Lieb-Schultz-Mattis 定理の拡張

物性論におけるトフーフト量子異常

塩 崎　謙

1. はじめに

元々の Lieb-Schultz-Mattis（LSM）定理とは，スピン 1/2 の１次元反強磁性鎖においてギャップのある縮退のない基底状態を禁止する，非摂動論的な定理の一種です．*1) 近年ではより一般の模型に適用できるように拡張されています．*2) 本稿では，以下の方向への拡張について概観したいと思います．

(i) 離散的な大域的対称性への拡張.

(ii) 一般の空間次元, 及び, 空間群対称性への拡張.

(iii) ギャップのある非縮退状態であれば Symmetry protected topological (SPT) 相である，という定理.

2. 射影表現

離散的な大域的対称性に基づく LSM 定理の内容を知るには，群の射影表現について理解する必要があります．まずは射影表現について解説します．

2.1 量子力学における対称性

Hilbert 空間のある状態ベクトル $|\psi\rangle$（規格化を仮定します）に対して，$U(1)$ 位相の違いは同一の物理的状態を表します．物理的状態 $\mathcal{R}$ とは $U(1)$ 位相の不定性を束ねた状態ベクトルの集まり $\mathcal{R}=\{e^{i\alpha}|\psi\rangle | e^{i\alpha}\in U(1)\}$ です．これを射線（ray）と言います．*3)

対称性とは実験結果を変えない観測者の視点の変化です．対称性群（例えば，３次元実空間の $SO(3)$ 回転群）を G とすると，元 $g\in G$ に対して射線への作用 $\mathcal{R}\mapsto T_g\mathcal{R}$ が定義され，$T_gT_h=T_{gh}$ と群構造を保ちます．対称性は Hilbert 空間ではなく物理的状態である射線に対して定義される点に注意して下さい．Wigner の定理により，対称性変換 T_g は Hilbert 空間におけるユニタリ，あるいは反ユニタリな線形変換によって記述されます．これを $|\psi\rangle\mapsto\hat{g}|\psi\rangle$ と書きましょう．反ユニタリな対称性変換は時間反転に関わる対称性です．本稿では簡単のため，ユニタリな対称性変換のみを扱います．$U(1)$ 位相の不定性により，対称性変換は Hilbert 空間においては $U(1)$ 位相の不定性を除いて群構造が保たれます．つまり，$\hat{g}\hat{h}=e^{i\phi_{g,h}}\widehat{gh}$ です．あるいは同じことですが，$\{|i\rangle\}_{i=1}^N$ を表現基底として $\hat{g}|j\rangle=|i\rangle[D_g]_{ij}$ により表現行列 D_g を定義すると，

$$D_gD_h=e^{i\phi_{g,h}}D_{gh} \qquad (1)$$

です．位相 $e^{i\phi_{g,h}}$ は任意ではなく，結合律 $(\hat{g}\hat{h})\hat{k}=\hat{g}(\hat{h}\hat{k})$ よりコサイクル条件 $\phi_{g,hk}+\phi_{h,k}=\phi_{g,h}+\phi_{gh,k},\quad g,h,k\in G$ が生じます．$\phi_{g,h}$ を乗数系 (factor system) と呼び，乗数系 $\phi=\{\phi_{g,h}\}_{g,h\in G}$

*1) 日本語の解説記事として,[1] があります.

*2) 日本語の解説記事として,[2] があります．本稿の一部の用語などは[2] を参考にしています.

*3) ２節の内容は[3] の２章を参考にしています.

に従う表現 (1) を ϕ-射影表現と呼びます．物理的状態のもつ $U(1)$ 位相の不定性に注意すると，$g \in G$ に対し勝手な $e^{i\alpha_g} \in U(1)$ を選び $\hat{g} \mapsto e^{i\alpha_g}\hat{g}$ と再定義しても同一の対称性です．この対称性変換 $\hat{g}$ の取り替えは乗数系の同値関係 $\phi_{g,h} \sim \phi_{g,h}+\alpha_g+\alpha_h-\alpha_{gh}$ を引き起こします．この同値関係で割った同値類 $[\phi]$ は２次の群コホモロジー $H^2(G,U(1))$ によって分類され，$H^2(G,U(1))$ の元の数だけ本質的に異なる乗数系の射影表現が存在します．乗数系の和 $(\phi+\phi')_{g,h} := \phi_{g,h}+\phi'_{g,h}$ は同値類の和 $[\phi]+[\phi']$ を誘導し，群コホモロジー $H^2(G,U(1))$ は何らかの可換群です．$[\phi]=0$ のときは $U(1)$ 位相 $e^{i\alpha_g}$ を上手く選んで乗数系を自明に取ることができ，線形表現を与えます．α_g どのように選んでも $\phi_{g,h}$ を自明化できない場合が存在します．これを次節以降で見ます．

