# *Topological terms of (2+1)d flag-manifold sigma models* のノート

塩崎　謙

March 11, 2021

Ryohei Kobayashi, Yasunori Lee, Ken Shiozaki, Yuya Tanizaki, arXiv:2103.05035.

## Contents



# 1 2d class A

- 有効作用について

- 格子模型におけるスカーミオン電荷の計算
- 2nd Chern数の計算
- $2\pi$回転に対する基底状態のBerry位相の計算

### 1.1 有効作用

$$\tilde{\Omega}_4^{\mathrm{Spin^c}}(S^2) = \mathbb{Z} \tag{1}$$

であり，シータ項は$A$をSpin$^c$場，$a = -iz^\dagger dz$を$\boldsymbol{n} = z^\dagger \boldsymbol{\sigma} z, [z] \in \mathbb{C}P^1$によって定義された$U(1)$場とすると，[4]

$$(\frac{1}{8\pi^2}\int (F+f)^2 + \frac{\sigma}{8}) - (\frac{1}{8\pi^2}\int F^2 + \frac{\sigma}{8}) = \frac{1}{8\pi^2}\int f(f+2F) \tag{2}$$

で与えられる．対応する(2+1)次元可逆相の有効作用は

$$\frac{1}{4\pi}\int ada + \frac{1}{2\pi}\int Ada \tag{3}$$

である．第１項はHopf項として知られる項であり，[1]スカーミオンの$2\pi$回転により波動関数が位相$(-1)$を獲得することを示す．第２項はスカーミオンがSpin$^c$電荷１を有することを示す．コメントとして，$\Omega_*^{\mathrm{Spin^c}}(S^2)$と比較すると，第１項と第２項はそれぞれ個別にはボルディズム不変量ではない．

- 事実として，$\mathbb{C}P^1$模型については恒等的に$f^2 = 0$である．
- $\int ada$は，$BU(1)$の場合とは異なり，$\mathbb{C}P^1$由来の場合は，ホモトピー不変量である．
- $\Omega_3^{SO}(S^2) = 0$に注意すると，$\int ada$はボルディズム不変量ではないことがわかる．Hopfマップ$S^3 \to S^2$は$\mathbb{C}P_2^2$の境界として実現されるためヌルボルダントであることと矛盾しない．
- Abanovは，Hopf項$\int ada$の導出方法として，$[z] \in \mathbb{C}P^1$を一度$\mathbb{C}P^M, M > 1$に埋め込むことにより，$\int ada$がホモトピー不変量でなくなり，作用の変分を取ることにより$\int ada$が導出できる，と議論している．[5]

### 1.2 格子模型と数値計算

素朴な格子模型は以下．１粒子ハミルトニアンのみ書く．

$$\mathcal{H}(k_x, k_y, \boldsymbol{n}) \tag{4}$$
$$= \sin k_x \tau_x + \sin k_y \tau_y + n_1 \sigma_x \tau_z + n_2 \sigma_y \tau_z + (n_3 - 2 + \cos k_x + \cos k_y)\sigma_z \tau_z \tag{5}$$
$$= e^{ik_x}\frac{\sigma_z\tau_z - i\tau_x}{2} + e^{-ik_x}\frac{\sigma_z\tau_z + i\tau_x}{2} + e^{ik_y}\frac{\sigma_z\tau_z - i\tau_y}{2} + e^{-ik_y}\frac{\sigma_z\tau_z + i\tau_y}{2} + n_1\sigma_x\tau_z + n_2\sigma_y\tau_z + (n_3 - 2)\sigma_z\tau_z. \tag{6}$$

実空間表示は

$$\mathcal{H}(x-1, y; x, y) = \frac{\sigma_z\tau_z - i\tau_x}{2}, \tag{7}$$
$$\mathcal{H}(x+1, y; x, y) = \frac{\sigma_z\tau_z + i\tau_x}{2}, \tag{8}$$
$$\mathcal{H}(x, y-1; x, y) = \frac{\sigma_z\tau_z - i\tau_y}{2}, \tag{9}$$
$$\mathcal{H}(x, y+1; x, y) = \frac{\sigma_z\tau_z + i\tau_y}{2}, \tag{10}$$
$$\mathcal{H}(x, y; x, y) = n_1\sigma_x\tau_z + n_2\sigma_y\tau_z + (n_3 - 2)\sigma_z\tau_z. \tag{11}$$

定義していない行列要素については，ゼロである．スカーミオン配位は以下によって導入できる．[1]
サイトを$x \in \{1,\ldots,L_x\}, y \in \{1,\ldots,L_y\}$として，

$$n_1(x,y) = \sin(\frac{2\pi x}{L_x} - \pi)\cos(\frac{\pi y}{L_y} - \frac{\pi}{2}), \tag{12}$$

$$n_2(x,y) = \sin(\frac{2\pi y}{L_y} - \pi)\cos^2(\frac{\pi x}{L_x} - \frac{\pi}{2}), \tag{13}$$

$$n_3(x,y) = 1 - 2\cos^2(\frac{\pi x}{L_x} - \frac{\pi}{2})\cos^2(\frac{\pi y}{L_y} - \frac{\pi}{2}), \tag{14}$$

と取ると良い．

基底状態の電子数がスカーミオンの有無によって変化するかどうかを計算する．上記模型について数値計算をすると，基底状態の電子数は，サイト数を$L_x L_y$とすると，

- スカーミオン無し：$2L_x L_y$
- スカーミオン有り：$2L_x L_y - 1$

となることが確認できた．

### 1.3 Berry位相

パラメータ依存するハミルトニアン$\hat{H}(t)$を考える．1 周期でもとのハミルトニアンとユニタリ同値と仮定する．[2]

$$\hat{H}(T) = \hat{H}(0) \tag{15}$$

さらに，任意の$\phi$に対して$\hat{H}(t)$の基底状態と第一励起状態の間に有限のエネルギーギャップがあるものとする．さらに，基底状態に縮退はないものとし，$\hat{H}(t)$の瞬間的基底状態を$|\Psi(t)\rangle$と書く．

$$\hat{H}(t)\,|\Psi(t)\rangle = E(t)\,|\Psi(t)\rangle\,. \tag{16}$$

このとき，断熱極限において，1周期における基底状態の時間発展は以下で与えられる．

$$Te^{-i\int_0^T \hat{H}(t)dt}\,|\Psi(t=0)\rangle \sim e^{-i\int_0^T E(t)dt}e^{i\gamma}\,|\Psi(t=0)\rangle\,. \tag{17}$$

ここで，$e^{i\gamma}$はBerry位相

$$e^{i\gamma} = \prod_t \langle\Psi(t+\delta t)|\Psi(t)\rangle\,. \tag{18}$$

スカーミオンを$2\pi$回転させたときの基底状態のBerry位相を計算する．ハミルトニアンは以下で与えられる．

$$\hat{H}(t) = \sum_{x,y} c_x^\dagger \mathcal{H}_{x,y}(\boldsymbol{n}(t))c_y, \tag{19}$$

$$\boldsymbol{n}(t) = (\cos\frac{2\pi t}{T}n_1 - \sin\frac{2\pi t}{T}n_2, \sin\frac{2\pi t}{T}n_1 + \cos\frac{2\pi t}{T}n_2, n_3). \tag{20}$$

ここで，$n_1, n_2, n_3$は上で与えたスカーミオン配位．基底状態はエネルギー負の固有状態の占有状態である．1粒子のハミルトニアン$H(t)$の固有状態のベクトルを$u_j(t)$と書く．

$$H(t)u_j = \epsilon_j u_j, \quad \epsilon_1 \le \epsilon_2 \le \cdots\,. \tag{21}$$

[1] 例えば，[3]に簡単な解説がある．
[2] 一般には，ユニタリ同値でさえあればBerry位相を定義することができる．

$$|\Psi(t)\rangle = \prod_{\epsilon_j<0} (c^\dagger u_j(t))\,|0\rangle \tag{22}$$

よく知られているように，1粒子状態の重なりは行列式

$$\langle\Psi(t+\delta t)|\Psi(t)\rangle = \det[\Psi(t+\delta t)^\dagger\Psi(t)] \tag{23}$$

で与えられる．ここで，

$$\Psi(t) = (u_1(t),\ldots,u_M(t)), \quad \epsilon_{j\le M}(t)<0, \quad \epsilon_{j>M}(t)>0. \tag{24}$$

今は$U(1)$位相にのみ興味があるので，固有ベクトル$u_j(t)$は規格化されてなくても良い．

数値計算をすると，Berry位相$e^{i\gamma}=-1$を得た．

- 基底状態のエネルギー由来の自明な寄与は，有効作用$\frac{1}{4\pi}ada$に寄与しないことを示すことができるか？

## 1.4 第2Chern数

$T^2\times S^2$上のハミルトニアンとみなしたときに，模型の2nd Chern数$ch_2$を計算しよう． $\boldsymbol{n}=(\sin\theta\cos\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\theta)$とパラメータ付けすると，

$$\mathcal{H}(k_x,k_y,\theta,\phi) = \sin k_x\tau_x + \sin k_y\tau_y + \sin\theta\cos\phi\sigma_x\tau_z + \sin\theta\sin\phi\sigma_y\tau_z + (\cos\theta - 2 + \cos k_x + \cos k_y)\sigma_z\tau_z. \tag{25}$$

Dirac模型$\mathcal{H}=\sum_{\mu=1}^5 h_\mu\gamma_\mu$に対して，第2Chern数を数値計算する方法について考える．

$$ch_2 = (-\frac{1}{2})^5\frac{1}{2}(\frac{i}{2\pi})^2\int \mathrm{tr}\,[\hat{h}d\hat{h}d\hat{h}d\hat{h}d\hat{h}], \quad \hat{h}=\mathrm{sgn}\,h=\frac{h}{|h|}. \tag{26}$$

$$d\hat{h} = d\frac{h}{|h|} = \frac{dh}{|h|} - \frac{hd|h|}{|h|^2} \tag{27}$$

より

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\,[\frac{h}{|h|}(\frac{dh}{|h|}-\frac{hd|h|}{|h|^2})(\frac{dh}{|h|}-\frac{hd|h|}{|h|^2})(\frac{dh}{|h|}-\frac{hd|h|}{|h|^2})(\frac{dh}{|h|}-\frac{hd|h|}{|h|^2})] && (28)\\
&= \frac{1}{|h|^5}\mathrm{tr}\,[h(dh)^4] - \frac{1}{|h|^6}\mathrm{tr}\,[h(dh)^3hd|h| + h(dh)^2hd|h|dh + hdhhd|h|(dh)^2 + hhd|h|(dh)^3] && (29)\\
&= \frac{1}{|h|^5}\mathrm{tr}\,[h(dh)^4] - \frac{1}{|h|^6}\mathrm{tr}\,[h(dh)^3h - h(dh)^2hdh + hdhh(dh)^2 - hh(dh)^3]d|h| && (30)\\
&= \frac{1}{|h|^5}\mathrm{tr}\,[h(dh)^4]. && (31)
\end{aligned}$$

