_u$	$\mathbb{Z}_2$
$P2/m$	$B_g$	$\mathbb{Z}_2$
$P2/m$	$B_u$	$\mathbb{Z}_2^{\times 4} \times \mathbb{Z}_4^{\times 2}$
$\vdots$		
$p4$	$B$	$\mathbb{Z}_2^{\times 2}$
$\vdots$		
$p6/mmm$	$B_{1u}$	$\mathbb{Z}_2^{\times 2}$

例：空間2次元,  $p4$ ,  $B$ 表現  $\Rightarrow X = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

- ▶ 対称性:

$$AH(k_x, k_y) = H(-k_y, k_x)^\dagger B, \quad (AB)^2 = 1. \quad (1)$$

- ▶ 対称点  $(k_x, k_y) = (0, 0), (\pi, \pi)$  において, 以下のようにして  $\mathbb{Z}$  不変量が定義できる.  
まず, 対称点において, 行列  $AB$  と  $AH(\mathbf{k})$  が可換であることに注意する.

$$[AB, AH(\mathbf{k})] = 0, \quad \mathbf{k} = (0, 0), (\pi, \pi).$$

$(AB)^2 = 1$  より,

- ▶  $(AB) = 1$  のセクターにおいては,  $B = A^\dagger$  より,  $AH(\mathbf{k})$  がエルミート.
- ▶  $(AB) = -1$  のセクターにおいては,  $B = -A^\dagger$  より,  $iAH(\mathbf{k})$  がエルミート.
- ▶  $N[H]$  をエルミート行列  $H$  の負の固有値の数, と定義する.
- ▶  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  の対称性指標の表式

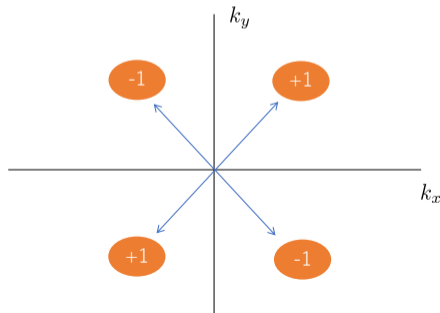
$$z_1 := N[AH(\pi, \pi)|_{AB=1}] + N[iAH(\pi, \pi)|_{AB=-1}] - N[AH(0, 0)|_{AB=1}] - N[iAH(0, 0)|_{AB=-1}] \pmod{2},$$

$$z_2 := N[AH(\pi, \pi)|_{AB=1}] - N[AH(0, 0)|_{AB=1}] \pmod{2}.$$

## 例：空間2次元，文様群 $p4$ ， $B$ 表現 $\Rightarrow X = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (つづき)

- ▶ 対称性指標 $z_1$ は，一般点における1次元巻き付き数を有する $\det H(\mathbf{k}) = 0$ なる点の存在を検出する。
- ▶ 実際，以下の $\mathbf{k} = (0, 0)$ 近傍のハミルトニアンは， $\mu$ が正から負に変化することにより，対称性指標の値を変化させると同時に， $\det H(\mathbf{k}) = 0$ なる点を放出する。

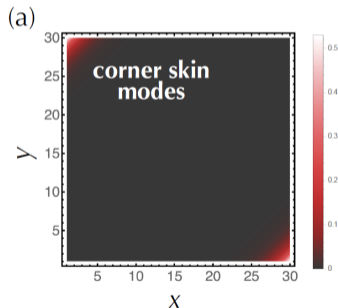
$$H(k_x, k_y) = k^2 - \mu + \lambda(k_x^2 - k_y^2), \quad A = B = 1.$$



## 例：空間2次元, $p4$ , $B$ 表現 $\Rightarrow X = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (つづき)

- ▶  $z_1 = 0$ の仮定のもと, もう一つの対称性指標 $z_2$ は, 対称性指標の定義より, **定数ハミルトニアンに連続変形不可能なハミルトニアン**を検出する.
- ▶ ではどのような相を検出するか?
- ▶ 例1. 2次の非エルミート表皮効果相. Okugawa-Takahashi-Yokomizo, Kawabata-KS-Sato

$$H(\mathbf{k}) = (t + \lambda_1 \cos k_x) + i\{(t + \lambda_1 \cos k_y)\sigma_y + \lambda_2 \sin k_x \sigma_z + \lambda_2 \sin k_y \sigma_x\}.$$



(図はKawabata-KS-Satoより)

- ▶ 例2. 単なる (エルミートな) Chern絶縁体

$$H(\mathbf{k}) = \sin k_x \sigma_x + \sin k_y \sigma_y + (\cos k_x + \cos k_y + m) \sigma_z, \quad A = B = \begin{pmatrix} 1 & \\ & i \end{pmatrix}.$$

## WZ項との関係 (時間が余れば)

- ▶ 一般に、点ギャップのある2次元の非エルミート行列に対して、 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 値に値を取るWZ項が定義される。
- ▶  $\tilde{H}(k_x, k_y, t)$ を、 $\tilde{H}(k_x, k_y, t=0) = H(k_x, k_y)$ ,  $\tilde{H}(k_x, k_y, t=1) = \text{const.}$ を満たす拡張とする。一般論より、 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に値を取るWZ項が定義できる。

$$WZ[H] = \frac{1}{24\pi^2} \int_{T^2 \times [0,1]} \text{tr} [\tilde{H}^{-1} d\tilde{H}]^3 \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

- ▶ 4回回転対称性(1)は、WZ項を $\mathbb{Z}_2$ 値に量子化する。Kawabata-KS-Sato

$$WZ[H] \in \{0, \frac{1}{2}\}.$$

- ▶ 例1, 例2の模型はいずれも $WZ[H] = \frac{1}{2}$ を取る。よって、

$$WZ[H] = 2z_2$$

が成立する。

- ▶ 非エルミート相における対称性指標を定式化を試み、空間群、層群に対する対称性指標を計算した。
- ▶ 今回注目した対称性は以下。

$$A_g H_k B_g^\dagger = \begin{cases} H_{gk} & (c_g = 1), \\ -H_{gk}^\dagger & (c_g = -1), \end{cases}$$

- ▶ クラスAIIIに空間群対称性が存在する場合と等価。
- ▶ 非エルミート表皮効果相, Chern絶縁体のような端状態がある相, あるいはバルクの例外点 (あるいは, 1次元巻き付き数が非ゼロの点) を検出していると思われる。