

寄せられた質問

● 0+の状態が変形できる、という件について

➡ 0+の状態は実験室系では回転していないのに、intrinsic座標系では変形しているということですか？
重ねあわせによって解決できるとのことでしたが、理解できませんでした。

● 存在確率について（坂口さんの最後の質問）

➡ 存在確率を1粒子状態の波動関数を例に議論した時、 r がかかっているので原点付近での存在確率が0になるとのことでしたが、本当にそうなのか納得できませんでした。

➡ また、集団運動の方程式は、「場の方程式」ですか？
それとも「確率振幅の方程式」ですか？

最初にシェルモデル的に考えたときには、
particle=粒子、hole=反粒子や真空概念という場の理論の考え方を
取り入れていたので、場の理論における3次元的に漂う波の描像を
拡張して考えていたので、
最後の波動関数の確率的解釈が奇妙に感じられます。

寄せられた質問(つづき)

- **ゴールドストーン=ボソンについて**
 - ➡ ゴールドストーン・ボソンの発生メカニズムは難しいということですが、この時、なぜ $0+$ 、 $2+$ 、 $4+$ ・・・という”状態”がゴールドストーン・ボソンになるのですか？
- **オブレート変形とプロレート変形について**
 - ➡ 一般にプロレートのほうが好まれるが、オブレートのほうが安定な原子核もあるとのことでした。原子核によってどちらを好むかというのは何に依存しているのでしょうか？
- **これからの講義計画を見て**
 - ➡ どうして、励起状態にGiant resonanceがあり、しかもそれが低励起状態と同じ $2+$ なのか？
高速回転する原子核とあるが、どれくらい高速なのか？
 $2+$ や $4+$ は低速なのか？(もちろん比較対象が必要ですが)
平均場ポテンシャルの変形と、シェルモデルでの励起の対応関係をもう一度次回講義の最初に復習していただけるとありがたいです。

Dear Kenichi,

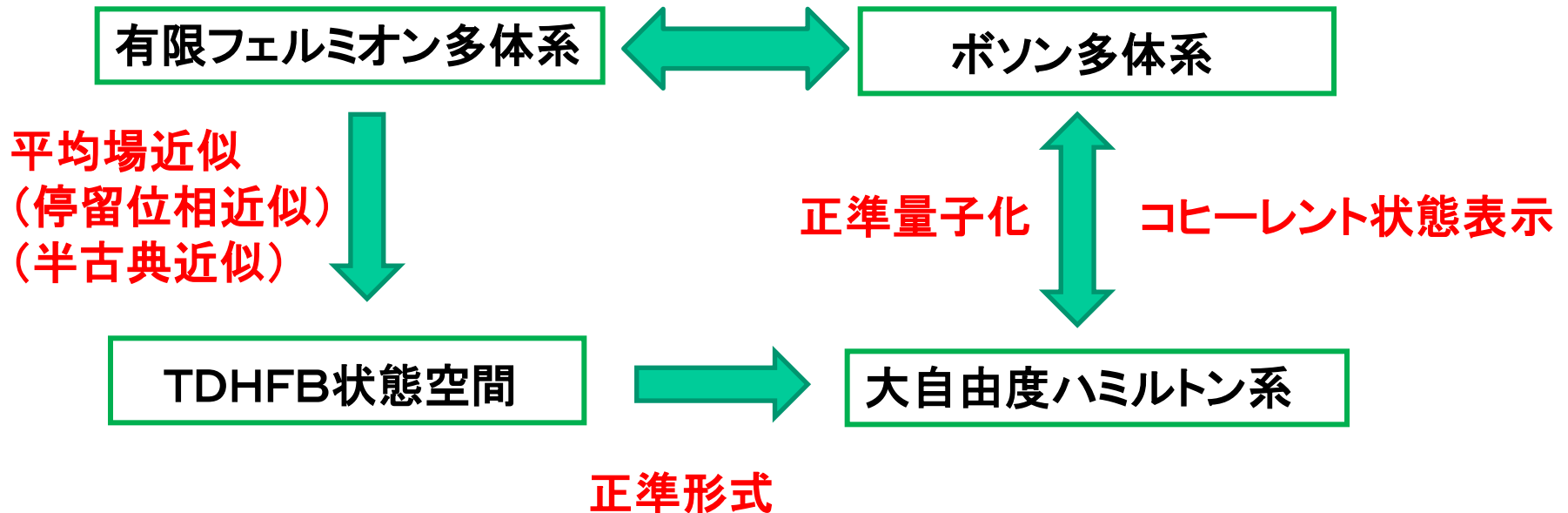
working TDHF during my post-doc,
I am reading with interest your contribution to the special JPG issue about the open problems in nuclear physics.

Could you please be more precise about your sentence
"The TDHF is insufficient for the description of quantum spectra of low-lying states, however, because of its semi-classical feature".
In which sense you write that the semi-classical nature of the model prevents an appropriate description of the low-lying states ?
Is this because it is difficult to classically depict mixing phenomena, like those responsible for the properties of these region of the nuclear spectrum ?
I would be glad to hear something more precise.

Thank you and very best wishes,

全ヒルベルト空間に対する理論

ボソンマッピング



コメント



現実の集団現象を記述するためには
集団部分空間に対する理論の構築が求められる

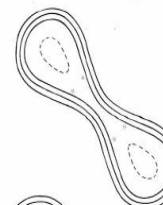
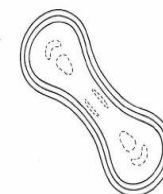
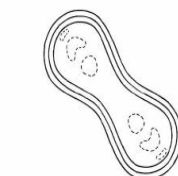
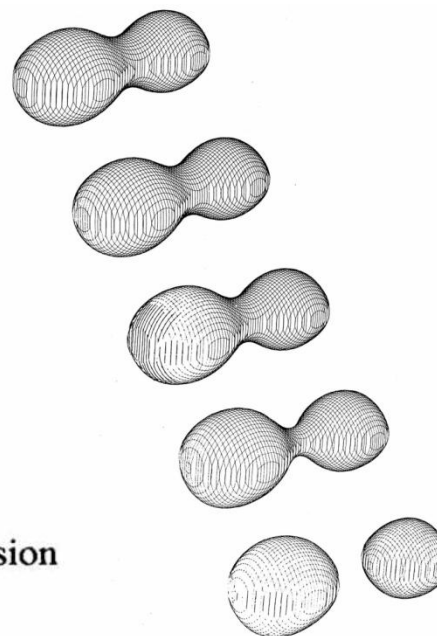
The mean-field theory of nuclear structure and dynamics