$d|h|$はc数であることに注意．よって，Dirac模型に対して，第2Chern数は

$$ch_2 = \frac{1}{2^8\pi^2}\int\frac{1}{|h|^5}\mathrm{tr}\,[h(dh)^4] \tag{32}$$

と計算できる．

上記のハミルトニアン$H(k_x,k_y,\theta,\phi)$に対して第2Chern数を計算すると，$ch_2=-1$を得た．

- Qi-Hughes-Zhang[6]が第2Chern数と局在状態の電荷の関係について議論しているので，確認する．

# 2 2d class D

- (2+1)Dにおいて，以下のハミルトニアンにおいて

$$H = k_x \sigma_x \tau_x + k_y \sigma_y \tau_x + m_1 \sigma_z \tau_x + m_2 \tau_y + m_3 \tau_z \tag{33}$$

  フェルミオン場を積分すると，質量項$\boldsymbol{m} = (m_1, m_2, m_3) \in S^2$ に対する$S^2$上のシグマ模型が得られることが知られている．[1] 特に，[1]では，Hopf項が得られると書いている．（要計算確認！）

- この事実と，Hopf項がSpin Chern-Simons項であることを合わせると，適切なフェルミオン格子模型において，質量項のスカーミオンを導入しフェルミオン・パリティを測ることで，スカーミオンがフェルミオンであることを確認できるはずである．本ノートでは，具体的な格子模型と数値計算の結果を記録する．

- また，(3+1)Dにおける類似物も計算されている． [2]では，空間３次元フェルミオン格子模型において，Hopfマップ$\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$に基づくtextureを導入し，やはりこのtextureがフェルミオンであることを議論している．一方で，この３次元textureのフェルミオン性を記述するシグマ模型のトポロジカル項が知られているかどうかは，不明である．

## 2.1 自由フェルミオン模型の基底状態のフェルミオン・パリティ

自由フェルミオン模型

$$\hat{H} = \frac{i}{4} \sum_{ij} A_{ij} a_i a_j, \quad \{a_i, a_j\} = 2\delta_{ij}, a_i^\dagger = a_i, \quad A^T = A, \quad A^\dagger = -A, \tag{34}$$

の基底状態のフェルミオン・パリティは，反対称行列$A$のPfaffianの符号で与えられる．

$$\langle GS|(-1)^F|GS\rangle = \mathrm{signPf}[A]. \tag{35}$$

与えられたBdGハミルトニアンから反対称行列$A$を得る公式を導いておく． BdGハミルトニアン

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{ij} (c_i^\dagger, c_i) \begin{pmatrix} h_{ij} & \Delta_{ij} \\ \Delta_{ij}^\dagger & -h_{ij}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_j \\ c_j^\dagger \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{ij} (h_{ij} c_i^\dagger c_j - h_{ij}^T c_i c_j^\dagger) + \frac{1}{2} \sum_{ij} (\Delta_{ij} c_i^\dagger c_j^\dagger + \Delta_{ij}^\dagger c_i c_j) \tag{36}$$

に対して，Majoranaフェルミオン$a_{2i-1}, a_{2i}$を

$$a_{2i-1} = c_i + c_i^\dagger, \quad a_{2i} = -i(c_i - c_i^\dagger) \tag{37}$$

によって導入する．

$$c_i = \frac{a_{2i-1} + i a_{2i}}{2}, \quad c_i^\dagger = \frac{a_{2i-1} - i a_{2i}}{2} \tag{38}$$

である．

$$h_{ij} c_i^\dagger c_j - h_{ij}^T c_i c_j^\dagger \tag{39}$$

$$= h_{ij} \frac{a_{2i-1} - i a_{2i}}{2} \frac{a_{2j-1} + i a_{2j}}{2} - h_{ij}^T \frac{a_{2i-1} + i a_{2i}}{2} \frac{a_{2j-1} - i a_{2j}}{2} \tag{40}$$

$$= \frac{1}{4} \left[ (h_{ij} - h_{ij}^T) a_{2i-1} a_{2j-1} + (i h_{ij} + i h_{ij}^T) a_{2i-1} a_{2j} + (-i h_{ij} - i h_{ij}^T) a_{2i} a_{2j-1} + (h_{ij} - h_{ij}^T) a_{2i} a_{2j} \right] \tag{41}$$

$$= \frac{i}{4} \left[ (-i h_{ij} + i h_{ij}^T) a_{2i-1} a_{2j-1} + (h_{ij} + h_{ij}^T) a_{2i-1} a_{2j} + (-h_{ij} - h_{ij}^T) a_{2i} a_{2j-1} + (-i h_{ij} + i h_{ij}^T) a_{2i} a_{2j} \right]. \tag{42}$$

$$\Delta_{ij} c_i^\dagger c_j^\dagger + \Delta_{ij}^\dagger c_i c_j \tag{43}$$
$$= \Delta_{ij} \frac{a_{2i-1} - i a_{2i}}{2} \frac{a_{2j-1} - i a_{2j}}{2} + \Delta_{ij}^\dagger \frac{a_{2i-1} + i a_{2i}}{2} \frac{a_{2j-1} + i a_{2j}}{2} \tag{44}$$
$$= \frac{1}{4}\left[ (\Delta_{ij} + \Delta_{ij}^\dagger) a_{2i-1} a_{2j-1} + (-i\Delta_{ij} + i\Delta_{ij}^\dagger) a_{2i-1} a_{2j} + (-i\Delta_{ij} + i\Delta_{ij}^\dagger) a_{2i} a_{2j-1} + (-\Delta_{ij} - \Delta_{ij}^\dagger) a_{2i} a_{2j} \right] \tag{45}$$
$$= \frac{i}{4}\left[ (-i\Delta_{ij} - i\Delta_{ij}^\dagger) a_{2i-1} a_{2j-1} + (-\Delta_{ij} + \Delta_{ij}^\dagger) a_{2i-1} a_{2j} + (-\Delta_{ij} + \Delta_{ij}^\dagger) a_{2i} a_{2j-1} + (i\Delta_{ij} + i\Delta_{ij}^\dagger) a_{2i} a_{2j} \right]. \tag{46}$$

よって，

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\frac{i}{4}\sum_{ij}\Big[ (-ih_{ij} + ih_{ij}^T - i\Delta_{ij} - i\Delta_{ij}^\dagger) a_{2i-1} a_{2j-1} + (h_{ij} + h_{ij}^T - \Delta_{ij} + \Delta_{ij}^\dagger) a_{2i-1} a_{2j} \tag{47}$$
$$+ (-h_{ij} - h_{ij}^T - \Delta_{ij} + \Delta_{ij}^\dagger) a_{2i} a_{2j-1} + (-ih_{ij} + ih_{ij}^T + i\Delta_{ij} + i\Delta_{ij}^\dagger) a_{2i} a_{2j} \Big] \tag{48}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{i}{4}\sum_{ij} (a_{2i-1}, a_{2i}) \begin{pmatrix} -ih_{ij} + ih_{ij}^T - i\Delta_{ij} - i\Delta_{ij}^\dagger & h_{ij} + h_{ij}^T - \Delta_{ij} + \Delta_{ij}^\dagger \\ -h_{ij} - h_{ij}^T - \Delta_{ij} + \Delta_{ij}^\dagger & -ih_{ij} + ih_{ij}^T + i\Delta_{ij} + i\Delta_{ij}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{2j-1} \\ a_{2j} \end{pmatrix}. \tag{49}$$

したがって，与えられた行列$h, \Delta$に対して，

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -ih + ih^T - i\Delta - i\Delta^\dagger & h + h^T - \Delta + \Delta^\dagger \\ -h - h^T - \Delta + \Delta^\dagger & -ih + ih^T + i\Delta + i\Delta^\dagger \end{pmatrix} \tag{50}$$

とすると良い.

## 2.2 模型

Dirac模型

$$H = k_x \tau_x + k_y \tau_y + M\tau_z, \quad C = \tau_x K, \tag{51}$$

において，PHSより$M^* = M$．また，$M^\dagger = M, M^2 = 1$より，$M$をクラスAIのハミルトニアンと思うことができる．可能な質量項が 3 つある.

$$M = m_1 \sigma_x + m_2 \sigma_y \mu_y + m_3 \sigma_z. \tag{52}$$

ハミルトニアン全体では$8 \times 8$模型である.

$(m_1, m_2, m_3) = m\boldsymbol{n}, m > 0, \boldsymbol{n} \in S^2, |\boldsymbol{n}| = 1$と書く． [1]によると，フェルミオン場を積分するとHopf項に対応する作用が出現する.

$$\mathrm{Hopf}[\boldsymbol{n}] = \frac{ik}{4\pi}\int a da. \tag{53}$$

右辺の正確な意味は，Spin CS項として理解されるべきものである．係数$k$は慎重に導出されるべきものであり，ここでは導出を行わない．スカーミオンは$(2\pi)$回転によっても，フェルミオン・パリティを測ることによっても，$(-1)^k$を得るはずである.