乗数系の相違と，ϕ-射影表現の相違を混同しないように注意して下さい．群コホモロジー $H^2(G,U(1))$ は本質的に異なる乗数系を分類し，ひとつの乗数系 ϕ に対して既約 ϕ-射影表現が複数存在します．例として，$G=SO(3)$ の乗数系は $H^2(SO(3),U(1))=\mathbb{Z}_2$ によって分類され，自明（非自明）な乗数系は整数スピン（半整数スピン）表現に対応し，スピンの大きさ S が既約表現をラベルします．

2.2 乗数系の不変量

乗数系 $\phi_{g,h}$ の再定義に依存しない不変量が存在すれば，本質的に異なる乗数系を特徴づけることができます．ここでは，G が離散群の場合の不変量を紹介します．可換な元の対 $g,h \in G, gh=hg$ に対して成立する以下の式に注目します．

$$\hat{g}\hat{h} = e^{i\phi_{g,h}}\widehat{gh} = e^{i\phi_{g,h}}\widehat{hg} = e^{i\phi_{g,h}}e^{-i\phi_{h,g}}\hat{h}\hat{g}.$$

最左辺と最右辺は再定義 $\hat{g} \mapsto e^{i\alpha_g}\hat{g}$ に対して共通の因子を出すので，$\epsilon_{g,h} := e^{i\phi_{g,h}}e^{-i\phi_{h,g}} (gh=hg)$ は不変量であることがわかります．性質

$$\begin{aligned} &\epsilon_{1,g}=\epsilon_{g,1}=\epsilon_{g,g}=1, \\ &\epsilon_{g^n,h^m}=(\epsilon_{g,h})^{nm} \end{aligned} \tag{2}$$

に注意して下さい．射影表現の乗数系が本質的に非自明かどうかを知りたければ，可換な元の対 $g,h \in G$ に対する対称性変換の非可換性を調べれば良い，ということです．

2.3 例：$\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$

乗数系が本質的に非自明な射影表現を実際に構成してみましょう．性質 (2) から，２つの異なる生成子で生成される可換群 $G=\mathbb{Z}_N\times\mathbb{Z}_M$ であれば非自明な不変量を持ちそうです．簡単のため $M=N$ とします．$\mathbb{Z}_N\times\mathbb{Z}_N$ の生成子をそれぞれ a,b と書きます．$a^N=b^N=e$ です．上の性質から $(\epsilon_{a,b})^N=1$ ですので，$\epsilon_{a,b}=e^{\frac{2\pi i p}{N}}, p=0,1,\ldots,N-1$ とかけます．p でラベルされる不変量を有する射影表現のひとつが，以下のように構成できます．まず整数 k に対して $|k\rangle$ を $\hat{a}$ を対角化する基底として，$\hat{a}\,|k\rangle = e^{\frac{2\pi i p k}{N}}\,|k\rangle$ とします．$|k\rangle$ と $|k+\frac{N}{\mathrm{gcd}_{N,p}}\rangle$ は区別されないので，$k\in\{0,\ldots,\frac{N}{\mathrm{gcd}_{N,p}}-1\}$ とします．b の作用を $\hat{b}\,|k\rangle=|k+1\rangle$ とします．すると

$$\begin{aligned} \hat{a}\hat{b}\,|k\rangle &= \hat{a}\,|k+1\rangle = e^{\frac{2\pi i p(k+1)}{N}}\,|k+1\rangle, \\ \hat{b}\hat{a}\,|k\rangle &= e^{\frac{2\pi i p k}{N}}\hat{b}\,|k\rangle = e^{\frac{2\pi i p k}{N}}\,|k+1\rangle \end{aligned}$$

となり，$\hat{a}\hat{b}=e^{\frac{2\pi i p}{N}}\hat{b}\hat{a}$ と，望みの不変量を実現します．

例えば $N=2, p=1$ とすると，$\sigma^\mu, \mu\in\{x,y,z\}$ を Pauli 行列として，表現行列が $D_a=\sigma^z, D_b=\sigma^x$ で与えれます．x,y,z 軸回りの π 回転によって構成される群 $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\in SO(3)$ の，スピン 1/2 の系における対称性変換です．