J. W. Negele

^{236}U

INDUCED FISSION

$t = 0$



$t = 4 \times 10^{-21} \text{ s}$

VII. Application to Physical Systems

A. Approximations

B. Qualitative features

C. Fusion

1. The fusion regions

2. Fusion cross sections

D. Deep inelastic scattering

E. Fission

1. Semiclassical approximation to induced fission

2. Spontaneous fission

F. Pion condensation

核構造への適用なし

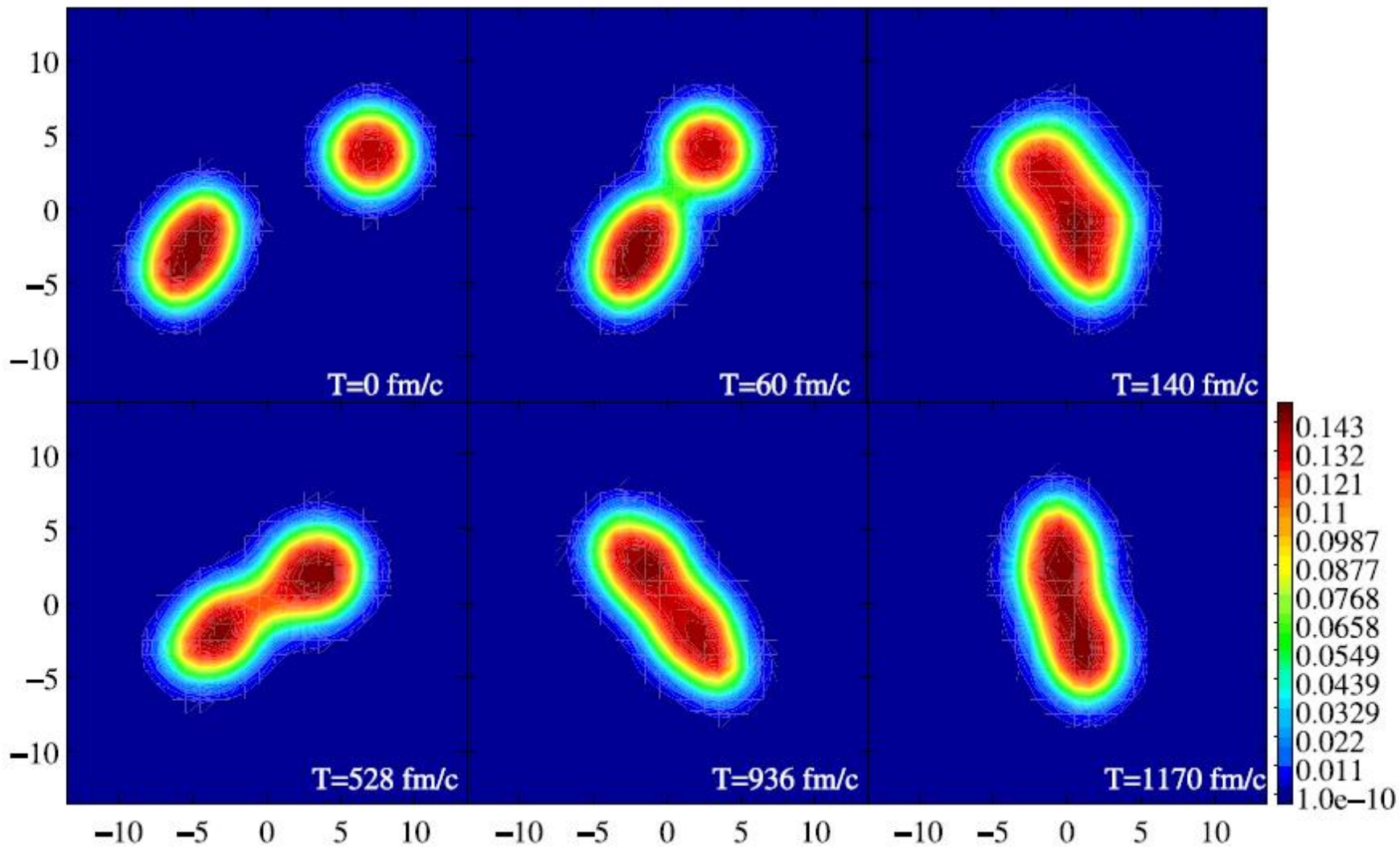
Spontaneous fission

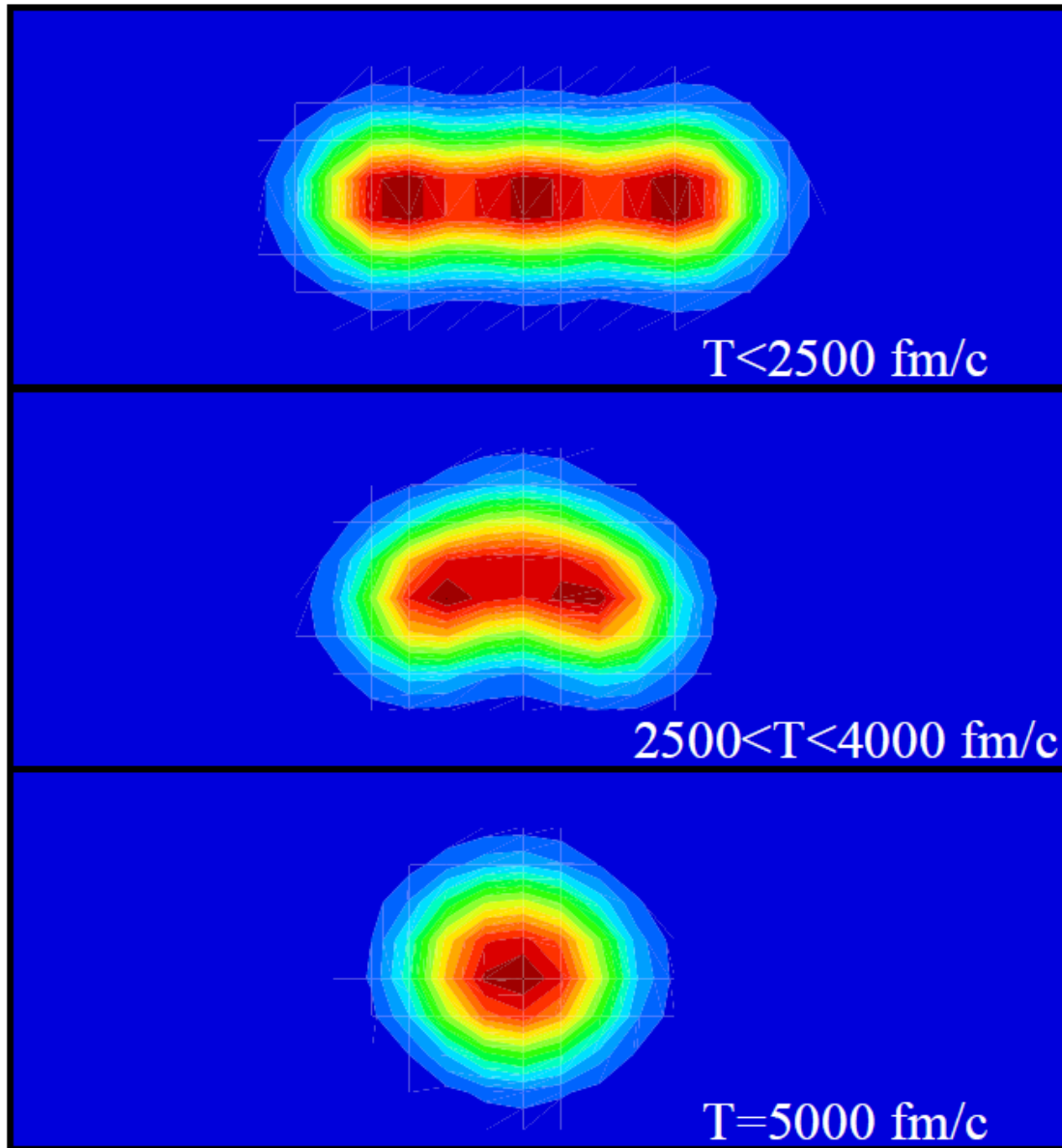
sponds to two well-separated alpha particles. Thus, although this schematic ^8Be calculation plays a useful role in demonstrating the feasibility of solving the self-consistent tunneling problem and in developing techniques for heavier systems, it has little direct physical relevance.

幾多の困難に直面

Semiclassical approximation to induced fission

uncertainty in dissipation of the order of the experimental effect, and the present practical restriction to axial symmetry thus precludes a quantitative test of the mean-field theory.





ごく簡単な答え

TDHFB計算だけでは

➡ 低励起スペクトルを予言できない

➡ 自発核分裂を記述できない

つまり、TDHFBの量子化が必要

なぜか、

いかにして量子化するか

反応実験屋のための核構造学

1. 量子多体系の集団現象

多様で複雑な核構造と核反応現象の統一的理解をめざして

2. 超低温での集団励起スペクトル

有限量子系における対称性の自発的破れと回復

3. 安定核および不安定核での対相関

真空とその励起モード, 密度汎関数理論

4. 高速回転する原子核と超変形状態

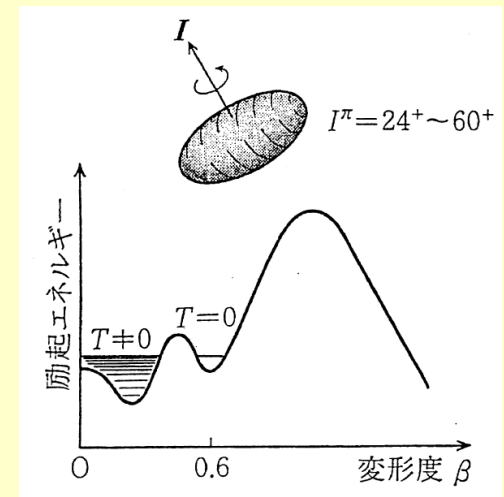
回転系シェルモデル, 超変形シェル構造

5. 大振幅集団運動の微視的理論

時間変化する平均場の理論, Bohr-Mottelsonモデルの微視的導出

6. 不安定核 (エキゾチック核) 研究の将来

束縛状態と連続状態の統一的記述にむけて



変形パラメータは主軸系 (intrinsic系) で定義される

$$\beta_2 \cos \gamma = \frac{4\pi}{5} \left\langle \sum_{i=1}^A r_i^2 Y_{20}(\theta_i, \phi_i) \right\rangle \left\langle \sum_{i=1}^A r_i^2 \right\rangle^{-1},$$

$$\beta_2 \sin \gamma = -\frac{4\pi}{5} \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^A r_i^2 (Y_{22}(\theta_i, \phi_i) + Y_{22}^*(\theta_i, \phi_i)) \right\rangle \left\langle \sum_{i=1}^A r_i^2 \right\rangle^{-1}$$

二つの変形パラメータ (β, γ) と3つのオイラー角 Ω を集団座標とみなすと、
集団運動ハミルトニアンは

$$H_{\text{coll}} = \mathcal{T}_{\text{vib}}(\beta, \gamma) + \mathcal{T}_{\text{rot}}(\beta, \gamma, \Omega) + \mathcal{V}_{\text{coll}}(\beta, \gamma)$$

$$\mathcal{T}_{\text{vib}} = \frac{1}{2} B_{\beta\beta} \dot{\beta}^2 + \beta B_{\beta\gamma} \dot{\beta} \dot{\gamma} + \frac{1}{2} \beta^2 B_{\gamma\gamma} \dot{\gamma}^2$$

$$\mathcal{T}_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \mathcal{I}_k \omega_k^2$$

曲がった空間での量子化

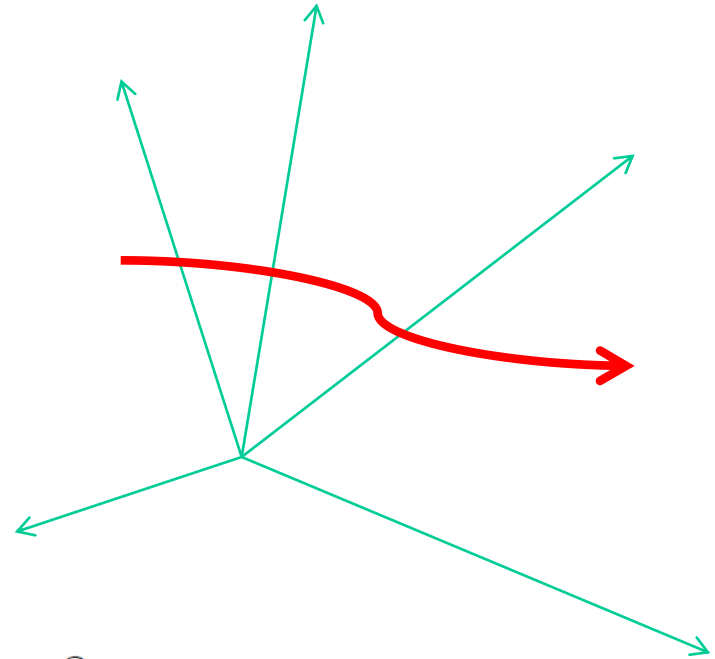
$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}(x) dx_i dx_j$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} g_{ij}(x) \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} \end{aligned}$$

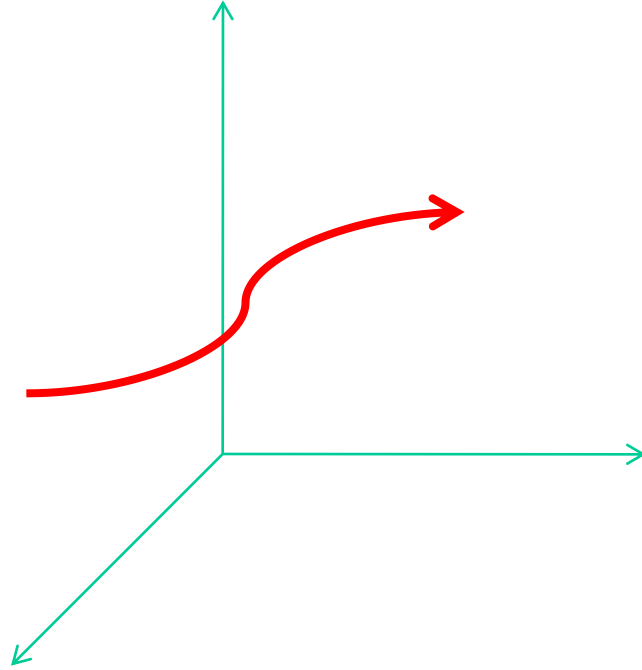
量子化



$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$$



3D極座標での量子化



$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

$$\det(g_{ij}) \equiv g = r^4 \sin^2 \theta$$

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \hat{T} &= -\frac{\hbar^2}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\sqrt{g}}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\sqrt{g}}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \end{aligned}$$