素朴な格子模型は以下.

$$H_{\mathrm{BdG}}(k_x, k_y, \boldsymbol{n}) \tag{54}$$
$$= \sin k_x \tau_x + \sin k_y \tau_y + n_1 \sigma_x \tau_z + n_2 \sigma_y \mu_y \tau_z + (n_3 - 2 + \cos k_x + \cos k_y)\sigma_z \tau_z \tag{55}$$
$$= e^{ik_x}\frac{\sigma_z\tau_z - i\tau_x}{2} + e^{-ik_x}\frac{\sigma_z\tau_z + i\tau_x}{2} + e^{ik_y}\frac{\sigma_z\tau_z - i\tau_y}{2} + e^{-ik_y}\frac{\sigma_z\tau_z + i\tau_y}{2} + n_1\sigma_x\tau_z + n_2\sigma_y\mu_y\tau_z + (n_3 - 2)\sigma_z\tau_z. \tag{56}$$

実空間表示は

$$H_{\mathrm{BdG}}(x-1,y;x,y)=\frac{\sigma_z\tau_z-i\tau_x}{2}, \tag{57}$$

$$H_{\mathrm{BdG}}(x+1,y;x,y)=\frac{\sigma_z\tau_z+i\tau_x}{2}, \tag{58}$$

$$H_{\mathrm{BdG}}(x,y-1;x,y)=\frac{\sigma_z\tau_z-i\tau_y}{2}, \tag{59}$$

$$H_{\mathrm{BdG}}(x,y+1;x,y)=\frac{\sigma_z\tau_z+i\tau_y}{2}, \tag{60}$$

$$H_{\mathrm{BdG}}(x,y;x,y)=n_1\sigma_x\tau_z+n_2\sigma_y\mu_y\tau_z+(n_3-2)\sigma_z\tau_z. \tag{61}$$

定義していない行列要素については，ゼロである．さらに，$\tau$空間において常伝導ハミルトニアン$h$とギャップ関数$\Delta$を

$$H_{\mathrm{BdG}}=\begin{pmatrix} h & \Delta \\ \Delta^\dagger & -h^T \end{pmatrix} \tag{62}$$

と定義すると，

$$h(x-1,y;x,y)=\frac{\sigma_z}{2}, \tag{63}$$

$$h(x+1,y;x,y)=\frac{\sigma_z}{2}, \tag{64}$$

$$h(x,y-1;x,y)=\frac{\sigma_z}{2}, \tag{65}$$

$$h(x,y+1;x,y)=\frac{\sigma_z}{2}, \tag{66}$$

$$h(x,y;x,y)=n_1\sigma_x+n_2\sigma_y\mu_y+(n_3-2)\sigma_z, \tag{67}$$

$$\Delta(x-1,y;x,y)=\frac{-i}{2}, \tag{68}$$

$$\Delta(x+1,y;x,y)=\frac{i}{2}, \tag{69}$$

$$\Delta(x,y-1;x,y)=\frac{-1}{2}, \tag{70}$$

$$\Delta(x,y+1;x,y)=\frac{1}{2}. \tag{71}$$

スカーミオン配位を適当に導入する．実空間をトーラス$T^2$とする．写像度 1 の連続写像$T^2\to S^2$の構成は，スマッシュ積$S^1\wedge S^1\cong S^2$を参考にすると良いだろう．例えば，[3]に簡単な解説がある．サイトを$x\in\{1,\ldots,L_x\},y\in\{1,\ldots,L_y\}$として，

$$n_1(x,y)=\sin(\frac{2\pi x}{L_x}-\pi)\cos(\frac{\pi y}{L_y}-\frac{\pi}{2}), \tag{72}$$

$$n_2(x,y)=\sin(\frac{2\pi y}{L_y}-\pi)\cos^2(\frac{\pi x}{L_x}-\frac{\pi}{2}), \tag{73}$$

$$n_3(x,y)=1-2\cos^2(\frac{\pi x}{L_x}-\frac{\pi}{2})\cos^2(\frac{\pi y}{L_y}-\frac{\pi}{2}), \tag{74}$$

と取ると良い．

- 数値計算をすると，確かに，スカーミオンを導入した場合の基底状態のフェルミオン・パリティは，スカーミオンが存在しない基底状態と比べてフェルミオン・パリティが異なる．よって，スカーミオンはフェルミオンであると結論付けられる．

### 2.3 別の模型

$S^1$のtextureを 2 個導入する模型は，(i)2DのSCの系において$x$方向のtextureを導入して，$y$方向に伸びた1D SCを作る，(ii)1D SCの系で$y$方向のtextureを導入してフェルミオンを出す，という方法によっ

て，２つのtextureの交点に局在するフェルミオンを出現させせることができる．スカーミオンではないが，数値計算手法の確認として，この場合の計算をしておく．

#### 2.3.1 模型１

模型は$(p_x + ip_y) \oplus (p_x - ip_y)$ SC において，質量項のtextureとギャップ関数の位相のtextureを導入したもの．

$$H = \begin{pmatrix} (\cos\phi - 2 + \cos k_x + \cos k_y)\sigma_x + \sin\phi\sigma_z & e^{i\theta}(\sin k_x - i\sin k_y) \\ e^{i\theta}(\sin k_x + i\sin k_y) & -(\cos\phi - 2 + \cos k_x + \cos k_y)\sigma_x - \sin\phi\sigma_z \end{pmatrix} \tag{75}$$

これから，

$$h = (\cos\phi - 2 + \cos k_x + \cos k_y)\sigma_x + \sin\phi\sigma_z, \tag{76}$$

$$\Delta = e^{i\theta}(\sin k_x - i\sin k_y) \tag{77}$$

より，以下の実空間表示を得る．

$$h(x-1, y; x, y) = h(x+1, y; x, y) = \frac{1}{2}\sigma_x, \tag{78}$$

$$h(x, y-1; x, y) = h(x, y+1; x, y) = \frac{1}{2}\sigma_x, \tag{79}$$

$$h(x, y; x, y) = (\cos\phi - 2)\sigma_x + \sin\phi\sigma_z, \tag{80}$$

$$\Delta(x, y; x+1, y) = -\Delta(x+1, y; x, y) = \frac{-ie^{i\theta}}{2}, \tag{81}$$

$$\Delta(x, y; x, y+1) = -\Delta(x, y+1; x, y) = \frac{-e^{i\theta}}{2}. \tag{82}$$

$$\phi = \frac{2\pi x}{L_x}, \quad \theta = \frac{2\pi y}{L_y} \tag{83}$$

とすることにより，フェルミオンパリティが変化する基底状態を得られると期待できる．

- 数値計算をしてみると，余りきれいな結果にならない．フェルミオンパリティの比は，系のサイズ/$\theta$/$\phi$textureの有無に依存する...

#### 2.3.2 1D Kitaev鎖

$$H = \begin{pmatrix} \cos k_x & e^{i\theta}\sin k_x \\ e^{-i\theta}\sin k_x & -\cos k_x \end{pmatrix}, \quad \theta = \frac{2\pi x}{L_x}. \tag{84}$$

- textureの有無でフェルミオン・パリティが変化するきれいな結果が得られる．

# 3 $ch(V \oplus W) = ch(V) + ch(W)$について

Chern指標の性質$ch(V \oplus W) = ch(V) + ch(W)$における$F$の2次は，

$$\mathrm{tr}\, F_{V\oplus W}^2 = \mathrm{tr}\, F_V^2 + \mathrm{tr}\, F_W^2 \tag{85}$$

であるが，直和分解$V\oplus W$が大域的であることに注意する．

大域的な直和分解でない場合に何が起こるかを見てみよう．例として，次の$4\times 4$ハミルトニアンの占有状態を考える．

$$H=\sum_{i=1}^{5}h_i\gamma_i,\quad \{\gamma_i,\gamma_j\}=2\delta_{ij},\quad h_ih_i=1. \tag{86}$$

$H^2=1$に注意すると，エネルギー固有値$-1$なる占有状態への射影は

$$P=\frac{1-H}{2} \tag{87}$$

で与えられる．占有状態のBerry曲率が$\mathrm{tr}\,F^n=\mathrm{tr}\,P(dP)^{2n}$で与えられることを用いると，

$$\mathrm{tr}\,F^2=-\frac{1}{2^5}\mathrm{tr}\,[H(dH)^4]=\frac{1}{2^3}\epsilon_{ijklm}h_idh_jdh_kdh_ldh_m \tag{88}$$

となる．ここで$\mathrm{tr}\,[\gamma_i\gamma_j\gamma_k\gamma_l\gamma_m]=-4\epsilon_{ijklm}$を用いた．例として，低空間を$S^4$，$h$として恒等写像$h=\mathrm{id}:S^4\to S^4$を取ると，$\frac{1}{2}\int_{S^4}\mathrm{tr}\,(\frac{iF}{2\pi})^2$は$\pm1$.

占有状態は 2 つある．具体的に書き下してみよう．$(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,\gamma_5)=(\boldsymbol{\sigma}\tau_x,\tau_y,\tau_z)$と書く．さらに$S^4$の球座標を用いて$h=(\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{n},\sin\theta\sin\phi,\cos\theta),\boldsymbol{n}^2=1$と書くと[3]，単純計算により

$$H=e^{-i\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\tau_z\phi/2}e^{-i\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\tau_y\theta/2}\tau_ze^{i\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\tau_y\theta/2}e^{i\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\tau_z\phi/2}. \tag{89}$$

占有状態は，局所的には，

$$\Psi=e^{-i\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\tau_z\phi/2}e^{-i\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\tau_y\theta/2}\sigma_0\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_\tau \tag{90}$$

$$\sim\begin{pmatrix}-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sin\frac{\theta}{2}\\ e^{i\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\phi}\cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}_\tau. \tag{91}$$

$\boldsymbol{\sigma}$自由度の基底として，$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}=\pm1$なる基底$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,|\boldsymbol{n},\pm\rangle=\pm\,|\boldsymbol{n},\pm\rangle$を選ぶ．以下の議論に具体系は不要だが，具体系は，例えば，

$$(|\boldsymbol{n},+\rangle_\sigma,|\boldsymbol{n},-\rangle_\sigma)=\begin{pmatrix}e^{-i\phi_n}\cos\frac{\theta_n}{2} & -\sin\frac{\theta_n}{2}\\ \sin\frac{\theta_n}{2} & e^{i\phi_n}\cos\frac{\theta_n}{2}\end{pmatrix}_\sigma. \tag{92}$$

ここで$\boldsymbol{n}$の球座標を$(\theta_n,\phi_n)$と書いた．$H$の占有状態は，

$$|\psi_1\rangle=|\boldsymbol{n},+\rangle_\sigma\otimes\begin{pmatrix}-\sin\frac{\theta}{2}\\ e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}_\tau,\quad |\psi_2\rangle=|\boldsymbol{n},-\rangle_\sigma\otimes\begin{pmatrix}\sin\frac{\theta}{2}\\ e^{-i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}_\tau. \tag{93}$$

直接計算より

$$F_1=\langle d\psi_1|d\psi_1\rangle=-f_\sigma+f_\tau,\quad F_2=\langle d\psi_2|d\psi_2\rangle=f_\sigma-f_\tau, \tag{94}$$

$$F_1^2=2f_\sigma f_\tau,\quad F_2^2=-2f_\sigma f_\tau \tag{95}$$

となる．ここで，$f_\sigma=id(\cos^2\frac{\theta_n}{2})d\phi_n,f_\tau=id(\cos^2\frac{\theta}{2})d\phi$とおいた．よって，

$$F_1^2+F_2^2=0 \tag{96}$$

となり，$\mathrm{tr}\,F^2=F_1^2+F_2^2$は不成立．今の例の場合，$\mathrm{tr}\,F^2$へは，$|\psi_1\rangle$と$|\psi_2\rangle$の交差項が効くだろう．

