第8回湯川記念財団・木村利栄理論物理学賞受賞記念講演
2015年1月21日 於 京都大学基礎物理学研究所

高次元の一般相対論とブラックホール

石橋明浩

近畿大学理工学部

お話しすること

- 何に興味をもってきたか。
- 何をやっているのか。
- これから。

（高次元）一般相対論研究の進展

1916: Schwarzschild　解

1963: Kerr 解

1965～1970: 特異点定理

1970 Zerilli 方程式

1972 BHの面積則

1973 BHとエントロピー

1973 BH 力学と熱力学

1974 Hawking 輻射

1967～1982: 一意性定理

1981 インフレーション宇宙

1979～1983: 正エネルギー定理

1986: Myers-Perry 解

1992: 2次元BH　CGHSモデル

1993: 3次元BH　BTZ

Gregory-Laflamme 不安定性

1993 : 開いたインフレーション

何に興味をもってきたか。

1997 AdS/CFT 対応

1998 特異インスタントン

宇宙の加速膨張

大きな余剰次元

1999 RSブレーンワールド

2001 Black Ring 解

何をやっているのか。

dS AdS BH

お話しすること

- 何に興味をもってきたか。
  時空特異点と負曲率インフレーション
- 何をやっているのか。
- これから。

1916: Schwarzschild　解

1963: Kerr 解

1965-70: 特異点定理

1970 Zerilli 方程式

1972 BHの面積則

1973 BHとエントロピー

1973 BH 力学と熱力学

1974 Hawking 輻射

1967～1982: 一意性定理

1981 インフレーション宇宙

1979～1983: 正エネルギー定理

1986: Myers-Perry 解

1992: 2次元BH　CGHSモデル
1993: 3次元BH　BTZ
　　Gregory-Laflamme 不安定性
1993 : 開いたインフレーション

東工大
細谷研　3D AdS
坂井研　2D gravity

何に興味をもってきたか。

1997 AdS/CFT 対応
1998 特異インスタントン
　　宇宙の加速膨張
　　大きな余剰次元
1999 RSブレーンワールド
2001 Black Ring

$$d = 4$$

One Bubble Open Inflation

Physics Letters B 317 (1993) 510–516

Quantum state inside a vacuum bubble and the creation of an open universe

Misao Sasaki [a,1], Takahiro Tanaka [a,2], Kazuhiro Yamamoto [b,3] and Jun'ichi Yokoyama [b,4]

1998以前
ダークエネルギーでなく
曲率項で宇宙の内容物を補う

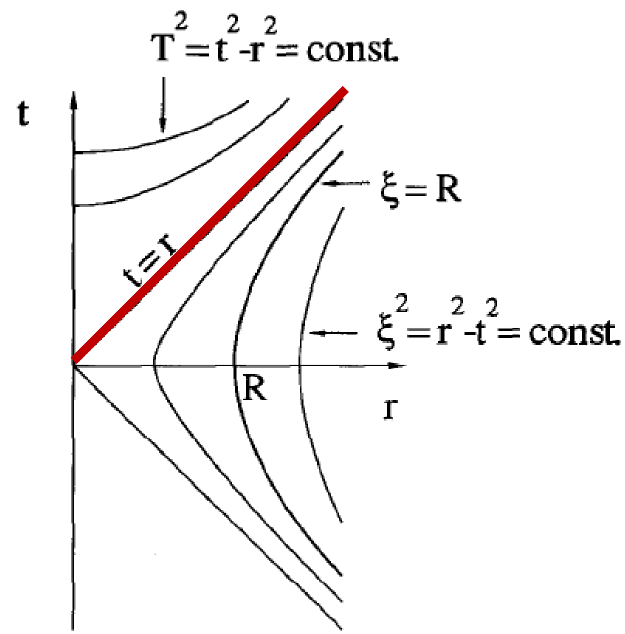
第一段のインフレーション(dS)宇宙の中に，一つのバブル(ドメインウォール)が発生

