$\mathbb{C}P^1$模型のトポロジカル作用 v2

塩崎　謙

February 26, 2021

1　有効作用

$\Omega_3^{\mathrm{spin}}(S^2)=\mathbb{Z}_2$より，時空3次元でスピンボルディズム不変な作用を持つ．Hopf項で与えられることが知られている．

$$\exp\frac{i}{4\pi}\int_M \text{``}ada'' \tag{1}$$

ここで，$U(1)$場aは配位$M\to S^2,(t,x,y)\mapsto \boldsymbol{n}(t,x,y)$に対して，$z\in\mathbb{C}^2,|z|=1$として，

$$a=-iz^\dagger dz,\quad z^\dagger\boldsymbol{\sigma}z=\boldsymbol{n}, \tag{2}$$

で定義される．ゲージ変換$z\mapsto ze^{i\alpha}$に対して$\boldsymbol{n}$は不変であることに注意．ゲージ不変なdaは直接$\boldsymbol{n}$を用いて書くことができるはずである．これを見るために，

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}=z^\dagger\boldsymbol{\sigma}z\cdot\boldsymbol{\sigma}=z_a^\dagger\sigma^i_{ab}z_b\sigma^i_{cd}=z_a^\dagger z_b(2\delta_{ad}\delta_{bc}-\delta_{ab}\delta_{cd})=2z_cz_d^\dagger-\delta_{cd}=2zz^\dagger-1. \tag{3}$$

に注意する．$P=zz^\dagger=\frac{1+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2}$を射影行列として，

$$\mathrm{tr}\,[P(dP)^2]=\mathrm{tr}\,[zz^\dagger d(zz^\dagger)d(zz^\dagger)]=dz^\dagger dz=ida, \tag{4}$$

$$\mathrm{tr}\,[P(dP)^2]=\frac{1}{8}\mathrm{tr}\,[(1+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})d\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}d\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}]=\frac{i}{4}\epsilon_{ijk}n_idn_jdn_k \tag{5}$$

に注意すると，

$$\frac{1}{2\pi}da=\frac{1}{8\pi}\epsilon_{ijk}n_idn_jdn_k \tag{6}$$

を得る．これから，スカーミオン線がaのモノポール線に対応することがわかる．スカーミオンの近傍でzを大域的に取ることができないことにも注意．

一般にはaは大域的に定義されていないので（例えばスカーミオンがひとつだけ存在する場合），上記の有効作用は4次元多様体$X,\partial X=M$を導入する必要がある．このとき，$\boldsymbol{n}:M\to S^2$は$\Omega_3^{\mathrm{spin}}(S^2)=\mathbb{Z}_2$より，一般にはスピン多様体$X$上に拡張することができない．しかし，$\Omega_3^{\mathrm{spin}}(BU(1))=0$, あるいは成分数をひとつ増やすだけ$\Omega_3^{\mathrm{spin}}(\mathbb{C}P^2)=0$より，任意の$U(1)$場とするとスピン多様体$X$上に拡張することができる．つまり，以下のような$\tilde{a}$が存在する．

$$\tilde{a}:X\to BU(1),\quad \tilde{a}|_M=a. \tag{7}$$

同じことだが，以下のような$\tilde{z}$が存在する．

$$\tilde{z}: X \to \mathbb{C}^\infty, \quad \tilde{z}^\dagger \tilde{z} = 1, \quad \tilde{z}|_M = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{8}$$

この拡張をひとつ取り，

$$\exp \frac{i}{4\pi} \int_M ada := \exp \frac{i}{4\pi} \int_X \tilde{f}^2 \tag{9}$$

と定義する．スピンChern-Simonsの一般論より，Xが閉じたスピン多様体のとき，$U(1)$場$\tilde{a}$に対して

$$\frac{i}{4\pi} \int_X \tilde{f}^2 \in 2\pi i \mathbb{Z} \tag{10}$$

より，Xへの拡張に依存しないことは保証されている．

さて上のように$\mathbb{C}P^1$模型の作用を定義したとき，スピンボルディズム不変量であることは以下のようにして示される．$(M_{12}, a_{12}) : (M_1, a_1) \sim (M_2, a_2)$を$\mathbb{C}P^1$場のスピンボルディズムとする．このとき$X$を$M_1$のbounding manifoldとすると，$M_2$のbounding manifoldは$X \cup M_{12}$と取ることができる．よって定義より，

$$\frac{i}{4\pi} \int_{M_2} \text{“}ada\text{''} = \frac{i}{4\pi} \int_{X \cup M_{12}} f^2 \tag{11}$$