[3] $S^2\wedge S^2$

# 4　ノート：$S_3$上のCS3形式の積分を$\mathbb{C}P^2_2$の境界として計算したい

## 4.1　$\mathbb{C}P^2_2 \to \mathbb{C}P^1$の構成

$f : \mathbb{C}P^2_2 \to \mathbb{C}P^1$を構成する．$\mathbb{C}P^2$のハンドル分解は，例えば，[7]のApp Cを見よ．$d$次元の$p$ハンドルとは，対$(D^p \times D^q, \partial D^p \times D^q)$のこと．部分多様体$\partial D^p \times D^q \cong S^{p-1} \times D^q$を“attaching region”と呼ぶ．$\mathbb{C}P^2$は

$$D^4 \cong \mathbb{C}P^2_0 \subset \mathbb{C}P^2_2 \subset \mathbb{C}P^2 \tag{97}$$

と分解される．$\mathbb{C}P^2$の特徴は，0ハンドルに2ハンドルをくっつける際に，$S^1$が+1のframingを持つことである．

$\mathbb{C}P^2_2$，及び4ハンドル$D^4$は$\mathbb{C}P^2$の斉次座標$[z_1, z_2, z_3]$, $|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 1$を用いて以下のように与えられる．実数$r, 0 < r < 1$を選ぶ．$r < |z_3| \leq 1$とすると，$(z_1/z_3, z_2/z_3)$を$\mathbb{C}P^2$の局所座標と選ぶことだできる．

$$|z_1/z_3|^2 + |z_2/z_3|^2 = \frac{1 - |z_3|^2}{|z_3|^2}, \quad 0 \leq \frac{1 - |z_3|^2}{|z_3|^2} < \frac{1 - r^2}{r^2} \tag{98}$$

より，

$$\{[z_1, z_2, z_3] \in \mathbb{C}P^2 | r < |z_3| \leq 1\} \tag{99}$$

は4次元円板$D^4$（4ハンドル）である．一方で，

$$\mathbb{C}P^2_2 = \{[z_1, z_2, z_3] \in \mathbb{C}P^2 | 0 \leq |z_3| < r\} \tag{100}$$

は$\mathbb{C}P^2_2$を与える．attaching regionは

$$\{[z_1, z_2, z_3] \in \mathbb{C}P^2 || z_3| = r\} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 || z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 - r^2\} \cong S^3 \tag{101}$$

は$S^3$である．

連続写像$\tilde{f} : \mathbb{C}P^2_2 \to \mathbb{C}P^1$を構成したい．境界$|z_3| = r$に制限したときに，Hopfファイブレーション

$$S^1 \to S^3 \xrightarrow{f} \mathbb{C}P^1 \tag{102}$$

となるように$\tilde{f}$を定義すれば良い．

$$D^2 \to \mathbb{C}P^2_2 \xrightarrow{\tilde{f}} \mathbb{C}P^1. \tag{103}$$

$\mathbb{C}P^2_2$の斉次座標を用いて，

$$\tilde{f} : \mathbb{C}P^2_2 \to \mathbb{C}P^1, \quad [z_1, z_2, z_3] \mapsto \left[\frac{z_1}{\sqrt{1 - |z_3|^2}}, \frac{z_2}{\sqrt{1 - |z_3|^2}}\right] \tag{104}$$

と定義すれば良い．

## 4.2　$\int_{S^3} \omega d\omega$の計算

$S^3$の２次のコホモロジーはゼロ$H^2(S^3, \mathbb{Z}) = 0$より，$S^3$上の$U(1)$場は単に1形式として与えられる．$S^3$上の任意の１形式$\omega$を用いて$\int_{S^3} \omega d\omega$が計算できるが，ここでは，非自明な値$\int_{S^3} \omega d\omega = 1$を取ることがわかっている，Hopf invariantの定義に用いられる１形式$\omega$を例として計算しよう．

まず，Bott-Tuの教科書に従って，$\omega$を定義する．半径1の$S^2$上の体積形式を$\alpha \in \Omega^2_{DR}(S^2)$とする．$\int_{S^2}\alpha = 1$と規格化する．Hopfマップ$f : S^3 \to S^2$による引き戻し$f^*\alpha$は，$H^2_{DR}(S^3) = 0$より，$f^*\alpha = d\omega$なる１形式$\omega \in \Omega^1_{DR}(S^3)$が存在する． Bott-Tuの(17.23.3)式に，$\mathbb{C}P^1$の斉次座標$[w_1, w_2]$を用いた$\alpha$表式がある．

$$\alpha = \frac{i}{2\pi}\frac{(w_2dw_1 - w_1dw_2)(\bar{w}_2d\bar{w}_1 - \bar{w}_1d\bar{w}_2)}{(|w_1|^2 + |w_2|^2)^2}. \tag{105}$$

$|w_1|^2 + |w_2|^2 = 1$,

$$dw_1\bar{w}_1 + w_1d\bar{w}_1 + dw_2\bar{w}_2 + w_2d\bar{w}_2 = 0 \tag{106}$$

に注意する．

$$(w_2dw_1 - w_1dw_2)(\bar{w}_2d\bar{w}_1 - \bar{w}_1d\bar{w}_2) \tag{107}$$
$$= |w_2|^2dw_1d\bar{w}_1 - w_2\bar{w}_1dw_1d\bar{w}_2 - w_1\bar{w}_2dw_2d\bar{w}_1 + |w_1|^2dw_2d\bar{w}_2 \tag{108}$$
$$= |w_2|^2dw_1d\bar{w}_1 + \bar{w}_1dw_1(dw_1\bar{w}_1 + w_1d\bar{w}_1 + dw_2\bar{w}_2) + \bar{w}_2dw_2(dw_1\bar{w}_1 + dw_2\bar{w}_2 + w_2d\bar{w}_2) + |w_1|^2dw_2d\bar{w}_2 \tag{109}$$
$$= dw_1d\bar{w}_1 + dw_2d\bar{w}_2 \tag{110}$$

より，

$$\alpha = \frac{i}{2\pi}(dw_1d\bar{w}_1 + dw_2d\bar{w}_2) = -\frac{i}{2\pi}d(\bar{w}_1dw_1 + \bar{w}_2dw_2) = -\frac{i}{2\pi}dw^\dagger dw = -\frac{i}{2\pi}d(w^\dagger dw) \tag{111}$$

となる．ここで$w = (w_1, w_2)^T$とおいた． $\mathbb{C}P^1$上の体積形式は，１形式$-\frac{i}{2\pi}w^\dagger dw$の外微分で与えられることがわかる．１形式$-\frac{i}{2\pi}w^\dagger dw$は$\mathbb{C}P^1$上では局所的な表式であることに注意.

$$w_1 = \frac{z_1}{\sqrt{1-|z_3|^2}}, \quad w_2 = \frac{z_2}{\sqrt{1-|z_3|^2}} \tag{112}$$

として，$\mathbb{C}P^2_2$への引き戻し$\tilde{f}^*\alpha$を計算する． $z = (z_1, z_2)^T$, $\rho = \sqrt{1-|z_3|^2}$と置く．$z^\dagger z = |z_1|^2 + |z_2|^2 = \rho^2$に注意.

$$\begin{aligned} dw^\dagger dw &= d(\rho^{-1}z^\dagger)d(\rho^{-1}z) &(113)\\ &= (d\rho^{-1}z^\dagger + \rho^{-1}dz^\dagger)(d\rho^{-1}z + \rho^{-1}dz) &(114)\\ &= \rho^{-1}d\rho^{-1}z^\dagger dz - \rho^{-1}d\rho^{-1}dz^\dagger z + \rho^{-2}dz^\dagger dz &(115)\\ &= \rho^{-1}d\rho^{-1}z^\dagger dz - \rho^{-1}d\rho^{-1}(2\rho d\rho - z^\dagger dz) + \rho^{-2}dz^\dagger dz &(116)\\ &= 2\rho^{-1}d\rho^{-1}z^\dagger dz + \rho^{-2}dz^\dagger dz &(117)\\ &= d(\rho^{-2}z^\dagger dz) &(118) \end{aligned}$$

より，

$$\omega = -\frac{i}{2\pi}\rho^{-2}z^\dagger dz \tag{119}$$

まずはこの表式を用いて，半径$\rho$の球面$S^3$上の積分$\int_{S^3}\omega d\omega$を計算しよう． $z_1 = x_1 + ix_2, z_2 = x_3 + ix_4$と置くと

$$\omega = \rho^{-2}\frac{1}{\pi}(x_1dx_2 + x_3dx_4), \quad \int_{S^3}\omega d\omega = \rho^{-4}\frac{2}{\pi^2}\int_{S^3}x_1dx_2dx_3dx_4 = 1. \tag{120}$$

となり通常のHopf不変量を与える.

次に$\mathbb{C}P_2^2$上の積分$\int_{\mathbb{C}P_2^2} d\omega d\omega$を計算する．ストークスの定理により，両者の結果は一致しなければならない． $\omega = \rho^{-2}\omega_0$と書こう．$\omega_0 = \frac{1}{\pi}(x_1 dx_2 + x_3 dx_4)$.

$$d\omega = d\rho^{-2}\omega_0 + \rho^{-2}d\omega_0, \tag{121}$$

$$\begin{aligned} d\omega d\omega &= (d\rho^{-2}\omega_0 + \rho^{-2}d\omega_0)(d\rho^{-2}\omega_0 + \rho^{-2}d\omega_0) && (122)\\ &= 2\rho^{-2}d\rho^{-2}\omega_0 d\omega_0 + \rho^{-4}d\omega_0 d\omega_0 && (123)\\ &= \frac{2}{\pi^2}(2\rho^{-2}d\rho^{-2}x_1 dx_2 dx_3 dx_4 + \rho^{-4}dx_1 dx_2 dx_3 dx_4). && (124)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho\sin\xi\sin\phi\cos\theta, && (125)\\ x_2 &= \rho\sin\xi\sin\phi\sin\theta, && (126)\\ x_3 &= \rho\sin\xi\cos\phi, && (127)\\ x_4 &= \rho\cos\xi && (128)\end{aligned}$$

と置くと，

$$x_1 dx_2 dx_3 dx_4 = \rho^4\sin^4\xi\sin^3\phi\cos^2\theta d\theta d\phi d\xi + (...)d\rho, \tag{129}$$

$$dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = d(x_1 dx_2 dx_3 dx_4) = 4\rho^3\sin^4\xi\sin^3\phi\cos^2 d\rho\theta d\theta d\phi d\xi \tag{130}$$

より，

$$d\omega d\omega = 0 \tag{131}$$

を得る???