2.4 乗数系の状態非依存性と超選択則

これまで，乗数系 $\phi_{g,h}$ が状態に依存しないと暗に仮定していましたが，これは以下のように示すことができます．$|\psi_A\rangle, |\psi_B\rangle$ の乗数系をそれぞれ ϕ^A,ϕ^B とし，重ね合わせ状態 $|\psi_A\rangle+|\psi_B\rangle$ の乗数系を ϕ^{AB} とします．対称性変換 $(\widehat{gh})^{-1}\hat{g}\hat{h}$ 重ね合わせ状態 $|\psi_A\rangle+|\psi_B\rangle$ に作用させると

$$(\widehat{gh})^{-1}\hat{g}\hat{h}(|\psi_A\rangle+|\psi_B\rangle) = e^{i\phi^{AB}_{g,h}}(|\psi_A\rangle+|\psi_B\rangle)$$

です．一方で，$\hat{g}$ の線形性を用いると，

$$= e^{i\phi^A_{g,h}}\,|\psi_A\rangle + e^{i\phi^B_{g,h}}\,|\psi_B\rangle$$

となり，$|\psi_A\rangle$ と $|\psi_B\rangle$ が線形独立な場合は $\phi^{AB}=\phi^A=\phi^B$ です．

また，この議論から乗数系が異なる状態間の重ね合わせ状態を取ることができないことがわかります．一種の超選択則です．例えば，$SO(3)$ 対称性が存在する量子力学系においては，スピン整数とスピン半整数の状態は重ね合わせ状態を考えることができません．

2.5 自由度の和

２つの Hilbert 空間 $\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2$ の対称性変換を $\hat{g}_1,\hat{g}_2, g\in G$，乗数系を ϕ^1,ϕ^2 とそれぞれ書きましょう．全 Hilbert 空間 $\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$ の対称性変換はテンソル積 $\hat{g}_1\otimes\hat{g}_2$ によって与えられます．$(\hat{g}_1\otimes\hat{g}_2)(\hat{h}_1\otimes\hat{h}_2)=(e^{i\phi^1_{g,h}}\widehat{(gh)}_1)\otimes(e^{i\phi^2_{g,h}}\widehat{(gh)}_2)=e^{i(\phi^1_{g,h}+\phi^2_{g,h})}(\widehat{(gh)}_1\otimes\widehat{(gh)}_2)$ なので，自由度の和は乗数系の和 $[\phi^1]+[\phi^2]$ を導きます．

例として，$SO(3)$ 対称性の場合は，２つの半整数スピンの自由度の和は整数スピンの乗数系を持ちます．

2.6 非自明な乗数系と縮退

次が成立します．

- １次元表現の乗数系は自明．

実際，1 次元表現は単一の表現基底 $|\psi\rangle$ に対して $\hat{g}\,|\psi\rangle=e^{i\alpha_g}\,|\psi\rangle$ で与えられますが，$e^{i\alpha_g}$ 自身を用いて乗数系を再定義して自明化できます．対偶

- 乗数系が非自明，つまり，$[\phi]\neq 0$ である ϕ-射影表現の表現次元 N は $N>1$.

が重要です．言い換えると，乗数系が非自明であれば Hilbert 空間の任意の状態が縮退します．

2.7 １次元ボソン SPT 相との関係

非自明な射影表現が必ず出現する状況があります．大域的 G 対称性によって保護された１次元ボソン SPT 相の端に出現する自由度です．

(i) 無限体積極限の励起エネルギーに有限のギャップがあり，(ii) 自発的対称性の破れがなく，(iii) 基底状態に縮退のない系を[2] にならい，非縮退ギャップ系と呼ぶことにしましょう．一般に，SPT 相とは非縮退ギャップ系の分類であり，連続的に移り変わる２つの非縮退ギャップ系は同じ SPT 相に属します．

１次元格子を考え，１サイト当たりの自由度は群 G の線形表現とします．このとき SPT 相は群コホモロジー $H^2(G,U(1))$ によって分類され，$[\phi]\in H^2(G,U(1))$ に属する SPT 相は系の端において乗数系が $[\phi]$ で与えられる非自明な射影表現が出現します．

実現例として，クラスター状態として知られる模型を紹介します．整数サイト，半整数サイト上のスピン 1/2 の自由度から成る系を考え，スピン演算子をそれぞれ $\boldsymbol{s}_j,\boldsymbol{\mu}_{j+\frac{1}{2}}, j\in\mathbb{Z}$ と書きます．ハミルトニアンは以下で与えられます．

$$H=-\sum_{j\in\mathbb{Z}}\mu^z_{j-\frac{1}{2}}\sigma^x_j\mu^z_{j+\frac{1}{2}}-\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sigma^z_j\mu^x_{j+\frac{1}{2}}\sigma^z_{j+1}.$$

このハミルトニアンは以下の対称性変換 U_σ,U_μ で与えられる $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ 対称性を持ちます．

$$U_\sigma=\prod_j\sigma^x_j,\quad U_\mu=\prod_j\mu^x_{j+\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

