

対称性によって保護されたトポロジカル相における非局所 秩序変数と位相的場の理論

塩崎 謙

京都大学基礎物理学研究所

September 1, 2021

Contents

1	はじめに	2
1.1	空間0次元の例	3
1.2	一般の空間次元と局所性	4
1.3	対称性の自発的対称性の破れがないこと	4
1.4	ギャップレス系ではないこと	4
1.5	基底状態の縮退がないこと	5
2	空間1次元のボソン系	6
2.1	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 対称性	6
2.2	端状態	7
2.3	ねじれ境界条件と分配関数	7
2.4	トーラス分配関数	8
2.5	Symmetry defect network と群コホモロジー	9
3	時間反転対称性によって保護された1次元スピン鎖	10
3.1	模型と端状態	10
3.2	時間反転対称性 = 虚時間方向の反転対称性	11
3.3	空間反転対称性によって保護されたスピン鎖	11
3.4	時間反転対称性と転置	14
3.5	部分転置と向き付けのない時空	14
4	フェルミオンの部分転置とSPT不変量	16
4.1	Kitaev模型	16
4.2	端状態	17
4.3	SPT不変量とトーラス分配関数	17
4.4	時間反転対称性で保護されたフェルミオン鎖: \mathbb{Z}_8 SPT相	18
4.5	時間反転対称性 = 虚時間方向のCR対称性	18
4.6	フェルミオンの部分転置	19
5	$U(1)$対称性が存在する場合のSPT不変量	20
5.1	$U(1)$ 対称性とTwist演算子, Berry位相	20
5.2	量子Hall効果	22
5.3	フェルミオン, $U(1) \times CR$ 対称性	23
5.4	フェルミオン, $U(1) \times T$ 対称性	23
A	連続場の定義	24
A.1	大域的な G 対称性が存在する場合	25
A.2	時空の向きを変化させる対称性と向き付けのない時空多様体	26
A.3	フェルミオン場とPin群	26
A.4	Spin, Pin $_{\pm}$ 構造	27

B	群コホモロジーとボソンのSPT相	27
B.1	群コホモロジー	28
B.2	射影表現	28
B.3	Dijkgraaf-Witten理論	28
B.4	G 対称な物質場の理論	30
C	コボルディズム	33
C.1	コボルディズム群とSPT相の分類の関係	34
C.2	Generating manifold と SPT不変量	35

1 はじめに

対称性によって保護されたトポロジカル相 (Symmetry protected topological (SPT) phase) [1]とは、以下のようなルールに従った絶対零度における量子基底状態のトポロジカルな分類の枠組みのことを指す。

- 1) なんらかの対称性 G を固定し、対称性 G を保つハミルトニアンを考える。
- 2) 自発的対称性の破れは存在しないものとする。
- 3) 基底状態と第1励起状態との間に有限のエネルギーギャップがある。
- 4) 任意の閉じた実空間において基底状態に縮退はない。

以下のような性質を持つ。

- 5) トポロジカルな分類が非自明な場合は、自明なテンソル積状態とは区別される基底状態が存在する。
- 6) トポロジカルに非自明な基底状態においては、実空間が境界を持てば、低エネルギー（つまり、バルクのエネルギーギャップの間）において境界に局在する何らかの自由度が存在する。この境界に局在する低エネルギーの自由度は対称性 G に対する量子アノマリーを持つ。
- 7) 上のルール3,4より、SPT相の応答理論はEuclidな閉じた時空多様体上の $U(1)$ に値を取る位相的場の理論 (Topological Quantum Field Theory (TQFT))の分配関数 $Z(M, A) = e^{iS_{\text{top}}(M, A)}$ によって記述される。

本ノートでは特に、SPT相を検出するための非局所秩序演算子 (SPT不変量とも呼ばれる) の構成について解説する。[2, 3, 4, 5, 6, 7] これは以下の動機に基づく。

- トポロジカル作用 $Z(M, A) = e^{iS_{\text{top}}(M, A)}$ は任意の時空多様体 M を含む。一方で、物性物理学で扱う物理系においては、相対論的対称性が存在しない (例えば、格子状の理論) ので、任意の時空多様体において理論を定義する方法が自明ではない。あるいは、単に存在しない。
- すると、SPT相とトポロジカル作用 $Z(M, A) = e^{iS_{\text{top}}(M, A)}$ の関係はそれほど自明ではない。
- このギャップを埋めるには、トポロジカル作用 $Z(M, A) = e^{iS_{\text{top}}(M, A)}$ が要求する”特別な時空多様体”を基底状態と対称性演算子のみで再現し、つまり、SPT相の非局所秩序演算子を構成し、それが実際にSPT相を検出しているかどうかを調べれば良いだろう。

1.1 空間0次元の例

最も簡単なSPT相の例として、空間0次元、つまり単なる量子力学を考えよう。スピン1/2の系 (qubit) を考える。ヒルベルト空間は2次元の複素ベクトル空間 $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ であり、その基底は $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ で張ることができる。一般的なハミルトニアンは

$$H = -\mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (1)$$

で与えられ、基底状態はスピンの方向を向いた状態 $|\hat{h}\rangle$ ($\hat{h} = \mathbf{h}/|\mathbf{h}| \in S^2$) であり、 $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ でない限り、基底状態と $-\mathbf{h}$ を向いた励起状態 $|\hat{h}'\rangle$ との間にはエネルギーギャップが存在する。球面上の任意の状態 $|\hat{h} \in S^2\rangle$ は断熱的に¹ 移り変わることができるので、この系の基底状態においてトポロジカルな分類は存在しない。

しかし、対称性があればトポロジカルな分類が生じる。スピンを入れ替える \mathbb{Z}_2 対称性

$$\sigma^x |\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle, \quad \sigma^x |\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle \quad (2)$$

をハミルトニアンに課そう。対称性 $\sigma^x H = H \sigma^x$ により h_y, h_z 成分が禁止され、ハミルトニアンは

$$H = -h_x \sigma_x \quad (3)$$

となる。 h_x の正負に応じて、基底状態は

$$|\pm\rangle = \frac{|\uparrow\rangle \pm |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} \quad (4)$$

となる。明らかに、 $|+\rangle$ と $|-\rangle$ はハミルトニアンのギャップを閉じずに移り変わることができないので、基底状態においてある種の分類が生じている。一般にハミルトニアンのエネルギーギャップを保つ連続変形 (断熱変形) により移り変わる基底状態間に同値関係を導入して、その同値関係で割ることにより生じる分類をトポロジカルな分類と呼び、このような基底状態たちの連結成分を総称してSPT相と呼び、またこの枠組自体もSPT相と呼ぶ。また、 \mathbb{Z}_2 対称性の電荷 $\sigma^x |\pm\rangle = \pm |\pm\rangle$ により両者は区別できていることにも注意する。

SPT相においては、トポロジカルに異なる2つのSPT相がどの程度異なるか、という点も問題とする。上の例では、 $|-\rangle$ は $|+\rangle$ を断熱的につなぐ経路は存在しない。そこで、系そのものを“2倍”して、トポロジカルな違いが安定かどうかを調べよう。ヒルベルト空間は $\mathcal{H}_{\text{total}} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ 。ハミルトニアンは $H_{\text{total}} = H \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes H$ である。 \mathbb{Z}_2 対称性の生成子はテンソル積 $\sigma_1^x \sigma_2^x$ で与えられる。この2倍された系においては、 $|--\rangle$ と $|++\rangle$ の間をつなぎ、かつ \mathbb{Z}_2 対称性を満たすハミルトニアンの経路が、例えば以下のような基底状態 $|\psi(t)\rangle$ へ射影によって構成することにより得られる：

$$H(t) = \mathbf{1} - |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|, \quad |\psi(t)\rangle = (1-t)|--\rangle + t|++\rangle. \quad (5)$$

よって、“2倍”された系においてはトポロジカルな違いは消失し、SPT相の分類は \mathbb{Z}_2 となる。一般に“ N 倍”してハミルトニアンの断熱的な経路が存在する場合にSPT相の分類は \mathbb{Z}_N であり、任意の“整数倍”に対してトポロジカルな分類が保たれる場合は分類を \mathbb{Z} である。

与えられたSPT相がどのクラスに属するかを判定する演算子をSPT相の (非局所) 秩序変数、あるいはSPT不変量と呼ぶ。上の例の場合は \mathbb{Z}_2 の対称性の生成子 $U_{\mathbb{Z}_2}$ の期待値

$$U_{\mathbb{Z}_2} |\psi\rangle = \pm |\psi\rangle \quad (6)$$

が \mathbb{Z}_2 SPT相を判定するSPT相の秩序変数となる。空間高次元においてはこのようなSPT不変量は大域的に構成されることを次章以降でみる。

¹ハミルトニアンの変形が基底状態のエネルギーギャップを保つ場合に断熱的という。

1.2 一般の空間次元と局所性

より一般の空間次元において、上記のようなハミルトニアン基底状態のトポロジカルな分類の枠組みを一般化したい。まず、空間0次元と一般の空間次元との違いについて考えよう。空間 d 次元において任意のハミルトニアンは

$$H = \sum_i h_i^{(1)} + \sum_{ij} h_{ij}^{(2)} + \sum_{ijk} h_{ijk}^{(3)} + \dots \quad (7)$$

と書くことができる。ここで i, j, k, \dots は空間のサイトを表し、 $h_{ijk\dots}^{(n)}$ は n 対の相互作用を表す。仮に、相互作用 $h_{ijk\dots}^{(n)}$ が空間の全てのサイトの組 $(ijk\dots)$ に関して有限であれば、自由度が大きな0次元系と区別がつかない。理論の局所性とは、サイト j を含むゼロでない相互作用項 $h_{ijk\dots}^{(n)}$ は、 j の近傍に限る、という仮定である。理論に局所性を課すことにより空間次元が意味をもつ。空間 d 次元のSPT相を考える上では、ハミルトニアンは局所的であると仮定し、その基底状態のトポロジカルな分類を行う。

1.3 対称性の自発的対称性の破れがないこと

次のイジング模型を考えよう。²

$$H = - \sum_j \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z - h \sum_j \sigma_j^x. \quad (8)$$

この模型はスピンを反転する \mathbb{Z}_2 の大域的対称性を有する：

$$\text{Symmetry generator} \quad U = \prod_j \sigma_j^x, \quad \text{Charged object :} \quad O_j = \sigma_j^z. \quad (9)$$

よく知られているように、この模型は $h = 1$ で相転移を示し、 $0 \leq h < 1$ は \mathbb{Z}_2 対称性が自発的に破れた相、 $1 < h$ は対称性が破れていない相である。ここでは簡単のため両極端のみ考えよう。 $h = 0$ の基底状態は2つ存在する：

$$|\uparrow\rangle = |\cdots \uparrow\uparrow\uparrow \cdots\rangle, \quad |\downarrow\rangle = |\cdots \downarrow\downarrow\downarrow \cdots\rangle \quad (10)$$

ハミルトニアンは \mathbb{Z}_2 対称性を満たしているが、基底状態は \mathbb{Z}_2 対称性を破る。³ $h \rightarrow \infty$ の基底状態は単一で、

$$|\Rightarrow\rangle = |\cdots + + + \cdots\rangle = \bigotimes_j \frac{|\uparrow\rangle_j + |\downarrow\rangle_j}{\sqrt{2}} \quad (11)$$

となり、基底状態は \mathbb{Z}_2 対称性をみだす。 $U|\Rightarrow\rangle = |\Rightarrow\rangle$ 。

SPT相においては自発的に対称性が破れていない基底状態のみを扱う。よってIsing模型の例では、無秩序状態 $|\Rightarrow\rangle$ がSPT相で問題とする基底状態である。

1.4 ギャップレス系ではないこと

系がギャップレスとは、大雑把には基底状態から連続的なスペクトルを持つ励起状態たちが存在する状況のことを言うが、任意の有限系においては、エネルギー固有値は常に離散的なので、説明が必要であろう。

²表記の補足説明であるが、ヒルベルト空間 \mathcal{H} はサイト j におけるヒルベルト空間のテンソル積 $\mathcal{H} = \bigotimes_{j \in \{\text{site}\}} \mathcal{H}_j$ であり、 $\mathcal{H}_j \cong \mathbb{C}^2$ はスピン1/2の自由度を表す2次元の複素ベクトル空間。 $\sigma_j^{\alpha \in \{x, y, z\}}$ はサイト j におけるパウリ行列であり、単に σ_j^α と書くと、 $\cdots \otimes \mathbf{1} \otimes \sigma_j^\alpha \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots$ の略記である。恒等演算子を $\mathbf{1}$ と書いた。

³Cat state $|\uparrow\rangle \pm |\downarrow\rangle$ は \mathbb{Z}_2 対称性を満たすが、マクロな状態の重ね合わせは考えないことにしよう。本ノートでは自発的対称性の破れの詳細には立ち入らない。

例を用いてギャップレスである状況を説明する。 f_j/f_j^\dagger を長さ N の1次元のリング上の定義された複素フェルミオンの消滅/生成演算子とし、次のハミルトニアンを考える。

$$H = - \sum_{j=1}^N f_j^\dagger f_{j+1} + h.c. \quad (12)$$

パラメタが存在しないことに注意して頂きたい。 $f_j = \sum_k f_k e^{ikj}$, $k = \frac{2\pi m}{N}$, $m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ とフーリエ変換すると

$$H = \sum_k \epsilon_k f_k^\dagger f_k, \quad \epsilon_k = -2 \cos k \quad (13)$$

となる。基底状態はエネルギー負の状態を詰めた状態

$$|\Psi\rangle = \prod_{\epsilon_k < 0} f_k^\dagger |0\rangle \quad (14)$$

である。基底状態に対して、 $\epsilon_k > 0$ なる状態を生成した状態、及び $\epsilon_k < 0$ なる状態を消滅した状態は全て励起状態となる。このとき、系のサイズ N を大きくするに従って、励起状態のエネルギー、及びエネルギー間隔 $1/N$ は小さくできる。

一方で、ギャップのある系とは、系の大きさをいくら大きくしても、ある有限の $E_{\text{gap}} > 0$ が存在して、第一励起状態のエネルギーが $E_1 > E_{\text{gap}}$ となる状況を言う。

1.5 基底状態の縮退がないこと

SPT相においては、基底状態の縮退が存在しない系を扱うが、イジング模型の $h = 0$ の強磁性相のように基底状態が accidental に縮退することもあるので、説明が必要だろう。基底状態の縮退の存在が局所的な摂動に対して安定である場合に、基底状態に縮退があるギャップのある相と言う。

その最も簡単な例として、toric codeを紹介する。[8] 2次元正方格子を考え、リンクにスピン $1/2$ の自由度が乗っている系を考える。ハミルトニアンは頂点の周りの4つのスピンの σ^z の積と、plaquetteの周りの4つのスピンの σ^x の積からなる。

$$H = - \sum_v A_v - \sum_p B_p = - \sum_{\substack{j \\ k-v-i \\ l}} \sigma_i^x \sigma_j^x \sigma_k^x \sigma_l^x - \sum_{\substack{j \\ k \\ l}} \sigma_i^z \sigma_j^z \sigma_k^z \sigma_l^z \quad (15)$$

全ての項が可換 $[A_v, A_{v'}] = [B_p, B_{p'}] = [A_v, B_p] = 0$ なので可解である。⁴ 実空間を閉じた2次元トーラスとしよう。すると、ハミルトニアンの各項は独立ではなく、 $\prod_v A_v = \prod_p B_p = 1$ なので、qubit 2個分の自由度が残り、全てのエネルギー固有状態が4重縮退する。基底状態は $A_p = B_p = 1$ を満たし、第1励起状態はどこかの頂点において $A_v = -1$ 、あるいはどこかのplaquetteにおいて $B_p = -1$ なる状態なので、系のサイズに関わりなくエネルギー $+2$ を持ち、この系はギャップのある系である。

局所的な摂動に対する基底状態の縮退の安定性はハミルトニアンと可換な2種類のWilson line $X_c, Z_{\tilde{c}}$ の存在によって理解できる。ひとつは任意の1サイクル c 上の σ^x のテンソル積、もう一つは、dual latticeにおける任意の1サイクル \tilde{c} 上の σ^z のテンソル積で与えられる。

$$X_c = \prod_{i \in c} \sigma_i^x, \quad Z_{\tilde{c}} = \prod_{i \in \tilde{c}} \sigma_i^z. \quad (16)$$

4つの独立なWilson lineが存在し、 c と \tilde{c} が奇数回の交差がある場合に X_c と $Z_{\tilde{c}}$ は反可換となり、エネルギー固有状態はこの対称性の表現なので4重縮退する。Wilson lineが定義されている1サイクルを、局所的な摂動を加えた領域から離して選ぶことができることから、基底状態の縮退の安定性がわかる。

⁴励起状態も含めて、全てのエネルギー固有状態が計算できる、という意味。

2 空間1次元のボソン系

本節では1次元のボソンのSPT相について、具体的な模型を用いてSPT相の基本的性質について紹介し、SPT相を特徴づける非局所秩序変数について見ていく。

2.1 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 対称性

最も簡単な非自明なSPT相の例は1次元の $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 対称性のあるボソン系である。整数サイト $j \in \mathbb{Z}$ と半整数サイト $j + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ 上のスピン1/2の自由度からなる系を考え、スピン演算子をそれぞれ σ_j , $\tau_{j+\frac{1}{2}}$ と書く。対称性として、次の大域的 $\mathbb{Z}_2^x \times \mathbb{Z}_2^z$ 対称性を考える。

$$\text{Symmetry generator : } U_\sigma = \prod_j \sigma_j^x, \quad \text{charged object : } \sigma_j^z, \quad (17)$$

$$\text{Symmetry generator : } U_\tau = \prod_j \tau_{j+\frac{1}{2}}^x, \quad \text{charged object : } \tau_{j+\frac{1}{2}}^z. \quad (18)$$

自明なハミルトニアンは

$$H_0 = - \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sigma_j^x - \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tau_{j+\frac{1}{2}}^x \quad (19)$$

であり、その基底状態は無秩序状態

$$|\Psi_0\rangle = \cdots |+\rangle_{j-1} |+\rangle_{j-\frac{1}{2}} |+\rangle_j |+\rangle_{j+\frac{1}{2}} |+\rangle_{j+1} \cdots \quad (20)$$

となる。

自明な基底状態 $|\Psi_0\rangle$ と断熱的には繋がらない基底状態が存在する。2つのイジング模型を混ぜたような次の模型を考えよう。

$$H_1 = - \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sigma_j^z \tau_{j+\frac{1}{2}}^x \sigma_{j+1}^z - \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tau_{j-\frac{1}{2}}^z \sigma_j^x \tau_{j+\frac{1}{2}}^z. \quad (21)$$

