ノート：巻き付き数（書きかけ）

塩崎　謙

January 14, 2024

Abstract

写像

$$q : M_{2n+1} \to U(n) \tag{1}$$

に対して，$(2n+1)$次元の巻き付き数は

$$\begin{aligned} W_{2n+1}[q] &= \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!}(\frac{i}{2\pi})^{n+1} \int_{M_{2n+1}} \mathrm{tr}\,[q^\dagger dq]^{2n+1} \quad (2) \\ &= \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!}(\frac{i}{2\pi})^{n+1} \int_{M_{2n+1}} \mathrm{tr}\,[-d(q^\dagger dq)(q^\dagger dq)^{2n-1}] \quad (3) \end{aligned}$$

で定義される．$q^\dagger dq = -dq^\dagger q$より，

$$W_{2n+1}[q^\dagger] = -W_{2n+1}[q] \tag{4}$$

に注意.

1　加法性

マップ

$$U, V : M_{2n+1} \to U(n) \tag{5}$$

に対して，

$$q = UV^\dagger \tag{6}$$

を考える．$q^\dagger dq = V(U^\dagger dU + V^\dagger dV)V$に注意すると，

$$\mathrm{tr}\,[q^\dagger dq]^{2n+1} = \mathrm{tr}\,[X - Y]^{2n+1} \tag{7}$$

である．ここで，

$$X = U^\dagger dU, \quad Y = V^\dagger dV \tag{8}$$

とおいた.

$$\begin{aligned} &X^2 = -dX, \quad Y^2 = -dY, && (9) \\ &XdX = dXX, \quad YdY = dYY, && (10) \\ &dX^2 = 0, \quad dY^2 = 0, && (11) \end{aligned}$$

等が成立.

これから，直ちに$2n+1=1$について

$$W_1[UV^\dagger] = W_1[U] - W_1[V] \tag{12}$$

を得る．

$2n+1=3$については，

$$\mathrm{tr}\,[(X-Y)^3] = \mathrm{tr}\,[X^3 - Y^3 + 3d(XY)] \tag{13}$$

より，

$$W_3[UV^\dagger] = W_3[U] - W_3[V] \tag{14}$$

も従う．１点と同境な２次元空間M_2に対して$q: M_2 \to U(n)$の拡張を$\tilde{q}: X_3 \to U(n)$と書いてWZW項を

$$WZW_2[q] = \frac{1}{24\pi^2}\int_{X_3} \mathrm{tr}\,[\tilde{q}^\dagger d\tilde{q}]^3 \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \tag{15}$$

と書くと，Polyakov=Wiegmann公式

$$WZW_2[UV^\dagger] = WZW_2[U] - WZW_2[V] + \frac{1}{8\pi^2}\int_{M_2} \mathrm{tr}\,[U^\dagger dUV^\dagger dV] \tag{16}$$

を得る． M_2が１点と同境でない場合への一般化については注意して取り扱う必要がある．例えば，[1]に関連することが書かれているので，確認する．

$2n+1=5$のときは，

$$\mathrm{tr}\,[(X-Y)^5] = \mathrm{tr}\,[X^5 - Y^5 - 5X^4Y + 5X^3Y^2 + 5X^2YXY + 5XY^4 - 5X^2Y^3 - 5XYXY^2] \tag{17}$$

であるが，

$$d(XY^3) = dXY^3 - XdYY^2 = -X^2Y^3 + XY^4, \tag{18}$$
$$d(X^3Y) = dXX^2Y - X^3dY = -X^4Y + X^3Y^2, \tag{19}$$
$$\begin{aligned} d(XYXY) &= dXYXY - XdYXY + XYdXY - XYXdY \\ &= -X^2YXY + XY^2XY - XYX^2Y + XYXY^2 \sim_{\mathrm{tr}} = -2X^2YXY + 2XYXY^2 \end{aligned} \tag{20}$$

より，

$$\mathrm{tr}\,[(X-Y)^5] = \mathrm{tr}\,[X^5] - \mathrm{tr}\,[Y^5] + 5d\mathrm{tr}\,[X^3Y + XY^3 - \frac{1}{2}XYXY] \tag{21}$$

を得る．これから

$$W_5[UV^\dagger] = W_5[U] - W_5[V], \tag{22}$$

及び，

$$\begin{aligned} WZW_4[UV^\dagger] &= WZW_4[U] - WZW_4[V] \\ &\quad + \frac{(-1)^2 2!}{(2n)!}(\frac{i}{2\pi})^3 \int_{M_4} \mathrm{tr}\,[(U^\dagger dU)^3 V^\dagger dV + U^\dagger dU(V^\dagger dV)^3 - \frac{1}{2}U^\dagger dUV^\dagger dVU^\dagger dUV^\dagger dV] \end{aligned} \tag{23}$$

を得る．

2　$q \in O(n)$のとき

$q: M_3 \to O(n)$とする．以下を示したい：

$$W_3[q] \in 2\mathbb{Z}. \tag{24}$$

References

[1] Domenico Monaco, Clément Tauber, "Gauge-theoretic invariants for topological insulators: A bridge between Berry, Wess-Zumino, and Fu-Kane-Mele", arXiv:1611.05691.