ハミルトニアンの全ての項が互いに可換なので，基底状態 $|\psi\rangle$ は全ての項に対して固有値１を持つ状態として与えられます．$j=1,\dots,L$ として有限系を考え，自由端境界条件を考えます：

$$H_{\mathrm{open}}=-\sum_{j=1}^{L-1}\mu^z_{j-\frac{1}{2}}\sigma^x_j\mu^z_{j+\frac{1}{2}}-\sum_{j=1}^{L-1}\sigma^z_j\mu^x_{j+\frac{1}{2}}\sigma^z_{j+1}.$$

自由度 $2L$ 個に対して基底状態を決める条件が $(2L-2)$ 個なので，基底状態は４重縮退します．実はこの 4 重縮退は，系の両端に $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ の非自明な射影表現の出現に起因します：対称性変換を基底状態の条件 $\mu^z_{j-\frac{1}{2}}\sigma^x_j\mu^z_{j+\frac{1}{2}}=\sigma^z_j\mu^x_{j+\frac{1}{2}}\sigma^z_{j+1}=1(j=1,\dots,L-1)$ を用いて変形すると，

$$U_\sigma\big|_{\mathrm{g.s.}}=\mu^z_{\frac{1}{2}}\otimes\mu^z_{L-\frac{1}{2}}\sigma^x_L=:U^L_\sigma\otimes U^R_\sigma,$$
$$U_\mu\big|_{\mathrm{g.s.}}=\mu^x_{\frac{1}{2}}\sigma^z_1\otimes\sigma^z_L=:U^L_\mu\otimes U^R_\mu.$$

となります．このように，基底状態において対称性変換が系の端の自由度のみで記述されることが，ギャップ系の特徴です．左端のみに注目すると $U^L_\sigma U^L_\mu=-U^L_\mu U^L_\sigma$ となり，元々の１サイト当たりの自由度は $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ の線形表現であるにもかかわらず，系の端においては $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ 対称性の非自明な射影表現が出現します．

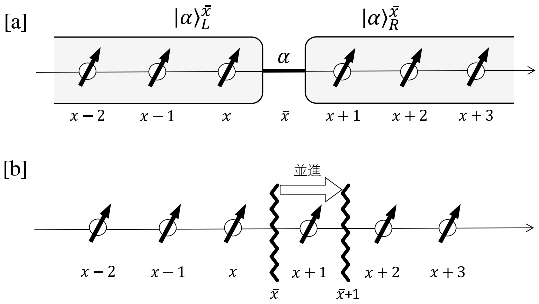

図 1　[a] Schmidt 分解．[b] 並進操作でエンタングルメント・カットが 1 サイトずれる．

3. LSM 定理

いよいよ本題の LSM 定理に移ります．（近年の拡張された）LSM 定理においては，大域的対称性と空間群対称性を固定したときに，単位胞内の自由度に応じて非縮退ギャップ系が禁止される，あるいは非縮退ギャップ系が非自明な SPT 相であることを示します．

3.1 空間 1 次元，並進対称性

まずは，元々の LSM 定理を離散対称性に拡張した以下を見ます．[4)]

- 大域的 G 対称性と空間並進対称性を有する 1 次元系を考える．単位胞当たりの自由度が群 G の非自明な射影表現に属するならば，非縮退ギャップ系が禁止される．

以下，量子エンタングルメントに基づく議論[5)] を紹介します．[*4)] G 対称性変換はサイト $x \in \mathbb{Z}$ における対称性変換を $\hat{g}_x$ として $\hat{g} = \bigotimes_x \hat{g}_x, g \in G$ と書かれます．各サイトの自由度の乗数系，つまり $\hat{g}_x$ の乗数系を ϕ_x とします．非縮退ギャップ系を仮定し $|\psi\rangle$ を基底状態とします．位置 $\bar{x}(x < \bar{x} < x+1)$ における Schmidt 分解（行列の特異値分解）を

$$|\psi\rangle = \sum_\alpha s_\alpha |\alpha\rangle_L^{\bar{x}} |\alpha\rangle_R^{\bar{x}}, \quad s_\alpha > 0 \qquad (4)$$