クラスターハミルトニアンとして知られる模型であり、全ての項が互いに可換であり、閉じたリング上においても各項は独立で基底状態に縮退は存在しない。どれくらい自明なテンソル積状態とは異なるかを見るため、具体的に基底状態を求めよう。第1項について固有状態 $\sigma_j^z \tau_{j+\frac{1}{2}}^x \sigma_{j+1}^z |\psi\rangle = |\psi\rangle$ は $\sigma_j^z \sigma_{j+1}^z = \tau_{j+\frac{1}{2}}^x$ を満たす。 $\sigma_j^z = \{\uparrow, \downarrow\}$, $\tau^x = \{+, -\}$ 基底でみると、 σ_j^z のスピン向きが \uparrow, \downarrow のように揃っていれば $\tau_{j+\frac{1}{2}}^x = +$ を、スピンの向きが \uparrow, \downarrow のように揃っていなければ (domain wallと言う) $\tau_{j+\frac{1}{2}}^x = -$ をdecorateした状態となる：

$$\left\{ \left| \begin{array}{cccccccc} + & - & + & - & + & + & - & + & + \\ \downarrow & \downarrow & \uparrow & \uparrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array} \right\rangle \right\} \quad (22)$$

これをdecorated domain wall(DDW)状態と呼ぶ。(例えば、[9]) 第2項はDDW状態を別のDDW状態に移すので、クラスターハミルトニアン H_1 の基底状態は、DDW状態を重み1で重ね合わせた状態として得られる。

$$|\Psi_1\rangle = \sum_{\text{DDW}} \left| \begin{array}{cccccccc} + & - & + & - & + & + & - & + & + \\ \downarrow & \downarrow & \uparrow & \uparrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array} \right\rangle \quad (23)$$

第1励起状態は、ハミルトニアンのいずれかの項のエネルギーを+1の固有状態なので、系のサイズに関係なく基底状態からエネルギーギャップ $E_{\text{gap}} = 2$ があり、ギャップのある相である。

2.2 端状態

$|\Psi_0\rangle$ と $|\Psi_1\rangle$ とがトポロジカルに異なる基底状態であることが、いろいろな側面から示すことができる。ひとつの方法は、端状態を調べることである。両端を τ で切り、open chainのハミルトニアンを

$$H_1^{\text{open}} = - \sum_{j=1}^{N-1} \sigma_j^z \tau_{j+\frac{1}{2}}^x \sigma_{j+1}^z - \sum_{j=1}^N \tau_{j-\frac{1}{2}}^z \sigma_j^x \tau_{j+\frac{1}{2}}^z. \quad (24)$$

とする。すぐにわかることは $2N+1$ 個の自由度に対して、基底状態を決める条件は $2N-1$ 個なので基底状態が4重縮退する。実際、DDW状態において端の τ スピンは自由な自由度として残る：

$$|\Psi_1(a, b)\rangle = \sum_{\text{DDW}} \left| (\tau_{\frac{1}{2}}^x = a) - \text{DDW} - (\tau_{N+\frac{1}{2}}^x = b) \right\rangle, \quad a, b \in \{+, -\}. \quad (25)$$

実は、端のfree spinの存在は、対称性によって保護されており、摂動に対して安定である。このことを見るために基底状態に対して $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 対称性がどのように作用するか見よう。基底状態がハミルトニアンの各項を1にする条件から、対称性の生成子の基底状態への制限は

$$U_\sigma |\Psi_1\rangle = \prod_{j=1}^N \sigma_j^x \Big|_{\Psi_1} = \prod_{j=1}^N \tau_{j-\frac{1}{2}}^z \tau_{j+\frac{1}{2}}^z = \tau_{\frac{1}{2}}^z \otimes \tau_{N+\frac{1}{2}}^z, \quad (26)$$

$$U_\tau |\Psi_1\rangle = \prod_{j=0}^N \tau_{j+\frac{1}{2}}^x \Big|_{\Psi_1} = \tau_{\frac{1}{2}}^x \left(\prod_{j=1}^{N-1} \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z \right) \tau_{N+\frac{1}{2}}^x = \tau_{\frac{1}{2}}^x \sigma_1^z \otimes \sigma_N^z \tau_{N+\frac{1}{2}}^x. \quad (27)$$

となる。この表式を見てわかることは、基底状態においては $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 対称性が端のみに作用し、かつ端の自由度へ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 対称性が非自明な射影表現として作用している。

$$U_\sigma |_{\Psi_1} = U_\sigma^L \otimes U_\sigma^R, \quad U_\tau |_{\Psi_1} = U_\tau^L \otimes U_\tau^R, \quad U_\sigma^{L/R} U_\tau^{L/R} = -U_\tau^{L/R} U_\sigma^{L/R}. \quad (28)$$

サイトに定義される系の自由度が $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ の線形表現である限り、端状態の射影表現の因子群が属する群コホモロジーは、摂動により変化しないので、左と右端の状態が混ざらない限り、端に現れた自由スピンは安定に保たれる。一方で、自明状態 $|\Psi_0\rangle$ においては、いかなる端状態も出現しない。局所的な相互作用項のみによって両端の状態を混ぜるためには、エネルギーギャップを一度閉じる必要がある。よって、 $|\Psi_0\rangle$ と $|\Psi_1\rangle$ は断熱的には繋がらず、トポロジカルに異なる状態である。

一般に射影表現の因子群は2次の群コホモロジーで分類される。よって端状態の分類の観点から、1次元SPT相は群コホモロジー $H^2(G, U(1))$ によって分類される。

2.3 ねじれ境界条件と分配関数

ここでは自明状態 $|\Psi_0\rangle$ と $|\Psi_1\rangle$ がトポロジカルに異なる状態であることの、別説明を与える。

クラスターハミルトニアン(21)の特徴は、片方の \mathbb{Z}_2 対称性のdomain wallにもう片方の \mathbb{Z}_2 対称性の非自明な1次元表現（つまり、0次元SPT相） $\tau_{j+\frac{1}{2}}^x = -$ をdecorateすることにある。このような性質の有無を模型の詳細に関係なく検出する方法がある。 σ スピンのイジング項のひとつ $-\sigma_N^z \tau_{\frac{1}{2}}^x \sigma_1^z$ に注目しよう。仮に、この項の係数の符号が $+\sigma_N^z \tau_{\frac{1}{2}}^x \sigma_1^z$ と反転すると、 σ のdomain wallに τ スピンの1次元表現をdecorateする規則が反転するので、基底状態における \mathbb{Z}_2 電荷 U_τ が変化する。このようなハミルトニアンの変形は、模型の詳細に依らず次のように実行できる。

無限に伸びた1次元鎖のハミルトニアン(21)において、 N を相関長に比べて十分大きな整数とし、並進対称性

$$T_x \sigma_j T_x^{-1} = \sigma_{j+N}, \quad T_x \tau_j T_x^{-1} = \tau_{j+N}, \quad (29)$$

を課し、この並進対称性を用いてサイト j とサイト $j+N$ のスピンを同一視

$$\sigma_j \sim T_x \sigma_j T_x^{-1} = \sigma_{j+N}, \quad \tau_j \sim T_x \tau_j T_x^{-1} = \tau_{j+N} \quad (30)$$

して系を割ることにより、閉じた1次元リング上のハミルトニアンが得られる：

$$H_1 = - \sum_{j=1}^N \sigma_j^z \tau_{j+\frac{1}{2}}^x \sigma_{j+1}^z - \sum_{j=1}^N \tau_{j-\frac{1}{2}}^z \sigma_j^x \tau_{j+\frac{1}{2}}^z. \quad (31)$$

大域的対称性が存在する場合は、系を並進対称性で割る際に、さらに $\mathbb{Z}_2^x \times \mathbb{Z}_2^z$ の対称性変換をかけることができる。例えば、 \mathbb{Z}_2^z 対称性により境界条件をねじるとは、同一視

$$\sigma_j \sim (T_x U_\sigma) \sigma_j (T_x U_\sigma)^{-1} = U_\sigma \sigma_{j+N} U_\sigma^{-1} = \begin{cases} \sigma_{j+N}^x \\ -\sigma_{j+N}^y \\ -\sigma_{j+N}^z \end{cases}, \quad \tau_j \sim (T_x U_\sigma) \tau_j (T_x U_\sigma)^{-1} = \tau_{j+N} \quad (32)$$

で系を割ることである。 \mathbb{Z}_2^z ねじれ境界条件によって得られたハミルトニアンは

$$H_1^\sigma = - \sum_{j=1}^{N-1} \sigma_j^z \tau_{j+\frac{1}{2}}^x \sigma_{j+1}^z + \sigma_N^z \tau_{N+\frac{1}{2}}^x \sigma_1^z - \sum_{j=1}^N \tau_{j-\frac{1}{2}}^z \sigma_j^x \tau_{j+\frac{1}{2}}^z. \quad (33)$$

となる。具体的な模型を用いているが、ねじれ境界条件の導入方法は系の詳細に依存せず対称性のみで決まることに注意されたい。 H_1^σ の基底状態を $|\Psi_1^\sigma\rangle$ と書こう。 \mathbb{Z}_2^z 境界条件下のハミルトニアン H_1^σ は $\mathbb{Z}_2^x \times \mathbb{Z}_2^z$ 対称性を有するので、基底状態 $|\Psi_1^\sigma\rangle$ は \mathbb{Z}_2^z 電荷 $U_\tau |\Psi_1^\sigma\rangle = \pm |\Psi_1^\sigma\rangle$ を持ち、これはSPT不変量の1種である。より一般に、自明相と非自明相を区別する指標は、通常の境界条件とねじれ境界条件下の基底状態における U_τ 電荷を比較することにより得られる：

$$\frac{\langle \Psi^\sigma | U_\tau | \Psi^\sigma \rangle}{\langle \Psi | U_\tau | \Psi \rangle} \in \{1, -1\}. \quad (34)$$

この値は1であれば自明なSPT状態、 -1 であれば非自明なSPT状態である。

注意) 1次元SPT相の分類は無限系において定義される。1次元の有限のリングにおけるSPT相においては、上で示したように大域的対称性 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ に加えて、 \mathbb{Z} の並進対称性が存在する。SPT相の分類は群コホモロジー $-H^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, U(1)) \cong H^2(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, U(1)) \times H^1(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, U(1)) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2^{\times 2}$ で与えられる。実際、1次元リング上においては、独立な3つのSPT不変量が存在する： $\langle \Psi | U_\sigma | \Psi \rangle, \langle \Psi | U_\tau | \Psi \rangle, \langle \Psi^\sigma | U_\tau | \Psi^\sigma \rangle \in \{1, -1\}$ 。

2.4 トーラス分配関数

上で見た $\langle \Psi^\sigma | U_\tau | \Psi^\sigma \rangle$ は、絶対零度の極限における、非自明な $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ の外場におけるトーラス上の分配関数に他ならない。トーラス分配関数は、ねじれない境界条件(30)における分配関数

$$Z(T^2) = \text{Tr}[e^{-\beta H}] = \sum_n e^{-\beta \epsilon_n} \quad (35)$$

で与えられる。 β は逆温度であり、 \sum_n は全てのエネルギー固有状態に渡って和を取る。系の基底状態に縮退がなく、かつ基底状態と第1励起状態との間に有限のエネルギーギャップが存在する場合は、絶対零度の極限 $\beta \rightarrow 0$ において、基底状態のみが分配関数に寄与する。

$$Z(T^2) \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} \langle \Psi | \Psi \rangle = 1. \quad (36)$$

1次元のリング上においては、ねじれ境界条件と対称性変換により、非自明な $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ の外場下のトーラス分配関数を定義することができる。ねじれ境界条件を課したハミルトニアン H^σ, H^τ は、空間方

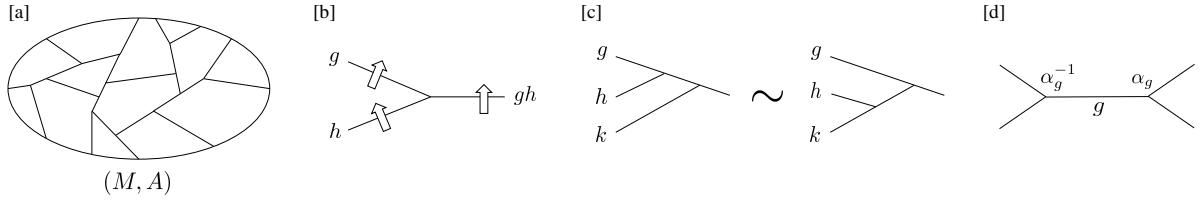


Figure 1

向に非自明なホロノミーをもった外場に対応する：

$$Z \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \sigma \end{array} \right) = \langle \Psi^\sigma | \Psi^\sigma \rangle = 1. \quad (37)$$

また，対称性変換 U_σ, U_τ を作用させることは虚時間方向に非自明なホロノミーも持った外場に対応する：

$$Z \left(\begin{array}{|c|} \hline \tau \square \\ \hline \sigma \end{array} \right) = \langle \Psi | U_\tau | \Psi \rangle \in \{1, -1\}. \quad (38)$$

すると，ねじれ境界条件下における基底状態における対称性の電荷， $\langle \Psi^\sigma | U_\tau | \Psi^\sigma \rangle$ は，空間と虚時間方向に非自明なホロノミーが存在する外場中でのトーラス分配関数である：

$$Z \left(\begin{array}{|c|} \hline \tau \square \\ \hline \sigma \end{array} \right) = \langle \Psi^\sigma | U_\tau | \Psi^\sigma \rangle \in \{1, -1\}. \quad (39)$$

2.5 Symmetry defect network と群コホモロジー

上で見たように，大域的対称性が存在すれば，ねじれ境界条件，及び，対称性変換を作用させることにより，演算子形式において，非自明な $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 外場のもとにおけるトーラス上の分配関数が定義でき，かつ，基底状態に縮退がなければ，分配関数へは単一の基底状態のみが寄与し，分配関数は $U(1)$ に値を取る。

演算子形式を離れて，経路積分形式に移り，一般の向き付けのある閉じた2次元リーマン面上の $U(1)$ 値の分配関数 $Z(M, A)$ の分類を求めよう。 G を有限群とし， A を背景 G 場とする。 G 場を指定するひとつの方法は，上で導入したようなSymmetry defectのネットワークにより外場を記述する方法がある。あるsymmetry defectネットワークは背景 G 場 A のひとつの配位を記述する(図1 [a])。線分は $g \in G$ でラベルされ，その線分を通るcharged objectは g でchargeされる。ネットワークの接合点においては，図1[b]のように群構造を保つ。理論がトポロジカルな場合は，分配関数は場の配位 (M, A) のトポロジーによってのみ決まることを用いて，可能な分配関数の分類を導こう。 $U(1)$ 値の分配関数は， $g, h \in G$ の接合点における $U(1)$ 位相 $\omega(g, h) \in U(1)$ の積で書くことができる，と仮定しよう。

$$Z(M, A) = \prod_{\text{junctions}} \omega(g, h), \quad \omega : G \times G \rightarrow U(1). \quad (40)$$

分配関数が背景 G 場のトポロジーにのみ依存することは，図1[c]に示したネットワークの変形に対して分配関数が不変であること，つまり， $\omega(g, h)$ に対する2コサイクル条件，及び，正規化条件

$$\omega(g, h)\omega(gh, k) = \omega(g, hk)\omega(h, k), \quad (41)$$

$$\omega(1, g) = \omega(g, 1) = \omega(g, g^{-1}) = 1 \quad (42)$$

と等価である。⁵ また、 g -symmetry defect の両端を $\alpha_g \in U(1)$ によって $\omega(g, h)$ を再定義に対して閉じた閉曲面における分配関数は不変に保たれるので (図1[d]),

$$\omega(g, h) \sim \omega(g, h) \alpha_g \alpha_h \alpha_{gh}^{-1} \quad (43)$$

は同一の理論とみなされなければならない, これは2コバウンダリ条件である. 結局, $U(1)$ 値のトポロジカルな分配関数は群コホモロジー $H^2(G, U(1))$ によって分類されることがわかる.

再び, 2 次の群コホモロジー出てきたが, 偶然ではない. バルクの分配関数が群コホモロジー $[\omega(g, h)]$ で与えられる理論に対し, 半無限の1次元系は同一の群コホモロジーに属する G の射影表現でなければならない.

$$\begin{array}{c} | \\ \hline g \\ \hline h \\ | \end{array} = \begin{array}{c} | \\ \cap \\ \hline gh \\ | \end{array} = \omega(g, h) \begin{array}{c} | \\ \hline gh \\ | \end{array} \quad (44)$$

ω が非自明な群コホモロジーに属する場合は, 対称性変換の再定義によって $U(1)$ 位相 $\omega(g, h)$ を消すことができない. 端の $(0+1)$ 次元系に注目したとき, h と g の連続した対称性変換は1度の対称性変換 gh とゲージ同値なので, $\omega(g, h)$ が消えずに起こる場合は, G 対称性の外場 A に対して理論はゲージ不変ではない.

より一般の空間次元においても(40)を拡張してトポロジカル作用を構成できる. [10] 詳しくは, 付録Bを見て頂きたい. d 次元時空中で定義された理論において, 背景 G 場のゲージ変換 $A \mapsto A + \delta\alpha$ に対して理論の分配関数が d 次元のいかなるカウンター項を加えてもゲージ不変にできないとき't Hooft アノマリーがある, と言う. 時空 $(d+1)$ 次元のSPT相の分類と, 時空 d 次元の't Hooft アノマリーの分類は一致することが知られている. (例えば, [1, 11, 12].)

3 時間反転対称性によって保護された1次元スピン鎖

本章では時間反転対称性によって保護されたボソンの1次元SPT相とその非局所秩序秩序変数について扱う.

3.1 模型と端状態

整数サイト上のスピン1/2の自由度からなる系を考え, 時間反転対称性を

$$T = \left(\prod_j \sigma_j^x \right) K \quad (45)$$

としよう. ここで K は複素共役である. 各サイトにおいては, 時間反転対称性は線形表現 $T_j = \sigma_x K, T_j^2 = 1$ であることに注意する. SPT相の分類は \mathbb{Z}_2 で与えられることが知られており, 自明なSPT相の模型は $H_0 = -\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sigma_j^x$, 非自明なSPT相は, 再びクラスターハミルトニアンで与えられる:

$$H_1 = -\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sigma_{j-1}^z \sigma_j^x \sigma_{j+1}^z. \quad (46)$$

⁵ この2つの条件から分配関数が接合点における2つの線 g, h の選び方に依存しないことも従う.