曲がった空間での量子化

運動エネルギー $T = \frac{1}{2} \sum_{ij} \underline{B_{ij}(q)} \dot{q}_i \dot{q}_j$

B_{ij} metric

Pauli処方箋



$$\hat{H}_{\text{kin}} = -\frac{\hbar^2}{2} \frac{1}{\sqrt{\det B}} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial q_i} \sqrt{\det B} (B^{-1})_{ij} \frac{\partial}{\partial q_j}$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{\text{vib}} & 0 \\ 0 & B_{\text{rot}} \end{pmatrix}$$

$$B_{\text{vib}} = \begin{pmatrix} B_{\beta\beta} & \beta B_{\beta\gamma} \\ \beta B_{\beta\gamma} & \beta^2 B_{\gamma\gamma} \end{pmatrix}$$

$$(B_{\text{rot}})_{ik} = \delta_{ik} \mathcal{I}_k, \quad k = 1, 2, 3$$

この理論的基礎付けは集団運動理論の根本問題のひとつ

量子化されたBohr-Mottelson の集団ハミルトニアン

$$\hat{H} = \hat{T}_{\text{vib}} + \hat{T}_{\text{rot}} + V_{\text{coll}}$$

$$\hat{T}_{\text{vib}} = -\frac{\hbar^2}{2\sqrt{wr}} \left\{ \frac{1}{\beta^4} \left[\frac{\partial}{\partial\beta} \sqrt{\frac{r}{w}} \beta^4 B_{\gamma\gamma} \frac{\partial}{\partial\beta} - \frac{\partial}{\partial\beta} \sqrt{\frac{r}{w}} \beta^3 B_{\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial\gamma} \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{\beta \sin 3\gamma} \left[-\frac{\partial}{\partial\gamma} \sqrt{\frac{r}{w}} \sin 3\gamma B_{\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial\gamma} \sqrt{\frac{r}{w}} \sin 3\gamma B_{\beta\beta} \frac{\partial}{\partial\gamma} \right] \right\}$$

$$\hat{T}_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \frac{\hat{J}_k^2}{\mathcal{I}_k}$$

積分の測度

$$\int d\tau_{\text{coll}} = \int d\Omega d\tau_0 \sqrt{wr} = \int_0^\infty d\beta \beta^4 \int_0^{2\pi} d\gamma |\sin 3\gamma| \int d\Omega \sqrt{wr}$$

$$w = B_{\beta\beta} B_{\gamma\gamma} - B_{\beta\gamma}^2 \quad r = B_1 B_2 B_3$$

回転運動の慣性モーメント

$$(B_{\text{rot}})_{ik} = \delta_{ik} \mathcal{I}_k, \quad k = 1, 2, 3$$

$$\mathcal{I}_k = 4B_k \beta^2 \sin^2(\gamma - 2k\pi/3)$$

行列式

$$\det B = \det B_{\text{vib}} \cdot \det B_{\text{rot}} = 4wr \beta^8 \sin^2 3\gamma$$

$$w = B_{\beta\beta} B_{\gamma\gamma} - B_{\beta\gamma}^2$$

$$r = B_1 B_2 B_3$$

集団波動関数

$$\Psi_{\alpha}^{IM}(\beta, \gamma, \Omega) = \sum_{K \in \Delta I} \psi_{\alpha K}^I(\beta, \gamma) \Phi_{MK}^I(\Omega)$$

振動運動の波動関数

回転運動の波動関数

$$\Phi_{MK}^I(\Omega) = \sqrt{\frac{2I+1}{16\pi^2(1+\delta_{K0})}} [D_{MK}^{I*}(\Omega) + (-1)^I D_{M-K}^{I*}(\Omega)]$$

オイラー角

$$(\phi', \theta', \phi) \equiv \psi$$

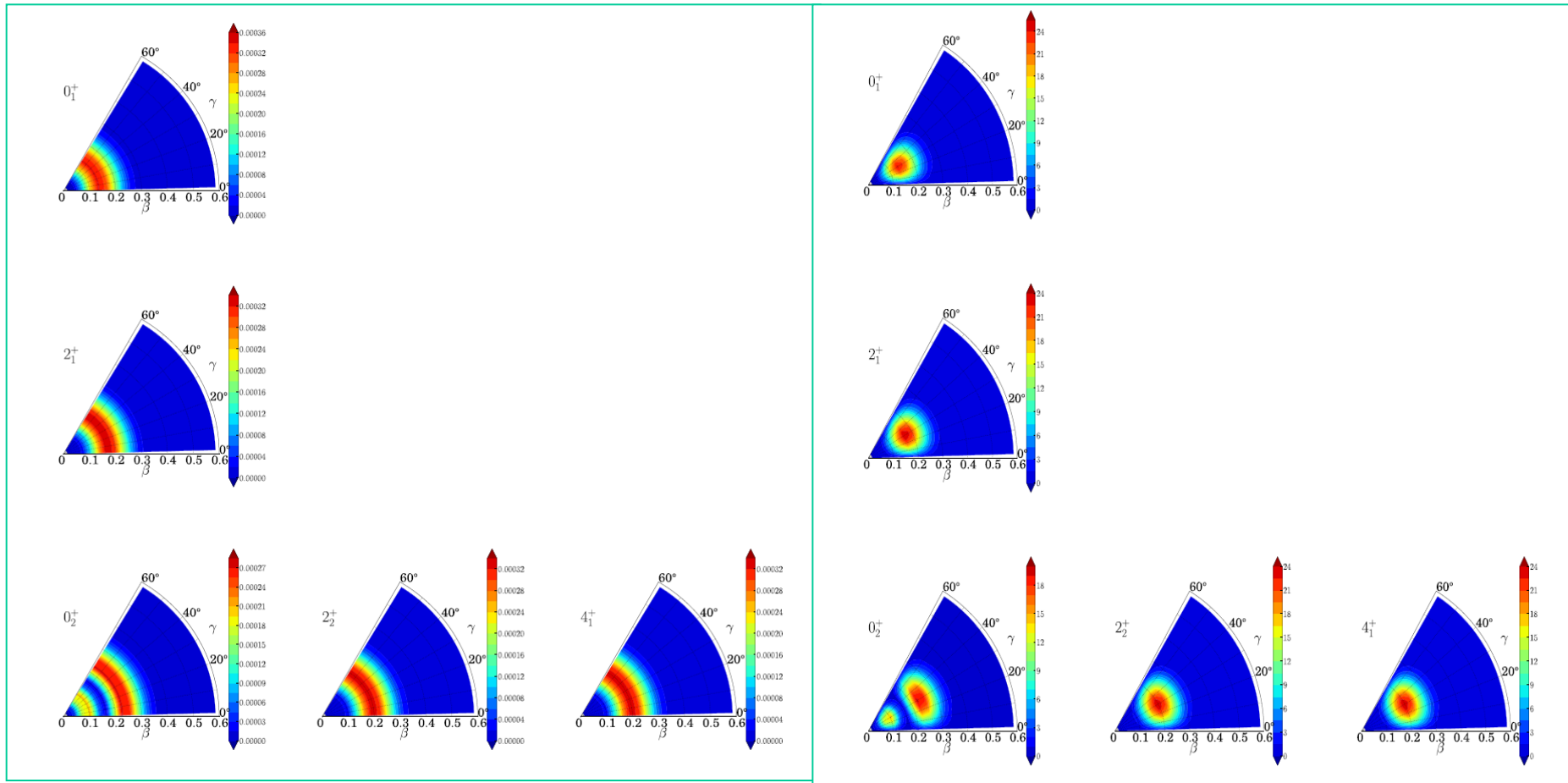
球形平衡点のまわりの小振幅振動(調和振動)の場合には

すべての慣性質量を同じ定数に置き換えることが出来て
集団運動のSchrodinger方程式は

$$\left\{ \frac{\hbar^2}{2B_2} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \right) - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1}^3 \frac{L_k^2}{\sin^2 (\gamma - 2\pi k/3)} \right] + \frac{1}{2} C_2 \beta^2 \right\} \times \Psi(\theta_i, \beta, \gamma) = E \Psi(\theta_i, \beta, \gamma).$$