とします（図 1[a]）．ギャップ系の仮定により α は離散ラベルです．大雑把に言って，ラベル α の

---

*4)　無限系を記述する数学的に厳密な取り扱いにおける定理の証明については，[6)] を見て下さい．

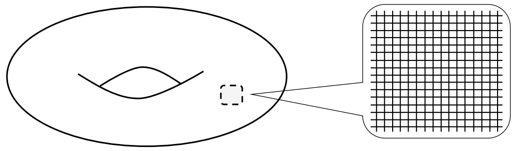

図 2　局所的に並進対称性を保つ有限格子系．（トーラスである必要はない．）

数が左と右の領域間のエンタングルメントの度合いを特徴付けます．状態 $\{|\alpha\rangle_L^{\bar{x}}\}_\alpha$ への対称性変換 $\bigotimes_{x<\bar{x}} \hat{g}_x$ の作用は $\bar{x}$ 近傍の自由度のみで決まり，ある射影表現を成します．この乗数系を ϕ_L と書きましょう．自発的対称性の破れに伴う猫状態の非存在を仮定しているので，乗数系は Schmidt ベクトル $|\alpha\rangle_L^{\bar{x}}$ に依存しません．同様に，$|\alpha\rangle_R^{\bar{x}}$ の乗数系を ϕ_R とすると基底状態 $|\psi\rangle$ の G 対称性より

$$[\phi_L] + [\phi_R] = 0 \qquad (5)$$

が成立することに注意しましょう．並進対称性より，$\bar{x}$ と $\bar{x}+1$ における Schmidt 分解は一致します（図 1[b]）．特に $|\alpha\rangle_L^{\bar{x}+1}$ と $|\alpha\rangle_L^{\bar{x}}$ の乗数系は一致します．一方で $|\alpha\rangle_L^{\bar{x}+1}$ は，サイト x の自由度の基底 $\{|i\rangle_x\}$ を用いて

$$|\alpha\rangle_L^{\bar{x}+1} = \sum_{i,\beta} B_{\alpha\beta}^i |i\rangle_x |\beta\rangle_L^{\bar{x}} \qquad (6)$$

と展開できます．すると，$B_{\alpha\beta}^i \neq 0$ なる基底に対して，乗数系を両辺で比較，つまり $(\widehat{gh})^{-1}\hat{g}\hat{h}$ の作用を見ると，$[\phi_L] = [\phi_x] + [\phi_L]$，つまり $[\phi_x] = 0$ が従います．よって，1 サイト当たりの自由度の乗数系が非自明，$[\phi_x] \neq 0$ の場合は矛盾が生じ，非縮退ギャップ系が否定されます．

3.2 境界条件非依存性

一般の空間 d 次元の場合についても離散対称性に対する LSM 定理の拡張が議論されています．特に以下の物理的直感に基づく信仰を認めることにより様々な LSM 定理が導かれます．[5)]

- x_μ 方向の系のサイズが L_μ から成る有限格子系を考える．非縮退ギャップ系であれば，(i) $L_1, \cdots, L_d$ が相関長よりも十分大きく，かつ (ii) 局所的に並進対称性が保たれている（図 2

を見よ）ならば，任意の有限格子上において基底状態は唯一である．

バルクの性質は境界条件には依存しない，という信仰の一種です．例えば，3.1 節で示した LSM 定理の空間 d 次元に対する拡張が以下のように得られます．系に周期境界条件 $\hat{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{x}+L_\mu\hat{\mu}} = \hat{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{x}}, \mu = x_1, \dots, x_d$ を課すと x_μ 方向の長さ L_μ の d 次元トーラスが得られます．単位胞当たりの自由度の乗数系を $[\phi_x] \in H^2(G, U(1))$ とすると，全系の乗数系は $L_1 \cdots L_d[\phi_x]$ です．すると，$[\phi_x] \neq 0$ であれば必ず $L_1 \cdots L_d[\phi_x] \neq 0$ なるサイト数の組 $(L_1, \dots, L_d)$ が存在し，Hilbert 空間の任意の状態が縮退します（2.6 節）．すると上記信仰の対偶により，非縮退ギャップ系が否定されます．

このアプローチにおいては，素朴な周期境界条件に加え，より一般の空間群操作によるねじれ境界条件を考え，*5) 唯一の基底状態を仮定した上で矛盾を導き，LSM 定理を導きます．例えば，空間 2 次元系において，x 方向の境界条件を映進 $g : (x, y) \mapsto (x+\frac{1}{2}, -y)$ でねじる，つまり境界条件 $\hat{\boldsymbol{S}}_{(x+L_x,y)} = \hat{g}\hat{\boldsymbol{S}}_{(x,y)}\hat{g}^{-1} = \hat{\boldsymbol{S}}_{(x+\frac{1}{2},-y)}, \hat{\boldsymbol{S}}_{(x,y+L_y)} = \hat{\boldsymbol{S}}_{(x,y)}$ を取るとクラインの壺が得られます．[5] あるいは，x 方向の境界条件を y 方向の並進でねじる，つまり境界条件 $\hat{\boldsymbol{S}}_{(x+L_x,y)} = \hat{T}_y\hat{\boldsymbol{S}}_{(x,y)}\hat{T}_y^{-1} = \hat{\boldsymbol{S}}_{(x,y+1)}, \hat{\boldsymbol{S}}_{(x,y+L_y)} = \hat{\boldsymbol{S}}_{(x,y)}$ を取ると，L_x 回並進すると y 方向に 1 だけシフトするねじれたトーラスが得られます．[7]