このハミルトニアン基底状態が、自明なハミルトニアン基底状態とは断熱的に繋がらないことが、再び、端状態の存在によって示すことができる。Open chainを考えよう：

$$H_1^{\text{open}} = - \sum_{j=2}^{N-1} \sigma_{j-1}^z \sigma_j^x \sigma_{j+1}^z \quad (47)$$

自由度 N 個に対して条件 $N-2$ 個であり、端に自由なスピンの出現する。時間反転対称性の基底状態への制限は

$$T|\Psi_1\rangle = \left(\prod_{j=1}^N \sigma_j^x \right) K \Big|_{\Psi_1} = \sigma_1^x \left(\prod_{j=2}^{N-1} \sigma_{j-1}^z \sigma_{j+1}^z \right) \sigma_N^x K = (-i\sigma_1^y) \otimes (-i\sigma_N^y) K \quad (48)$$

となる。再び、(i)基底状態において、時間反転対称性は系の両端にのみ作用し、(ii)片方の時間反転対称性に注目すると非自明な射影表現である。すると、左と右の自由度が混ざらない限り、端状態はバルクのギャップを閉じない摂動に対して安定である。

さて、このような時間反転対称性によって保護された1次元SPT相において、(34)に類似の”秩序変数”が存在するか？この間に対する解答は、行列積状態(Matrix product state)を用いることによりPollmann-Turnerによって与えられた。[2]ここでは、その導出の、よりTQFT的な説明を試みよう。

3.2 時間反転対称性 = 虚時間方向の反転対称性

時間反転対称性は虚時間方向の反転対称性 $\tau \mapsto -\tau$ に他ならない。例を挙げる。1粒子の量子力学を考えよう。⁶ 時間反転対称性を

$$\hat{T} \hat{p} \hat{T}^{-1} = -\hat{p}, \quad \hat{T} \hat{q} \hat{T}^{-1} = \hat{q} \quad (49)$$

とし、時間反転対称性 $\hat{T} H(\hat{p}, \hat{q}) \hat{T}^{-1} = H(-\hat{p}, \hat{q}) = H(\hat{p}, \hat{q})$ を課す。このとき、虚時間形式の経路積分における作用

$$e^{-S(\mathbf{p}, \mathbf{q})} = \exp \int d\tau \left[i\mathbf{p}(\tau) \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tau}(\tau) - H(\mathbf{p}(\tau), \mathbf{q}(\tau)) \right] \quad (50)$$

は積分変数の変換

$$T_E : \quad \mathbf{p}(\tau) \mapsto -\mathbf{p}(-\tau), \quad \mathbf{q}(\tau) \mapsto \mathbf{q}(-\tau) \quad (51)$$

に関して不変である。

SPT相の分配関数 $Z(M, A)$ が、 $U(1)$ に値を取るトポロジカルな分配関数によって記述されることが正しいのであれば、TQFTの有する時空の回転対称性により、時間反転対称性と空間反転対称性によって保護されたSPT相は同一のトポロジカルな分配関数で記述されると期待できる。そのため、まずは空間反転対称性によって保護されたSPT相について考えよう。

3.3 空間反転対称性によって保護されたスピン鎖

空間反転対称性 $x \mapsto -x$ によって保護された1次元SPT相を考えよう。他の大域的対称性は存在しないものとする。大域的対称性とは異なり、空間反転対称性は反転中心近傍 $x \sim 0$ 以外の波動関数の性質に対してなんの制限を加えることはない。よって空間反転対称性のある基底状態の分類は反転中心近傍でのみ決まる。[13] 論点を明確にするため、並進対称性 $x \mapsto x + 2N$ を課し、系を1次元リングとす

⁶もちろんスピン系でも同じ議論が可能だが、経路積分形式が $O(3)$ 非線形シグマ模型となるので、ここではその説明は行わない。

る。反転中心は $x \sim 0$ と $x \sim N$ の2点存在する。(図2[a])反転中心においては、空間反転対称性は0次元の \mathbb{Z}_2 対称性として作用するので、基底状態のトポロジカルな分類は、 $x \sim 0$ と $x \sim N$ における反転の \mathbb{Z}_2 電荷で与えられ、 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ となる。

さて、問題は $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ のSPT相を検出する非局所秩序演算子が存在するか、である？ j をスピンの定義されたサイトとし、空間反転対称性を

$$I\sigma_j I^{-1} = \sigma_{-j}, \quad I = \prod_{0 < j < N} P(j, -j) \quad (52)$$

として考えよう。ここで $P(i, j)$ は i サイトと j サイトのスピンの入れ替え演算子 $P(i, j) = \frac{1}{2} + 2\sigma_i \cdot \sigma_j$ である。この空間反転対称性に対して、例えば $j, -j$ サイトのBell対

$$\frac{|\uparrow\rangle_j |\downarrow\rangle_{-j} - |\downarrow\rangle_j |\uparrow\rangle_{-j}}{\sqrt{2}} \quad (53)$$

は反転操作に対してoddである。ただし、このようなBell対は、ハミルトニアン of 局所性の仮定より、 $j \sim 0$ 近傍、あるいは $j \sim N$ 近傍においてのみ許される。また、テンソル積状態

$$|\psi\rangle_j \otimes |\psi\rangle_{-j} \quad (54)$$

は反転に対してevenである。 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ の4つのトポロジカルに異なる基底状態の例は以下である：

$$|\Psi_{00}\rangle = \bigotimes_j |\uparrow\rangle_j, \quad (55)$$

$$|\Psi_{10}\rangle = \frac{|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_{-1} - |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_{-1}}{\sqrt{2}} \otimes \bigotimes_{j \neq 1, -1} |\uparrow\rangle_j, \quad (56)$$

$$|\Psi_{01}\rangle = \frac{|\uparrow\rangle_{N-1} |\downarrow\rangle_{N+1} - |\downarrow\rangle_{N-1} |\uparrow\rangle_{N+1}}{\sqrt{2}} \otimes \bigotimes_{j \neq N-1, N+1} |\uparrow\rangle_j, \quad (57)$$

$$|\Psi_{11}\rangle = \frac{|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_{-1} - |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_{-1}}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|\uparrow\rangle_{N-1} |\downarrow\rangle_{N+1} - |\downarrow\rangle_{N-1} |\uparrow\rangle_{N+1}}{\sqrt{2}} \otimes \bigotimes_{j \neq 1, -1, N-1, N+1} |\uparrow\rangle_j. \quad (58)$$

系は大域的対称性を持たないので、ねじれ境界条件を導入できず、系の詳細に依らず定義できる物理量は基底状態における空間反転対称性の期待値のみである。

$$\langle \Psi | I | \Psi \rangle \in \{1, -1\}. \quad (59)$$

しかし、このSPT不変量のみでは $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 分類のすべてを検出することは不可能である。 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ の全てのSPT相を検出するには、反転対称性を部分的に作用させる以外に手法はない。 l を系の相関長より十分大きい長さとし、反転操作を $-l < x < l$ に制限した次の部分的反転操作を定義する。

$$I_l := \prod_{0 < j < l} P(j, -j). \quad (60)$$

図2[b]を見よ。部分的反転操作は、反転対称性の演算子を用いて系の詳細に依存せず定義できるので、非局所秩序変数の候補である。しかし、部分的反転操作は系の対称性ではないので、一般には、 I_l は基底状態の対称性ではなく、振幅のロスがあり、その $U(1)$ 位相は量子化した値を返さない。

$$|\langle \Psi | I_l | \Psi \rangle| \leq 1. \quad (61)$$

しかし、 l が相関長 ξ よりも十分大きければ、 $\langle \Psi | I_l | \Psi \rangle$ の $U(1)$ 位相部分が量子化することが期待できる。実際、他に大域的対称性が存在し端状態が存在する場合においても、部分反転操作の期待値の $U(1)$ 位相部分が量子化することがMPSにより示すことができる。[2]

部分反転操作は、 $U(1)$ 値のトポロジカルな分配関数の分類から見ると自然なSPT不変量であることがわかる。空間反転対称性が存在する場合には、場のパッチ変換において向き付けを変化させる

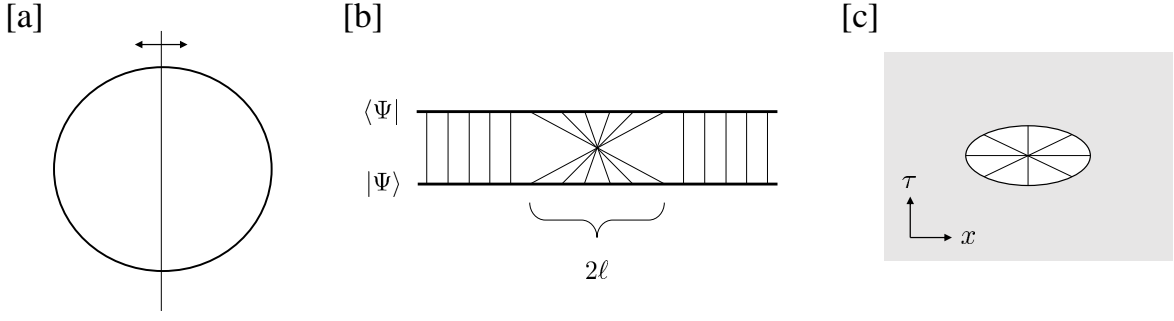


Figure 2

座標変換が可能である。すると、向き付けの不可能な時空多様体上の分配関数を定義することができ、向き付けの存在しない2次元の時空多様体 M に対して $U(1)$ 値の分配関数であり、トポロジカルなものが存在するかどうかの問題となる。大域的対称性は存在しないので外場は存在しないが、時空多様体自身の情報を用いてトポロジカル作用を構成できる。一般に、時空多様体 M に対して、その接束 TM のStiefel-Whitney類 $w_n(TM) \in H^n(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ はトポロジカル作用を構成する要素となる。時空2次元の場合、候補となるトポロジカル作用は $\int_M w_1^2$ と $\int_M w_2$ である。一般論より時空2次元の場合、 $w_1^2 + w_2 = 0$ が成立するので、非自明なトポロジカル作用は1種類であり、

$$\int_M w_2(TM) \quad (62)$$

で与えられる。すると、 \mathbb{Z}_2 が自明、非自明な理論のトポロジカル作用は $\nu \in \{0, 1\}$ を用いて

$$Z_\nu(M) = e^{\pi i \nu \int_M w_2(TM)} \quad (63)$$

によって与えられる。どのように ν を検出するか、つまり、どのような多様体に対して、2次のSW数 $\int_M w_2 = 1$ を与えるか、が問題となるが、これは実射影平面 RP^2 によって与えられる。⁷

$$Z_\nu(RP^2) = e^{\pi i \nu \int_{RP^2} w_2(T(RP^2))} = (-1)^\nu. \quad (64)$$

よって、経路積分の立場においては、実射影平面 RP^2 上の分配関数がSPT相を検出するSPT不変量となる。^[14]

では、演算子形式、つまり状態 $|\Psi\rangle$ と対称性演算子 I のみで \mathbb{Z}_2 のSPT不変量を構成するにはどうするか。実射影平面は球面にクロスキャップをひとつ導入して得られることを思い出す。(図2[c])すると、部分的反転操作は虚時間の経路積分において、クロスキャップとして働き、部分反転操作の基底状態の期待値は、実射影空間の分配関数を”simulate”しており、特に、 ℓ が相関長 ξ に比べて十分大きい場合は、トポロジカルな寄与が支配的であり、特に $U(1)$ 位相部分は量子化する。

$$\frac{\langle \Psi | I_\ell | \Psi \rangle}{|\langle \Psi | I_\ell | \Psi \rangle|} \xrightarrow{\ell \gg \xi} (-1)^\nu. \quad (65)$$

この例の教訓は、SPT不変量を構成するため、空間全体で定義された対称性を空間のある部分領域に制限するような操作を導入する必要がある、という点にある。

注意) フルの反転操作 I の期待値はKlein bottle(KB)上の分配関数である。

$$\langle \Psi | I | \Psi \rangle = Z(KB). \quad (66)$$

しかし、Klein bottleに対して $\int_{KB} w_2 = 0$ なので、SPT相を検出することはできない。

⁷より一般に、クロスキャップが奇数個であれば $\int_M w_2(TM) = 1$ である。

3.4 時間反転対称性と転置

時間反転対称性に戻る。TQFTの立場では空間反転対称性と時間反転対称性は等価であり、つまり、時間反転対称性で保護されたSPT相においても、SPT相を検出するためには、実射影平面 RP^2 をsimulateする必要がある。では時間反転演算を用いて実射影平面 RP^2 をsimulateするにはどうすれば良いか。空間反転対称性の例で見たように、クロスキャップを導入するには、空間のある部分領域に対して対称性変換を施す必要があるが、時間反転対称性は複素共役を含み、複素共役は波動関数の全てのサイトに作用するので、“部分的時間反転操作”は存在しない。部分的な変換を定義できる操作は、反線形でなく、何らかの線形な操作に限る。では、時間反転対称性から線形な操作を構成する標準的な方法は存在するか？答えは、時間反転のユニタリ部分 U と行列の転置を組み合わせた操作 $\mathcal{O} \mapsto U\mathcal{O}^T U^\dagger$ となる。以下、このheuristicな導出をしよう。

状態 $|\psi\rangle$ に対し、時間反転対称性 T の期待値 $\langle\psi|T|\psi\rangle$ は、 $U(1)$ 位相の再定義 $|\psi\rangle \mapsto e^{i\theta} |\psi\rangle$ に対して不変でないので、意味を持たない量である。しかし、その絶対値は意味を持つ。これを変形する。あるHilbert空間の基底 $\{|j\rangle\}$ をひとつ固定して、その基底における時間反転対称性を $T = UK$ とする。つまり、 $T|j\rangle = |i\rangle U_{ij}$ である。このとき、 $\langle\psi|T|\psi\rangle$ の絶対値は、 $|\psi\rangle = \sum_i \psi_i |i\rangle$, $\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_{ij} \psi_i \psi_j^* |i\rangle\langle j|$ として、

$$|\langle\psi|T|\psi\rangle|^2 = \langle\psi|U(|\psi\rangle\langle\psi|)^*(\langle\psi|)^*U^\dagger|\psi\rangle = \text{Tr}[\rho U \rho^* U^\dagger] = \text{Tr}[\rho U \rho^T U^\dagger] \quad (67)$$

となる、ここで $\rho^* = \sum_{ij} \psi_i^* \psi_j |i\rangle\langle j| = \sum_{ij} \psi_i \psi_j^* |j\rangle\langle i| = \rho^T$ を用いた。ここで、時間反転対称性のユニタリ部分 U と密度行列の転置を組み合わせた操作 $U\rho^T U^\dagger$ が出現したが、これは偶然ではなく、時間反転対称性を用いて定義でき、基底の選び方に依存しない自然な線形変換であることがわかる。

まず、そもそも行列の転置は基底の選び方に依存するnon-canonicalな線形変換であることに注意する。実際、 $\{|i\rangle\}$ 基底で定義された転置を \mathcal{O}^T , $\{|\tilde{j}\rangle\}$ 基底で定義された転置を $\mathcal{O}^{\tilde{T}}$ と書くと、

$$\mathcal{O} = |\tilde{i}\rangle\langle\tilde{i}|\mathcal{O}|\tilde{j}\rangle\langle\tilde{j}| = |k\rangle\langle k| V_{ki} \langle\tilde{i}|\mathcal{O}|\tilde{j}\rangle V_{jl}^\dagger |l\rangle \quad (68)$$

より、

$$\mathcal{O}^T = |l\rangle\langle l| V_{ki} \langle\tilde{i}|\mathcal{O}|\tilde{j}\rangle V_{jl}^\dagger \langle k| = |\tilde{m}\rangle\langle\tilde{m}| V_{mi}^\dagger V_{ki} \langle\tilde{i}|\mathcal{O}|\tilde{j}\rangle V_{jl}^\dagger V_{kn} \langle\tilde{n}| = (V^\dagger V^*)\mathcal{O}^{\tilde{T}}(V^T V) \quad (69)$$

となり、一般に $V^T V \neq 1$ なので転置の定義が基底に依存してしまう。行列代数において、一般の線形なanti-automorphism $\mathcal{O} \mapsto \phi(\mathcal{O})$,

$$\phi(\alpha\mathcal{O}_1 + \beta\mathcal{O}_2) = \alpha\phi(\mathcal{O}_1) + \beta\phi(\mathcal{O}_2), \quad \phi(\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2) = \phi(\mathcal{O}_2)\phi(\mathcal{O}_1), \quad (70)$$

は、あるユニタリ行列 U を用いて $\phi(\mathcal{O}) = U\mathcal{O}^T U^\dagger$ と書くことができることを思い出そう。 V による基底変換後の行列代数における ϕ を $\tilde{\phi}(\mathcal{O}) = \tilde{U}\mathcal{O}^T \tilde{U}^\dagger$ と書くと、 ϕ が基底に依存せず定義されているとは、基底変換と ϕ が可換であることを意味する。すると、条件 $\tilde{\phi}(V^\dagger\mathcal{O}V) = V^\dagger\phi(\mathcal{O})V$ より、

$$U = V\tilde{U}V^T \quad (71)$$

が従う。これは、時間反転のユニタリ部分 U の変換性に他ならない：

$$U_{ij} = \langle i|T|j\rangle = V_{ik} \langle\tilde{k}|T(|\tilde{l}\rangle V_{lj}^\dagger) = (V\tilde{U}V^T)_{ij} \quad (72)$$

したがって、時間反転対称性 $T = UK$ が存在すれば、基底に依存しない転置 $\mathcal{O} \mapsto U\mathcal{O}^T U^\dagger$ が定義される。

3.5 部分転置と向き付けのない時空

転置操作は線形な変換なので、空間のある部分領域に作用できる。1次元空間の部分領域 $A \cup B$ に注目し、 $A \cup B$ 上の縮約密度行列

$$\rho_{A \cup B} = \text{tr}_{\overline{A \cup B}}(\rho) = \sum_{j \notin A \cup B} \langle j|\rho|j\rangle \quad (73)$$

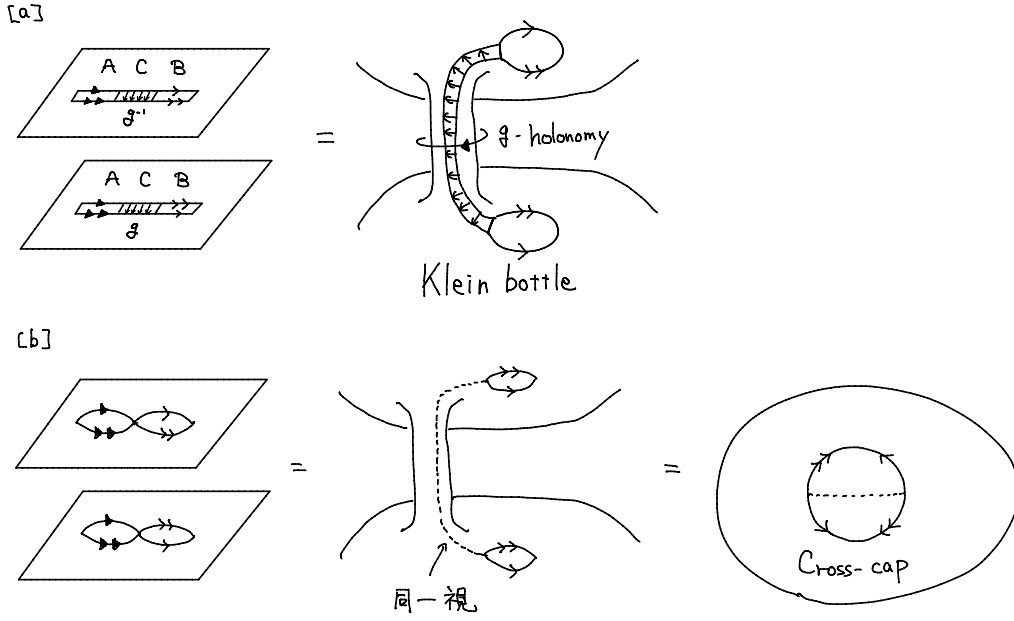


Figure 3

を定義する．ここで j は $A \cup B$ 以外の基底において和を取る．縮約密度行列 $\rho_{A \cup B}$ は $A \cup B$ における基底で展開できる．

$$\rho_{A \cup B} = \sum_{i, j \in A, k, l \in B} |i, k\rangle \langle i, k| \rho_{A \cup B} |j, l\rangle \langle j, l| \quad (74)$$