となる。これは5次元調和振動子に対するSchrodinger方程式に他ならない。
これを一般的なBohr-Mottelsonモデルと混同してはいけない。

Collective wave functions of 5D harmonic vibration

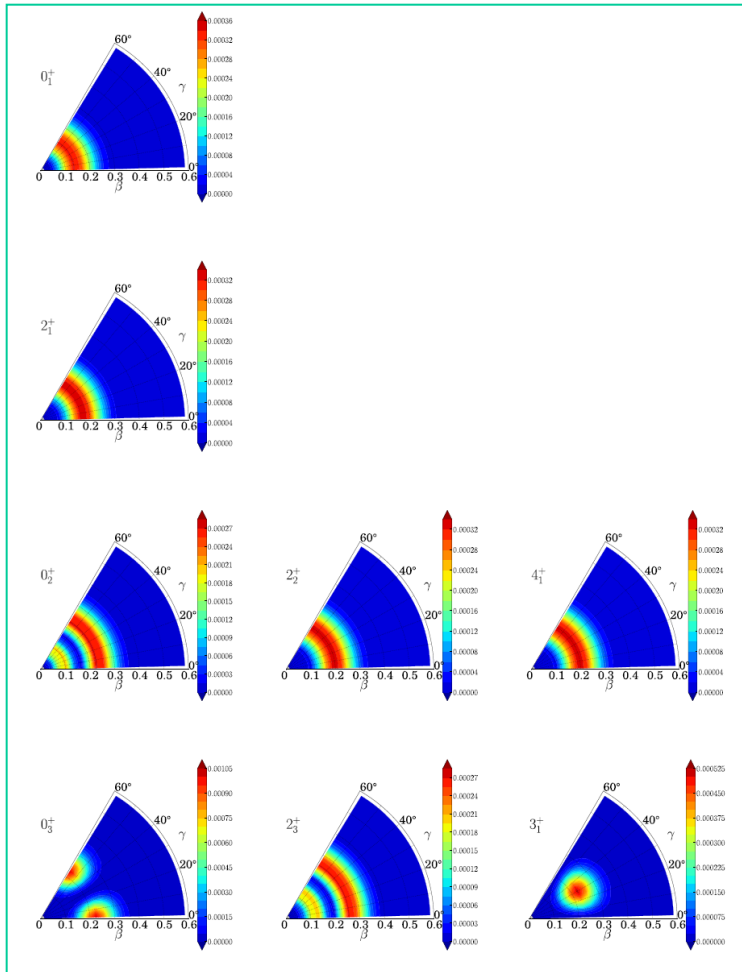


$$\beta^4 \sum_K |\Phi_{IK\alpha}(\beta, \gamma)|^2$$

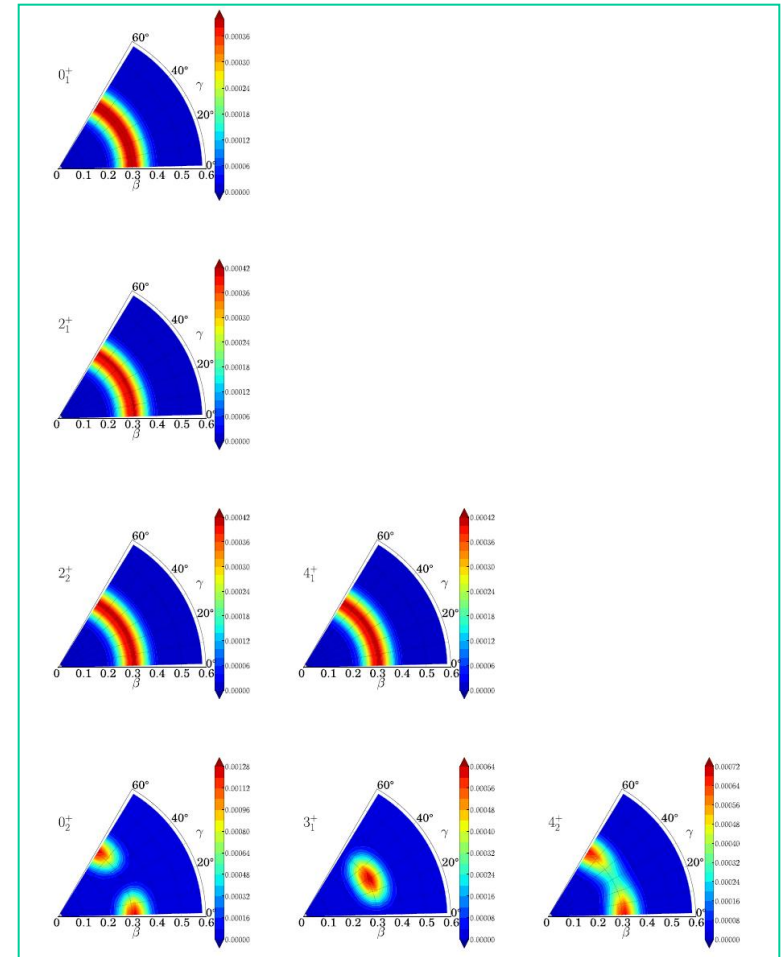
$$: 2\beta^4 \sqrt{W(\beta, \gamma)R(\beta, \gamma)} \sin 3\gamma \sum_K |\Phi_{IK\alpha}(\beta, \gamma)|^2$$

Vibrational wave functions

$$\beta^4 \sum_K |\Phi_{IK\alpha}(\beta, \gamma)|^2.$$



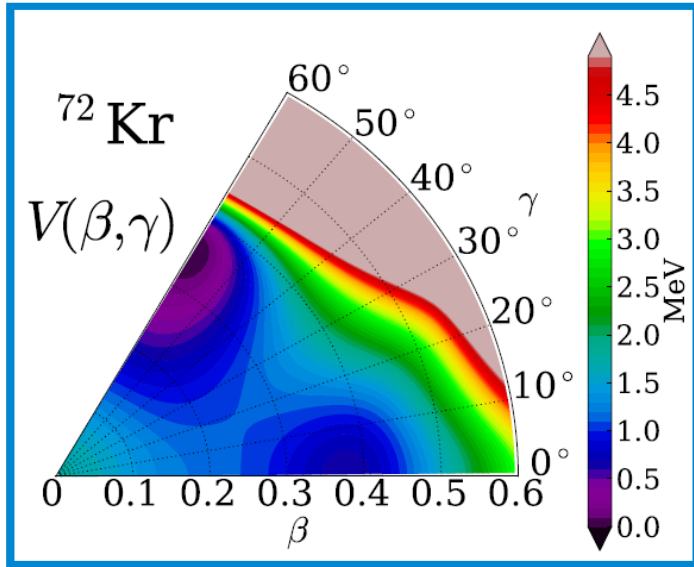
5D harmonic vibrations



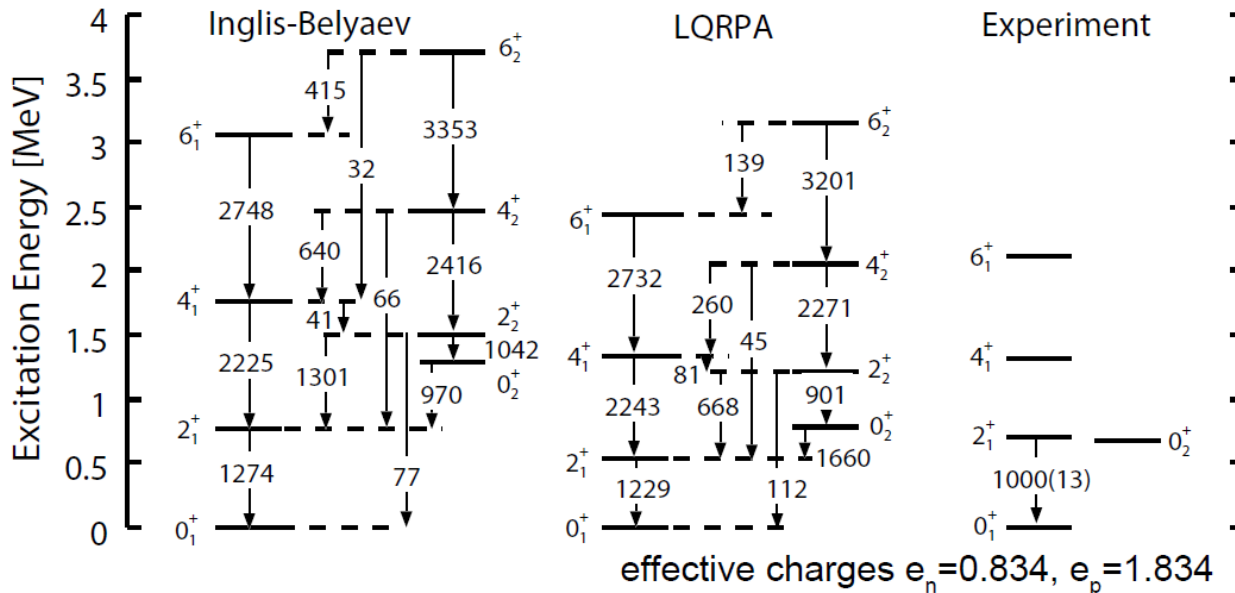
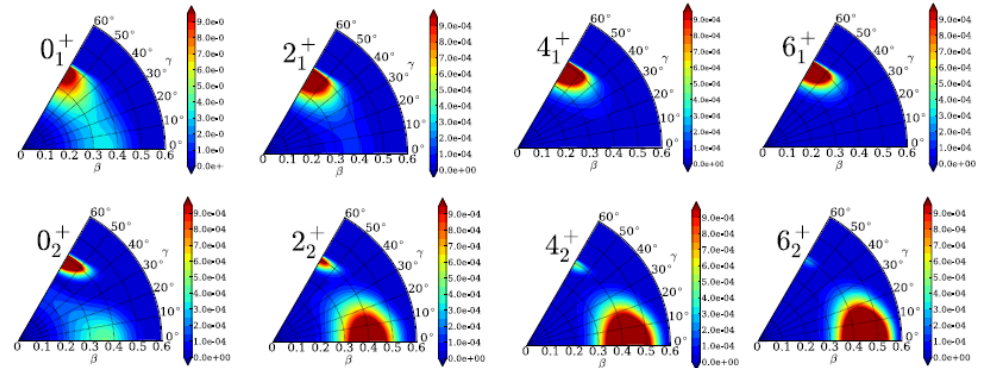
Gamma-unstable vibrations

Oblate-Prolate shape coexistence in ^{72}Kr

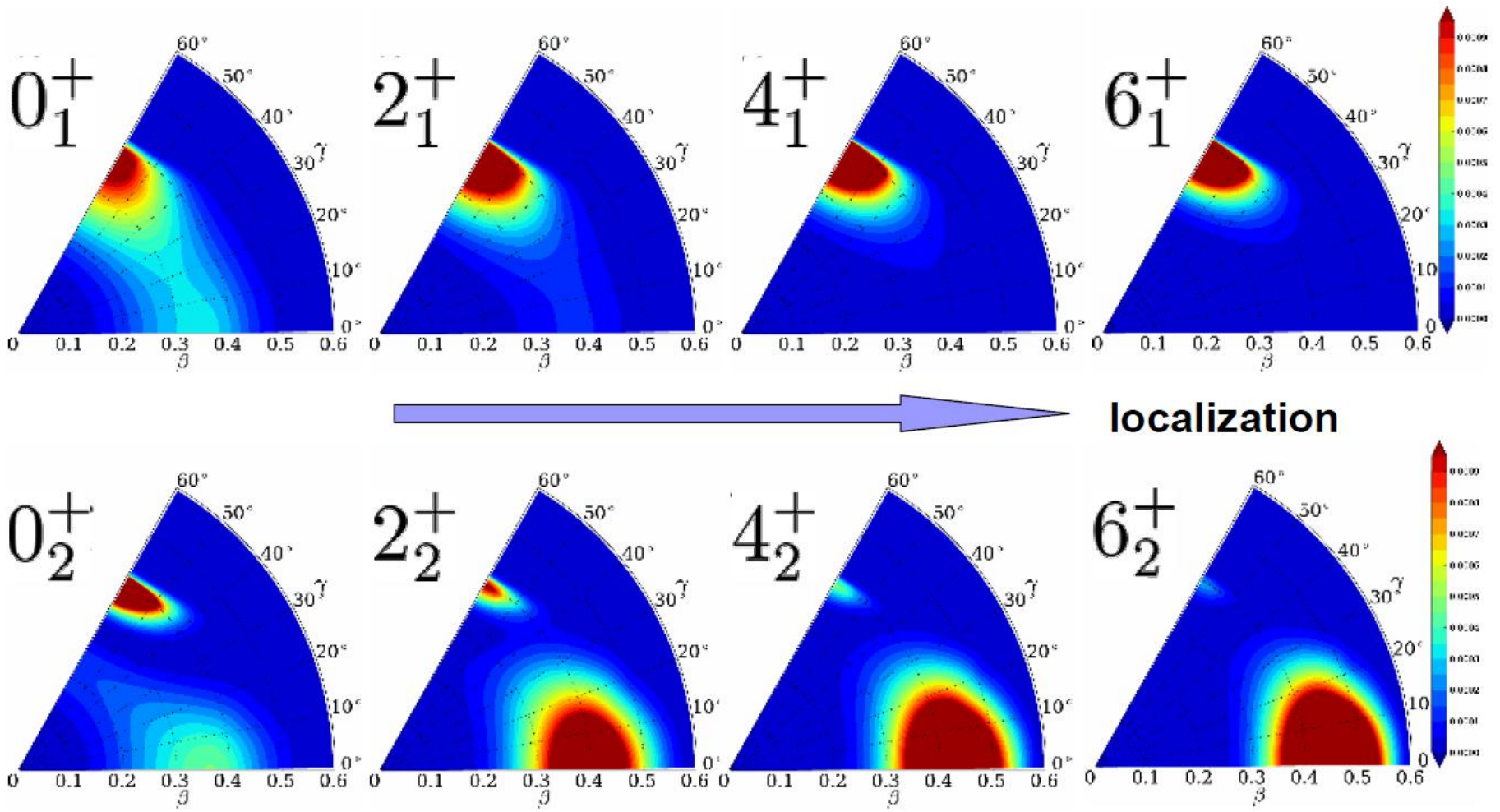
K. Sato and NH, submitted to NPA, arXiv:1006.3694