# 5　複素旗多様体模型における，曲率関する関係式について

（動機１） Chern指標に関する関係式

$$ch(V\oplus W) = ch(V) + ch(W) \tag{132}$$

は，素朴には

$$\operatorname{tr} F^n_{V\oplus W} = \operatorname{tr} F^n_V + \operatorname{tr} F^n_W \tag{133}$$

の成立を示唆するが，直接証明をつけることができない... 一般の接続付き複素ベクトル束ではなく，複素旗多様体であれば類似の関係式を直接証明できるかもしれない.

（動機２）ファイブレーション

$$U(N+M+K) \to \frac{U(N+M+K)}{U(N)\times U(M)\times U(K)} \to BU(N)\times BU(M)\times BU(K) \tag{134}$$

より従うLeray–Serreスペクトル系列の$E_2$ページは以下で与えられる.

$$\begin{array}{c|ccccc} 3 & \mathbb{Z} & & & & \\ 2 & 0 & 0 & & & \\ 1 & \mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Z}^3 & & \\ 0 & \mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Z}^3 & 0 & \mathbb{Z}^L \\ \hline E_2^{p,q} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \tag{135}$$

ここで，$L$は$N, M, K$がそれぞれ1か，2以上かに依存して決まり，例えば$(N, M, K) = (1, 1, 1)$であれば$L = 6$である． $E_2^{0,1} = H^1(U(N+M+K), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$は，$\operatorname{tr}[U^\dagger dU]$で生成され， $E_2^{0,3} = H^3(U(N+M+K), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$は$\operatorname{tr}[U^\dagger dU]^3$で生成される．すると，$d_2, d_4$微分の自然な解釈は，

- $d_2$: $\mathrm{dtr}\,[U^\dagger dU]=0$から来る$U(N)\times U(M)\times U(K)$ゲージ場の曲率に対する制限
- $d_4$: $\mathrm{dtr}\,[U^\dagger dU]^3=0$から来る$U(N)\times U(M)\times U(K)$ゲージ場の曲率に対する制限

とみなすことが自然である．

以下では，この推測と密接に関わるであると思われる，$U(N)\times U(M)\times U(K)$ゲージ場の曲率の間に成立するある関係式を示す．

### 5.1 準備

$U:U_i\to U(N+M+K)$を局所的な場の配位として，

$$U=(|u_1\rangle,\ldots,|u_N\rangle,|v_1\rangle,\ldots,|v_M\rangle,|w_1\rangle,\ldots,|w_K\rangle) \tag{136}$$

と書く．$(N+M+K)\times(N+M+K)$行列の射影演算子を

$$P_1:=\sum_{i=1}^{N}|u_i\rangle\langle u_i|, \tag{137}$$

$$P_2:=\sum_{i=1}^{M}|v_i\rangle\langle v_i|, \tag{138}$$

$$P_3:=\sum_{i=1}^{K}|w_i\rangle\langle w_i| \tag{139}$$

と定義すると，$U$なる$\mathbb{C}^{N+M+K}$の基底のもとでは，

$$P_1U=U\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix},\quad P_2U=U\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix},\quad P_3U=U\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&1\end{pmatrix} \tag{140}$$

なる表示を持つ．$U(N),U(M),U(K)$ゲージ場は，それぞれ

$$A_1=P_1U^\dagger dUP_1, \tag{141}$$

$$A_2=P_2U^\dagger dUP_2, \tag{142}$$

$$A_3=P_3U^\dagger dUP_3 \tag{143}$$

で与えられる．曲率は

$$F_j=dA_j+A_j^2=P_j(-U^\dagger dUU^\dagger dU)P_j+P_jU^\dagger dUP_jU^\dagger dUP_j=-P_jU^\dagger dU(1-P_j)U^\dagger dUP_j \tag{144}$$

より，$X=U^\dagger dU$と置くと，

$$F_1=-P_1X(P_2+P_3)XP_1, \tag{145}$$

$$F_2=-P_2X(P_1+P_3)XP_2, \tag{146}$$

$$F_3=-P_3X(P_1+P_2)XP_3 \tag{147}$$

と与えられる．

$$dX=-X^2 \tag{148}$$

に注意．

## 5.2 $d_2$

$$0 = d\mathrm{tr}\,[U^\dagger dU] = -\mathrm{tr}\,[X^2] \tag{149}$$

であるが，これを

$$\sum_{i,j\in\{1,2,3\}^2} \mathrm{tr}\,[P_i X P_j X] = 0 \tag{150}$$

と見る．省略記号

$$(ij) := \mathrm{tr}\,[P_i X P_j X] \tag{151}$$

を導入する．トレースの性質より，

$$(ij) = -(ji) \tag{152}$$

が成立する．特に

$$(ii) = 0 \tag{153}$$

に注意．関係式$d\mathrm{tr}\,[U^\dagger dU] = 0$は，

$$\sum_{i,j\in\{1,2,3\}^2} (ij) = (11) + (12) + (13) + (21) + (22) + (23) + (31) + (32) + (33) \tag{154}$$

$$= (12) + (13) + (21) + (23) + (31) + (32). \tag{155}$$

一方で，$U(N), U(M), U(K)$の曲率はそれぞれ

$$-\mathrm{tr}\,F_1 = (12) + (13), \tag{156}$$

$$-\mathrm{tr}\,F_2 = (21) + (23), \tag{157}$$

$$-\mathrm{tr}\,F_3 = (31) + (32) \tag{158}$$

と与えられるため，$d\mathrm{tr}\,[U^\dagger dU] = 0$は

$$\mathrm{tr}\,F_1 + \mathrm{tr}\,F_2 + \mathrm{tr}\,F_3 = 0 \tag{159}$$

と等価．（性質$(ij) = -(ji)$だけを用いて直接証明可能であることにも注意．$\mathrm{tr}\,[U^\dagger dU] = 0$とは無関係？）

## 5.3 $d_4$

$d_2$と同様にして，

$$0 = d\mathrm{tr}\,[U^\dagger dU]^3 = -\mathrm{tr}\,[X^4] \tag{160}$$

より，

$$\sum_{i,j,k,l\in\{1,2,3\}^4} (ijkl) = 0. \tag{161}$$

ここで，省略記号

$$(ijkl) = \mathrm{tr}\,[P_i X P_j X P_k X P_l X] \tag{162}$$

を導入した．

$$(ijkl)=-(jkli) \tag{163}$$

に注意． $U(N),U(M),U(K)$の曲率はそれぞれ

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\,F_1^2 &= (1212)+(1312)+(1213)+(1313), && (164)\\
\mathrm{tr}\,F_2^2 &= (2323)+(2123)+(2321)+(2121), && (165)\\
\mathrm{tr}\,F_3^2 &= (3131)+(3231)+(3132)+(3231) && (166)
\end{aligned}$$

と書くことができる．以下を示す．

- $\mathrm{tr}\,F_1^2+\mathrm{tr}\,F_2^2+\mathrm{tr}\,F_3^2$は大域的な全微分項．

(証明)

$$\mathrm{tr}\,F_1^2+\mathrm{tr}\,F_2^2+\mathrm{tr}\,F_3^2=(1213)+(2123)+(3231)+(1\leftrightarrow 2). \tag{167}$$

となる．$P_3=1-P_1-P_2$を用いて，$P_3$を消去する．

$$\begin{aligned}
(1213) &= \mathrm{tr}\,[P_1XP_2XP_1XP_3X]=\mathrm{tr}\,[P_1XP_2XP_1X(1-P_1-P_2)X] && (168)\\
&= \mathrm{tr}\,[P_1XP_2XP_1X^2]-(1211)-(1212), && (169)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2123) &= \mathrm{tr}\,[P_2XP_1XP_2XP_3X]=\mathrm{tr}\,[P_2XP_1XP_2X(1-P_1-P_2)X] && (170)\\
&= \mathrm{tr}\,[P_2XP_1XP_2X^2]-(2121)-(2122), && (171)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3231) &= \mathrm{tr}\,[(1-P_1-P_2)XP_2X(1-P_1-P_2)XP_1X] && (172)\\
&= \mathrm{tr}\,[XP_2X^2P_1X]-\mathrm{tr}\,[XP_2XP_1XP_1X]-\mathrm{tr}\,[XP_2XP_2XP_1X]-\mathrm{tr}\,[P_1XP_2X^2P_1X] && (173)\\
&\quad +(1211)+(1221)-\mathrm{tr}\,[P_2XP_2X^2P_1X]+(2211)+(2221). && (174)
\end{aligned}$$

これから，

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\,F_1^2+\mathrm{tr}\,F_2^2+\mathrm{tr}\,F_3^2 &= 2\mathrm{tr}\,[P_1XP_2XP_1X^2+P_2XP_1XP_2X^2+XP_2X^2P_1X-XP_2XP_1XP_1X && (175)\\
&\quad -XP_2XP_2XP_1X-P_1XP_2X^2P_1X-P_2XP_2X^2P_1X] && (176)\\
&= 2\mathrm{tr}\,[P_1XP_2XP_1X^2-P_1XP_2X^2P_1X+P_1X^2P_2XP_1X && (177)\\
&\quad +P_2XP_1XP_2X^2-P_2XP_1X^2P_2X+P_2X^2P_1XP_2X && (178)\\
&\quad -P_1X^2P_2X^2] && (179)\\
&= -2\mathrm{tr}\,[P_1XP_2XP_1dX-P_1XP_2dXP_1X+P_1dXP_2XP_1X && (180)\\
&\quad +P_2XP_1XP_2dX-P_2XP_1dXP_2X+P_2dXP_1XP_2X && (181)\\
&\quad +P_1dXP_2dX] && (182)\\
&= -2d\mathrm{tr}\,[P_1XP_2XP_1X+P_2XP_1XP_2X+P_1XP_2dX] && (183)\\
&= -2d\mathrm{tr}\,[P_1XP_2XP_1X+P_1XP_2XP_2X-P_1XP_2X^2] && (184)\\
&= -2d\mathrm{tr}\,[P_1XP_2XP_1X+P_1XP_2XP_2X-P_1XP_2X(P_1+P_2+P_3)X] && (185)\\
&= 2d\mathrm{tr}\,[P_1XP_2XP_3X]. && (186)
\end{aligned}$$