縮約密度行列 $\rho_{A \cup B}$ の A に関する部分転置 $\rho_{A \cup B}^{T_A}$ は、領域 A のみに関する転置として定義される．

$$\rho_{A \cup B}^{T_A} := |j, k\rangle \langle i, k| \rho_{A \cup B} |j, l\rangle \langle i, l| \quad (75)$$

前節で注意したように、転置は基底に依存する．時間反転対称性 $T = (\otimes_j U_j) K$ が存在すれば、基底に依存しない部分転置が定義できる：

$$(U|_A) \rho_{A \cup B}^{T_A} (U|_A)^\dagger, \quad U|_A := \prod_{j \in A} U_j. \quad (76)$$

部分転置のトポロジーについて考えよう．部分転置と向き付けない時空についてコメントしたのは[15]が最初の文献だと思う．次の量を考えよう．[2]

$$Z_{PT} := \text{tr} \left[\rho_{A \cup B} (U|_A) \rho_{A \cup B}^{T_A} (U|_A)^\dagger \right] \quad (77)$$

本ノートでは、このある種の相関関数を Pollmann-Turner 不変量と呼ぼう． A と B が離れている場合 (disjoint two intervals) は対応する時空は Klein bottle のハンドルに対応する (図3[a])．[15] また、 A と B が接している場合は、クロスキャップに対応する (図3[b])．[4]

Pollmann-Turner は MPS を用いて、 A, B が接している場合 (adjacent two intervals) に、領域 A, B の長さ $|A|, |B|$ が相関長 ξ より十分大きいとき Z_{PT} の $U(1)$ 位相が \mathbb{Z}_2 値に量子化し、時間反転対称性によって保護された SPT 相を検出できることを示した．

$$\frac{Z_{PT}}{|Z_{PT}|} \xrightarrow{|A|, |B| \gg \xi} \pm 1. \quad (78)$$

これは、トポロジカル作用による分類の結果(64)と矛盾しない．

もっと一般に、大域的 G 対称性が存在する場合は disjoint two interval の場合に A と B の間(C と書く)に $g \in G$ 対称性変換を導入することができる。サイト j における $g \in G$ 対称性変換を \hat{g}_j と書くと、 g -twistをはさんだ縮約密度行列は

$$\rho_{A \cup B}(g) := \text{tr}_{A \cup B} \left[\prod_{j \in C} \hat{g}_j \rho \right] \quad (79)$$

と定義される。Klein bottle上の背景場が矛盾なく定義されるための条件から $Tg^{-1}T = g$ が従い、 g -twistありのPollmann-Turner不変量

$$Z_{PT}(g) = \text{tr} \left[\rho_{A \cup B}(g)(U|_A) (\rho_{A \cup B}(g^{-1}))^{T_A} (U|_A)^\dagger \right] \quad (80)$$

が得られる。 $Z_{PT}(g)$ は g -holonomy付きのKlein bottle上の分配関数をsimulateする。

4 フェルミオンの部分転置とSPT不変量

本節では、前節で導入したボソン系の部分転置をフェルミオン系に拡張し、向き付けのないPin多様体上の分配関数を基底状態と時間反転の演算子によって計算する手法について解説する。

4.1 Kitaev模型

1次元のフェルミオン系を考える。非自明なSPT相を記述する基本的な模型は次のKitaev模型である。系の自由度として、1サイト当たり1つの複素フェルミオン c_j を考える。フェルミオン系の常として、フェルミオンのパリティ対称性、つまりフェルミオン数の偶奇の保存は仮定する。

$$(-1)^F := \prod_{j \in \mathbb{Z}} (-1)^{c_j^\dagger c_j}, \quad [(-1)^F, H] = 0. \quad (81)$$

Kitaev模型は、hopping 項 t 、ケミカルポテンシャル μ 、超伝導ギャップ関数 Δ の項からなる。[16]

$$H = \sum_j \left[-t(c_j^\dagger c_{j+1} + c_{j+1}^\dagger c_j) - \mu(c_j^\dagger c_j - \frac{1}{2}) + \Delta(c_j c_{j+1} + c_{j+1}^\dagger c_j^\dagger) \right]. \quad (82)$$

マヨラナ・フェルミオン a_j, b_j を

$$a_j = c_j + c_j^\dagger, \quad b_j = -i(c_j - c_j^\dagger). \quad (83)$$

により導入すると、ハミルトニアンは

$$H = \frac{i}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} [-\mu a_j b_j + (t + \Delta) b_j a_{j+1} + (-t + \Delta) a_j b_{j+1}]. \quad (84)$$

となる。相関長がゼロの自明相と非自明相のハミルトニアンはそれぞれ

$$H_0 \Big|_{\mu < 0, t = \Delta = 0} = \frac{i}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j b_j = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (c_j^\dagger c_j - \frac{1}{2}), \quad (85)$$

$$H_1 \Big|_{\mu = 0, t = \Delta > 0} = \frac{i}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} b_j a_{j+1} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (d_{j,j+1}^\dagger d_{j,j+1} - \frac{1}{2}) \quad (86)$$

で与えられる。図4を見よ。自明相 H_0 の基底状態は c_j フェルミオンのフォック真空 $|0\rangle_c, c_j |0\rangle = 0$ ($\forall j$)である。一方で、非自明相 H_1 の基底状態は、リンク $(j, j+1)$ に定義された複素フェルミオン $d_{j,j+1}$,

$$b_j = d_{j,j+1} + d_{j,j+1}^\dagger, \quad a_{j+1} = -i(d_{j,j+1} - d_{j,j+1}^\dagger), \quad (87)$$

のフォック真空 $|0\rangle_d, d_{j,j+1} |0\rangle_d = 0$ ($\forall j$)となる。

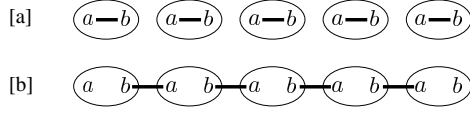


Figure 4

4.2 端状態

H_0 と H_1 の基底状態が断熱的に繋がらないことを、端状態の存在より示そう。 $j = 1$ から $j = N$ サイトのopen chainを考える。非自明相のハミルトニアンは

$$H_1 = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{N-1} b_j a_{j+1}. \quad (88)$$

となる。自由度 N 個に比べて条件は $(N - 1)$ 個なので、 H_1 の基底状態は2重縮退する。この2重縮退は模型の特殊性でなく、基底状態における非局所なフェルミオンパリティ対称性に基づく。マヨラナ表示で、フェルミオンパリティは $(-1)^F = \prod_{j=1}^N (-ia_j b_j)$ であるが、基底状態への制限は、 $-ib_j a_{j+1} = 1$ より、

$$(-1)^F \Big|_{\text{ground states}} \sim -ia_1 b_N \quad (89)$$

となる。局所的なフェルミオンパリティの積として定義されていたフェルミオンパリティが基底状態においては両端のマヨラナフェルミオン a_1, b_N によって非局所に定義されている。系の基本的な構成要素として複素フェルミオンを考える限り、端に局在する奇数個のマヨラナフェルミオンはバルクのギャップを一度閉じない限り消すことができない。よって、 H_1 の基底状態は H_0 の自明な基底状態とは断熱的に繋がらず、トポロジカルに異なる基底状態だと結論づけられる。

4.3 SPT不変量とトラス分配関数

ボソン系と類似のトラス分配関数を用いたSPT不変量の構成方法がある。並進対称性 $T_x c_j T_x^{-1} = c_{j+N}$ を課し、1次元リング状のハミルトニアンを考えよう。フェルミオンパリティ対称性は大域的対称性の1種なので、2種類の境界条件を導入することができる：

$$\text{Ramond :} \quad c_j \sim T_x c_j T_x^{-1} = c_{j+N}, \quad (90)$$

$$\text{Neveu-Schwarz :} \quad c_j \sim T_x (-1)^F c_j (T_x (-1)^F)^{-1} = -c_{j+N}. \quad (91)$$

非自明相の特徴はリンクに定義された複素フェルミオン $d_{j,j+1}$ が有効な自由度となることにあり、非自明相であれば境界条件の変化に対して応答する。SPT不変量は、2つの境界条件下におけるフェルミオンパリティの比で与えられる。

$$(-1)^{\nu_{1d}} = \frac{\langle \Psi_R | (-1)^F | \Psi_R \rangle}{\langle \Psi_{NS} | (-1)^F | \Psi_{NS} \rangle} \in \{1, -1\}. \quad (92)$$

実際、非自明相 H_1 においては、Ramond (R)セクターとNeveu-Schwarz (NS)セクターのハミルトニアンはそれぞれ

$$H_1^{R/NS} = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{N-1} b_j a_{j+1} \pm \frac{i}{2} b_N a_1 = \sum_{j=1}^{N-1} (d_{j,j+1}^\dagger d_{j,j+1} - \frac{1}{2}) \pm (d_{N,1}^\dagger d_{N,1} - \frac{1}{2}) \quad (93)$$

となり、 $(-1)^{\nu_{1d}} = -1$ となる。また、そもそもR,NSセクターにおけるフェルミオンパリティは、SPT不変量であり、 $(-1)^{\nu_{1d}}$ とは独立に、 $(-1)^{\nu_{0d}} = \langle \Psi_{NS} | (-1)^F | \Psi_{NS} \rangle \in \{1, -1\}$ が定義できる。これは、0次元としてのSPT相を特徴づけるSPT不変量である。⁸

⁸ \mathbb{Z} の並進対称性の存在下においては、SPT相の分類は $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ で与えられる。

基底状態におけるフェルミオンパリティの期待値は、絶対零度の極限におけるトーラス分配関数である。トポロジカル作用の立場から上の結果を再考しよう。向き付けのある2次元スピン多様体 (M, η) のトポロジカル作用は \mathbb{Z}_2 に値を取るArf不変量 (η 不変量) $\text{Arf}(M, \eta) \in \{0, 1\}$ で与えられる。(例えば, [17]) ここで, η は M 上のスピン構造である。すると, 自明相と非自明相を区別するラベルを $\nu \in \{0, 1\}$ として, トポロジカル分配関数は

$$Z_\nu(M, \eta) = (-1)^{\nu \text{Arf}(M, \eta)} \quad (94)$$

で与えられる。トーラス上では,

$$\text{Arf}(T^2, R, R) = 1, \quad \text{Arf}(T^2, R, NS) = \text{Arf}(T^2 NS, R) = \text{Arf}(T^2, NS, NS) = 0 \quad (95)$$

である。⁹すると, RRセクターのトーラス分配関数がTQFTの立場におけるSPT不変量である。

$$Z_\nu(T^2, \eta = (R, R)) = \langle \Psi_R | (-1)^F | \Psi_R \rangle = (-1)^\nu. \quad (96)$$

フェルミオン系においては, $(-1)^F$ を挟むと虚時間方向は周期境界条件となることに注意。1次元のSPT相の分類と比較するためには, 0次元のSPT相の寄与を引き去る必要があることに注意。実際, NS-RセクターのArf不変量は自明であるが, トーラス分配関数は非自明となり得る: $Z(T^2, NS, R) = \langle \Psi_{NS} | (-1)^F | \Psi_{NS} \rangle \in \{1, -1\}$.

4.4 時間反転対称性で保護されたフェルミオン鎖: \mathbb{Z}_8 SPT相

続いて, 本章の主題である, 時間反転対称性に移ろう。フェルミオン系においては非等価な2種類の時間反転対称性にはが存在し, それぞれKramers対を組まないか組むか, に対応する。

$$T^2 = 1, \quad T^2 = (-1)^F. \quad (97)$$

ここでは前者を考える。

時間反転対称性 T , $T^2 = 1$, によって保護された1次元フェルミオン系のSPT相は, Fidkowski-Kitaevによって端に出現するマヨラナフェルミオンのなすヒルベルト空間の性質を調べることによって \mathbb{Z}_8 で分類されることが示され, [18] その後, Kapustin-Thorngren-Turzillo-Wangによってトポロジカル作用の分類の観点から, Pin_- コボルディズム $\Omega_2^{\text{Pin}_-} = \mathbb{Z}_8$ [19]で記述されることが指摘された。[20]ここではこれらの詳細は述べないが, 後の議論で必要な事項のみをまとめておく

- \mathbb{Z}_8 を生成するモデルは, Kitaev鎖(86)であり, 時間反転対称性は $Tc_jT^{-1} = c_j$ と定義される。
- Pin_- コボルディズム $\Omega_2^{\text{Pin}_-} = \mathbb{Z}_8$ の generating manifold は実射影平面 RP^2 である。¹⁰

2点目より, \mathbb{Z}_8 のSPT相を検出する方法は, 実射影平面上の分配関数を基底状態と対称性変換 T によって simulate すればよく, また, 実射影平面は部分転置によって構成できることをすでに知っているので, この方針で \mathbb{Z}_8 に値を取るSPT不変量を構成しよう。ただし, フェルミオン系においては, 部分転置の定義が自明ではない。

4.5 時間反転対称性 = 虚時間方向のCR対称性

ボソン系と同じく, フェルミオン系においても時間反転対称性は経路積分形式における虚時間方法の反転対称性 $\tau \mapsto -\tau$ となる。しかし, グラスマン数の反可換性に注意しなければならない。複素フェル

⁹Rセクターはリング内部に π -fluxを必要とする。一方でNSセクターはリング内部にfluxはなく, リングそのものを1点に縮めることができる。よって真に空間1次元系のSPT不変量を検出するには, Rセクターでなければならない。

¹⁰ $H^1(RP^2, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ の2通り存在する背景 Pin_- 構造は, どちらでも良い。

ミオン $\{\hat{c}_j\}$ で構成されたハミルトニアン

$$\hat{H} = \sum_{ij} \hat{c}_i^\dagger h_{ij} \hat{c}_j \quad (98)$$

を考えよう。簡単のため $U(1)$ 対称性のある自由フェルミオンと仮定したが、以下の議論は一般化可能である。虚時間発展の経路積分作用は $c_j(\tau), \bar{c}_j(\tau)$ を独立なグラスマン場として

$$e^{-S[c, \bar{c}]} = \exp \left[- \int d\tau \bar{c}_j(\tau) [\partial_\tau \delta_{jk} + h_{jk}] c_k(\tau) \right] \quad (99)$$

で与えられる。時間反転対称性

$$\hat{T} \hat{c}_j^\dagger \hat{T}^{-1} = \hat{c}_k^\dagger [\mathcal{U}_T]_{kj}, \quad \hat{T} i \hat{T}^{-1} = -i, \quad \mathcal{U}_T \mathcal{U}_T^* = \pm 1. \quad (100)$$

を \hat{H} に課すと、 $\hat{T} \hat{H} \hat{T}^{-1} = \hat{H}$ は $\mathcal{U}_T h^* \mathcal{U}_T = h$ と等価である。このとき、作用は次の変数変換に対して不変である：

$$T_E : \begin{cases} c_j(\tau) \mapsto i \bar{c}_k(-\tau) [\mathcal{U}_T]_{kj}, \\ \bar{c}_j(\tau) \mapsto i [\mathcal{U}_T^\dagger]_{jk} c_k(-\tau). \end{cases} \quad (101)$$

$\tau \mapsto -\tau$ なので虚時間方向の反転対称性であるが、次の特徴がある。

- c と \bar{c} を入れ替える charge conjugation reflection (CR)対称性である。
- グラスマン数の反可換性からくる相対的な因子 -1 が存在する。上では $i \times i$ とした。そのため、 T_E 変換を2回行った結果は、 $\hat{T}^2 = 1$ であれば $T_E^2 = -1$ 、 $\hat{T}^2 = (-1)^F$ であれば $T_E^2 = 1$ である。

2つ目のポイントより、 $\hat{T}^2 = 1$ なる時間反転対称性に対応するフェルミオンの時空の構造は Pin_- 構造であることがわかる。

4.6 フェルミオンの部分転置

フェルミオンのフォック空間上の演算子に対する転置の適切な定義はなんだろうか。答えはマヨラナフェルミオン $\{a_j\}$ に対する順番の入れ替え $a_1 a_2 \cdots a_n \mapsto a_n \cdots a_2 a_1$ なのだが、ここでは演算子形式による部分転置の導出[7]の詳細には立ち入らず、経路積分形式で欲しい部分転置を定義しよう。

目的は、Pollmann-Turnerによって導入された表式(77)が向き付けのない時空多様体上の分配関数を simulate するように部分転置と時間反転対称性のユニタリ部分の組み合わせ $(U|_A) \rho_{AUB}^{T_A} (U|_A)^\dagger$ を定義することである。そのためには、サイト j における転置操作が虚時間方向の反転操作(101)となっていれば良い。以下では簡単のため $\mathcal{U}_T = 1$ 、つまり $\hat{T} \hat{c}_j \hat{T}^{-1} = \hat{c}_j$ としよう。すると、あるサイト j において転置の満たすべき条件は、

$$(U|_j) (|c_j\rangle \langle \bar{c}_j|)^T (U|_j)^\dagger = |i\bar{c}_j\rangle \langle ic_j| \quad (102)$$

となる。ここで、 c_j, \bar{c}_j はグラスマン数であり、 $|c_j\rangle = e^{-c_j \hat{c}_j^\dagger} |0\rangle$, $\langle \bar{c}_j| = \langle 0| e^{-\hat{c}_j c_j}$ はコヒーレント状態である。表式

$$|c_j\rangle \langle \bar{c}_j| = e^{-c_j \hat{c}_j^\dagger} (1 - \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_j) e^{-\hat{c}_j c_j} \quad (103)$$

より明らかなように、上の転置の定義(102)は空間位置に関して局所的なので、容易に空間のある部分領域について定義できる。コヒーレント状態による演算子の基底に対して、領域 A に関する部分転置を

$$(U|_A) (|\{c_{j \in A}\}, \{c_{j \in B}\}\rangle \langle \{\bar{c}_{j \in A}\}, \{\bar{c}_{j \in B}\}|)^{T_A} (U|_A)^\dagger := |\{i\bar{c}_{j \in A}\}, \{c_{j \in B}\}\rangle \langle \{ic_{j \in A}\}, \{\bar{c}_{j \in B}\}| \quad (104)$$

と定義する. すると, Pollmann-Turner不変量(77)は A と B が離れているときはKlein bottleを, A と B が接している場合は実射影平面上の分配関数に対応する. \mathbb{Z}_8 のSPT不変量の数値計算に関しては[5, 7]を見て頂きたい.

いくつかコメントを残す.