であるが，$\mathbb{C}P^1$場の性質としてM_{12}上で$f^2 = (da_{12})^2 = 0$であることから，

$$\frac{i}{4\pi} \int_{M_2} \text{“}ada\text{''} = \frac{i}{4\pi} \int_X f^2 \tag{12}$$

となり，これはM_1上のCS有効作用に他ならない．

1.1 計算例

$S^2 \times S^1$上の$\mathbb{C}P^1$模型において，スカーミオンを2π回転する配位は以下で与えられる．

$$z(\theta, \phi, \alpha) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\alpha} e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{13}$$

(θ, ϕ)はS^2の座標，αはS^1の座標．$\Omega_3^{SO}(S^2) = 0$より，上記配位を境界として持つ４次元多様体上のS^2模型が存在するはずであるが，見つけられない．[1]

以下のように$\mathbb{C}P^2$模型に埋め込めば，$S^1 = \partial D^2$とする4次元多様体が存在する．[1]

$$\tilde{z}(\theta, \phi, \alpha, \rho) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \rho e^{i\alpha} & \sqrt{1-\rho^2} \\ & -\sqrt{1-\rho^2} & \rho e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \rho \in [0,1]. \tag{14}$$

これは，$1,2$成分のスカーミオンの2π回転が$1,3$成分のスカーミオンの0回転がbordantであることを意味する．

$$\tilde{z}(\theta, \phi, \alpha, \rho = 0) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ 0 \\ -e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

[1] $\Omega_3^{\mathrm{spin}}(S^2) = \mathbb{Z}_2$と，以下で見るように有効作用の値が非自明な値$(-1)$を出すことと合わせると，スピン多様体の範囲内ではnull bordantではないので，非スピン多様体を導入する必要がある．

$\frac{i}{4\pi}\int$ "ada"を計算する．

$$\tilde{z} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \rho e^{i(\phi+\alpha)}\sin\frac{\theta}{2} \\ -\sqrt{1-\rho^2}e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{16}$$

$\tilde{a}^* = \tilde{a}$に注意する．

$$\tilde{a} = -i\tilde{z}^\dagger d\tilde{z} = \rho^2 d(\phi+\alpha)\sin^2\frac{\theta}{2} + (1-\rho^2)d\phi\sin^2\frac{\theta}{2} = d\phi\sin^2\frac{\theta}{2} + \rho^2 d\alpha\sin^2\frac{\theta}{2}, \tag{17}$$

$$\tilde{f} = d\sin^2\frac{\theta}{2}d\phi + d\rho^2 d\alpha\sin^2\frac{\theta}{2} + \rho^2 d\sin^2\frac{\theta}{2}d\alpha, \tag{18}$$

$$\tilde{f}^2 = 2\sin^2\frac{\theta}{2}d\rho^2 d\alpha d\sin^2\frac{\theta}{2}d\phi. \tag{19}$$

これから，

$$\frac{i}{4\pi}\int_{S^2\times D^2}\tilde{f}^2 = \frac{i}{4\pi}\int_{S^2\times D^2} 2\sin^2\frac{\theta}{2}d\sin^2\frac{\theta}{2}d\phi d\rho^2 d\alpha = i\pi \tag{20}$$

を得る．

2　メモ：flag $U(3)/U(1)^3$の計算例

上記の計算の応用例として，flag $U(3)/U(1)^3$において，1番目の$U(1)$にのみスカーミオンを入れて2π回転する3次元配位に対して，$a_1da_1, a_2da_2, a_1da_2$などの積分を計算する．以下では$\det(z_1,z_2,z_3)=1$となるように配位を選ぶ．

$$z_1 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z_3 = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

z_1, z_3にスカーミオンが存在し，それぞれ2π回転する． $\mathbb{C}P^1$模型とは異なり，flag の範囲内で0回転にボルダントである．実際，$S^2\times D^2$への以下の拡張を取ることができる．

$$\tilde{z}_i = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \rho e^{i\alpha} & \sqrt{1-\rho^2} \\ & -\sqrt{1-\rho^2} & \rho e^{-i\alpha} \end{pmatrix} z_i, \tag{22}$$

$$\tilde{z}_1 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \rho e^{i(\phi+\alpha)}\sin\frac{\theta}{2} \\ -\sqrt{1-\rho^2}e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{z}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{1-\rho^2} \\ \rho e^{-i\alpha} \end{pmatrix}, \quad \tilde{z}_3 = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \\ \rho e^{i\alpha}\cos\frac{\theta}{2} \\ -\sqrt{1-\rho^2}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

$$\tilde{a}_i = -i\tilde{z}_i^\dagger d\tilde{z}_i, \tag{24}$$

$\rho=0$でα依存性が消える．

$$\tilde{z}_1|_{\rho=0} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ 0 \\ -e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{z}_2|_{\rho=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{z}_3|_{\rho=0} = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \\ 0 \\ -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \tag{25}$$