ドメインウォールの世界面の対称性

⇒ ホライズンの中で負曲率の空間断面へ

Open (負曲率) 宇宙の生成

内部で2度目のインフレーション



ドメインウォールと重力波

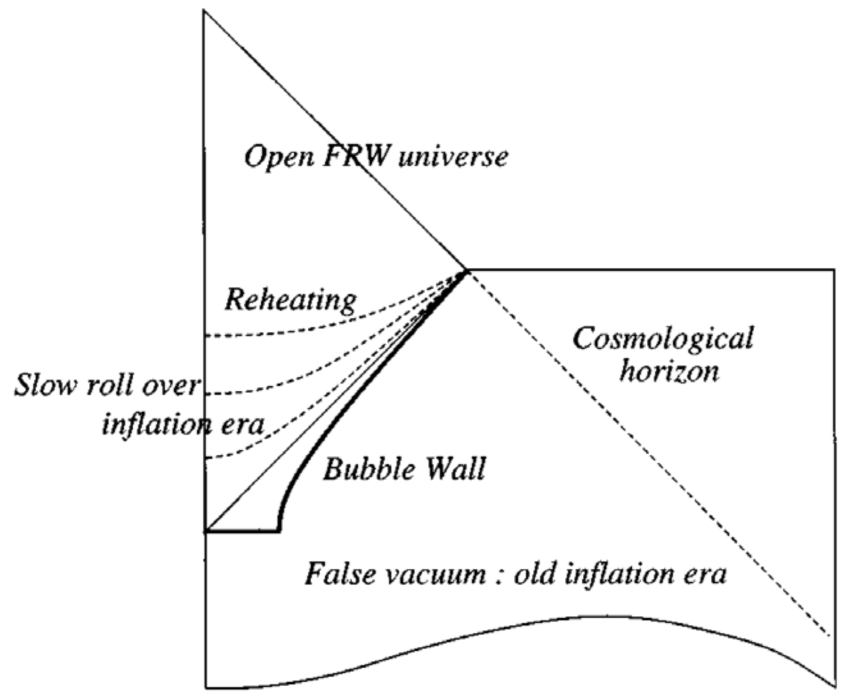
PHYSICAL REVIEW D VOLUME 56, NUMBER 6 15 SEPTEMBER 1997

Bubble wall perturbations coupled with gravitational waves

Akihiro Ishibashi* and Hideki Ishihara†
Department of Physics, Tokyo Institute of Technology, Oh-Okayama Meguro-ku, Tokyo 152, Japan
(Received 18 April 1997)

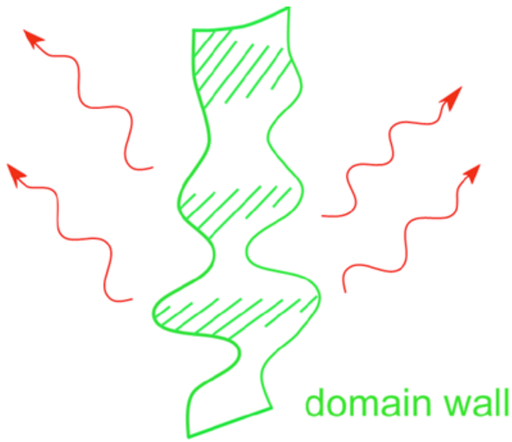
ゲージ不変量による時空とドメインウォールの摂動論

ドメインウォールの自己重力効果を考える



位相欠陥は固有の重力波を放出するか？
初期宇宙相転移を検証するプローブになりうるか？

重力波？　　重力波？



自己重力を考慮すると、ドメインウォール固有の振動数の重力波放射はないことが分かった。

AI & Ishihara '97 '99

w/ Tanaka 05

時空次元を一般化 ⇒ RSブレーン宇宙モデルの摂動論

(Kodama-AI-Seto 2000)

宇宙論的ホライズンと対称性

Commun. Math. Phys. 89, 387–413 (1983)

Communications in Mathematical Physics

Symmetries of Cosmological Cauchy Horizons*

Vincent Moncrief[1] and James Isenberg[2]

1 Department of Physics, Yale University, P.O. Box 6666, New Haven, CT 06511, USA
2 Department of Mathematics, University of Oregon, Eugene, OR 97403, USA

- コーシー地平面がヌル方向に閉じていると対称性が存在

Class. Quantum Grav. 9 (1992) 1683-1691. Printed in the UK

On spacetimes containing Killing vector fields with non-closed orbits*

James Isenberg† and Vincent Moncrief‡

- 軌道が閉じない場合には，別の対称性が存在する

特異点とインフレーション宇宙

PHYSICAL REVIEW D VOLUME 54, NUMBER 12 15 DECEMBER

Compact hyperbolic universe and singularities

Akihiro Ishibashi*
Department of Physics, Tokyo Institute of Technology, Oh-Okayama, Meguro, Tokyo 152, Japan

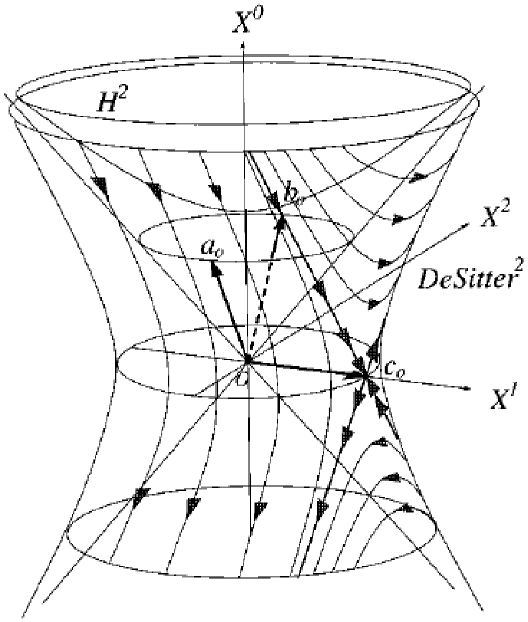
Tatsuhiko Koike†
Department of Physics, Keio University, Hiyoshi, Kohoku, Yokohama 223, Japan