（証明終）

- さて，上の証明は$d\mathrm{tr}\,[U^\dagger dU]^3=0$とは無関係に見えるが，どうだろうか．$\mathrm{tr}\,[X^4]$から生じる81通りの$(ijkl)$の組み合わせのうち，12通りしか用いていない． $d\mathrm{tr}\,[U^\dagger dU]^3=0$と$\mathrm{tr}\,F_1^2+\mathrm{tr}\,F_2^2+\mathrm{tr}\,F_3^2=d(\cdots)$は独立に成立するので，他の$81-12=69$項の間に成立する関係式は，例えばトレースのcyclicityのみを用いたある種の自明な関係式であれば，$\mathrm{tr}\,F_1^2+\mathrm{tr}\,F_2^2+\mathrm{tr}\,F_3^2=d(\cdots)$と$d\mathrm{tr}\,[U^\dagger dU]^3=0$が等価と言って良いかもしれない．

- 全微分項の存在は，素朴には3次元理論の作用に変更を要求する．この点を次節で考えてみよう．
- 表式は，非可換幾何学のコサイクルに似ているが，何か関係があるだろうか．

さて，関係式

$$\mathrm{tr}\, F_1^2 + \mathrm{tr}\, F_2^2 + \mathrm{tr}\, F_3^2 = 2d\mathrm{tr}\,[P_1 X P_2 X P_3 X] \tag{187}$$

において，左辺は実である一方で，右辺はup to total derivative で実である：

$$\mathrm{tr}\,[P_1 X P_2 X P_3 X]^* = \mathrm{tr}\,[P_1 X P_2 X P_3 X]^\dagger = \mathrm{tr}\,[P_1 X P_3 X P_2 X]. \tag{188}$$

ここで，$X^\dagger = -X$を用いた．

### 5.4 $U(3)/U(1)^3$模型

場の配位$U : \mathcal{M} \to U(3)$を

$$U = (u_1, u_2, u_3), \quad u_i^\dagger u_j = \delta_{ij}, \tag{189}$$

と置く．対角的なBerry接続，及びBerry曲率は

$$a_i = u_i^\dagger du_i, \quad f_i = da_i = du_i^\dagger du_i. \tag{190}$$

前節で導出した関係式

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = 2d\mathrm{tr}\,[P_1 X P_2 X P_3 X] \tag{191}$$

の右辺を具体的に書き下そう．

$$X_{ij} = [U^\dagger dU]_{ij} = u_i^\dagger du_j = -du_i^\dagger u_j. \tag{192}$$

$$2\mathrm{tr}\,[P_1 X P_2 X P_3 X] = 2X_{12} X_{23} X_{31} = 2u_1^\dagger du_2 u_2^\dagger du_3 u_3^\dagger du_1. \tag{193}$$

$U(3)$Berry接続$a_{ij} = u_i^\dagger du_j$を用いると，

$$2\mathrm{tr}\,[P_1 X P_2 X P_3 X] = 2a_{12} a_{23} a_{31}. \tag{194}$$

さて，関係式は

$$a_1 da_1 + a_2 da_2 + a_3 da_3 = 2a_{12} a_{23} a_{31} + (\text{closed 3-form}) \tag{195}$$

意味する．

### 5.5 一般の$U(N_1 + \cdots + N_k)/U(N_1) \times \cdots \times U(N_k)$

類似の関係式を探す．まず，$k = 3$の場合を，一般化が容易な形式に書き換える．

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\, F_1^2 + \mathrm{tr}\, F_2^2 + \mathrm{tr}\, F_3^2 &= d\mathrm{tr}\,[P_1 X P_2 X P_3 X + P_1 X P_3 X P_2 X] && (196)\\
&= \frac{1}{3} \sum_{\sigma \in A_3} d\mathrm{tr}\,[P_{\sigma_1} X P_{\sigma_2} X P_{\sigma_3} X] && (197)\\
&= \sum_{\sigma \in A_2} d\mathrm{tr}\,[P_3 X P_{\sigma_1} X P_{\sigma_2} X]. && (198)
\end{aligned}$$

一気に一般系を予想すると

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{tr}\, F_i^2 = \sum_{a,b,c\in\{1,\dots,k\}} d\mathrm{tr}\,[P_a X P_b X P_c X]. \tag{199}$$

@@@

$$0 = d\mathrm{tr}\,[X^3] = \sum_{i,j,k\in\{1,\dots,p\}} d\mathrm{tr}\,[P_i X P_j X P_k X] \tag{200}$$

から出発する．自明に消える組み合わせ$(i,j,k)$を探す．

$$\sum_i P_i = 1, \quad dX = -X^2 \tag{201}$$

を使う．

$$F_i = -P_i X(1-P_i)XP_i, \tag{202}$$

$$\sum_i \mathrm{tr}\, F_i^2 = \sum_i \mathrm{tr}\,[P_i X(1-P_i)XP_i X(1-P_i)X] \tag{203}$$

$$\sum_{i,j,k\in\{1,\dots,p\}} d\mathrm{tr}\,[P_i X P_j X P_k X] = \sum_{i,j,k\in\{1,\dots,p\}} \mathrm{tr}\,[-P_i X^2 P_j X P_k X - P_i X P_j X^2 P_k X - P_i X P_j X P_k X^2] \tag{204}$$

@@@

$$\sum_i \mathrm{tr}\, F_i^2 = 2\sum_{i<j<k} d\mathrm{tr}\,[P_i X P_j X P_k X]. \tag{205}$$

が谷崎さんの表式の一般化．これを示そう．

@@@

$I \in \{1,\dots,N-1\}$とする．

$$F_i = -P_i X(1-P_i)XP_i, \tag{206}$$

$$\sum_i \mathrm{tr}\, F_i^2 = \sum_i \mathrm{tr}\,[P_i X(1-P_i)XP_i X(1-P_i)X] \tag{207}$$
$$= \sum_I \mathrm{tr}\,[P_I X(1-P_I)XP_I X(1-P_I)X] + \mathrm{tr}\,[P_N X(1-P_N)XP_N X(1-P_N)X] \tag{208}$$
$$= \sum_I \mathrm{tr}\,[P_I X(1-P_I)XP_I X(1-P_I)X] + \mathrm{tr}\,[P_N X(1-P_N)XP_N X(1-P_N)X] \tag{209}$$
$$= \sum_I \mathrm{tr}\,[P_I X(1-P_I)XP_I X(1-P_I)X] + \sum_{J,L} \mathrm{tr}\,[(1-\sum_I P_I)XP_J X(1-\sum_K P_K)XP_L X] \tag{210}$$
$$= \sum_I \mathrm{tr}\,[P_I X^2 P_I X^2 - P_I X^2 P_I X P_I X - P_I X P_I X P_I X^2 + P_I X P_I X P_I X P_I X] \tag{211}$$
$$+ \sum_{J,L} \mathrm{tr}\,[XP_J X^2 P_L X] - \sum_{I,J,L} \mathrm{tr}\,[P_I X P_J X^2 P_L X] - \sum_{J,K,L} \mathrm{tr}\,[XP_J X P_K X P_L X] \tag{212}$$
$$+ \sum_{I,J,K,L} \mathrm{tr}\,[P_I X P_J X P_K X P_L X] \tag{213}$$
$$= \sum_I \mathrm{tr}\,[P_I X(1-P_I)XP_I X(1-P_I)X] + \sum_{J,L} \mathrm{tr}\,[(1-\sum_I P_I)XP_J X(1-\sum_K P_K)XP_L X] \tag{214}$$
$$= \sum_I \mathrm{tr}\,[P_I X^2 P_I X^2 - P_I X^2 P_I X P_I X - P_I X P_I X P_I X^2] \tag{215}$$
$$- \sum_{I,J} \mathrm{tr}\,[P_I X^2 P_J X^2] - \sum_{I,J,K} \mathrm{tr}\,[P_I X P_J X^2 P_K X] + \sum_{I,J,K} \mathrm{tr}\,[P_I X P_J X P_K X^2] \tag{216}$$
$$= \sum_I \mathrm{tr}\,[P_I dX P_I dX + P_I dX P_I X P_I X + P_I X P_I X P_I dX] \tag{217}$$
$$- \sum_{I,J} \mathrm{tr}\,[P_I dX P_J dX] + \sum_{I,J,K} \mathrm{tr}\,[P_I X P_J dX P_K X] - \sum_{I,J,K} \mathrm{tr}\,[P_I X P_J X P_K dX] \tag{218}$$
$$= \sum_I d\mathrm{tr}\,[P_I X P_I dX + \frac{2}{3} P_I X P_I X P_I X] \tag{219}$$
$$- \sum_{I,J} d\mathrm{tr}\,[P_I X P_J dX] - \sum_{I,J,K} d\mathrm{tr}\,[\frac{2}{3} P_I X P_J X P_K X] \tag{220}$$
$$= \sum_I d\mathrm{tr}\,[-P_I X P_I X^2 + \frac{2}{3} P_I X P_I X P_I X] + \sum_{I,J} d\mathrm{tr}\,[P_I X P_J X^2] - \sum_{I,J,K} d\mathrm{tr}\,[\frac{2}{3} P_I X P_J X P_K X]. \tag{221}$$

と，3形式の微分で書かれる．ここで，

$$\mathrm{tr}\,[P_I dX P_I X P_I X] = -\mathrm{tr}\,[P_I X P_I dX P_I X] = \mathrm{tr}\,[P_I X P_I X P_I dX] = \frac{1}{3} d\mathrm{tr}\,[P_I X P_I X P_I X], \tag{222}$$
$$\sum_{I,J,K} \mathrm{tr}\,[P_I dX P_J X P_K X] = -\sum_{I,J,K} \mathrm{tr}\,[P_I X P_J dX P_K X] = \sum_{I,J,K} \mathrm{tr}\,[P_I X P_J X P_K dX] = \frac{1}{3} \sum_{I,J,K} d\mathrm{tr}\,[P_I X P_J X P_K X] \tag{223}$$

を用いた．さらに整理する．

$$\sum_{I,J} \mathrm{tr}\,[P_I X P_J X^2] = \sum_I \mathrm{tr}\,[P_I X P_I X^2] + \sum_{I,J,I\neq J} \mathrm{tr}\,[P_I X P_J X^2], \tag{224}$$

$$\sum_{I,J,K} \mathrm{tr}\,[P_I X P_J X P_K X] = \sum_I \mathrm{tr}\,[P_I X P_I X P_I X] + 3 \sum_{I,J,I\neq J} \mathrm{tr}\,[P_I X P_I X P_J X] + \sum_{I,J,K,I\neq J,J\neq K,K\neq I} \mathrm{tr}\,[P_I X P_J X P_K X] \tag{225}$$