Shape mixing in collective w.f.



Collective wave functions squared for ⁷²Kr $\beta^4 \sum_K |\Phi_{IKk}(\beta, \gamma)|^2$

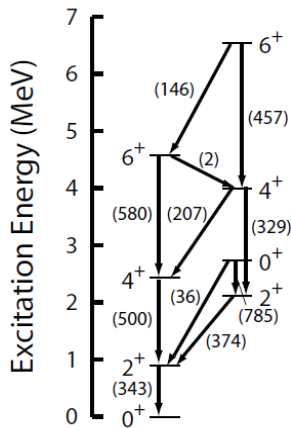
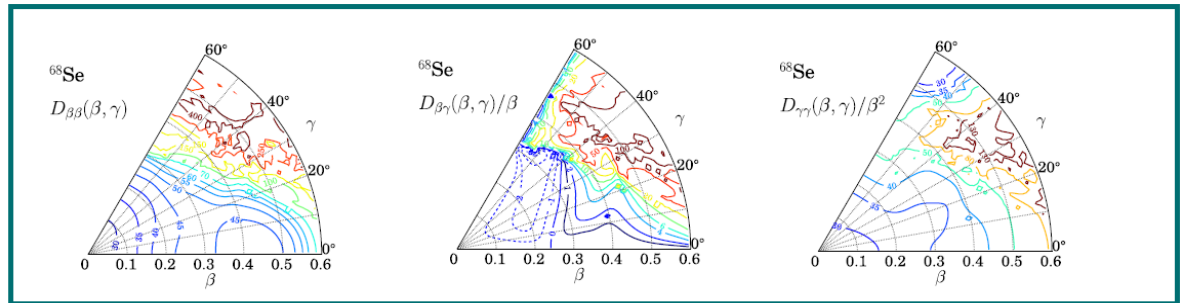
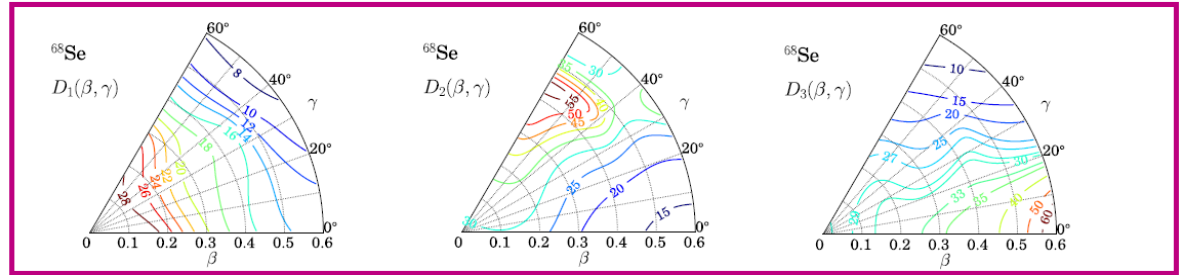
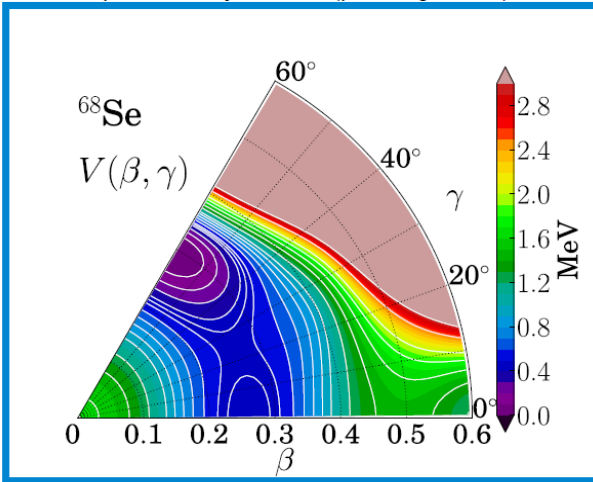


Oblate-Prolate shape mixing in ^{68}Se

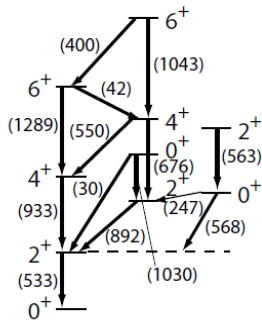
$$\mathcal{J}_k(\beta, \gamma) = 4\beta^2 D_k(\beta, \gamma) \sin^2 \gamma_k$$

arXiv:1004.5544

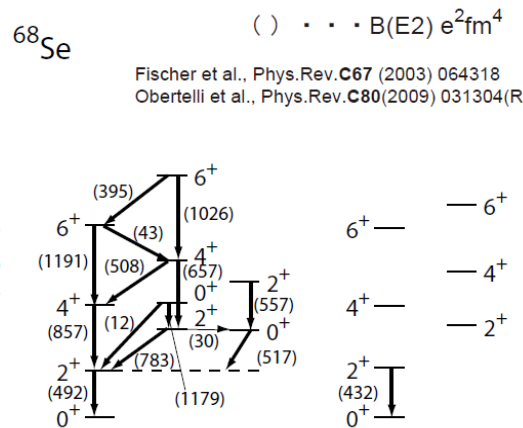
microscopic Hamiltonian: P0+P2+Q model
 parameters adjusted to Skyrme HFB (SIII)
 model space: 2 major shells (pf + sdg shells)



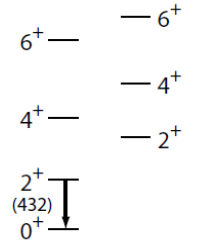
(1+3)D ASC



CHB+IB

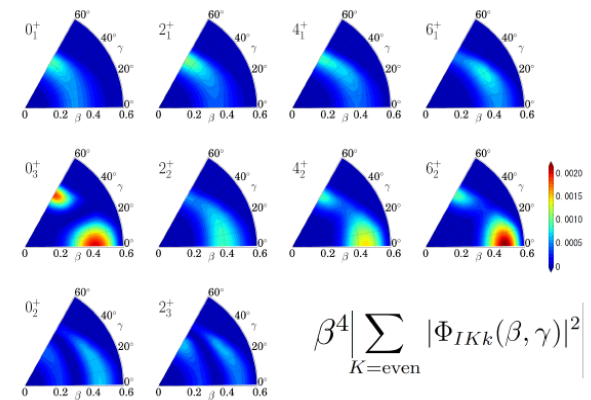


CHB+LQRPA



EXP

Shape mixing in collective w.f.