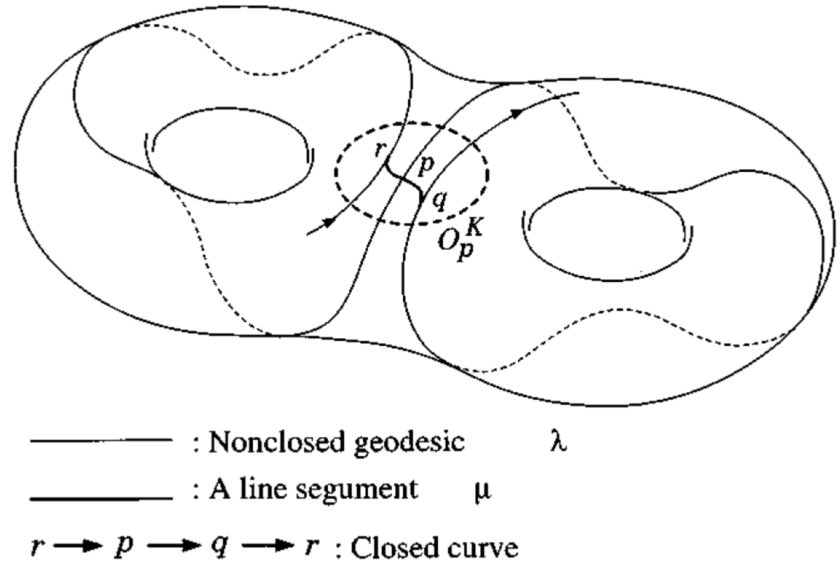
Masaru Siino‡
Department of Physics, Kyoto University, Kyoto 606-01, Japan

Sadayoshi Kojima§
Department of Mathematical and Computing Science, Tokyo Institute of Technology, Oh-Okayama, Meguro, Tokyo 152, Japan

(Received 15 May 1996)

コンパクト負曲率インフレーションと特異点





3次元負曲率コンパクト空間上の測地線は一般に閉じないが，その流れはエルゴード的な様相をなす．

その結果コーシー地平面を越えた領域にトポロジカルな特異点が稠密に発生する．

Open inflation と裸の特異点

Open inflation without false vacua

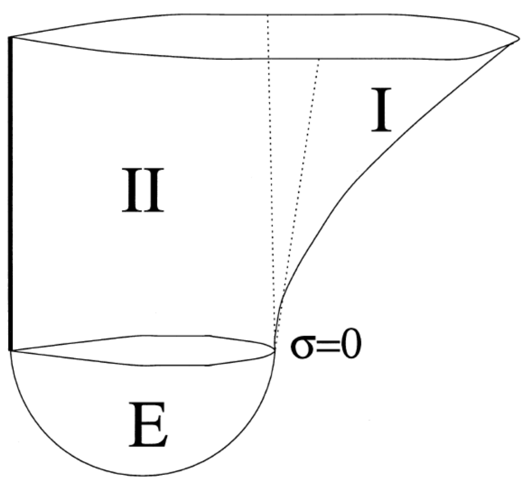
S.W. Hawking [1], Neil Turok [2]

Physics Letters B 425 (1998) 25–32

Open inflation and the singular boundary

Jaume Garriga*

Received 6 April 1998



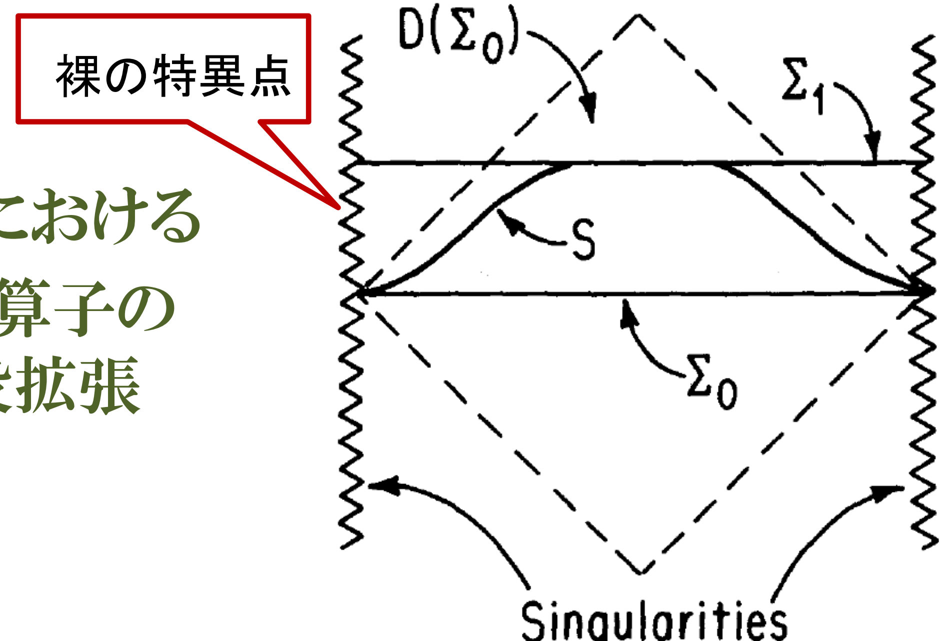
Hawking-Turok ⇒ 特異点での摂動の振る舞い
境界条件は臨界的
（AdS でのBFバウンドに対応）