- コヒーレント状態を占有状態基底 $|\{n_j\}\rangle := (f_1^\dagger)^{n_1} \dots (f_N^\dagger)^{n_N} |0\rangle$ で展開し,

$$|\{c_{j \in A}\}, \{c_{j \in B}\}\rangle = \sum_{\{n_j\}} (-c_N)^{n_N} \dots (-c_1)^{n_1} |\{n_j\}\rangle, \quad (105)$$

部分転置(104)を適用すると, 占有数基底における部分転置の定義が得られる. [5, 7]

$$\begin{aligned} & (U|_A) (|\{n_{j \in A}\}, \{n_{j \in B}\}\rangle \langle \{\bar{n}_{j \in A}\}, \{\bar{n}_{j \in B}\}|)^{T_A} (U|_A)^\dagger \\ & = i^{[\tau_A + \bar{\tau}_A]} (-1)^{(\tau_A + \bar{\tau}_A)(\tau_B + \bar{\tau}_B)} |\{\bar{n}_{j \in A}\}, \{n_{j \in B}\}\rangle \langle \{n_{j \in A}\}, \{\bar{n}_{j \in B}\}|. \end{aligned} \quad (106)$$

ここで, $\{0, 1\}$ に値を取る数

$$\tau_A = \sum_{j \in A} n_j, \quad \tau_B = \sum_{j \in B} n_j, \quad \bar{\tau}_A = \sum_{j \in A} \bar{n}_j, \quad \bar{\tau}_B = \sum_{j \in B} \bar{n}_j, \quad [\tau] = \begin{cases} 0 & (\tau : \text{even}) \\ 1 & (\tau : \text{odd}) \end{cases} \quad (107)$$

を定義した. (106)を見るとわかるように, 部分転置 $(U|_A) \rho_{A \cup B}^{T_A} (U|_A)^\dagger$ は状態に依存する $U(1)$ 位相を除いて, 占有数基底における行列の転置である.

- 一般の時間反転対称性(100)に対する部分転置は

$$(U|_A) (|\{c_{j \in A}\}, \{c_{j \in B}\}\rangle \langle \{\bar{c}_{j \in A}\}, \{\bar{c}_{j \in B}\}|)^{T_A} (U|_A)^\dagger := |\{(i\mathcal{U}_T \bar{c})_{j \in A}\}, \{c_{j \in B}\}\rangle \langle \{(ic \mathcal{U}_T^\dagger)_{j \in A}\}, \{\bar{c}_{j \in B}\}| \quad (108)$$

で与えられる.

- ボソン系における部分転置は, Peres-Horodecki criterionとして知られる混合状態のエンタングルメントの指標に応用がある. Entanglement negativity は

$$\mathcal{N}(\rho_{A \cup B}) = \frac{\|\rho_{A \cup B}^{T_A}\| - 1}{2}, \quad \|\mathcal{O}\| = \text{Tr} \sqrt{\mathcal{O} \mathcal{O}^\dagger} \quad (109)$$

と定義され, LOCC (local quantum operations and classical communication) によって増加しない, つまり, entanglement monotoneであることが知られている. フェルミオンの部分転置を用いて定義された fermion entanglement negativity [21]についても類似の性質が知られており, フェルミオンのパリティを保存するLOCCに対して entanglement monotone である. [22] さらに, フェルミオン系のSeparabilityに関する未解決の予想もあるので, 興味があれば[22]を見て頂きたい.

5 $U(1)$ 対称性が存在する場合のSPT不変量

これまで触れてこなかったタイプのSPT不変量, 特に, $U(1)$ 対称性が存在する場合の例を紹介する.

5.1 $U(1)$ 対称性とTwist演算子, Berry位相

空間1次元の系で大域的 $U(1)$ 対称性がある系を考えよう. 物質自由度はボソン, フェルミオンのどちらでも良い. ボソン系の例はスピンの z 軸周りの回転対称性 $e^{i\theta S_z}$. フェルミオン系の例は, 複素フェ

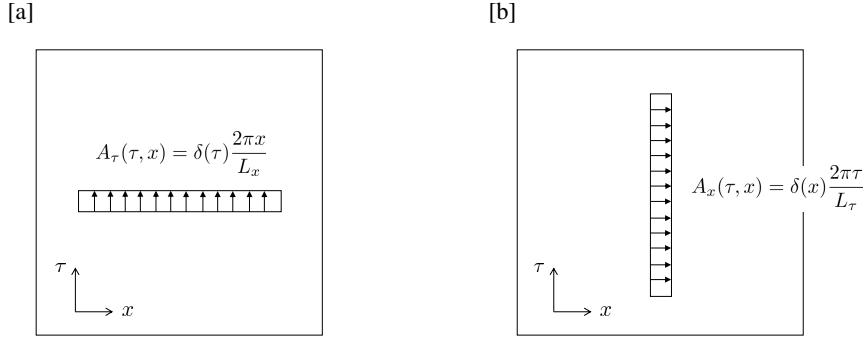


Figure 5

ルミオンの $U(1)$ 位相の回転対称性 $e^{i\theta\hat{Q}}$ である。 $U(1)$ 対称性の背景場 A を導入する。 閉じた2次元時空多様体 M 上において field strength $F = dA$ の積分は整数 $\int_M \frac{F}{2\pi} \in \mathbb{Z}$ に量子化し、次の $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ でラベルされたトポロジカル作用が存在する。

$$\exp \left[i\theta \int_M \frac{F}{2\pi} \right]. \quad (110)$$

よって、大域的 $U(1)$ 対称性が存在し、基底状態が一意でギャップのある系の基底状態は θ でラベルされることがわかる：

$$Z_\theta[M, A] = \exp \left[i\theta \int_M \frac{F}{2\pi} \right]. \quad (111)$$

物理的には、 θ は電気分極を表す。

さて、基底状態 $|\Psi\rangle$ と $U(1)$ 対称性の演算子により物質パラメータ θ を検出するにはどうすれば良いだろうか。 そのためには $\int_M F = 2\pi$ となる外場を演算子形式で再現すれば良い。 ここでは2通りの方法を考えよう。

$\int_M F = 2\pi$ なる外場の導入方法で簡単なものは、図5[a]に示したように、時刻 $\tau = 0$ においてある空間領域 $0 < x < L_x$ において虚時間方向の $U(1)$ 場を

$$A_\tau(\tau, x) = \begin{cases} \delta(\tau) \frac{2\pi x}{L_x} & (0 < x < L_x) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (112)$$

とすることである。 $U(1)$ 場 A は $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ に値を取ることに注意せよ。 明らかに $\int_M F = \int d\tau dx (-\partial_x A_\tau) = -2\pi$ となる。 外場(112)は演算子形式において実現可能である。 $U(1)$ 対称性の生成子

$$U_\theta = \prod_x e^{i\theta \hat{n}_x} \quad (113)$$

に対し、外場(112)を虚時間発展において実現する演算子は

$$U_{\text{twist}} = \prod_{0 < x < L_x} e^{\frac{2\pi i x}{L_x} \hat{n}_x} \quad (114)$$

となる。 この演算子はLieb-Schultz-Mattisのtwist演算子と呼ばれており、様々な応用が存在する。 Twist演算子の基底状態の期待値は、 $\int_{T^2} F = 2\pi$ を満たす背景場付きのトーラス分配関数に対応し、

$$\langle \Psi | U_{\text{twist}} | \Psi \rangle \sim Z \left[T^2, \int_{T^2} F = 2\pi \right] = e^{i\theta} \quad (115)$$

となり、基底状態の性質 θ を検出できる。

もうひとつの方法は、上の外場(112)を時空で90°回転したもので、ある虚時間領域 $0 < \tau < L_\tau$ において空間方向に $U(1)$ 場を

$$A_x(\tau, x) = \begin{cases} \delta(x) \frac{2\pi\tau}{L_\tau} & (0 < \tau < L_\tau) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (116)$$

と導入することによって得られる。図5[b]を見よ。この $U(1)$ 場 $A_x(\tau, x)$ は時刻 τ におけるねじれ境界条件を表す。境界条件を $\alpha \in U(1)$ でねじったハミルトニアンに対する基底状態を $|\Psi(\alpha)\rangle$ と書こう。すると、背景場(116)におけるトラス分配関数は $|\Psi(\alpha)\rangle$ のBerry位相で与えられる。

$$\exp \oint_0^{2\pi} \langle \Psi(\alpha) | d_\alpha | \Psi(\alpha) \rangle \sim Z \left[T^2, \int_{T^2} F = 2\pi \right] = e^{i\theta}. \quad (117)$$

5.2 量子Hall効果

次に、空間2次元で $U(1)$ 対称性が存在する系を考えよう。対称性は再び、大域的 $U(1)$ 対称性を仮定する。(2+1)次元の時空多様体において、次のChern-Simons項と呼ばれる“トポロジカル”作用が存在する。¹¹

$$e^{-S_M(A)} = \exp \frac{ik}{4\pi} \int_M \text{“} AdA \text{”}. \quad (118)$$

ボソンの $U(1)$ 対称性の場合 $k \in 2\mathbb{Z}$ に量子化され、複素フェルミオンの $U(1)$ 対称性の場合 (A は Spin^c 場) は $k \in \mathbb{Z}$ に量子化される。物理的には、 k は e^2/h を単位とする量子化されたHall係数 $\sigma_{xy} = k$ である。また k を多体のChern数と呼ぶこともある。

整数値 k を検出する方法はいくつかが知られており、ここでは基底状態から直接 k を検出する方法を紹介する。閉じた空間 M_{2d} において外場 $A_x(x, y), A_y(x, y)$ 下におけるハミルトニアンの基底状態 $|\Psi(A)\rangle$ を考える。 $|\Psi(A)\rangle$ の $U(1)$ 電荷は $e^{i\theta\hat{Q}} = e^{i\theta \int_{M_{2d}} \hat{n}(x, y)}$ で測ることができる。基底状態に縮退が存在せず、ギャップを持つ場合は分配関数は(118)によって与えられるので、¹²

$$\langle \Psi(A) | e^{i\theta\hat{Q}} | \Psi(A) \rangle = \exp ik \int_{\mathbb{R}^2} A_\tau \int_{M_{2d}} \frac{F_{xy}}{2\pi} = \exp ik\theta \int_{M_{2d}} \frac{F_{xy}}{2\pi} \quad (119)$$

すると、 θ で微分すると、基底状態の $U(1)$ 電荷が整数 k と M_{2d} 内の磁気モノポール数 $m_g = \int_{M_{2d}} \frac{F_{xy}}{2\pi}$ で与えられることがわかる。

$$\langle \Psi(A) | \hat{Q} | \Psi(A) \rangle = km_g. \quad (120)$$

特に $m_g = 1$ のとき、整数 k を基底状態の $U(1)$ 電荷として検出できる。磁気fluxを0から 2π まで断熱的に印加したときにポンプされる $U(1)$ 電荷の数が量子Hall係数なので、この結果は量子Hall効果の帰結である。実際は量子Hall係数とは無関係な0次元SPT相としての $U(1)$ 電荷が存在するので、その効果を打ち消すため、自明な外場中の $U(1)$ 電荷 $\langle \Psi | e^{i\theta\hat{Q}} | \Psi \rangle$ との比が2次元のSPT相としてのSPT不変量である。結局、量子Hall係数 k は

$$k = \left\langle \Psi \left(\int F_{xy} = 2\pi \right) \left| \hat{Q} \right| \Psi \left(\int F_{xy} = 2\pi \right) \right\rangle - \langle \Psi | \hat{Q} | \Psi \rangle \quad (121)$$

で与えられる。

トラス上に定義された系において、モノポール背景場 $\int_{T^2} F_{xy} = 2\pi$ を与えるハミルトニアンの構成方法をひとつ紹介しよう。5.1節で行った構成を (x, y) 空間において行えばよい。 x, y 方向の長さ

¹¹ AdA という表式は局所的にのみ正しい表式であり大域的には正しくない。さらに Spin^c 場の場合は、多様体 M の情報から来る補正がある。また、 $\int_M \text{“} AdA \text{”}$ 自体は量子化はしないことにも注意。理論を特徴づける係数 k が量子化するので、 $k \in \mathbb{Z}$ で特徴づけられるSPT相の存在がわかる。

¹²(118)と比べると係数2が異なるように見えるが、これで正しい。

が L_x, L_y で与えられるトーラスにおいて, x 方向の周期境界条件を y に依存して次のように取れば良い:

$$\psi_{x+L_x, y} = e^{\frac{2\pi i y}{L_y}} \psi_{x, y}, \quad \psi_{x, y+L_y} = \psi_{x, y} \quad (122)$$

例えば, Chern絶縁体の格子模型において上記のSPT不変量(121)は容易に数値計算ができるので, 各自で確認して頂きたい.

5.3 フェルミオン, $U(1) \times CR$ 対称性

空間2次元のフェルミオン系において, $U(1)$ 対称性と CR 対称性

$$e^{i\theta\hat{Q}}\psi_{x,y}^\dagger e^{-i\theta\hat{Q}} = e^{i\theta}\psi_{x,y}^\dagger, \quad (123)$$

$$CR\psi_{x,y}(CR)^{-1} = \psi_{-x,y}^\dagger \mathcal{U}_{CR}, \quad CR|0\rangle = |\text{full}\rangle, \quad \mathcal{U}_{CR}^T = \mathcal{U}_{CR} \quad (124)$$

によって保護されたSPT相を考える. 対応するPin構造は Pin_\pm^c 構造と呼ばれ, $T^2 = (-1)^F$ の時間反転対称性とCRT双対の関係にある. コボルディズムは $\Omega_3^{\text{Pin}_\pm^c} = \mathbb{Z}_2$ で与えられ, [23]分類は \mathbb{Z}_2 である. $(CR)^2 = 1$ に注意する. したがって CR 不変な状態に対して, CR の期待値は ± 1 に値を取る.

\mathbb{Z}_2 に値を取るSPT不変量は, 単位モノポールを持つ背景 $U(1)$ 場下における基底状態の CR の期待値で与えられることが, 以下の議論より理解できる. [12]モノポール背景場は R 対称性を持たないが, CR 対称性は許容することに注意されたい. \mathbb{Z}_2 非自明なSPT相の模型は, Chern数1を持つChern絶縁体 H_\uparrow と, その CR 変換を取ったChern数-1を持つChern絶縁体 H_\downarrow のスタックにより構成される. すると, 単位モノポール背景場の基底状態は, 量子Hall効果により電荷がポンプ/放出され, 背景場なしの基底状態と比べて CR 対称な複素フェルミオンの粒子・反粒子対

$$\chi_\uparrow^\dagger \chi_\downarrow \quad (125)$$

が生じる. CR 対称性は $CR\chi_\uparrow^\dagger(CR)^{-1} = \chi_\downarrow, CR\chi_\downarrow(CR)^{-1} = \chi_\uparrow^\dagger$ と作用するので, この粒子・反粒子対は CR に対して奇パリティを持つ.

$$CR\chi_\uparrow^\dagger\chi_\downarrow(CR)^{-1} = -\chi_\uparrow^\dagger\chi_\downarrow. \quad (126)$$

この奇パリティが \mathbb{Z}_2 のSPT不変量に他ならない. 基底状態から検出するには, 単位モノポール背景場と背景場なしの基底状態の CR パリティを比較すれば良い. SPT不変量は

$$(-1)^\nu = \frac{\langle \Psi(\int F = 2\pi) | CR | \Psi(\int F = 2\pi) \rangle}{\langle \Psi | CR | \Psi \rangle} \in \{1, -1\} \quad (127)$$

で与えられる.

SPT不変量を与える時空多様体について確認しておこう. CR は空間に $(x, y) \mapsto (-x, y)$ と作用するので, CR の期待値を取ることは, 同一視 $(\tau, x, y) \sim (\tau + L_\tau, L_x - x, y)$ を引き起こし, (τ, x) 方向についてはKlein bottle (KB)を得る. よって時空の大域的構造は, 空間 (x, y) において τ 方向に対して一様に単位モノポール背景場 $\int F_{xy} = 2\pi$ を持つ, $KB_{\tau, x} \times S_y^1$ である. 図6を見よ. モノポール背景場は(122)によって導入される.

5.4 フェルミオン, $U(1) \times T$ 対称性

最後に, 量子スピンHall効果[24]として知られる, 空間2次元のフェルミオン系のSPT相を取り上げよう. 対称性は $U(1)$ 対称性, 及び, クラマース対をもつ時間反転対称性

$$e^{i\theta\hat{Q}}\psi_{x,y}^\dagger e^{-i\theta\hat{Q}} = e^{i\theta}\psi_{x,y}^\dagger, \quad (128)$$

$$T\psi_{x,y}^\dagger T^{-1} = \psi_{x,y}^\dagger \mathcal{U}_T, \quad TiT^{-1} = -i, \quad \mathcal{U}_T \mathcal{U}_T^* = -1 \quad (129)$$

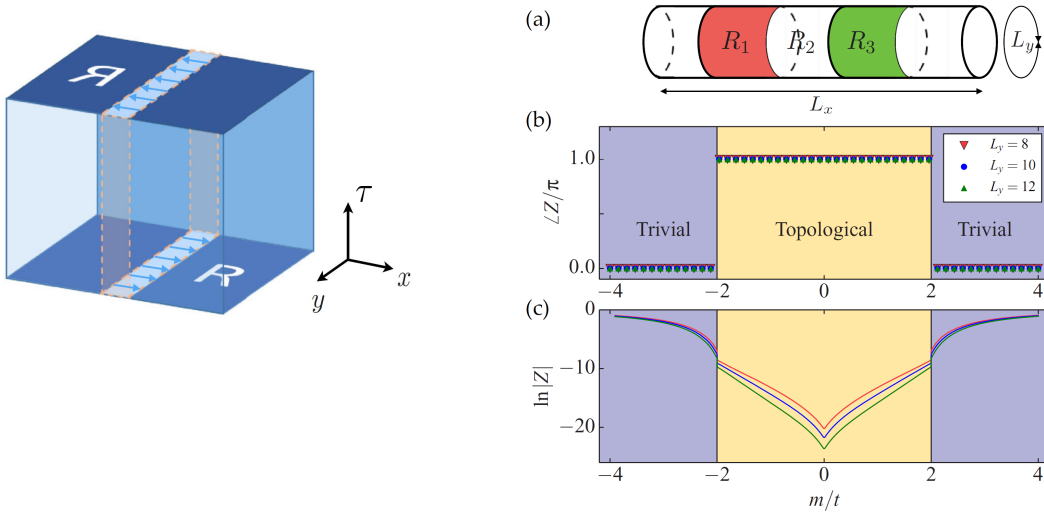


Figure 6: 図は[7]より.