より，

$$
\begin{aligned}
\sum_i \mathrm{tr}\, F_i^2 &= d\mathrm{tr}\,[\sum_{I,J,I\neq J} P_I X P_J X^2 - 2\sum_{I,J,I\neq J} P_I X P_I X P_J X - \frac{2}{3}\sum_{I,J,K,I\neq J,J\neq K,K\neq I} P_I X P_J X P_K X] && (226)\\
&= d\mathrm{tr}\,[\sum_{I,J,K,I\neq J} P_I X P_J X P_K X + \sum_{I,J,I\neq J} P_I X P_J X P_N X && (227)\\
&\quad - 2\sum_{I,J,I\neq J} P_I X P_I X P_J X - \frac{2}{3}\sum_{I,J,K,I\neq J,J\neq K,K\neq I} P_I X P_J X P_K X] && (228)\\
& && (229)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{I,J,K,I\neq J} \mathrm{tr}\,[P_I X P_J X P_K X] &= \sum_{I,J,I\neq J} \mathrm{tr}\,[P_I X P_J X (P_I + P_J + \sum_{K,K\neq I,K\neq J} P_K) X] && (230)\\
&= 2\sum_{I,J,I\neq J} \mathrm{tr}\,[P_I X P_J X P_I X] + \sum_{I,J,K,I\neq J,K\neq I,K\neq J} \mathrm{tr}\,[P_I X P_J X P_K X]. && (231)
\end{aligned}
$$

に注意すると

$$
\begin{aligned}
\sum_i \mathrm{tr}\, F_i^2 &= d\mathrm{tr}\,[\sum_{I,J,K,I\neq J,K\neq I,K\neq J} P_I X P_J X P_K X + \sum_{I,J,I\neq J} P_I X P_J X P_N X && (232)\\
&\quad - \frac{2}{3}\sum_{I,J,K,I\neq J,J\neq K,K\neq I} P_I X P_J X P_K X] && (233)\\
&= d\mathrm{tr}\,[\frac{1}{3}\sum_{I,J,K,I\neq J,J\neq K,K\neq I} P_I X P_J X P_K X + \sum_{I,J,I\neq J} P_I X P_J X P_N X] && (234)\\
&= d\mathrm{tr}\,[\sum_{I<J<K<N} P_I X P_J X P_K X + \sum_{I<J<K<N} P_I X P_K X P_J X + \sum_{I,J,I\neq J} P_I X P_J X P_N X]. && (235)
\end{aligned}
$$

となり，ゲージ不変な完全形式を得る．

# 6　$\mathbb{C}P^1$模型のトポロジカル作用

## 6.1　有効作用

$\Omega_3^{\mathrm{spin}}(S^2) = \mathbb{Z}_2$より，時空3次元でスピンボルディズム不変な作用を持つ． Hopf項で与えられることが知られている．

$$\exp \frac{i}{4\pi}\int_M \text{“}ada\text{''} \tag{236}$$

ここで，$U(1)$場$a$は配位$M \to S^2, (t,x,y) \mapsto \boldsymbol{n}(t,x,y)$に対して，$z \in \mathbb{C}^2, |z| = 1$として，

$$a = -iz^\dagger dz, \quad z^\dagger \boldsymbol{\sigma} z = \boldsymbol{n}, \tag{237}$$

で定義される．ゲージ変換$z \mapsto ze^{i\alpha}$に対して$\boldsymbol{n}$は不変であることに注意．ゲージ不変な$da$は直接$\boldsymbol{n}$を用いて書くことができるはずである．これを見るために，

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} = z^\dagger\boldsymbol{\sigma}z\cdot\boldsymbol{\sigma} = z_a^\dagger \sigma_{ab}^i z_b \sigma_{cd}^i = z_a^\dagger z_b(2\delta_{ad}\delta_{bc} - \delta_{ab}\delta_{cd}) = 2z_c z_d^\dagger - \delta_{cd} = 2zz^\dagger - 1. \tag{238}$$

に注意する．$P = zz^\dagger = \frac{1+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2}$を射影行列として，

$$\mathrm{tr}\,[P(dP)^2] = \mathrm{tr}\,[zz^\dagger d(zz^\dagger)d(zz^\dagger)] = dz^\dagger dz = ida, \tag{239}$$

$$\mathrm{tr}\,[P(dP)^2] = \frac{1}{8}\mathrm{tr}\,[(1+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})d\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}d\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}] = \frac{i}{4}\epsilon_{ijk}n_i dn_j dn_k \tag{240}$$

に注意すると，

$$\frac{1}{2\pi}da = \frac{1}{8\pi}\epsilon_{ijk}n_i dn_j dn_k \tag{241}$$

を得る．これから，スカーミオン線が$a$のモノポール線に対応することがわかる．スカーミオンの近傍で$z$を大域的に取ることができないことにも注意.

一般には$a$は大域的に定義されていないので（例えばスカーミオンがひとつだけ存在する場合），上記の有効作用は4次元多様体$X, \partial X = M$を導入する必要がある．このとき，$\boldsymbol{n}: M \to S^2$は$\Omega_3^{\mathrm{spin}}(S^2) = \mathbb{Z}_2$より，一般にはスピン多様体$X$上に拡張することができない．しかし，$\Omega_3^{\mathrm{spin}}(BU(1)) = 0$, あるいは成分数をひとつ増やすだけ$\Omega_3^{\mathrm{spin}}(\mathbb{C}P^2) = 0$より，任意の$U(1)$場とするとスピン多様体$X$上に拡張することができる．つまり，以下のような$\tilde{a}$が存在する.

$$\tilde{a}: X \to BU(1), \quad \tilde{a}|_M = a. \tag{242}$$

同じことだが，以下のような$\tilde{z}$が存在する.

$$\tilde{z}: X \to \mathbb{C}^\infty, \quad \tilde{z}^\dagger\tilde{z} = 1, \quad \tilde{z}|_M = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{243}$$

この拡張をひとつ取り，

$$\exp\frac{i}{4\pi}\int_M ada := \exp\frac{i}{4\pi}\int_X \tilde{f}^2 \tag{244}$$

と定義する．スピンChern-Simonsの一般論より， $X$が閉じたスピン多様体のとき，$U(1)$場$\tilde{a}$に対して

$$\frac{i}{4\pi}\int_X \tilde{f}^2 \in 2\pi i\mathbb{Z} \tag{245}$$

より，$X$への拡張に依存しないことは保証されている.

さて上のように$\mathbb{C}P^1$模型の作用を定義したとき，スピンボルディズム不変量であることは以下のようにして示される． $(M_{12}, a_{12}): (M_1, a_1) \sim (M_2, a_2)$を$\mathbb{C}P^1$場のスピンボルディズムとする．このとき$X$を$M_1$のbounding manifoldとすると，$M_2$のbounding manifoldは$X \cup M_{12}$と取ることができる．よって定義より，

$$\frac{i}{4\pi}\int_{M_2} \text{“}ada'' = \frac{i}{4\pi}\int_{X\cup M_{12}} f^2 \tag{246}$$

であるが，$\mathbb{C}P^1$場の性質として$M_{12}$上で$f^2 = (da_{12})^2 = 0$であることから，

$$\frac{i}{4\pi}\int_{M_2} \text{“}ada'' = \frac{i}{4\pi}\int_X f^2 \tag{247}$$

となり，これは$M_1$上のCS有効作用に他ならない.

### 6.1.1 計算例

$S^2 \times S^1$上の$\mathbb{C}P^1$模型において，スカーミオンを$2\pi$回転する配位は以下で与えられる.

$$z(\theta, \phi, \alpha) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\alpha}e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{248}$$

$(\theta,\phi)$は$S^2$の座標，$\alpha$は$S^1$の座標． $\Omega_3^{SO}(S^2)=0$より，上記配位を境界として持つ４次元多様体上の$S^2$模型が存在するはずであるが，見つけられない． [4]

以下のように$\mathbb{C}P^2$模型に埋め込めば，$S^1=\partial D^2$とする4次元多様体が存在する．[8]

$$\tilde{z}(\theta,\phi,\alpha,\rho)=\begin{pmatrix}1 & & \\ & \rho e^{i\alpha} & \sqrt{1-\rho^2} \\ & -\sqrt{1-\rho^2} & \rho e^{-i\alpha}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \\ 0\end{pmatrix},\quad \rho\in[0,1]. \tag{249}$$

これは，$1,2$成分のスカーミオンの$2\pi$回転が$1,3$成分のスカーミオンの$0$回転がbordantであることを意味する．

$$\tilde{z}(\theta,\phi,\alpha,\rho=0)=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} \\ 0 \\ -e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}. \tag{250}$$

$\frac{i}{4\pi}\int$ “$ada$”を計算する．

$$\tilde{z}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} \\ \rho e^{i(\phi+\alpha)}\sin\frac{\theta}{2} \\ -\sqrt{1-\rho^2}e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix} \tag{251}$$

$\tilde{a}^*=\tilde{a}$に注意する．

$$\tilde{a}=-i\tilde{z}^\dagger d\tilde{z}=\rho^2 d(\phi+\alpha)\sin^2\frac{\theta}{2}+(1-\rho^2)d\phi\sin^2\frac{\theta}{2}=d\phi\sin^2\frac{\theta}{2}+\rho^2 d\alpha\sin^2\frac{\theta}{2}, \tag{252}$$

$$\tilde{f}=d\sin^2\frac{\theta}{2}d\phi+d\rho^2 d\alpha\sin^2\frac{\theta}{2}+\rho^2 d\sin^2\frac{\theta}{2}d\alpha, \tag{253}$$

$$\tilde{f}^2=2\sin^2\frac{\theta}{2}d\rho^2 d\alpha d\sin^2\frac{\theta}{2}d\phi. \tag{254}$$

これから，

$$\frac{i}{4\pi}\int_{S^2\times D^2}\tilde{f}^2=\frac{i}{4\pi}\int_{S^2\times D^2}2\sin^2\frac{\theta}{2}d\sin^2\frac{\theta}{2}d\phi d\rho^2 d\alpha=i\pi \tag{255}$$

を得る．

## 6.2 メモ：flag $U(3)/U(1)^3$の計算例

上記の計算の応用例として，flag $U(3)/U(1)^3$において，1番目の$U(1)$にのみスカーミオンを入れて$2\pi$回転する3次元配位に対して，$a_1da_1, a_2da_2, a_1da_2$などの積分を計算する．以下では$\det(z_1,z_2,z_3)=1$となるように配位を選ぶ．

$$z_1=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \\ 0\end{pmatrix},\quad z_2=\begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix},\quad z_3=\begin{pmatrix}-e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \\ 0\end{pmatrix}. \tag{256}$$