Garriga : 重力の反作用効果を取り入れる

⇒ 境界条件は一意
（AdSでのユニタリーバウンド）

Dynamics in nonglobally hyperbolic, static space-times [a)]

Robert M. Wald [b)]
Enrico Fermi Institute, University of Chicago, Chicago, Illinois 60637



裸の特異点のある静的時空における時間発展（ハミルトニアン）演算子のディリクレ条件による自己共役拡張

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi = H\Phi$$

エルミートと自己共役の違いが肝心

J. Math. Phys. 21(12), December 1980

特異点の波動によるプローブ 自己共役拡張と一般の境界条件

PHYSICAL REVIEW D, VOLUME 60, 104028

Who's afraid of naked singularities? Probing timelike singularities with finite energy waves

Akihiro Ishibashi*
Yukawa Institute for Theoretical Physics, Kyoto University, Sakyo-ku, Kyoto 606-8502, Japan

Akio Hosoya†
Department of Physics, Tokyo Institute of Technology, Oh-Okayama Meguro-ku, Tokyo 152-0033, Japan

(Received 5 February 1999; published 26 October 1999)

APPENDIX: EXTENSIONS OF SYMMETRIC OPERATORS

We briefly review some definitions of linear operators on a Hilbert space with an inner product $(\cdot,\cdot)$. An operator on a Hilbert space $\mathcal{H}$ is a pair of a linear mapping $A:\mathcal{H}\rightarrow\mathcal{H}$ and its domain of definition $\mathcal{D}(A)$. The pair $(A,\mathcal{D}(A))$ is often abbreviated by A. If an operator A with $\mathcal{D}(A)$ densely defined in $\mathcal{H}$ satisfies

$$(\phi, A\psi)=(A\phi,\psi), \quad \forall\phi,\psi\in\mathcal{D}(A), \tag{A1}$$

then A is called *symmetric*. In the case, any vector $v\in\mathcal{H}$ can be approximated by vectors in $\mathcal{D}(A)$ as close as possible. An operator A' is called an *extension* of A, if $\mathcal{D}(A)\subset\mathcal{D}(A')$ and $A'\psi=A\psi$, $\forall\psi\in\mathcal{D}(A)$. Extensions of an operator A are obtained by the relaxation of the boundary condition on $\mathcal{D}(A)$. Consider sequences $\{\psi_n\}\subset\mathcal{D}(A)$ such that there exist limits $\lim_{n\rightarrow\infty}\psi_n=:\xi\in\mathcal{H}$ and $\lim_{n\rightarrow\infty}A\psi_n=:\zeta\in\mathcal{H}$. If, for every such sequence, $\xi\in\mathcal{D}(A)$ and $A\xi=\zeta$, then $(A,\mathcal{D}(A))$ is said to be closed. If a nonclosed operator A has a closed extension it is called closable. Every closable operator has a smallest closed extension, which is called its closure. Consider a symmetric operator $(A,\mathcal{D}(A))$. Define $\mathcal{D}(A^*)$ to be the set of all $\phi\in\mathcal{H}$ for which there exists $\chi\in\mathcal{H}$ such that

$$(\phi, A\psi)=(\chi,\psi), \quad \forall\psi\in\mathcal{D}(A). \tag{A2}$$

Then, since $\mathcal{D}(A)$ is dense, χ is uniquely determined by $\phi\in\mathcal{D}(A^*)$ and Eq. (A2). An operator $(A^*,\mathcal{D}(A^*))$ defined by $A^*\phi=\chi$ for every $\phi\in\mathcal{D}(A^*)$ is called the adjoint of $(A,\mathcal{D}(A))$. $\mathcal{D}(A^*)$ may be larger than $\mathcal{D}(A)$, in which case A^* is a proper extension of A. If $(A^*,\mathcal{D}(A^*))=(A,\mathcal{D}(A))$, an operator $(A,\mathcal{D}(A))$ is said to be self-adjoint.