$$\beta^4 \left| \sum_{K=\text{even}} |\Phi_{IKk}(\beta, \gamma)|^2 \right|$$

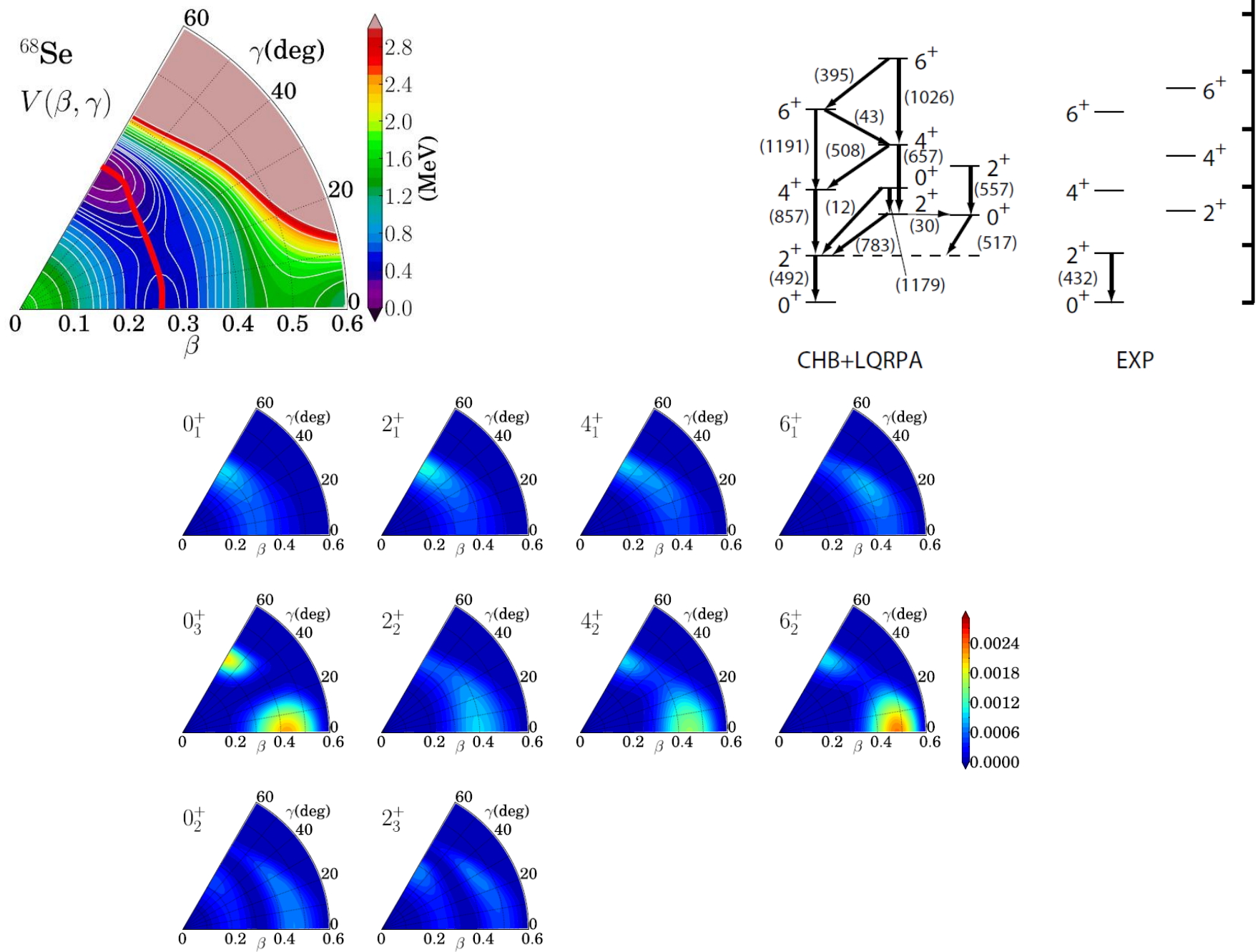
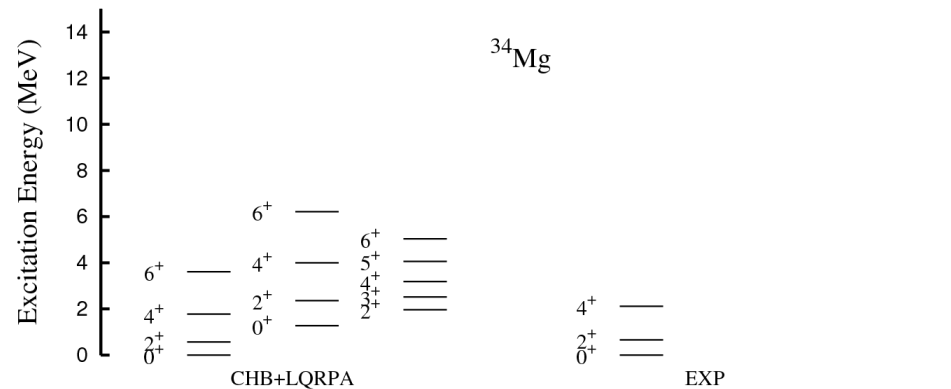
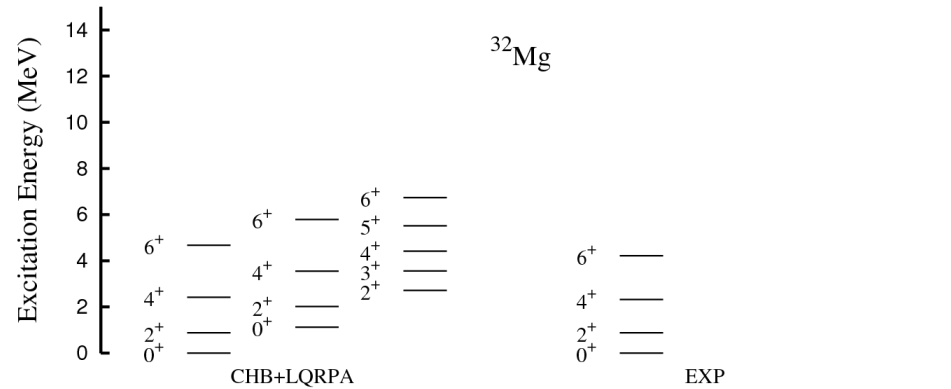
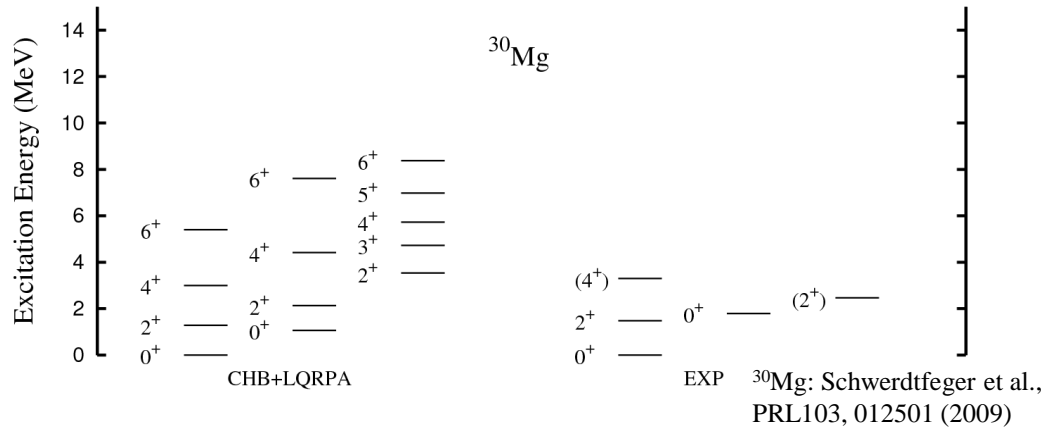
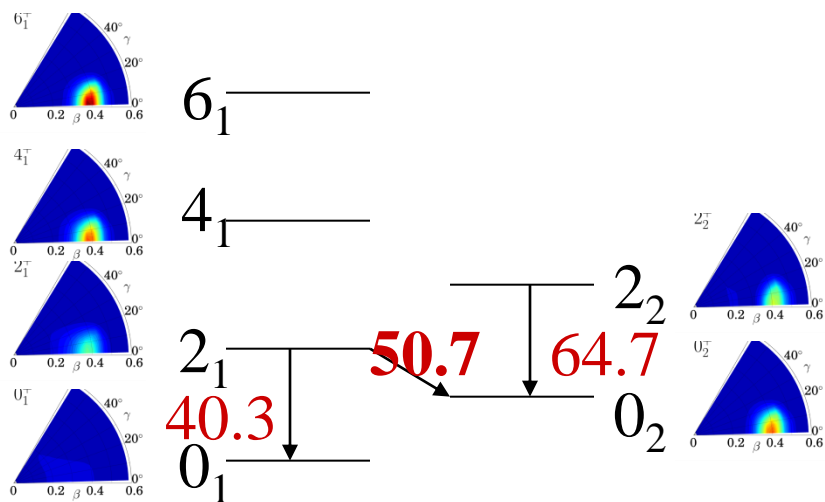


FIG. 11: (Color online) Vibrational wave functions squared $\beta^4 |\Phi_{Ik}(\beta, \gamma)|^2$ calculated for ^{68}Se .