$z_1,z_3$にスカーミオンが存在し，それぞれ$2\pi$回転する． $\mathbb{C}P^1$模型とは異なり，flag の範囲内で0回転にボルダントである．実際，$S^2\times D^2$への以下の拡張を取ることができる．

$$\tilde{z}_i=\begin{pmatrix}1 & & \\ & \rho e^{i\alpha} & \sqrt{1-\rho^2} \\ & -\sqrt{1-\rho^2} & \rho e^{-i\alpha}\end{pmatrix}z_i, \tag{257}$$

[4] $\Omega_3^{\mathrm{spin}}(S^2)=\mathbb{Z}_2$と，以下で見るように有効作用の値が非自明な値$(-1)$を出すことと合わせると，スピン多様体の範囲内ではnull bordantではないので，非スピン多様体を導入する必要がある．

$$\tilde{z}_1 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \rho e^{i(\phi+\alpha)}\sin\frac{\theta}{2} \\ -\sqrt{1-\rho^2}e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{z}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{1-\rho^2} \\ \rho e^{-i\alpha} \end{pmatrix}, \quad \tilde{z}_3 = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \\ \rho e^{i\alpha}\cos\frac{\theta}{2} \\ -\sqrt{1-\rho^2}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \tag{258}$$

$$\tilde{a}_i = -i\tilde{z}_i^\dagger d\tilde{z}_i, \tag{259}$$

$\rho = 0$で$\alpha$依存性が消える.

$$\tilde{z}_1|_{\rho=0} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ 0 \\ -e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{z}_2|_{\rho=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{z}_3|_{\rho=0} = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \\ 0 \\ -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \tag{260}$$

ゲージ場$U(1)$場$\tilde{a}_i = -i\tilde{z}_i^\dagger d\tilde{z}_i$などを計算しよう.

$$\tilde{a}_1 = \sin^2\frac{\theta}{2}d\phi + \rho^2\sin^2\frac{\theta}{2}d\alpha, \tag{261}$$

$$\tilde{a}_2 = -\rho^2 d\alpha, \tag{262}$$

$$\tilde{a}_3 = -\sin^2\frac{\theta}{2}d\phi + \rho^2\cos^2\frac{\theta}{2}d\alpha, \tag{263}$$

$\det(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3) = 1$より, $\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 + \tilde{a}_3 = 0$に注意.

$$\tilde{f}_1 = d\sin^2\frac{\theta}{2}d\phi + \rho^2 d\sin^2\frac{\theta}{2}d\alpha + \sin^2\frac{\theta}{2}d\rho^2 d\alpha, \tag{264}$$

$$\tilde{f}_2 = -d\rho^2 d\alpha, \tag{265}$$

$$\tilde{f}_3 = -d\sin^2\frac{\theta}{2}d\phi + \rho^2 d\cos^2\frac{\theta}{2}d\alpha + \cos^2\frac{\theta}{2}d\rho^2 d\alpha, \tag{266}$$

これから,

$$\frac{i}{4\pi}\int_{S^2\times D^2}\tilde{f}_1^2 = i\pi, \tag{267}$$

$$\frac{i}{4\pi}\int_{S^2\times D^2}\tilde{f}_2^2 = 0, \tag{268}$$

$$\frac{i}{4\pi}\int_{S^2\times D^2}\tilde{f}_3^2 = \frac{i}{4\pi}\int_{S^2\times D^2} -2\cos^2\frac{\theta}{2}d\sin^2\frac{\theta}{2}d\phi d\rho^2 d\alpha = -i\pi, \tag{269}$$

$$\frac{i}{4\pi}\int_{S^2\times D^2}\tilde{f}_1\tilde{f}_2 = \frac{i}{4\pi}\int_{S^2\times D^2} -d\sin^2\frac{\theta}{2}d\phi d\rho^2 d\alpha = -i\pi \tag{270}$$

などを得る. $\mathrm{Re}\,[a_{12}a_{23}a_{31}]$を計算する. ゲージ不変なので, $S^2\times S^1$で計算すれば十分. $a_{12} = -iz_1^\dagger dz_2 = 0$より, $\mathrm{Re}\,[a_{12}a_{23}a_{31}] = 0$. 特に,

$$\frac{i}{4\pi}\int_{S^2\times D^2}(\tilde{f}_1^2 + \tilde{f}_2^2 + \tilde{f}_1\tilde{f}_2 - \mathrm{Re}\,[a_{12}a_{23}a_{31}]) = 0. \tag{271}$$

さて, 上の計算は$\Omega_3^{\mathrm{spin}}(U(3)/U(1)^3) = 0$と矛盾しない. $\mathbb{C}P^1$との類推により, flagにおける関係式

$$f_1^2 + f_2^2 + f_1\tilde{f}_2 - \mathrm{Re}\,[a_{12}a_{23}a_{31}] = 0 \tag{272}$$

は$\mathbb{Z}_2$量子化される有効作用

$$\exp\frac{i}{4\pi}\int_X(\tilde{f}_1^2 + \tilde{f}_2^2 + \tilde{f}_1\tilde{f}_2 - \mathrm{Re}\,[a_{12}a_{23}a_{31}]) \in \{\pm 1\} \tag{273}$$

の存在を示唆する. ここで$\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$はflagではなく, 独立な$U(1)$場への拡張である. しかし, $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$を独立な$U(1)$場とすると, $X$がスピンであっても,

$$\frac{i}{4\pi}\int_X\tilde{f}_1\tilde{f}_2 \in \pi i\mathbb{Z} \tag{274}$$

より, ill-defined.

# 7 虚時間時間発展とBerry位相

実時間発展と同様にして，虚時間発展についても断熱極限において離散的な固有状態はBerry位相を獲得する．

虚時間依存するハミルトニアン$H(\tau)$の虚時間発展を考える． Schrodinger方程式は

$$\frac{d}{d\tau}\left|\psi(\tau)\right\rangle = -H(\tau)\left|\psi(\tau)\right\rangle. \tag{275}$$

$H(\tau)$の固有値は離散的とし，瞬間的固有状態を$|n(\tau)\rangle$を

$$H(\tau)\left|n(\tau)\right\rangle = E_n(\tau)\left|n(\tau)\right\rangle, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{276}$$

と書く．これから

$$\langle m(\tau)|\frac{dH}{d\tau}(\tau)|n(\tau)\rangle = \frac{dE_n}{d\tau}(\tau)\delta_{nm} + (E_n(\tau) - E_m(\tau))\langle m(\tau)|\frac{dn}{d\tau}(\tau)\rangle \tag{277}$$

を得る．特に，

$$\langle n(\tau)|\frac{dH}{d\tau}(\tau)|n(\tau)\rangle = \frac{dE_n}{d\tau}(\tau) \tag{278}$$

はヘルマン–ファインマンの公式．また，$E_n(\tau) \neq E_m(\tau)$のとき，

$$\langle m(\tau)|\frac{dn}{d\tau}(\tau)\rangle = \frac{\langle m(\tau)|\frac{dH}{d\tau}(\tau)|n(\tau)\rangle}{E_n(\tau) - E_m(\tau)} \tag{279}$$

に注意.

波動関数を

$$\left|\psi(\tau)\right\rangle = \sum_n c_n(\tau)\left|n(\tau)\right\rangle \tag{280}$$

と展開する． Schrodinger方程式に代入すると，

$$\frac{d}{d\tau}c_n(\tau) = -E_n(\tau)c_n(\tau) - \sum_m \langle n(\tau)|\frac{dm}{d\tau}(\tau)\rangle\, c_m(\tau). \tag{281}$$

$m \neq n$に対して$E_n(\tau) \neq E_m(\tau)$を仮定すると，

$$\frac{d}{d\tau}c_n(\tau) = -E_n(\tau)c_n(\tau) - \langle n(\tau)|\frac{dn}{d\tau}(\tau)\rangle\, c_n(\tau) - \sum_{m\neq n}\frac{\langle n(\tau)|\frac{dH}{d\tau}(\tau)|m(\tau)\rangle}{E_m(\tau) - E_n(\tau)}c_m(\tau) \tag{282}$$

を得る．ここで，系の虚時間発展がエネルギー差$E_m(\tau) - E_n(\tau)$に比べて十分ゆっくりと仮定すると，第3項を無視でき，

$$\frac{d}{d\tau}c_n(\tau) = -E_n(\tau)c_n(\tau) - \langle n(\tau)|\frac{dn}{d\tau}(\tau)\rangle\, c_n(\tau) \tag{283}$$

を得る．これから，

$$c_n(\tau) = e^{-\int_0^\tau E_n(\tau')d\tau'}e^{-\int_0^\tau \langle n(\tau')|\frac{dn}{d\tau}(\tau')\rangle d\tau'}c_n(\tau = 0) \tag{284}$$

を得る． $H(\tau)$がエルミートであれば，第 1 因子は波動関数の$U(1)$位相には効かない． $|n(\tau)\rangle$が規格化$\langle n|n\rangle = 1$を仮定すると，

$$\langle n|dn\rangle^* = \langle dn|n\rangle = -\langle n|dn\rangle \tag{285}$$

であるから，第 2 因子は$U(1)$位相因子である．特に，閉じた経路$H(T) = H(0)$を考えると，Berry位相を得る：

$$c_n(T) = e^{-\int_0^T E_n(\tau)d\tau}e^{-\oint\langle n|dn\rangle}c_n(\tau = 0). \tag{286}$$

## References


[1] A. G. Abanov, P. B. Wiegmann, *Theta-terms in nonlinear sigma-models*, arXiv:hep-th/9911025.

[2] Ying Ran, Pavan Hosur, Ashvin Vishwanath, *Fermionic Hopf solitons and Berry's phase in topological surface superconductors*, arXiv:1003.1964.

[3] Sho Higashikawa, Masaya Nakagawa, Masahito Ueda, *Floquet chiral magnetic effect*, arXiv:1806.06868.

[4] Nathan Seiberg, Edward Witten, *Gapped Boundary Phases of Topological Insulators via Weak Coupling*, arXiv:1602.04251.

[5] Alexander G. Abanov, *Hopf term induced by fermions*, arXiv:hep-th/0005150.

[6] Xiao-Liang Qi, Taylor Hughes, Shou-Cheng Zhang, *Topological Field Theory of Time-Reversal Invariant Insulators*, arXiv:0802.3537.

[7] Maissam Barkeshli, Parsa Bonderson, Chao-Ming Jian, Meng Cheng, Kevin Walker, *Reflection and time reversal symmetry enriched topological phases of matter: path integrals, non-orientable manifolds, and anomalies*, arXiv:1612.07792.

[8] E. Witten, *Current algebra, baryons, and quark confinement*, Nuclear Physics B **223**(2), 433 (1983).