3.3 空間 2 次元の適用例：toric code

空間次元が 2 以上の場合は，非縮退ギャップ系が否定された場合に，ギャップレス状態，自発的対称性の破れに加え，基底状態に縮退があるトポロジカル秩序状態の可能性があります．トポロジカル秩序を持つ標準的な模型として toric code[8] がありますが，これは LSM 定理の適用例と見ることができます．模型は正方格子の辺上におけるスピン 1/2 自由度から成り，ハミルトニアンは頂点近傍とプラケット近傍における 4 体相互作用 A_v, B_p

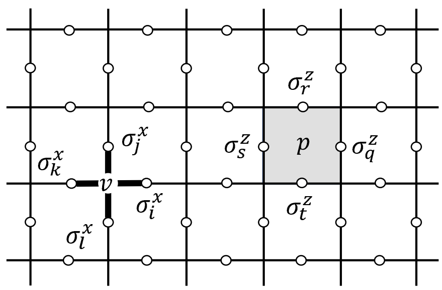

図 3 Toric code 模型．○ はスピン 1/2 自由度を表す．

からなります (図 3)：

$$H = -\sum_v A_v - \sum_p B_p,$$

$$A_v = \sigma_i^x\sigma_j^x\sigma_k^x\sigma_l^x, \quad B_p = \sigma_q^z\sigma_r^z\sigma_s^z\sigma_t^z.$$

この模型は並進対称性に加えて，以下の $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 対称性を持ちます．[9]

$$R_X = \prod_{i \in C_x} \sigma_i^x, \quad R_Z = \prod_{i \in C_x} \sigma_i^z.$$

ここで，積は x 方向の辺についてのみ取ります．単位胞当たりの自由度が $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ の非自明な射影表現で与えられ，LSM 定理によって非縮退ギャップ系が禁止され，トポロジカル秩序状態を取ることと矛盾しません．

4. より一般の空間群へ

空間に固定点を持つような対称操作からもある種の LSM 定理を導くことができます．まずは例を見ます．

4.1 空間 1 次元，並進対称性＋空間反転対称性

3.1 節では並進対称性のある 1 次元系を考えましたが，ここではさらに空間反転対称性 $I : x \mapsto -x$ を加えます．[5] 整数サイト $x \in \mathbb{Z}$ と半整数サイト $x \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ は共に反転対称な点であることに注意して下さい．整数サイトと半整数サイト上の自由度の乗数系をそれぞれ $[\phi_x], [\phi_{x+\frac{1}{2}}]$ と書きます．非縮退ギャップ系の基底状態 $|\psi\rangle$ に対し，位置 $\bar{x} = x - \frac{1}{4}$ における Schmidt 分解 (4) を考えます．

---

*5) ただし，ねじれ境界条件で同一視された有限格子系に特異性がない，つまり，どこを見ても局所的に並進対称性が保持されている必要があります．

x を中心とする反転対称性より，$|\alpha\rangle_R^{x-\frac{1}{4}}$ と，位置 $x+\frac{1}{4}$ の Schmidt 分解における状態 $|\alpha\rangle_L^{x+\frac{1}{4}}$ が等価です（図 4[a]）．一方で，(6) と同様に，$|\alpha\rangle_L^{x+\frac{1}{4}}$ はサイト x の自由度の基底 $\{|i\rangle_x\}$ を用いて展開できます：$|\alpha\rangle_L^{x+\frac{1}{4}} = \sum_{i,\beta} B^i_{\alpha\beta}\,|i\rangle_x\,|\beta\rangle_L^{x-\frac{1}{4}}$．両辺の乗数系を比較すると $[\phi_L^{x+\frac{1}{4}}] = [\phi_x] + [\phi_L^{x-\frac{1}{4}}]$ が成立し，反転対称性 $[\phi_L^{x+\frac{1}{4}}] = [\phi_R^{x-\frac{1}{4}}]$ と (5) に注意すると結局

$$[\phi_x] = 2[\phi_L^{x-\frac{1}{4}}] \qquad (7)$$

が成立します．仮に，群コホモロジー $H^2(G, U(1))$ が $\mathbb{Z}_2$ のみであれば右辺が恒等的に 0 となり，3.1 節の議論と同様にして $[\phi_x]$ が非自明な射影表現に属する場合に矛盾が生じ，非縮退ギャップ系が否定されます．