お話しすること

- 何に興味をもってきたか。
  時空の特異点とインフレーション宇宙

- 何をやっているのか。
  高次元一般相対論とブラックホール

- これから。

（高次元）一般相対論研究の進展

1916: Schwarzschild　解

1963: Kerr 解

1965-70: 特異点定理

1970 Zerilli 方程式

1972 BHの面積則

1973 BHとエントロピー

1973 BH 力学と熱力学

1974 Hawking 輻射

1967～1982: 一意性定理

1981 インフレーション宇宙

1979～1983: 正エネルギー定理

1986: Myers-Perry 解

カルツァ・クライン型
（プランク・スケール）
とは異なるコンパクト化

実体的（古典的）な
高次元時空の研究動機

一般相対論・宇宙論
研究者の多くが
高次元重力研究に
本格参入

1992: 2次元BH　CGHSモデル

1993: 3次元BH　BTZ

Gregory-Laflamme 不安定性

1993: 開いたインフレーション

何に興味をもってきたか。

1997 AdS/CFT 対応

1998 特異インスタントン

宇宙の加速膨張

大きな余剰次元

1999 RSブレーンワールド

2001 Black Ring

何をやっているのか。

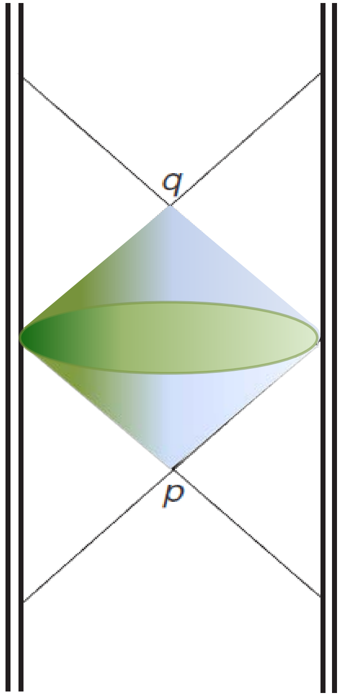
何をやっているのか。

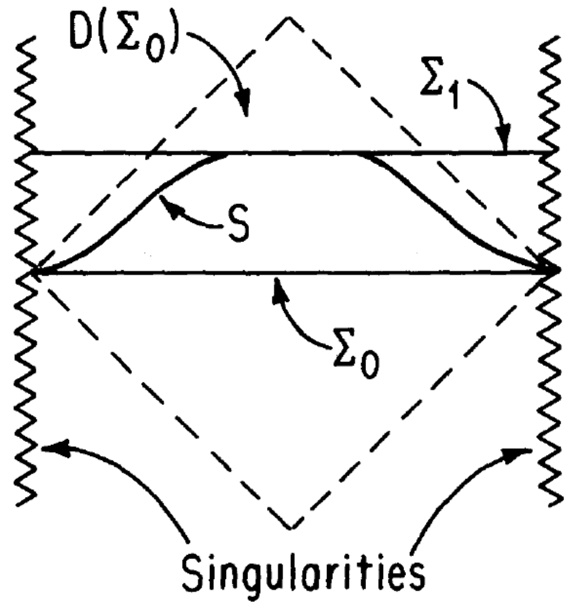
1. AdS 時空のダイナミクス

2. 高次元ブラックホール

- AdS/CFT 対応において，AdS時空の共形無限遠での境界条件とAdSバルク内部のダイナミクスの関係に興味　…

AdS 時空は静的かつ非大域的双曲的





- AdS 時空は完備で完全に正則な時空だが，波動については共形無限遠は**裸の特異点的**
- 特異点の波動プローブの手法が適用可能

2001年の夏
Wald さん基研に滞在

Dynamics in non-globally-hyperbolic static spacetimes: II. General analysis of prescriptions for dynamics

Class. Quantum Grav. **20** (2003) 3815–3826

Dynamics in non-globally-hyperbolic static spacetimes: III. Anti-de Sitter spacetime

Class. Quantum Grav. **21** (2004) 2981–3013

Akihiro Ishibashi[1] and Robert M Wald[2]

- ＡｄＳ時空上の線形波動について，
  時間発展演算子の可能な自己共役拡張を決定

  ⇒　全ての可能な境界条件とスペクトルの
  正負を同定

BF 制限

AdS上の線形波動方程式はポアンカレ座標で次の様に書ける：

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi = H\Phi \qquad H := -\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\gamma^2 - 1/4}{z^2}$$

シュワルツの不等式より $\displaystyle \frac{1}{4}\int dz \frac{\Phi^2}{z^2} \leq \int dz \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2$

⇨ $\displaystyle 0 \leq \int_0^\infty dz \Phi \left(-\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{-1/4}{z^2}\right)\Phi$ （$\gamma = 0$ の場合に対応）

⇨ $0 \leq (\Phi, H\Phi)$

$\gamma^2 \geq 0$ のときは 安定

$\gamma = 0$ に対応するスカラー場の質量 ⇒ BF-bound $\displaystyle m_{\mathrm{BF}}^2 = -\frac{(D-1)^2}{4\ell^2}$