とする. (101)で見たように, $T^2 = (-1)^F$ なる時間反転対称性は虚時間方向の CR 対称性となり, さらに $(CR)^2 = 1$ なので, 対応するPin構造は再び Pin_\pm^c 構造であり, TQFTとしては前節と等価である. 特に \mathbb{Z}_2 のSPT不変量を与える時空多様体は, 単位モノポール背景場を有する $\text{Klein bottle} \times S^1$ である. しかし, 使える対称性は CR ではなく時間反転対称性なので, 4.6節で導入したフェルミオンの部分転置により Klein bottle を構成しなければならない. 図6左の $\text{Klein bottle} \times S^1$ において, $y = \text{const.}$ の Klein bottle は x 方向に $e^{\frac{2\pi iy}{L_y}}$ のホロノミーがある Klein bottle なので, 3.5節で導入した disjoint two interval に対する部分転置により構成できる (図3[b]を見よ). [7]

$|\Psi\rangle$ をトーラス上の基底状態とする. x 方向の3つの接した領域 $R_1 \cup R_2 \cup R_3$ に注目する (図6右の(a)). 基底状態 $|\Psi\rangle$ に対して, 領域 R_2 にのみ y 方向のtwist演算子を作用させ, 縮約密度行列を作る:

$$\rho_{R_1 \cup R_3}^\pm := \text{tr}_{R_1 \cup R_3} \left[\prod_{x \in R_2, y \in S^1} e^{\pm \frac{2\pi iy}{L_y} \hat{n}(x,y)} |\Psi\rangle \langle \Psi| \right]. \quad (130)$$

この縮約密度行列のPollmann-Turner不変量が \mathbb{Z}_2 のSPT不変量である.

$$Z_{PT} := \text{tr}_{R_1 \cup R_3} [\rho_{R_1 \cup R_3}^+(U|_{R_1})(\rho_{R_1 \cup R_3}^-)^{T_{R_1}}(U|_{R_1})^\dagger], \quad (131)$$

$$\frac{Z_{PT}}{|Z_{PT}|} \xrightarrow{|R_1|, |R_2|, |R_3| \gg \xi} \pm 1. \quad (132)$$

ここで ξ は相関長である. 図6右の(b)に自由フェルミオンの格子模型におけるPollmann-Turner不変量 Z_{PT} の $U(1)$ 位相の数値計算結果を示す.

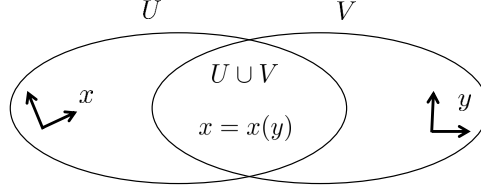
付録

このAppendixでは, SPT相を記述するTQFTを理解するための, いくつか基本的な事項についてまとめる.

A 連続場の定義

SPT相は局所的なエンタングルメントの構造によって特徴づけられるが, 理論のトポロジカルな応答理論を定式化するには時空多様体の大域的構造が効く. そのため, トポロジカルな応答理論を定式化するには, 無限に広がったユークリッド空間 \mathbb{R}^n だけではなく, 任意の(閉じた)時空多様体において理論を定義しなければならない. 本節ではユークリッド空間以外において場の理論を定式化する手続きを簡単にまとめる.

n 次元時空多様体 M 上の何らかの場 $\phi(x \in M)$ を定義したい。 M は向き付け可能とする。 向き付け不可能な場合は後で扱う。 まず、多様体 M の定義を思い出すと、多様体 M は局所的にはユークリッド空間 \mathbb{R}^n であり、局所的な情報を大域的に拡張するにはパッチの重なり部分 $U \cap V$ の座標変換 $x = x(y)$ によって特徴づけられることを思い出す。



場の定義もこのように行う。つまり、各パッチ上で局所的な場 $\phi(x \in U)$, $\tilde{\phi}(y \in V)$ を定義して、重なり $U \cap V$ において場の変換規則を定める。 そのためには場 $\phi(x)$ が時空の大域的 $SO(n)$ 回転（観測者の視点の変化）に対してどのように振る舞うかが定められている必要がある。 $\Lambda \in SO(n)$ に対して場の変換規則

$$\phi(x) \mapsto U(\Lambda)\phi(x) \quad (133)$$

が定められているとする。 一般に、場 $\phi(x) = \{\phi_j(x)\}$ は何らかの内部自由度を有し、 $U(\Lambda) = \{U_{ij}(\Lambda)\}$ は $SO(n)$ 変換 Λ で決まる行列であり、場の内部自由度を回す。¹³ 場の $SO(n)$ 回転に対する変化が与えられているとき、これを用いて場のパッチ変換を

$$\tilde{\phi}(y) = U \left(\frac{\partial x_\mu}{\partial y_\alpha}(y) \right) \phi(x(y)) \quad (134)$$

と定義する。例えば、パッチ変換に対して

$$\tilde{\phi}(y) = \phi(x(y)) \quad (135)$$

と変化する場をスカラー場、

$$\tilde{V}^\mu(y) = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}(y) V^\alpha(x(y)) \quad (136)$$

と変化する場をベクトル場と呼ぶ。

A.1 大域的な G 対称性が存在する場合

理論が何らかの大域的な対称性 G を有する場合を考えよう。 G は連続群でも離散群でも良い。 話の単純化のため $\phi(x)$ はスカラー場とし、時空の回転に対して内部自由度の変化は存在しないものとする。 場 $\phi(x)$ は群 G の何らかの表現であり、 $g \in G$ の場への作用

$$\phi(x) \mapsto g\phi(x) \quad (137)$$

が与えられているとする。 分配関数などの物理量が³、経路積分変数に対するこの大域的な変数変換によって不変である、というのが理論が G 対称だという定義である。 理論が G 対称性を有する場合は、場のパッチ変換に G 変換をさらに加えることで G の外場と結合した理論が得られる：

$$\phi_i(y) = g_{ij}(y)\phi_j(x(y)), \quad y \in U_i \cap U_j, \quad g_{ij}(y) \in G. \quad (138)$$

ここでパッチ U_i 上の場を $\phi_i(x)$ と書いた。 さて、 $g_{ij}(y)$ は任意ではなく、他のパッチ変換と矛盾なく定義される必要があり、具体的には、3つのパッチの重なり $U_i \cap U_j \cap U_k$ において1コサイクル条件

$$g_{ij}(y)g_{jk}(y)g_{ki}(y) = 1, \quad y \in U_i \cap U_j \cap U_k \quad (139)$$

を満たす必要がある。（ $g_{ji}(y) = g_{ij}(y)^{-1}$ である。） これは G 束の定義に他ならない。 よって、理論に大域的 G 対称性が存在する場合は、手で与える理論のパラメタとして、背景 G 場（ G 束） A を導入することができる。

¹³通常の物性物理学においては、このような $SO(n)$ 回転対称性が存在しないことに注意しよう。 しかし、低エネルギー有効場の理論は $SO(n)$ 回転対称性をemergentに有する。 SPT相においては、低エネルギー有効理論は何らかのTQFTなので、高エネルギーで存在しない $SO(n)$ 対称性が低エネルギーのTQFTで発生する。 よってSPT相をTQFTにより記述することは自然である。

背景 G 場たちには、互いに連続的に繋がらないトポロジカルセクターが存在する。

G が離散群の場合は、 $g_{ij}(y)$ は $U_i \cap U_j$ において一定 $g_{ij}(y) \equiv g_{ij}$ である。背景 G 場のトポロジカルセクターは、 M の非自明なループに対するホロノミーの値によって定まり、分類は $\text{Hom}(\pi_1(M), G)/G$ で与えられる。(ここで、ホロノミー γ は基点の自明化に依存しないので、 $g \in G$ 作用を $g\gamma g^{-1}$ で定義し、それで割った。)特に、 G が可換群 $G = A$ の場合は $H^1(M, A)$ で与えられる。

$G = U(1)$ の場合のトポロジカルセクターの分類を考えよう。変換関数 $e^{i\theta_{ij}(y)}$ に対して \mathbb{R} へのリフト $\theta_{ij}(x) \rightarrow \tilde{\theta}_{ij}(x) \in \mathbb{R}$ をひとつ固定すると、1コサイクル条件 $e^{i\tilde{\theta}_{ij}(x)} e^{i\tilde{\theta}_{jk}(x)} e^{i\tilde{\theta}_{ki}(x)} = 1, x \in U_i \cap U_j \cap U_k$ より、 $c_{ijk} := (\tilde{\theta}_{ij}(x) + \tilde{\theta}_{jk}(x) + \tilde{\theta}_{ki}(x))/2\pi$ は整数 \mathbb{Z} に値を取り、 \mathbb{Z} 値の2コチェインをひとつ定める。定義より $\delta c = 0$ が従い、リフトの取りかえ $\tilde{\theta}_{ij}(x) \mapsto \tilde{\theta}_{ij}(x) + 2\pi b_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{Z}$ より、2コバウンダリ条件 $c \sim c + \delta b$ が従う。よって変換関数 $e^{i\theta_{ij}(x)}$ はコホモロジー $H^2(M, \mathbb{Z})$ の元を一つ定める。逆に $c \in Z^2(M, \mathbb{Z})$ が与えられると $e^{i\theta_{ij}(x)}$ を決めることもできる。よって $U(1)$ 場は $H^2(M, \mathbb{Z})$ によって分類される。自由部分 $\text{Free}H^2(M, \mathbb{Z})$ は、2サイクル $c \in Z_2(M)$ 上のmonopole flux $\int_c F \in 2\pi\mathbb{Z}$ によって特徴づけられ、ねじれ部分 $\text{Tor}H^2(M, \mathbb{Z})$ は量子化する Wilson loopによって特徴づけられる。

A.2 時空の向きを変化させる対称性と向き付けのない時空多様体

理論が時空の向きを変化させる対称性を有する場合を考える。簡単のためスカラー場を考える。向き付けを変化させる対称性とは、時間反転対称性、鏡映対称性などである。経路積分においてこのような対称性が存在するとは、場の再定義

$$\phi(x_0, x_1, \dots) \mapsto R\phi(-x_0, x_1, \dots) \quad (140)$$

のもとで相関関数が不変であることを意味する。このような対称性があると、向き付けの変化するパッチの場の変換則を決めることができるので、向き付けのない多様体上に理論を定義できる。

A.3 フェルミオン場とPin群

フェルミオン場のボソン場との違いは、フェルミオン場の定義において時空多様体そのものの構造が関わる点である。これは、時空の $O(n)$ 回転に対してフェルミオン場はその2重被覆群であるPin群によって変換されることが理由である。まず、各種Pin群を導入しよう。

$\text{Cliff}_{\pm}(n)$ を $\{e_i\}_{i=1}^n, e_i e_j + e_j e_i = \pm 2\delta_{ij}$ で生成される実クリフォード代数とする。“モード空間” $M := \{\sum_i x_i e_i | x_i \in \mathbb{R}\}$ を導入し、 M に内積を $(x, y) = \frac{1}{2}(xy + yx)$ で導入する。 $\text{Pin}_{\pm}(n)$ 群は

$$\text{Pin}_{\pm}(n) := \{v_1 \cdots v_r | v_i \in M, (v_i, v_j) = \pm 1\}$$

で定義される群である。また、 $\text{Spin}(n) \subset \text{Pin}_{\pm}(n)$ は長さが偶数の要素からなる部分群として定義される。

$$\text{Spin}(n) := \{v_1 \cdots v_{2r} | v_i \in M, (v_i, v_j) = \pm 1\}$$

$\text{Pin}^c(n)$ 群は $\text{Pin}_+(n) \times U(1)$ の要素のうち、時空の 2π 回転と $U(1)$ 位相の π 回転を同一視することにより定義される：

$$\text{Pin}^c(n) := \text{Pin}_+(n) \times U(1)/((-1, -1) \sim (1, 1)). \quad (141)$$

同様に、 $\text{Spin}^c(n)$ 群は

$$\text{Spin}^c(n) := \text{Spin}(n) \times U(1)/((-1, -1) \sim (1, 1)) \quad (142)$$

と定義される。

ここまでは通常のPin群たちであるが、トポロジカル絶縁体においては、時間反転対称性が $U(1)$ 電荷を反転 $\hat{T} e^{i\hat{Q}} \hat{T}^{-1} = e^{-i\hat{Q}}$ することに対応して、 $\text{Pin}_{\pm}^{\tilde{c}}(n)$ 群[25]と呼ばれるPin群の変種が次のように定義される。準同型 $\phi: \text{Pin}_{\pm}(n) \rightarrow \pm 1$ を偶数と奇数の要素から成る元を区別するラベルとする。(つまり、 $g \in \text{Pin}_{\pm}(n)$ が、時空の向き付けを保つかどうかを指定する。)群 $\text{Pin}_{\pm}(n) \rtimes_{\phi} U(1)$ を

$$(x, e^{i\alpha})(x', e^{i\alpha}) = (xx', e^{i\alpha} e^{i\phi(x)\alpha'}) \quad (143)$$

で定義する。再び時空の 2π 回転と $U(1)$ 位相の π 回転を同一視することにより $\text{Pin}_{\pm}^{\tilde{c}}(n)$ が定義される：

$$\text{Pin}_{\pm}^{\tilde{c}}(n) := \text{Pin}_{\pm}(n) \rtimes_{\phi} U(1)/((-1, -1) \sim (1, 1)). \quad (144)$$

A.4 Spin, Pin_\pm 構造

M が向き付けをのけない時空多様体とする。時空の次元は n とする。まず、 $U(1)$ 対称性が存在しない場合を考えよう。鏡映対称性 R は $R^2 = \pm 1$ の 2 通り存在し、それぞれ $\text{Pin}_\pm(n)$ 群に対応する。 $O(n)$ 回転 Λ のもと、フェルミオン場 $\psi(x)$ は $O(n)$ の 2 重被覆である $\text{Pin}_\pm(n)$ 群によって

$$\psi(x) \mapsto U(\Lambda)\psi(x) \quad (145)$$

と変換する。ここで $O(n) \rightarrow \text{Pin}_\pm(n), \Lambda \mapsto \pm U(\Lambda)$ は 1 対 2 の Map である。すると、場のパッチ変換において座標変換だけでは定まらない符号が存在する：

$$\tilde{\psi}(y) = \pm U \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}(y) \right) \psi(x(y)). \quad (146)$$

場が well-defined に定義されているためには 3 つのパッチの重なりから生じる 1 コサイクル条件をみたす必要がある。しかし、 $O(n)$ と $\text{Pin}_\pm(n)$ の対応は 1 対 2 なので、 $U(\Lambda)$ が 1 コサイクル条件を満たすかどうかは自明ではない。そこで、

$$o_{ijk} := U_{ij}U_{jk}U_{ki} \in \{\pm 1\} \quad (147)$$

とおく。パッチ U_i の向きの再定義により $o_{ijk} \equiv 1$ とできる場合は変換関数 U_{ij} は 1 コサイクル条件を満たすが、どのように再定義しても $o_{ijk} \equiv 1$ とできない場合がある。このような障害を測る指標が o_{ijk} である。詳しくは述べないが、 o_{ijk} は $H^2(M, \mathbb{Z}/2)$ に値を取るコホモロジークラスを定める。具体的には M の接束 TM の 1 次と 2 次の Stiefel-Whitney 類を用いて (例えば, [19])

$$[o_{ijk}] = \begin{cases} w_2(TM) & (R^2 = 1 \text{ の場合, } \text{Pin}_+ \text{ 構造}) \\ w_2(TM) + w_1(TM)^2 & (R^2 = -1 \text{ の場合, } \text{Pin}_- \text{ 構造}) \end{cases} \quad (148)$$

で与えられる。時空多様体 M に対してその障害類がゼロ $[o] = 0$ のとき、 M は Pin_\pm 構造を許容する、という。 M が Pin_\pm 構造を許容するとき、 $o_{ijk} \equiv 1$ を満たす U_{ij} の選びかたを M の Pin_\pm 構造 η という。 Pin_\pm 構造 η は一意ではなく、ある Pin_\pm 構造 η に対して、 ± 1 に値を取る \mathbb{Z}_2 場 $[a_{ij}] \in H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ を用いて $U_{ij} \mapsto a_{ij}U_{ij}$ によって異なる Pin_\pm 構造 $\eta + a$ が定義できる。よって異なる Pin_\pm 構造は集合として $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ だけ存在することがわかる。また、 M が向き付け可能な場合を Spin 構造と呼ぶ、その障害類は 2 次の SW クラスで与えられる。他の Pin 構造の障害類とトポロジカルセクターについては、例えば [7] を見よ。

B 群コホモロジーとボソンの SPT 相

本節では群コホモロジーとボソンの SPT 相の関係について簡単にまとめる。

混乱の原因となるので、Dijkgraaf-Witten (DW) 理論 [10, 26] との関係について最初に注意しておく。大域的 G 対称性のある物質場の理論を考える。閉じた時空多様体 M 上の分配関数は物質場 ϕ の経路積分

$$Z(M) = \int D\phi e^{-\int_M \mathcal{L}(\phi)} \quad (149)$$

で与えられる。大域的 G 対称性の存在下においては、背景 G 場 A を導入して、背景 G 場 A 付きの時空多様体 (M, A) 上の分配関数が定義できる。

$$Z(M, A) = \int D\phi e^{-\int_M \mathcal{L}(\phi, A)}. \quad (150)$$

さらに、SPT 相においては、任意の空間において基底状態の縮退は存在しない、と仮定するので、分配関数はトポロジカルな $U(1)$ 位相部分と励起状態の寄与から来るトポロジカルではない正の実数部分からなる。

$$Z_{\text{SPT}}(M, A) = e^{iS_{\text{top}}(M, A)} e^{-S_{\text{nontop}}(M, A)}. \quad (151)$$

$U(1)$ 位相部分 $e^{iS_{\text{top}}(M, A)}$ が SPT 相の性質、具体的に何らかの外場や時空多様体の変形に対する応答を特徴づける。SPT 相の分類とは、トポロジカルな $U(1)$ 位相部分 $e^{iS_{\text{top}}(M, A)}$ の分類に他ならない。 [10] において、群コサイクルからトポロジカル作用の構成が与えられている。 DW 理論と言ったときには、作用汎関数が群コサイクル ω で決まる群 G の動的ゲージ理論を指す：

$$Z_{\text{DW}}^\omega(M) = \int DA e^{iS_{\text{top}}^\omega(M, A)}. \quad (152)$$

よって、SPT 相の大域的 G 対称性をゲージ化した理論が DW 理論である。 [11] Chen-Gu-Liu-Wen [1] においては、群コサイクル ω で与えられる物質場のトポロジカルな理論の作用汎関数 $e^{-\int_M \mathcal{L}^\omega(\phi)}$ の構成が与えられている。

B.1 群コホモロジー

G を群, A とアーベル群とし, G の A への左作用 ga , 及び右作用 ag が定義されているものとする. $C^p(G, A) = \{f : G^p \rightarrow A\}$ を $\underbrace{G \times \cdots \times G}_p$ から A への写像の集合とする. 微分 $\delta : C^p(G, A) \rightarrow C^{p+1}(G, A)$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned} (\delta f)(g_1, \dots, g_{p+1}) \\ := g_1 f(g_2, \dots, g_{p+1}) + \sum_{q=1}^p (-1)^q f(g_1, \dots, g_q g_{q+1}, \dots, g_{p+1}) + (-1)^{p+1} f(g_1, \dots, g_p) g_{p+1}. \end{aligned} \quad (153)$$

容易に $\delta^2 = 0$ を示すことができる. 群コサイクル $Z^p(G, A)$, 群コバウンダリ $B^p(G, A)$, および群コホモロジー $H^p(G, A)$ が

$$Z^p(G, A) := \text{Ker} [\delta : C^p(G, A) \rightarrow C^{p+1}(G, A)], \quad (154)$$

$$B^p(G, A) := \text{Im} [\delta : C^{p-1}(G, A) \rightarrow C^p(G, A)], \quad (155)$$

$$H^p(G, A) := Z^p(G, A) / B^p(G, A) \quad (156)$$

によって定義される.