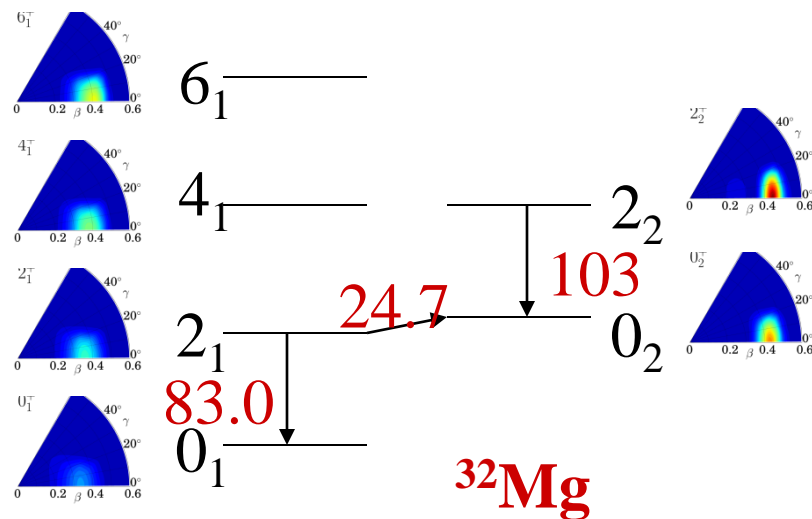
Energy spectra



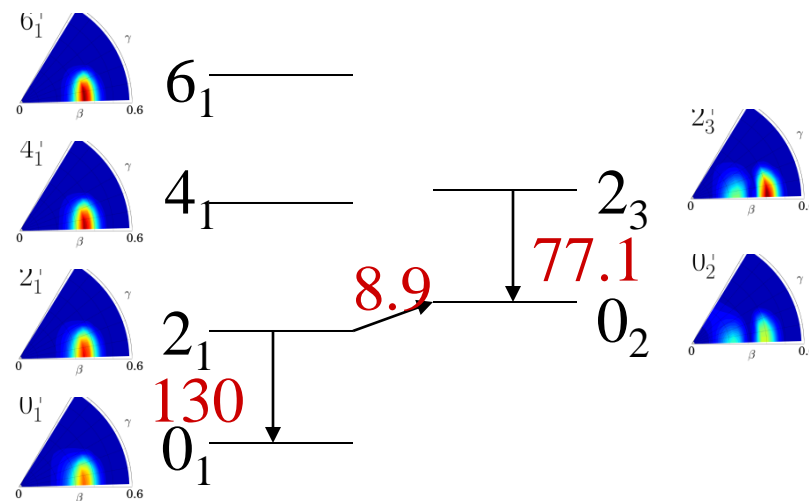
Shape mixing properties



^{30}Mg

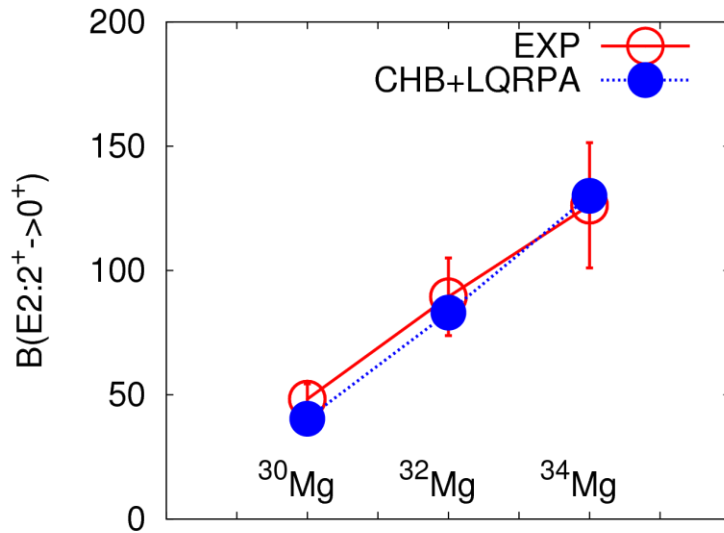
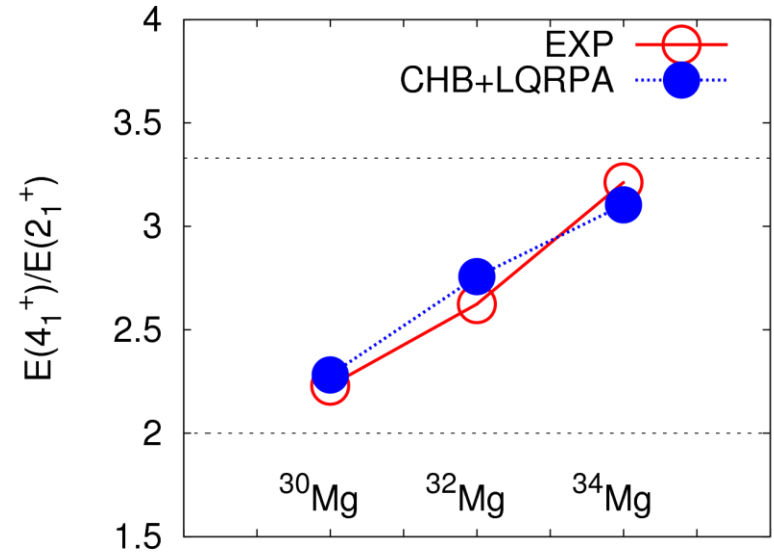
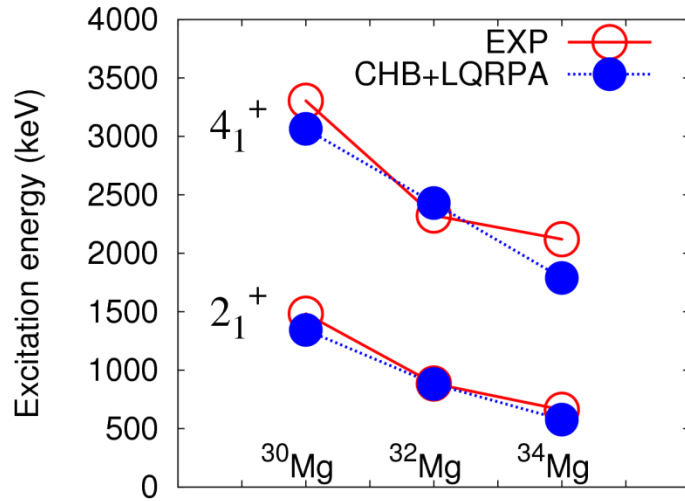


^{32}Mg



^{34}Mg

Ground bands



$M_n/M_p / (N/Z)$

	^{30}Mg	^{32}Mg	^{34}Mg
$2^+ \rightarrow 0^+$	0.789	0.815	0.807

0.84(15)

EXP, Takeuchi et al.

^{30}Mg : assume 3303 keV to be 4^+

^{32}Mg : Takeuchi et al. PRC79 (2009) 054319

^{34}Mg : Yoneda et al. PLB499 (2001) 233

$B(E2)$ ^{30}Mg : Niedermaier et al. PRL94 (2005) 172501

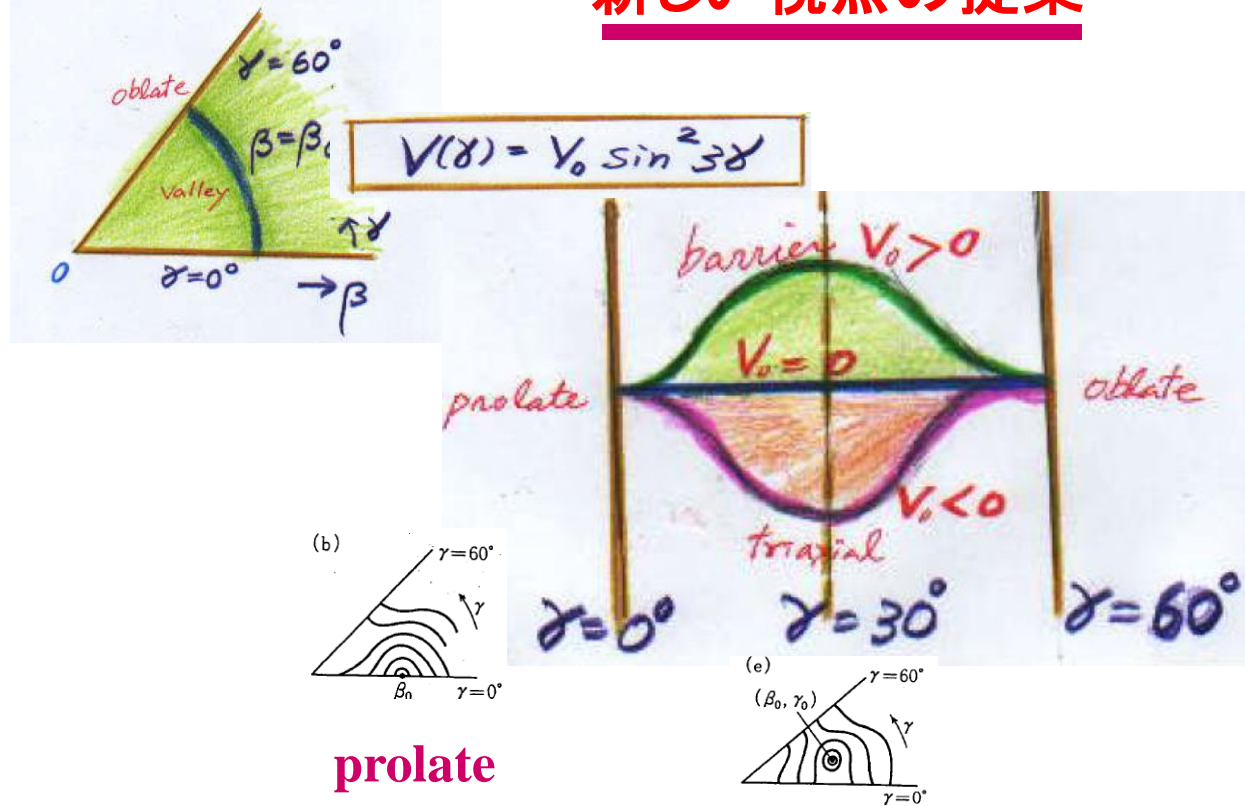
^{32}Mg : Motobayashi et al. PLB346 (1995) 9

^{34}Mg : Iwasaki et al. PLB522 (2001) 227.

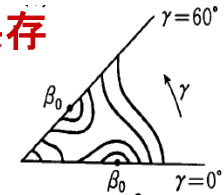
球対称性が破れると多くの場合、prolateとoblateの2つの局所平衡点が現れる。そこで、

非軸対称変形、 γ 不安定、oblate-prolate変形共存を統一적으로取り扱う

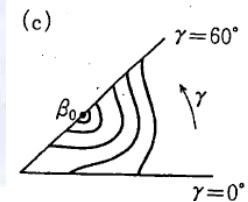
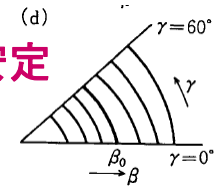
新しい視点の提案



変形共存



γ 不安定

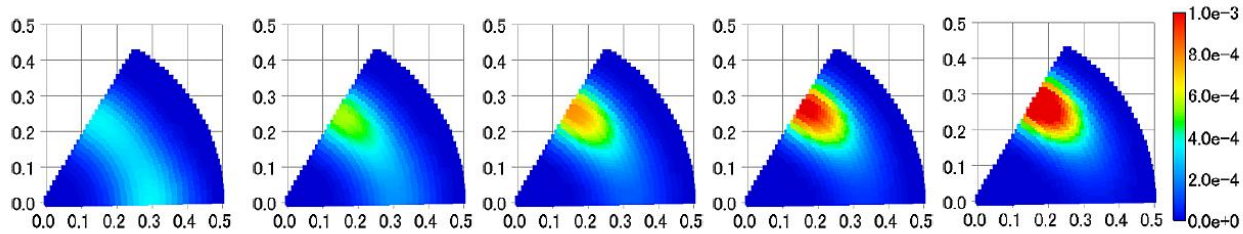
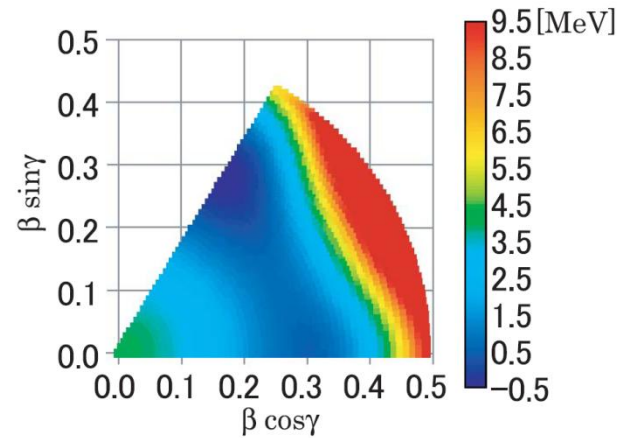


oblate

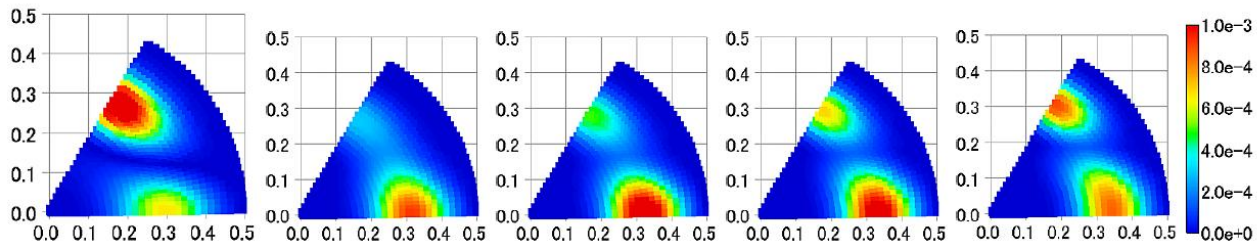
非軸対称変形

Oblate-prolate対称の極限から出発して、現実にはこの対称性がどの程度破れているか、という視点から実験データを分析しよう。

$$V(\beta, \gamma) = \frac{1}{2}C(\beta^2 - \beta_0^2)^2 - v_0\beta^6 \cos^2 3\gamma + v_1\beta^3 \cos 3\gamma + C_6\beta^6,$$