- BF制限　-1/4 （特異インスタントン：Hawking-Turok に対応）
  これ未満だと全ての自己共役拡張が
  負のスペクトル
  ⇒ すごく不安定
- ユニタリー制限　$-1/4 + 1 = 3/4$ （Garriga 摂動に対応）
  ⇒ これ以上だとディリクレ条件のみ
  正のスペクトル
- その中間：自己共役拡張のスペクトルの正負は
  境界条件に依存

1. AdS 時空のダイナミクス

2. 高次元ブラックホール

「宇宙はなぜ3次元空間の拡がりをもつのか？」

1. 一般次元における時空・重力の理解が必要

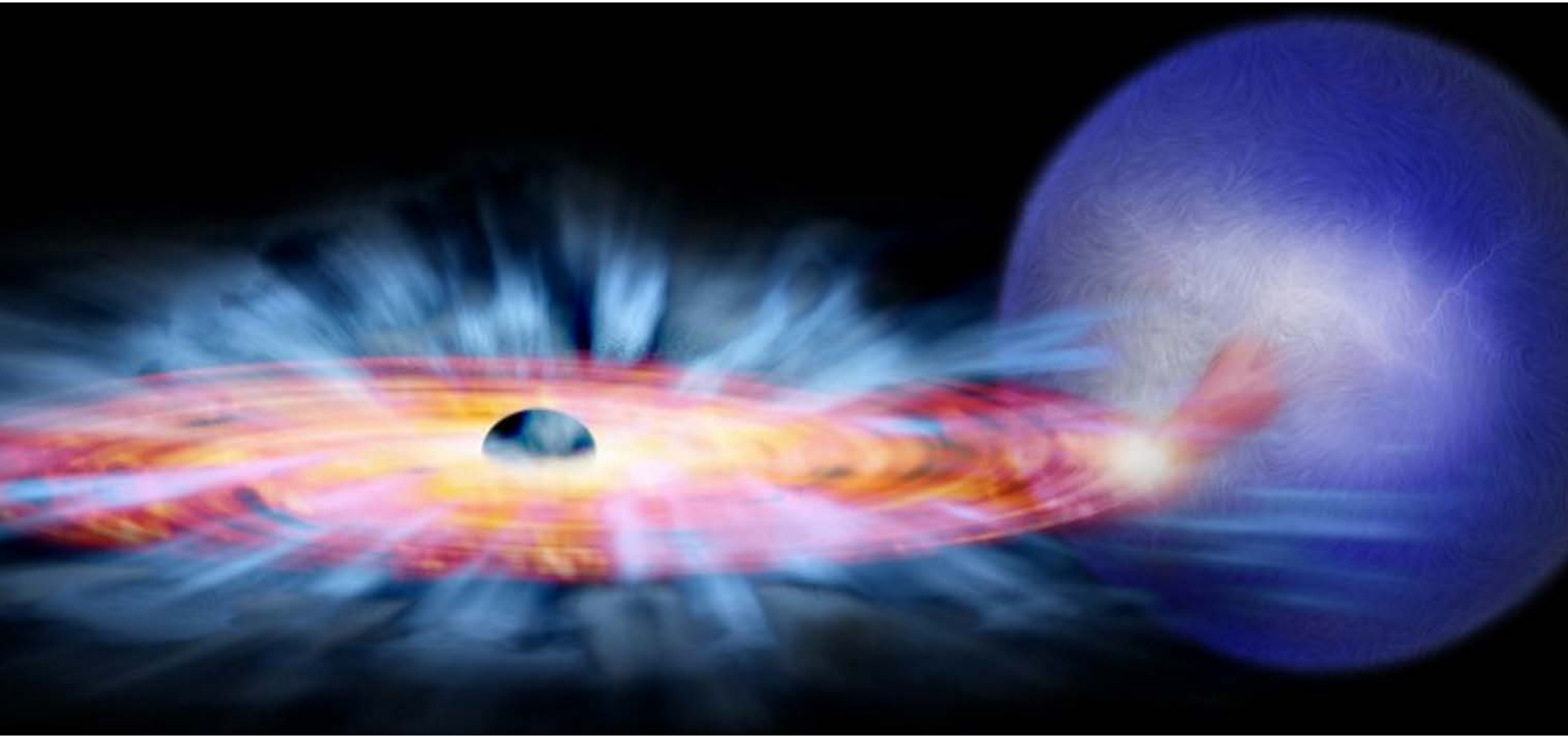
重力の極端に強い状況　⇒　ブラックホール

2. 量子時空の基礎理論

超弦理論　⇒　高次元時空を要請

高次元ブラックホール

4次元宇宙のブラックホール



➢ 面積則：　(Hawking 71)