B.2 射影表現

本節では射影表現の因子群が2次の群コホモロジーによって分類されることを見る. G を群とし, G の射影表現を考える. 準同型 $\phi : G \rightarrow \mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ を $g \in G$ がユニタリ($\phi_g = 1$)か反ユニタリ($\phi_g = -1$)かどうかを特徴づけるラベルとする. D_g が G の射影表現であるとは, $b_{g,h} \in U(1)$ として次を満たすことである:

$$D_g D_h^{\phi_g} = b_{g,h} D_{gh}. \quad (157)$$

ここで $D_h^{\phi_g} = D_h(\phi_g = 1)$, $D_h^{\phi_g} = D_h^*(\phi_g = -1)$ という記号を導入した. D_{ghk} は2通りの分解 $D_g(D_h D_k^{\phi_h})^{\phi_g} = (D_g D_h^{\phi_g}) D_k^{\phi_{gh}}$ より $b_{g,h}$ に関する条件

$$b_{g,hk} b_{h,k}^{\phi_g} = b_{g,h} b_{gh,k} \quad (158)$$

が従う. これは $b : G \times G \rightarrow U(1)$ が左作用が $gz = z^{\phi_g}$ で定義された2コサイクルであることに他ならない. さらに, $a : G \rightarrow U(1)$ を1コチェインとして, $D_g \mapsto D_g a_g$ と射影表現の位相を再定義すると因子群に関する同値関係

$$b_{g,h} a_g a_h^{\phi_g} \sim b_{g,h} a_{gh} \quad (159)$$

が従う. これは $b_{g,h}$ に対する1コバウンダリの同値関係に他ならない. 以上より, 射影表現の因子群 $b_{g,h}$ が2次の群コホモロジー $[b] \in H^2(G, U(1))$ で分類されることがわかった.

B.3 Dijkgraaf-Witten理論

M を向き付けのある n 次元時空多様体, G を有限群とし, 背景 G 場(G 束) A が与えられたときに $U(1)$ に値を取るトポロジカル作用

$$e^{iS_M(A)} \quad (160)$$

の一般的な構成方法について考える. 任意の M 上の G 場は普遍 G 束 $EG \rightarrow BG$ からの引き戻しで構成できることを思いだすと, G 場の $U(1)$ 値トポロジカル作用は, BG 上の $U(1)$ 値トポロジカル作用の分類, $H^n(BG, U(1))$ によってなされる. $\omega \in Z^n(BG, U(1))$ を n コサイクルとして, M 上のトポロジカル作用は形式的に $\exp i \int_M A^* \omega = \exp i \int_M A^* \omega$ で与えられる. ここで $A : M \rightarrow BG$ は G 場を決める分類写像である.

具体的にトポロジカル作用をどのように構成されるかを見る. [10] M の三角形分割を $|M|$ をひとつ固定し, 各 n 胞体 Δ^n に番号をつけ, $\Delta^n = (v_0 \cdots v_n)$ などと書く. Δ^n の辺 $v_i v_j$ において, $i < j$ のとき $v_i \rightarrow v_j$ として向きが決まる. 番号の付け方は n 胞体毎に任意ではなく, 辺の向き $v_i \rightarrow v_j$ ($i < j$)は辺が属するどの n 胞体を見ても一定であるとする. このような番号の振り方の選び方のひとつを branching structure とする. 以下, 構成された作用

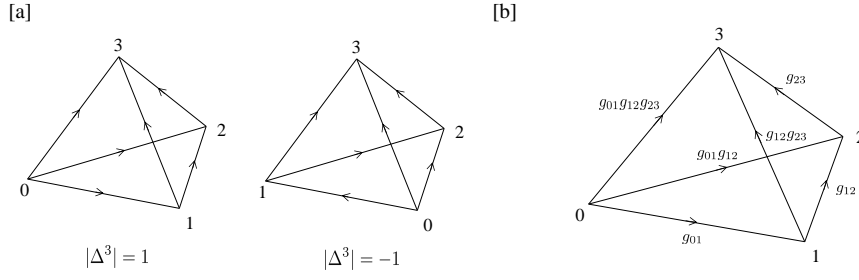


Figure 7

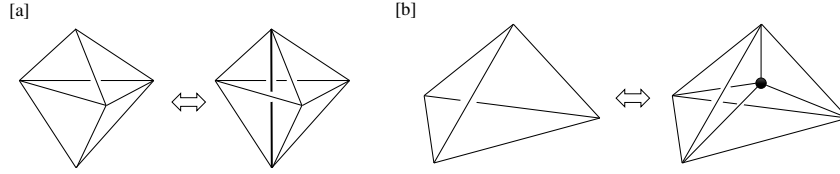


Figure 8

がトポロジカル作用であることを示すには、(i)三角形分割の取り方に依存しない、(ii)branching structureの選び方に依存しない、の2点を示す必要があることに留意して頂きたい。

以下、話を具体的にするため、 $n = 3$ (空間2次元)とする。 G が有限群のとき G 場 A は辺に割り当てられたされた G 値、 $g : \{\text{edges}\} \rightarrow G$ によって決まる。 $i < j$ に対し辺の G 場を $g_{ij} \in G$ と書こう。 G が有限群の場合は任意の面(012)に対して G 場は平坦条件

$$g_{01}g_{12} = g_{02} \quad (161)$$

を満たす。ゲージ変換は頂点から G への写像 $\alpha : \{\text{vertices}\} \rightarrow G$ であり、 G 場に対してゲージ変換

$$g_{01} \mapsto \alpha_0 g_{01} \alpha_1^{-1} \quad (162)$$

を引き起こす。作用はゲージ変換に対して不変であるように構成されなければならない。 $U(1)$ 値の作用として、3胞体 $\Delta^3 = (0123)$ から来る寄与の積として書けるものを考える：

$$\exp iS_{|M|}(A) = \prod_{\Delta^3} \omega(\Delta^3)^{|\Delta^3|}, \quad \omega(\Delta^3) \in U(1). \quad (163)$$

$|\Delta^3| \in \{1, -1\}$ は、 Δ^3 の向きが M の向きと揃っていれば+1、揃っていないければ-1とする。(図7[a]参照) 平坦条件により3胞体 Δ の G 場は、図7[b]に示すように、3つの辺 $g_{01}, g_{12}, g_{23} \in G$ によって指定される。従って、 $\omega(\Delta^3)$ は

$$\omega(\Delta^3) = \omega(g_{01}, g_{12}, g_{23}) \quad (164)$$

と書ける。三角形分割依存性を消すために ω が満たすべき条件は何か。3次元の場合は、図8に挙げた2つの変形に対して不変であれば良いことが知られている。いずれの変形に対する不変性も3コサイクル条件

$$\omega(h, k, l)\omega(gh, k, l)^{-1}\omega(g, hk, l)\omega(g, h, kl)^{-1}\omega(g, h, k) = 1 \quad (165)$$

を導く。よって、 ω は3コサイクル $\omega \in Z^3(G, U(1))$ である。

次にゲージ変換不変性を調べよう。図7[b]において頂点0ゲージ変換 α_0 を考えよう。ゲージ変換によって ω は

$$\omega(g_{01}, g_{12}, g_{23}) \mapsto \omega(\alpha_0 g_{01}, g_{12}, g_{23}) = \frac{\omega(\alpha_0, g_{01}g_{12}, g_{23})\omega(\alpha_0, g_{01}, g_{12})}{\omega(\alpha_0, g_{01}, g_{12}g_{23})} \times \omega(g_{01}, g_{12}, g_{23}) \quad (166)$$

と変化する。この変化分は他の3胞体の寄与とキャンセルし、作用(163)はゲージ不変となる。 M が端を持つ場合 $\partial M \neq 0$ の場合は作用(163)のゲージ不変とは限らないことに注意しよう。実際、 $[\omega] \in H^3(G, U(1))$ が非自明な群コホモロジーに属する場合は、 M が端を持つ場合にゲージ不変ではない。このゲージ不変性の破れは、非自明なSPT相の端 ∂M に出現する系の量子アノマリーとキャンセルする。

注意) DW理論とは、作用が $e^{iS_M^{\omega(A)}}$ で与えられる群 G のpure gauge theoryである。つまり、 $\omega \in Z^n(G, U(1))$ を n コサイクルとしてDW理論の分配関数は

$$Z_M^{DW} = \frac{1}{N} \sum_{\{g_e\}} \prod_{\Delta^n} \omega(g_{01}, \dots, g_{n-1,n})^{|\Delta^n|} \quad (167)$$

で与えられる。これは M の位相不変量の1種である。

B.4 G 対称な物質場の理論

さて、上記のトポロジカル作用(163)は G 対称性を有する理論の物質場の自由度を積分して得られた有効作用と解釈できる。では、そのような物質場の理論の標準的な構成方法がChen-Gu-Liu-Wen[1]によって与えられている。以下の議論は[29]を参考にした。まず、頂点にも G に値を取る自由度を導入し、 $g_v \in G$ などと書く。さらに、 G ゲージ変換を頂点を絡めて拡張する。

$$\begin{cases} g_v \mapsto \alpha_v g_v, \\ g_{01} \mapsto \alpha_0 g_{01} \alpha_1^{-1}. \end{cases} \quad (168)$$

このとき、 $g_0^{-1} g_{01} g_1$ の組み合わせはゲージ不変であることに注意する。 $\{g_v\}$ はゲージ変換と同一視できる。作用(163)のゲージ不変性より、任意の配位 $\{g_v\}$ に対して、

$$e^{iS_M^{\omega(A)}} = \prod_{\Delta^3} \omega(g_0^{-1} g_{01} g_1, g_1^{-1} g_{12} g_2, g_2^{-1} g_{23} g_3)^{|\Delta^3|} \quad (169)$$

である。 $\{g_v\}$ は任意なので、さらに $\{g_v\}$ の配位に関する和を取り

$$e^{iS_M^{\omega(A)}} = \frac{1}{|G|^{N_v}} \sum_{\{g_v\}} \prod_{\Delta^3} \omega(g_0^{-1} g_{01} g_1, g_1^{-1} g_{12} g_2, g_2^{-1} g_{23} g_3)^{|\Delta^3|} \quad (170)$$

と書ける。ここで N_v は頂点の数である。右辺の3胞体からの寄与を静的な背景 G 場 $\{g_{ij}\}$ 中の動的な物質場 $\{g_v\}$ の理論の分配関数の Boltzmann weight (Berry位相)とみなす。特に、外場が存在しない場合 $g_{ij} \equiv 1$ の物質場の理論の分配関数は

$$Z_M = \frac{1}{|G|^{N_v}} \sum_{\{g_v\}} \prod_{\Delta^3} \omega(g_0^{-1} g_1, g_1^{-1} g_2, g_2^{-1} g_3)^{|\Delta^3|} \quad (171)$$

となる。 M に境界がなければ常に $Z_M = 1$ であるが³、作用への3胞体からの微小な寄与が³

$$e^{i \int_{\Delta^3} \mathcal{L}} = \omega(g_0^{-1} g_1, g_1^{-1} g_2, g_2^{-1} g_3)^{|\Delta^3|} \quad (172)$$

で与えられる離散的な非線形シグマ模型のトポロジカル項が構成できたことが重要点である。右辺を改めて

$$\nu(g_0, g_1, g_2, g_3) := \omega(g_0^{-1} g_1, g_1^{-1} g_2, g_2^{-1} g_3) \quad (173)$$

と定義すると、 ν の導入の仕方と ω の群コサイクル条件から ν は

$$\nu(gg_0, gg_1, gg_2, gg_3) = \nu(g_0, g_1, g_2, g_3), \quad (174)$$

$$\nu(g_1, g_2, g_3, g_4) \nu(g_0, g_2, g_3, g_4)^{-1} \nu(g_0, g_1, g_3, g_4) \nu(g_0, g_1, g_2, g_4)^{-1} \nu(g_0, g_1, g_2, g_3) = 1 \quad (175)$$

を満たすことがわかる。前者はhomogeneous conditionと呼ばれ、物理的には作用汎関数の G 対称性である。逆に、これらの条件が満たされている場合に ν から群コサイクル ω が³

$$\omega(g_1, g_2, g_3) = \nu(1, g_1, g_1 g_2, g_1 g_2 g_3) \quad (176)$$

で定義できる。¹⁴ 結局、物質場の分配関数は

$$Z_M = \frac{1}{|G|^{N_v}} \sum_{\{g_v\}} \prod_{\Delta^3} \nu(g_0, g_1, g_2, g_3)^{|\Delta^3|} \quad (178)$$

¹⁴ ω と ν による記述の等価性は、数学的には

$$H^n(G, A) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}[G]}^n(\mathbb{Z}, A) \quad (177)$$

と表現される。wikipediaの”Group cohomology”の記事(英語版)が詳しい。

となる。[1] 作用の G 対称性は(174)から従う。さて、構成方法から分配関数は閉じた時空多様体上で常に $|Z_M(A)| = 1$ となる。任意の空間 X 上のヒルベルト空間の次元は1である。

作用が与えられると各種の相関関数、状態が計算できる。状態は端のある時空多様体 M 上における経路積分によって定義され、波動関数は M 内部の経路積分

$$\Psi_M(\{g_v\}_{v \in \partial M}) = \frac{1}{N_v^{\text{internal}}} \sum_{g_v \in \text{internal } \Delta^3} \prod \nu(g_0, g_1, g_2, g_3)^{|\Delta^3|} \in \mathcal{H}_{\partial M}. \quad (179)$$

によって与えられる。特に、球面 S^2 上の基底状態 $|\Psi\rangle$ は3次元球 D の端として定義され、その波動関数は

$$\Psi(\{g_v\}) = \left(\text{Diagram: A circle representing a sphere with a tetrahedron inside, vertices labeled with group elements } g_0, g_1, g_2, g_3. \text{ A star symbol is at the bottom vertex.} \right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g_*} \prod_{\Delta^3} \nu(g_*, g_1, g_2, g_3)^{|\Delta^3|} \quad (180)$$

で与えられる。コサイクル条件(175)を用いると、群元 $g_*, g'_* \in G$ からの寄与の比は

$$\nu(g_*, g_1, g_2, g_3) / \nu(g'_*, g_1, g_2, g_3) = \nu(g_*, g'_*, g_2, g_3) \nu(g_*, g'_*, g_1, g_3)^{-1} \nu(g_*, g'_*, g_1, g_2)$$

となり、右辺は近接2胞体の寄与とキャンセルする。よって、積分要素は球内部の基点の群元 g_* に依存しない形になり、基底状態は球面 $S^2 \cong \mathbb{R}^2$ 上の自由度のみを用いて

$$\Psi(\{g_v\}) = \prod_{\Delta^2} \nu(g_*, g_1, g_2, g_3)^{|\Delta^2|} \quad (181)$$

と書くことができる。ここで、 $g_* \in G$ は任意の群元。この基底状態の波動関数の表式は一般の空間次元においても正しく[1]、 $(n-1)$ 次元空間においては、 n コサイクル $\nu \in Z^n(G, U(1))$ によって記述される G 対称な物質場の理論における球面 S^{n-1} 上の基底状態は[1]

$$|\Psi(\nu)\rangle = \frac{1}{\sqrt{|G|^{N_v}}} \sum_{\{g_v\}} \prod_{\Delta^{n-1}} \nu(g_*, g_1, \dots, g_n)^{|\Delta^{n-1}|} |\{g_v\}\rangle \quad (182)$$

となる。この状態を基底状態として持つハミルトニアンであり、可換な射影演算子で構成された（つまり、厳密に解ける）ハミルトニアンが以下のようにして構成できる。 $(n-1)$ 次元空間の三角形分割を取り、各頂点 v に基底 $|g \in G\rangle$ で張られる $|G|$ 次元の自由度を考える。 G 作用は $\hat{g}|h\rangle = |gh\rangle$ とする。状態(182)の G 対称性は、 g_* の任意性と一様条件(174)から従う。自明なハミルトニアン $H(0)$ として、無秩序状態 $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{g \in G} |g\rangle$ への射影演算子で構成されたハミルトニアンを考える。

$$H(0) = - \sum_v P_v, \quad P_v = \dots \otimes \mathbf{1} \otimes |\phi\rangle \langle \phi| \otimes \mathbf{1} \otimes \dots \quad (183)$$

すると、状態 $|\Psi(\nu)\rangle$ は、 $H(0)$ を ν で決まる局所ユニタリ変換

$$U(\nu) := \sum_{\{g_v\}} \prod_{\Delta^{n-1}} \nu(g_*, g_1, \dots, g_n)^{|\Delta^{n-1}|} |\{g_v\}\rangle \langle \{g_v\}| \quad (184)$$

によってユニタリ変換した次のハミルトニアン

$$H(\nu) := U(\nu)H(0)U(\nu)^{-1} = - \sum_v U(\nu)P_vU(\nu)^{-1} \quad (185)$$

の基底状態であることがわかる。射影演算子 $U(\nu)P_vU(\nu)^{-1}$ はサイト v を含む $(n-1)$ 胞体上のサイトの自由度のみで構成されるので局所的であり、また互いに可換である。

例1：空間1次元 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ SPT相

群の元を $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{00, 01, 10, 11\}$ と書く。群コホモロジーは $H^2(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, U(1)) = \mathbb{Z}_2$ で与えられ、非自明な2コサイクルは $w(g, h) = (-1)^{[g]_1[h]_2}$ で与えられる。ただし、 $[g]_{j \in 1,2} \in \{0, 1\}$ は $g \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ の j 番目の数

を表す. すると, $\nu(1, g, h) = w(g, g^{-1}h) = (-1)^{[g]_1(-[g]_2+[h]_2)}$ である. サイト j のパウリ行列を $\tau^z | [g]_1 [g]_2 \rangle = (-1)^{[g]_1} \sigma^z | [g]_1 [g]_2 \rangle = (-1)^{[g]_2}$ と定義すると, 局所ユニタリ変換 $U(\nu)$ は

$$U(\nu) = \sum_{\{g_j\}} \prod_j \nu(1, g_j, g_{j+1}) |\{g_j\}\rangle \langle \{g_j\}| = \prod_j (-1)^{\frac{1-\tau_j^z}{2} \cdot \left\{ \frac{1-\sigma_j^z}{2} - \frac{1-\sigma_{j+1}^z}{2} \right\}} \sim \prod_j e^{\frac{\pi i}{4} \tau_j^z (\sigma_j^z - \sigma_{j+1}^z)} \quad (186)$$

となる. 自明なハミルトニアン H_0 はテンソル積状態

$$\left(\frac{|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle}{2} \right)^{\otimes N} = \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)^{\otimes N} \quad (187)$$

への射影として定義される.¹⁵

$$H_0 = - \sum_j \sigma_j^x - \sum_j \tau_j^x. \quad (188)$$

$$U(\nu) \sigma_j^x U(\nu)^{-1} = \tau_{j-1}^z \sigma_j^x \tau_j^z, \quad U(\nu) \tau_j^x U(\nu)^{-1} = \sigma_j^z \tau_j^x \sigma_{j+1}^z \quad (189)$$

に注意すると, クラスタハミルトニアン

$$H = - \sum_j \tau_{j-1}^z \sigma_j^x \tau_j^z - \sum_j \sigma_j^z \tau_j^x \sigma_{j+1}^z \quad (190)$$

が導かれる.