4.2 非自明な SPT 相である，という LSM 定理

関係式 (7) において，$H^2(G, U(1))$ が $\mathbb{Z}_2$ 以外の可換群を含む場合は必ずしも非縮退ギャップ系が禁止されないことに注意します．例えば，$PSU(3) = SU(3)/\mathbb{Z}_3$ 群の群コホモロジーは $H^2(PSU(3), U(1)) = \mathbb{Z}_3$ で与えられ，$SU(3)$ の $\mathbf{3}, \bar{\mathbf{3}}$ 表現がそれぞれ $H^2(PSU(3), U(1))$ の生成元とその逆元を与えます．すると，整数サイトの自由度の乗数系として $[\phi_x] = 1 \in \mathbb{Z}_3$ を仮定すると，状態 $|\alpha\rangle_L^{x-\frac{1}{4}}$ の乗数系は (7) より $[\phi_L^{x-\frac{1}{4}}] = 2 \in \mathbb{Z}_3$ が従います．つまり，基底状態は必ず $[\phi_L^{x-\frac{1}{4}}] = 2$ なる非自明な 1 次元 SPT 状態となります．実際，関係式 (7) を満たす非縮退状態は容易に構成できます（図 4[b]）．このようなタイプの LSM 定理は SPT-LSM 定理と呼ばれることがあります．*6)

4.3 SPT 相の端としての LSM 定理

2.7 節で 1 次元 SPT 相の端に非自明な射影表現が出現することを見ました．d 次元の空間群対称性に関する LSM 定理のひとつの理解は，d 次元の空間群対称性によって保護された $(d+1)$ 次元 SPT 相の境界における 't Hooft アノマリーという観点です（図 5）：

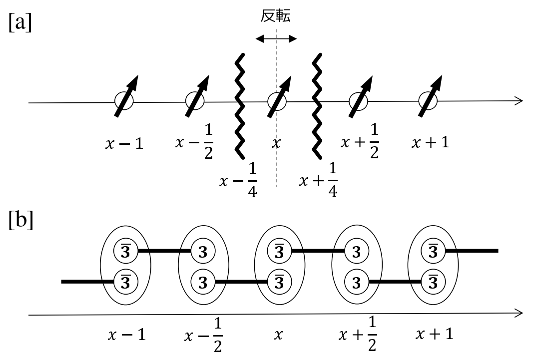

図 4 [a] $x-\frac{1}{4}$ と $x+\frac{1}{4}$ におけるエンタングルメント・カットが反転操作で入れ替わる．[b] SPT-LSM 定理の例．$\mathbf{3}$ 表現と $\bar{\mathbf{3}}$ 表現をつなぐボンドは $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}}$ の $SU(3)$ singlet 状態を表す．反転操作は $x \mapsto -x$ とフレーバーの入れ替えによって定義される．

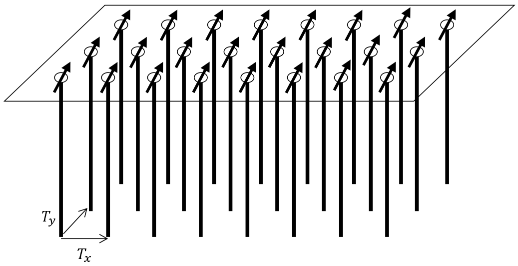

図 5 SPT 相の端としての LSM 定理．各チェインは 1 次元 SPT 相を表す．

$$\text{LSM 定理} \\ = \partial(\text{空間群対称性によって保護された SPT 相})$$

一般論として 't Hooft アノマリーの存在は非縮退ギャップ系を禁止します．この観点は，単なる言い換えに過ぎませんが，SPT 相がそうであるように，LSM 定理には距離スケールが問題にならないトポロジカルな起原があることを示唆します．そこで大胆にも，並進対称性の距離スケール a が，ミクロな自由度が定義されているサイト間隔 ξ よりも十分に大きい $a \gg \xi$ としても LSM 定理の内容は変更を受けない，と仮定しましょう．*7) この仮定を認めると，次節に述べる考察が可能です．