ブラックホールのイベント・ホライズンの断面積　A は減少しない：$\Delta A \geq 0$

- Remark：　熱力学第２法則との類似

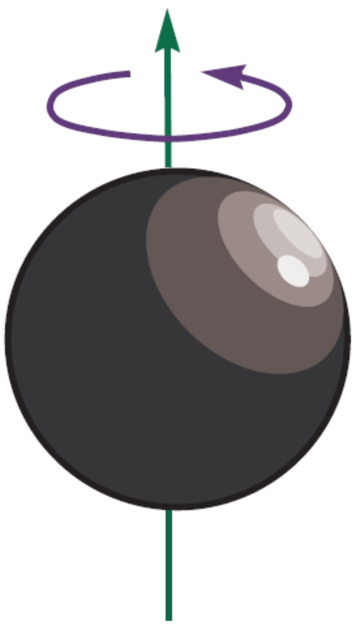
  エントロピー　S　は減少しない：$\Delta S \geq 0$

  (Bekenstein 73)

“平衡”　熱力学系との対応は？

➡ “定常” ブラックホール（ダイナミクスの終状態）

定常回転ブラックホール (Kerr 63)



- トポロジー： ２次元球面
- パラメーター： 質量 M 角運動量 J
  角運動量に上限： $|J| \leq M^2$
  電荷 Q も持てる (Newman et al 65)
- 安定： 線形重力摂動論
  (Teukolsky 72 - Whiting 89)

ブラックホール力学　(Bardeen-Carter-Hawking 73)

- 質量や角運動量が微妙に違う２つの定常ブラックホールを比べる

$M \quad J$

$M+\Delta M \quad J+\Delta J$

$\Rightarrow$ $\kappa = const.$ $\qquad \Delta M = \frac{\kappa}{8\pi}\Delta A + \Omega_H \Delta J$

A ： ホライズンの断面積　　Ω_H ：ホライズンの角速度

κ ：　表面重力

定常ブラックホールの力学

$$\kappa = const. \qquad \Delta M = \frac{\kappa}{8\pi}\Delta A + \Omega_H \Delta J$$

- 平衡熱力学第０、第１法則と対応

$$T = const. \qquad \Delta E = T\Delta S - P\Delta V$$

量子効果 ⇨ 温度の決定： $T = \dfrac{\kappa}{2\pi}$ (Hawking 74)

⇨ ブラックホールのエントロピー： $S = \dfrac{A}{4}$

４次元定常ブラックホール熱力学と一意性

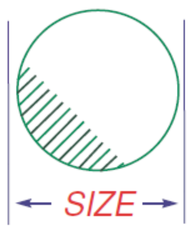
定常ブラックホールが平衡熱力学系と対応するなら、いくつかの少数のパラメーターで完全に特徴付けることが可能なはず…

- 一意性定理：(Israel-Carter-Robinson-Mazur-Bunting)

定常な漸近平坦ブラックホール解は３つのパラメーター
質量 M 電荷 Q 角運動量 J で一意に定められる

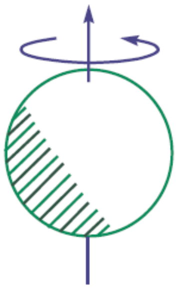
宇宙のブラックホールは、その材料や形成過程の詳細によらず、
最終（定常）状態は Kerr 計量で記述される