ゲージ場$U(1)$場$\tilde{a}_i = -i\tilde{z}_i^\dagger d\tilde{z}_i$などを計算しよう．

$$\tilde{a}_1 = \sin^2\frac{\theta}{2}d\phi + \rho^2\sin^2\frac{\theta}{2}d\alpha, \tag{26}$$

$$\tilde{a}_2 = -\rho^2 d\alpha, \tag{27}$$

$$\tilde{a}_3 = -\sin^2\frac{\theta}{2}d\phi + \rho^2\cos^2\frac{\theta}{2}d\alpha, \tag{28}$$

$\det(\tilde{z}_1,\tilde{z}_2,\tilde{z}_3)=1$より，$\tilde{a}_1+\tilde{a}_2+\tilde{a}_3=0$に注意．

$$\tilde{f}_1 = d\sin^2\frac{\theta}{2}d\phi+\rho^2 d\sin^2\frac{\theta}{2}d\alpha+\sin^2\frac{\theta}{2}d\rho^2 d\alpha, \tag{29}$$

$$\tilde{f}_2 = -d\rho^2 d\alpha, \tag{30}$$

$$\tilde{f}_3 = -d\sin^2\frac{\theta}{2}d\phi+\rho^2 d\cos^2\frac{\theta}{2}d\alpha+\cos^2\frac{\theta}{2}d\rho^2 d\alpha, \tag{31}$$

これから，

$$\frac{i}{4\pi}\int_{S^2\times D^2}\tilde{f}_1^2 = i\pi, \tag{32}$$

$$\frac{i}{4\pi}\int_{S^2\times D^2}\tilde{f}_2^2 = 0, \tag{33}$$

$$\frac{i}{4\pi}\int_{S^2\times D^2}\tilde{f}_3^2 = \frac{i}{4\pi}\int_{S^2\times D^2}-2\cos^2\frac{\theta}{2}d\sin^2\frac{\theta}{2}d\phi d\rho^2 d\alpha = -i\pi, \tag{34}$$

$$\frac{i}{4\pi}\int_{S^2\times D^2}\tilde{f}_1\tilde{f}_2 = \frac{i}{4\pi}\int_{S^2\times D^2}-d\sin^2\frac{\theta}{2}d\phi d\rho^2 d\alpha = -i\pi \tag{35}$$

などを得る． $\mathrm{Re}\,[a_{12}a_{23}a_{31}]$を計算する．ゲージ不変なので，$S^2\times S^1$で計算すれば十分． $a_{12}=-iz_1^\dagger dz_2=0$より，$\mathrm{Re}\,[a_{12}a_{23}a_{31}]=0$. 特に，

$$\frac{i}{4\pi}\int_{S^2\times D^2}(\tilde{f}_1^2+\tilde{f}_2^2+\tilde{f}_1\tilde{f}_2-\mathrm{Re}\,[a_{12}a_{23}a_{31}])=0. \tag{36}$$

さて，上の計算は$\Omega_3^{\mathrm{spin}}(U(3)/U(1)^3)=0$と矛盾しない． $\mathbb{C}P^1$との類推により，flagにおける関係式

$$f_1^2+f_2^2+f_1\tilde{f}_2-\mathrm{Re}\,[a_{12}a_{23}a_{31}]=0 \tag{37}$$

は$\mathbb{Z}_2$量子化される有効作用

$$\exp\frac{i}{4\pi}\int_X(\tilde{f}_1^2+\tilde{f}_2^2+\tilde{f}_1\tilde{f}_2-\mathrm{Re}\,[a_{12}a_{23}a_{31}])\in\{\pm1\} \tag{38}$$

の存在を示唆する．ここで$\tilde{a}_1,\tilde{a}_2$はflagではなく，独立な$U(1)$場への拡張である．しかし，$\tilde{a}_1,\tilde{a}_2$を独立な$U(1)$場とすると，Xがスピンであっても，

$$\frac{i}{4\pi}\int_X\tilde{f}_1\tilde{f}_2\in\pi i\mathbb{Z} \tag{39}$$

より，ill-defined.

References

[1] E. Witten, *Current algebra, baryons, and quark confinement*, Nuclear Physics B **223**(2), 433 (1983).