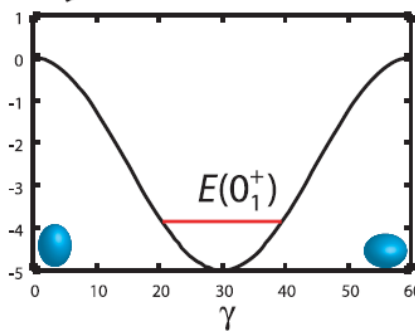
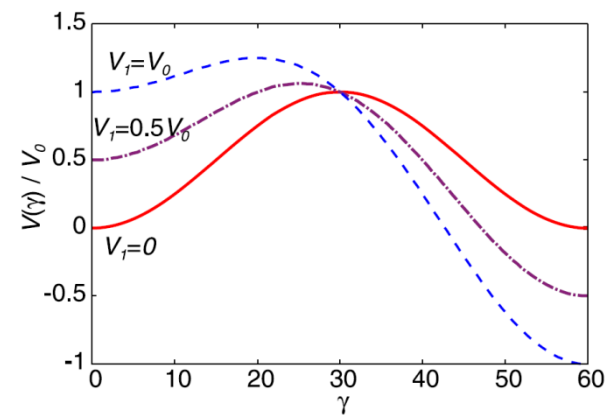
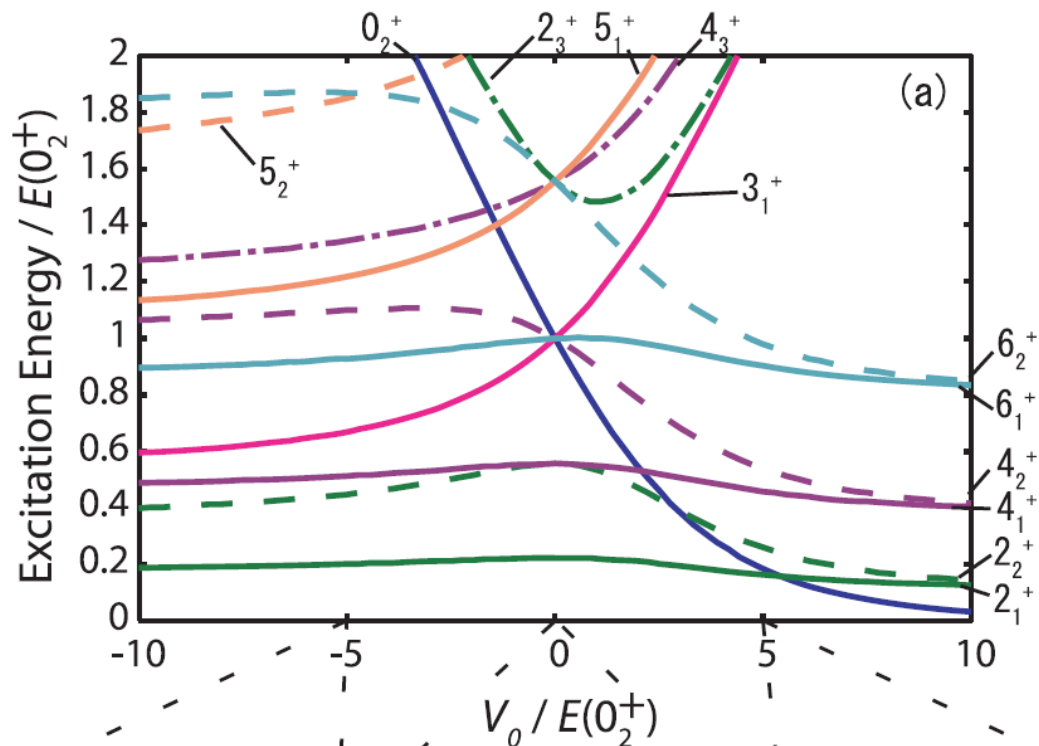


(a) 0_1 state (b) 2_1 state (c) 4_1 state (d) 6_1 state (e) 8_1 state

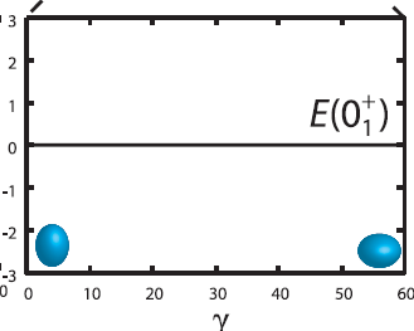


(f) 0_2 state (g) 2_2 state (h) 4_2 state (i) 6_2 state (j) 8_2 state

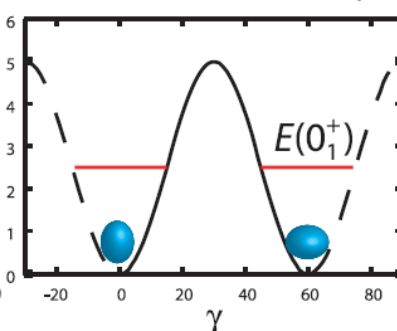
$$V(\gamma) = V_0 \sin^2 3\gamma + V_1 \cos 3\gamma$$



(b)



(c)



(d)

Unified model of Bohr and Mottelson

集団座標

集団運動量

平均場中の粒子のハミルトニアン

$$H = H_{coll}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\pi}) + H_{part}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\alpha})$$

平均場の集団運動ハミルトニアン

粒子座標

$$H_{coll} = T_{coll}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\pi}) + V_{coll}(\boldsymbol{\alpha})$$

平均場の振動と回転の運動エネルギー

$$T_{coll} = T_{rot}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\pi}) + T_{vib}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\pi})$$

四重極変形の場合の古典的集団ハミルトニアン

$$H_{coll}^{(classical)} = \frac{1}{2} B_{\beta\beta}(\beta, \gamma) \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} B_{\beta\gamma}(\beta, \gamma) \dot{\beta} \dot{\gamma} + \frac{1}{2} B_{\gamma\gamma}(\beta, \gamma) \dot{\gamma}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\kappa=1,2,3} \mathcal{J}_{\kappa}(\beta, \gamma) \omega_{\kappa}^2 + V_{coll}(\beta, \gamma)$$

これを量子化する(曲がった空間での量子化)

Particle-Rotor coupling モデル

平均場の振動を凍結(freeze)する

$$\alpha \implies \alpha_0 \text{ (平衡点での値)}$$

$$T_{vib}(\alpha, \pi) \implies 0$$

$$H_{part-rot} = T_{rot}(\alpha_0, \pi) + H_{part}(\mathbf{r}, \alpha_0)$$

Particle-Vibration coupling モデル

回転運動を無視する(平均場が変形している場合)

$$T_{rot}(\alpha, \pi) \implies 0$$

$$H_{part-vib} = T_{vib}(\alpha, \pi) + H_{part}(\mathbf{r}, \alpha)$$

粒子-振動結合ハミルトニアン

$$\begin{aligned} H &= H_{\text{coll}}(\pi, \alpha) + \sum_{i=1}^A \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(\mathbf{x}, \alpha) \right)_i \\ &= H_{\text{coll}}(\pi, \alpha) + H_{\text{particle}}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \alpha^0) + H_{\text{coupl}}(\mathbf{x}, \alpha) \end{aligned}$$

$$H_{\text{particle}}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \alpha^0) = \sum_{i=1}^A \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(\mathbf{x}, \alpha^0) \right)_i$$

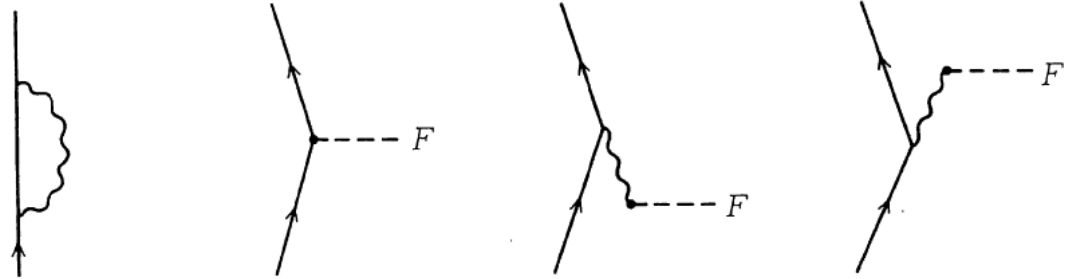
$$H_{\text{coupl}}(\mathbf{x}, \alpha) = \sum_{i=1}^A (U(\mathbf{x}, \alpha) - U(\mathbf{x}, \alpha^0))_i$$

$$U(r, \theta, \varphi, \alpha) = U^{(0)}(r) - R_0 \frac{\partial U^{(0)}}{\partial r} \sum_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\theta, \varphi) \alpha_{\lambda\mu}^* + \dots$$

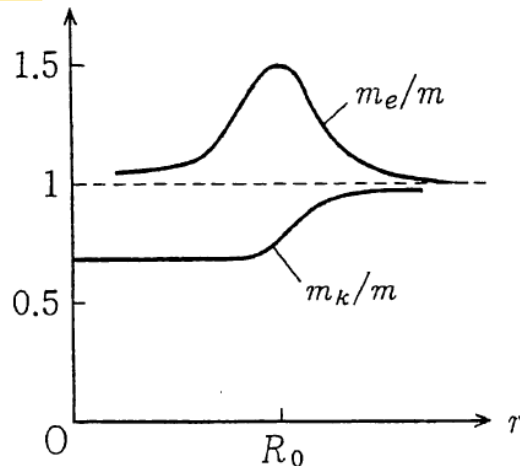
$$H_{\text{coupl}}(\mathbf{x}, \alpha) \cong - \sum_{i=1}^A \sum_{\lambda\mu} (k_\lambda(r) Y_{\lambda\mu}(\theta, \varphi) \alpha_{\lambda\mu}^*)_i$$

$$k_\lambda(r) = R_0 \frac{\partial U^{(0)}}{\partial r}$$

着物を着た1粒子モード



有効質量



有効結合結合定数