例2: 空間2次元 \mathbb{Z}_2 SPT相

2次元の三角格子を考え, サイト上のスピン $1/2$ の自由度より構成される系を考える. 自明なハミルトニアン, 及びその基底状態は

$$H_0 = - \sum_j \sigma_j^x, \quad |\Psi_0\rangle = \bigotimes_j \frac{|0\rangle_j + |1\rangle_j}{\sqrt{2}} \quad (191)$$

である. 状態 $|\Psi_0\rangle$ は全ての domain wall 状態を重み 1 で重ね合わせた状態とみることができる.

$$|\Psi_0\rangle = \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 2} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 3} \end{array} \right] + \dots \quad (192)$$

すると, 局所ユニタリ変換

$$U(\nu) = \sum_{\{g_j\}} \prod_{\Delta} \nu(0, g_{\Delta_0}, g_{\Delta_1}, g_{\Delta_2}) \prod_{\nabla} \nu(0, g_{\nabla_0}, g_{\nabla_1}, g_{\nabla_2})^{-1} |\{g_j\}\rangle \langle \{g_j\}| \quad (193)$$

は, 各 domain wall 配位に対して 2胞体 Δ, ∇ のスピン配位に応じて $U(1)$ 位相をつける変換である. 3次の群コホモロジーは $H^3(\mathbb{Z}_2, U(1)) = \mathbb{Z}_2$ で与えられ, 非自明な3コサイクルの選び方の例は

$$w(a, b, c) = (-1)^{abc}, \quad \nu(0, a, b, c) = (-1)^{a(a+b)(b+c)} = \begin{cases} -1 & (a = c = 1, b = 0) \\ 1 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (194)$$

で与えられる. 2胞体の branching structure を図9[a]のように取ると, 上のコサイクル ν は図9[b]に挙げた2つのスピン配置に対してのみ $U(1)$ 位相 (-1) をつけるユニタリ変換となる. 単純計算により, バルクにおいてはユニタリ変換 $U(\nu)$ が各サイトの寄与の積として次のように書ける.

$$U(\nu) = \prod_{\Delta} \exp \pi i \left[\frac{1 - \sigma_{\Delta_0}^z}{2} \cdot \frac{1 + \sigma_{\Delta_1}^z}{2} \cdot \frac{1 - \sigma_{\Delta_2}^z}{2} \right] \prod_{\nabla} \exp -\pi i \left[\frac{1 - \sigma_{\nabla_0}^z}{2} \cdot \frac{1 + \sigma_{\nabla_1}^z}{2} \cdot \frac{1 - \sigma_{\nabla_2}^z}{2} \right] \quad (195)$$

$$\sim \prod_j \exp \frac{\pi i}{24} \sigma_j^z D(\sigma^z), \quad D(\sigma^z) = \sigma_p^z \sigma_q^z - \sigma_q^z \sigma_r^z + \sigma_r^z \sigma_s^z - \sigma_s^z \sigma_t^z + \sigma_t^z \sigma_u^z - \sigma_u^z \sigma_p^z.$$

¹⁵ より一般には, 断熱変形でつながる状態は何を採用してもよく, また, 基底状態を保つのであれば, ハミルトニアンも断熱変形して良い.

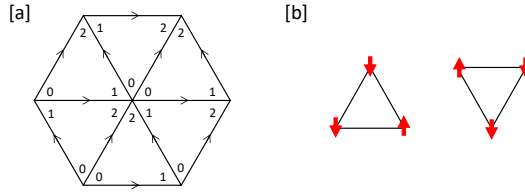


Figure 9

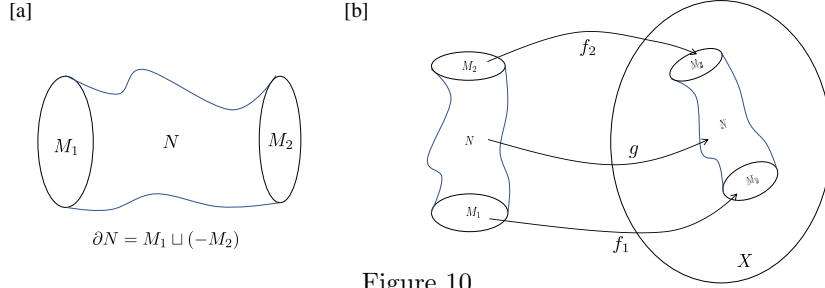


Figure 10

ここで、頂点 j 近傍の頂点のラベルを図9[b]のように取った。 \mathbb{Z}_2 非自明なSPTハミルトニアンは

$$H_1 = U(\nu)H_0U(\nu)^{-1} = - \sum_j \sigma_j^x \exp \left[-\frac{\pi i}{4} D(\sigma^z) \right] \quad (196)$$

となる。

同一の \mathbb{Z}_2 のSPT相であり、より洗練された模型がLevin-Gu模型[11]として知られている。 Levin-Gu模型においては、基底状態の波動関数はdomain wallの数 N_{dw} の偶奇に応じて、 $|\Psi_{LG}(\{g_j\})\rangle = (-1)^{N_{\text{dw}}}$ と与えられる。

C コボルディズム

本節ではについてコボルディズム（同境界類）について少なくとも物理サイドの研究者として何をしているのか意味がわかるようになる程度にまとめる。

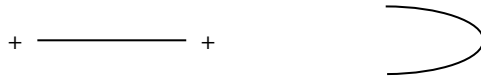
コボルディズムにおいては、閉じた n 次元多様体たちに何らかの同値関係を導入して多様体を分類する。ここで、多様体 M にはスピン構造のような何らかの構造が入っていても良いものとする。 M_1 と M_2 がコボルダントであるとは、 $(n+1)$ 次元の端のある多様体 N が存在して、 $\partial N = M_1 \sqcup (-M_2)$ 、つまり N の境界が M_1 と $-M_2$ になる場合を言う。 図10[a]を見よ。ここで $-M_2$ は M_2 の向き付けを逆にした多様体である。同値類を $[M]$ と書く。さらに、和の構造をdisjoint union $[M_1] + [M_2] = [M_1 \sqcup M_2]$ により導入する。 M が何らかの $(n+1)$ 次元多様体の境界である、つまり $M = \partial N$ 、と $[M] = 0$ は等価である。 $[M]$ 全体の空間は可換群となる。この可換群を Ω_n^{str} とかき、コボルディズム群と呼ぶ。ここで上付き添字はスピン構造など多様体の構造を指定する。いくつかのコボルディズム群について、低次元の値を下表にまとめる。 [19, 23] フェルミオンSPT相の generating manifold については[28]を見よ。

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	コメント
Ω_n^{SO}	\mathbb{Z}	0	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	ボソン
Ω_n^O	\mathbb{Z}_2	0	\mathbb{Z}_2	0	\mathbb{Z}_2^2	\mathbb{Z}_2	ボソン, TRS
Ω_n^{Spin}	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	0	\mathbb{Z}	0	フェルミオン (class D)
Ω_n^{Pin+}	\mathbb{Z}_2	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{16}	0	フェルミオン, TRS, $T^2 = (-1)^F$ (class DIII)
Ω_n^{Pin-}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_8	0	0	0	フェルミオン, TRS, $T^2 = 1$ (class BDI)
$\Omega_n^{Spin^c}$	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}^2	0	複素フェルミオン (class A)
$\Omega_n^{Pin^c}$	\mathbb{Z}_2	0	\mathbb{Z}_4	0	$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$	0	複素フェルミオン, 反ユニタリなPHS (class AIII)
$\Omega_n^{Pin^c_+}$	\mathbb{Z}_2	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2^3	0	複素フェルミオン, TRS, $T^2 = (-1)^F$ (class AII)
$\Omega_n^{Pin^c_-}$	\mathbb{Z}_2	0	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$	0	\mathbb{Z}_2	0	複素フェルミオン, TRS, $T^2 = 1$ (class AI)

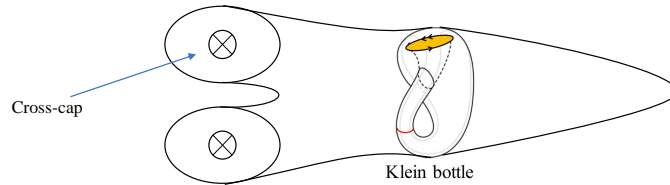
コボルダントは位相同型とは異なる同値関係であることに注意する。例えば、向き付けのある1次元多様体において、 S^1 と $S^1 \sqcup S^1$ は明らかに位相同型ではないがコボルダントである。さらに言うと、そもそも S^1 は2次元円板の端なので、 $[S^1] = 0$ である。これから $\Omega_1^{SO} = 0$ がわかる。向き付けのある2次元多様体においても、トーラス T^2 は中身の詰まったトーラスの端なので $[T^2] = 0$ である。同様に、任意の2次元Riemann面においても中身の詰まったRiemann面の端なので、 $\Omega_2^{SO} = 0$ となる。



0次元のコボルディズム群は向き付けがあれば $\Omega_0^{str} = \mathbb{Z}$ であり、向き付けがなければ $\Omega_0^{str} = \mathbb{Z}_2$ である。0次元の向きとは点 $\{pt\}$ に割り当てられた符号 \pm である。向きがなければ2点 $\{pt\} \sqcup \{pt\}$ は線分の端なので $[\{pt\} \sqcup \{pt\}] = 0$ である。



簡単で非自明な例は、向き付けのない2次元多様体のコボルディズム群 $\Omega_2^O = \mathbb{Z}_2$ であり、実射影平面 RP^2 によって生成される。2つの RP^2 の連結和はクラインの壺 KB に等価であるが、クラインの壺は S^1 上の円束 $KB \rightarrow S^1$ の円板束の境界なので $[KB] = 0$ である。



もっと一般に、何らかの多様体 X への写像付きのコボルディズム群 $\Omega_n^{str}(X)$ を定義する。 $\Omega_n^{str}(X)$ の元は閉じた n 次元多様体 M と M から X への写像 $f: M \rightarrow X$ の対 (M, f) によって表現され、 (M_1, f_1) と (M_2, f_2) がコボルダントとは $(n+1)$ 次元多様体 N と N から X への写像 $g: N \rightarrow X$ が存在して、 $\partial N = M_1 \sqcup (-M_2)$ かつ、 g の M_1, M_2 への制限がそれぞれ f_1, f_2 に等しいときを言う。(図10[b]を見よ。) $\Omega_n^{str}(X)$ はtarget spaceが X の非線形シグマ模型のコボルディズム不変な作用の分類を与える。応用については、例えば[29]を見よ。大域的 G 対称性が存在し、 G 対称性が多様体の構造と可換な場合は、 G 束の分類は分類空間上の BG コボルディズム群 $\Omega_n^{str}(BG)$ によって与えられる。

C.1 コボルディズム群とSPT相の分類の関係

コボルディズム群とSPT相の関係についてまとめる。[14] (M, η, A) をそれぞれ閉じた n 次元多様体、その上の構造、背景 G 場とする。場の理論一般において、2つの多様体の非連結和上の分配関数は単なる積

$$Z((M_1, \eta_1, A_1) \sqcup (M_2, \eta_2, A_2)) = Z(M_1, \eta_1, A_1)Z(M_2, \eta_2, A_2) \quad (197)$$

である。さらに、理論の基底状態に縮退がなく、絶対零度において励起状態の分配関数への寄与を無視できるのであれば分配関数は $U(1)$ に値を取る。 $Z(M, \eta, A) \in U(1)$ 。すると、コボルディズム群から $U(1)$ への準同型はコボルディズム不変な理論とみなすことができる。

$$\text{A cobordism invariant theory } Z \in \text{Hom}(\Omega_n^{str}(BG), U(1)). \quad (198)$$

このとき、 $\Omega_n^{str}(BG)$ のねじれ部分群 \mathbb{Z}_p はコボルディズム不変な理論の分類が $\text{Hom}(\mathbb{Z}_p, U(1)) = \mathbb{Z}_p$ により再び離散群 \mathbb{Z}_p となり、SPT相の分類を与える。一方で、 $\Omega_n^{str}(BG)$ の自由部分群 \mathbb{Z} はコボルディズム理論は $\text{Hom}(\mathbb{Z}, U(1)) = U(1)$ により連続的な $\theta \in U(1)$ によってラベルされる。SPT相においては連続的につながる理論は等価な理論とみなすので、 $\Omega_n^{str}(BG)$ の自由部分群 \mathbb{Z} はSPT相の分類を与えない。しかし、 n 次元における θ 項の存在により $(n-1)$ 次元におけるChern-Simons項が定義でき、係数がレベルと呼ばれる整数によって分類され、SPT相としての分類は \mathbb{Z} となる。

例をひとつ挙げる. $\Omega_4^{SO}(BU(1)) = \mathbb{Z}^2$ は(3+1)次元の $U(1)$ 対称性のあるボソンにおけるコボルディズム不変な分配関数の分類を与える. 片方の \mathbb{Z} は与えられた閉じた(3+1)次元多様体 M とその上の $U(1)$ 場 A の組 (M, A) に対して $\int_M \frac{\tilde{F} \wedge \tilde{F}}{(2\pi)^2} \in \mathbb{Z}$ によって検出できる. すると, (2+1)次元のChern-Simons項は閉じた(2+1)次元多様体 M とその上の $U(1)$ 場 A に対して

$$e^{ikCS(M,A)} = \exp \left[2\pi i k \int_{M, \partial \tilde{M}=M} \frac{\tilde{F} \wedge \tilde{F}}{(2\pi)^2} \right], \quad k \in \mathbb{Z} \quad (199)$$

として定義される. ここで (\tilde{M}, \tilde{A}) は (M, A) の(3+1)次元多様体への拡張である. この拡張が可能であることは $\Omega_3^{SO}(BU(1)) = 0$ により保証されている. さらに, Chern-Simons項が拡張の仕方に依存しないことは θ 項が整数に値を取ることから保証されている.

一般に, 時空 n 次元のSPT相の分類はコボルディズム群を用いて

$$\text{Tor } \Omega_n^{\text{str}}(BG) \times \text{Free } \Omega_{n+1}^{\text{str}}(BG) \quad (200)$$

で与えられる. 詳細については[23, 30]を見よ.

C.2 Generating manifold と SPT不変量

コボルディズム群 $\Omega_n^{\text{str}}(BG)$ を生成する多様体は generating manifold と呼ばれ, SPT相において重要な役割を果たす. 仮に, $\Omega_n^{\text{str}}(BG) = \mathbb{Z}_p$ としよう. SPT相は $\nu \in \text{Hom}(\mathbb{Z}_p, U(1)) \cong \mathbb{Z}_p$ で分類され, 分配関数は \mathbb{Z}_p に値を取るコボルディズム不変量 $\eta(M, A) \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ を用いて

$$Z_\nu(M, A) = e^{\frac{2\pi i \nu}{p} \eta(M, A)}, \quad \nu \in \{0, 1, \dots, p-1\} \quad (201)$$

と表現される. ν を検出するには, $\eta(M, A) = 1$ なる時空多様体と外場の組 (M, A) 上の分配関数を計算すれば良い. $\eta(M, A) = 1$ なる (M, A) が generating manifold である. よって, generating manifold 上の分配関数が, 経路積分形式におけるSPT不変量である. また, generating manifold を基底状態と対称性演算子を用いて再現すると, SPT相を特徴づける非局所秩序変数となる.

References

- [1] X. Chen, Z.-C. Gu, Z.-X. Liu, and X.-G. Wen, Phys. Rev. B **87**, 155114 (2013).
- [2] F. Pollmann and A. M. Turner, Phys. Rev. B **86**, 125441 (2012).
- [3] X.-G. Wen, Phys. Rev. B **89**, 035147 (2014).
- [4] K. Shiozaki and S. Ryu, J. High Energy Phys. 04 (2017) 100.
- [5] H. Shapourian, K. Shiozaki, and S. Ryu, Phys. Rev. Lett. **118**, 216402 (2017).
- [6] K. Shiozaki, H. Shapourian, and S. Ryu, Phys. Rev. B **95**, 205139 (2017).
- [7] K. Shiozaki, H. Shapourian, K. Gomi, and S. Ryu, Phys. Rev. B **98**, 035151 (2018).
- [8] A. Kitaev, Ann. Phys. **303**, 2 (2003).
- [9] X. Chen, Y.-M. Lu, and A. Vishwanath, Nat. Commun. **5**, 3507 (2014).
- [10] R. Dijkgraaf and E. Witten, Comm. Math. Phys. **129**, 393 (1990).
- [11] M. Levin and Z.-C. Gu, Phys. Rev. B **86**, 115109 (2012).
- [12] E. Witten, Rev. Mod. Phys. **88**, 035001, (2016).
- [13] H. Song, S.-J. Huang, L. Fu, and M. Hermele, Phys. Rev. X **7**, 011020 (2017).
- [14] A. Kapustin, arXiv:1403.1467.
- [15] P. Calabrese, J. Cardy, and E. Tonni, Phys. Rev. Lett. **109**, 130502 (2012).
- [16] A. Y. Kitaev, Phys. Usp. **44**, 131 (2001).
- [17] G. W. Moore and G. Segal, arXiv:hep-th/0609042.
- [18] L. Fidkowski and A. Kitaev, Phys. Rev. B **83**, 075103 (2011).

- [19] R. C. Kirby and L. R. Taylor, *Pin structures on low-dimensional manifolds*, Geometry of low-dimensional manifolds **2** (1990): 177-242.
- [20] A. Kapustin, R. Thorngren, A. Turzillo, and Z. Wang, J. High Energy Phys. **12** (2015) 052.
- [21] H. Shapourian, K. Shiozaki, and S. Ryu, Phys. Rev. B **95**, 165101 (2017).
- [22] H. Shapourian and S. Ryu, arXiv:1804.08637.
- [23] D. S. Freed and M. J. Hopkins, arXiv:1604.06527.
- [24] C. L. Kane and E. J. Mele, Phys. Rev. Lett. **95**, 146802 (2005).
- [25] M. Metlitski, arXiv:1510.05663.
- [26] M. W. Propitius, PhD thesis, arXiv:hep-th/9511195.
- [27] N. Tantivasadakarn, Phys. Rev. B **96**, 195101 (2017).
- [28] M. Guo, P. Putrov, J. Wang, arXiv:1711.11587.
- [29] R. Thorngren, arXiv:1710.02545.
- [30] K. Yonekura, arXiv:1803.10796.