*6) 例えば，文献[10]．

*7) 空間群対称性によって保護された SPT 相の研究を通して[11] において導入された考え方です．

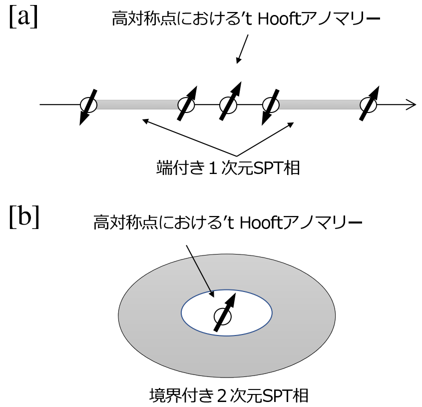

図 6　境界付き SPT 相により，高対称点における 't Hooft アノマリーの一部が自明化される．

4.4 Atiyah-Hirzebruch スペクトル系列

SPT 相においては，断熱変形によって移り変わる非縮退ギャップ系が同一視されました．同様に，'t Hooft アノマリーの分類においては，'t Hooft アノマリーを変化させない自由度の増減を同一視することが自然です．特に，境界付きの SPT 相 *8) の生成/消滅操作が LSM 定理にとって重要です．LSM 定理，及び SPT-LSM 定理は，ホモロジカルな Atiyah-Hirzebruch スペクトル系列の手続きの一部として，以下のように理解されます．[12]

出発点として，実空間の高対称点における (0+1) 次元't Hooft アノマリーの分類を $E^1_{0,-1}$ と書きます．'t Hooft アノマリーの一部は，高対称点に隣接する 1 次元セル上における端付き 1 次元 SPT 相の生成によって自明化を受ける可能性があります（図 6 [a]）．この自明化を第 1 微分 $d^1_{1,-1} : E^1_{1,-1} \to E^1_{0,-1}$ と書きます．自明化を受けた自由度 $x \in \operatorname{Im} d^1_{1,-1}$ は，1 次元 SPT 相を強いる SPT-LSM 定理を導きます．残された't Hooft アノマリーを $E^2_{0,-1} = E^1_{0,-1}/\operatorname{Im} d^1_{1,-1}$ と書きます．同様にして $E^2_{0,-1}$ の一部は，高対称点に隣接する 2 次元セル上における境界付き 2 次元 SPT 相の生成によって自明化される可能性があり（図 6 [b]），これを $d^2_{2,-2} : E^2_{2,-2} \to E^2_{0,-1}$ によって表します．自明化を受けた自由度 $x \in \operatorname{Im} d^2_{1,-1}$ は 2 次元 SPT 相を強いる SPT-LSM 定理を導きます．同様の手続きを境界付き d 次元 SPT 相（d は空間次元）まで進め，自明化を取りきった後に残る't Hooft アノマリーを $E^\infty_{0,-1}$ とします．$E^\infty_{0,-1}$ に属する自由度はいかなる自明化を受けないため，非縮退ギャップ系が禁止される LSM 定理を導きます．

*8)　バルクと境界で't Hooft アノマリーがキャンセルしているため，'t Hooft アノマリーが存在しません．

5. おわりに

LSM 定理の様々な拡張について概観しました．現状では数学的に厳密な定理から物理的直観に基づく予想まで様々な段階にあり，さらなる展開が期待されます．なお本稿で紹介できなかった LSM 定理の拡張として，並進演算子がプラケットを 1 周すると大域的対称性となるような磁気並進対称性に起因するものがあり，興味深い結果が得られています．例えば，文献[10] を見て下さい．

（本稿は以下の記事の原稿です．「数理科学」Vol.58-1, pp.51-57, サイエンス社，2020.）

参考文献

1) 田崎晴明：量子スピン系の理論 (講義ノート)，物性研究 (1992), 58(2): 121-178.
2) 渡辺悠樹，ワイル・ディラック半金属や量子スピン液体探索の新しい指導原理，日本物理学会誌 72 巻 1 号 (2017) 解説欄.
3) S. Weinberg, The quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations, Cambridge University Press, (1995).
4) X. Chen, Z.-C. Gu, X.-G. Wen, Phys. Rev. B **83**, 035107 (2011).
5) H. Watanabe, H. C. Po, A. Vishwanath, M. Zaletel, Proceedings of the National Academy of Sciences 112.47 (2015): 14551-14556.
6) Y. Ogata, H. Tasaki, *Lieb-Schultz-Mattis type theorems for quantum spin chains without continuous symmetry*, Comm. Math. Phys. (2019).
7) Y. Yao, M. Oshikawa, arXiv:1906.11662.
8) A. Yu. Kitaev, Annals of Physics, **303**, 2 (2003).
9) M. Cheng, M. Zaletel, M. Barkeshli, A. Vishwanath, P. Bonderson, Phys. Rev. X **6**, 041068 (2016).
10) X. Yang, S. Jiang, A. Vishwanath, Y. Ran, Phys. Rev. B **98**, 125120 (2018).
11) R. Thorngren, D. V. Else, Phys. Rev. X **8**, 011040 (2018).
12) K. Shiozaki, C. Z. Xiong, K. Gomi, arXiv:1810.00801.

（きょうとだいがくきそぶつりがくけんきゅうじょ，京都大学基礎物理学研究所）