物体を特徴づける

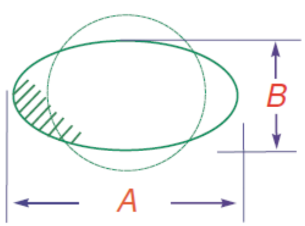


大雑把な大きさ

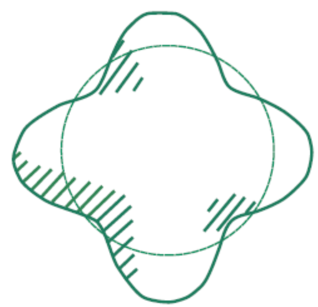
重量



角運動量



扁平ぐあい



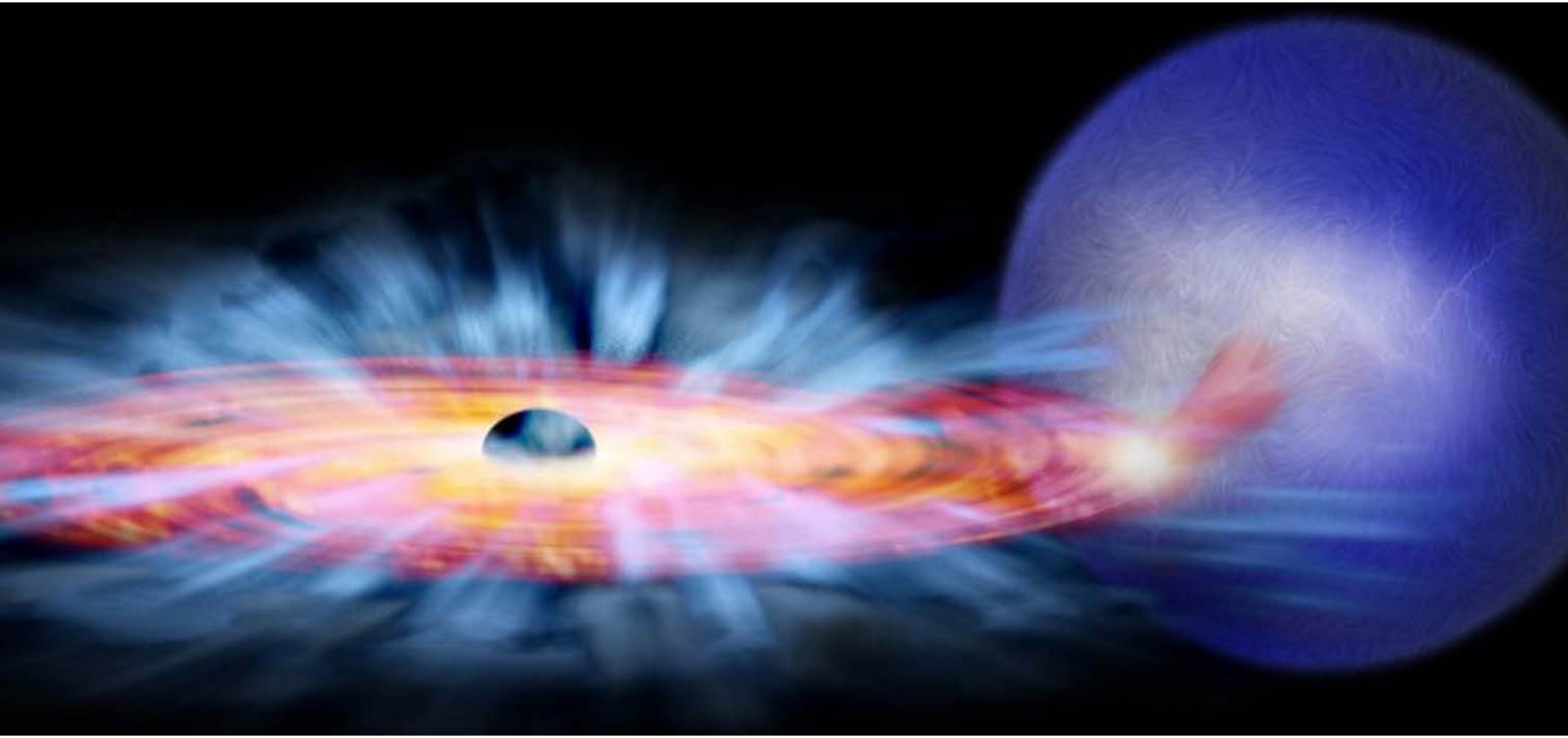
四重極モーメント

$\cdots$ 多重極モーメント

∞ 個のパラメーター

一意性定理の物理的意義

宇宙に存在する膨大な数のブラックホール



それらの全てが，高々2つのパラメータを含むカー計量で正確に記述される

"In my entire scientific life ... the most shattering experience has been the realization that an exact solution of general relativity, discovered by the New Zealand mathematician Roy Kerr, provides the absolutely exact representation of untold numbers of massive black holes that populate the Universe"

Chandrasekhar (チャンドラセカール)

"Truth and Beauty" (1987)

４次元ブラックホールのまとめ（真空・定常）

- トポロジー　　2次元球面
- 安定性　　安定　⇒　ダイナミクスの終状態
- 一意性　　質量と角運動量のみで完全に定まる
カー（Kerr）解

とても強い制限

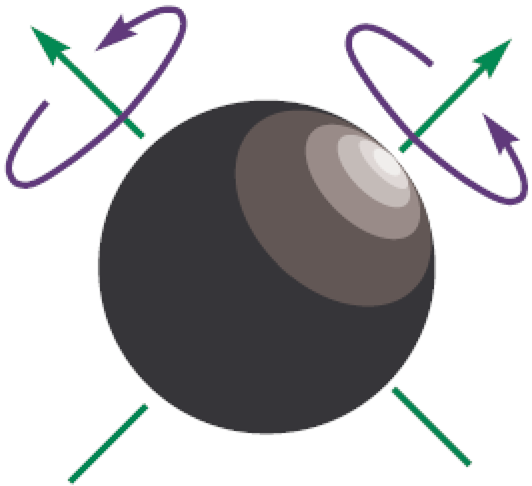
⇒　詳しく理解することが可能

高次元ブラックホールの場合

- トポロジー　　球面的である必要はない
- 安定性　　不安定
- 一意性　　成り立たない

⇒ 多様なブラックホールの可能性

多様な高次元ブラックホール



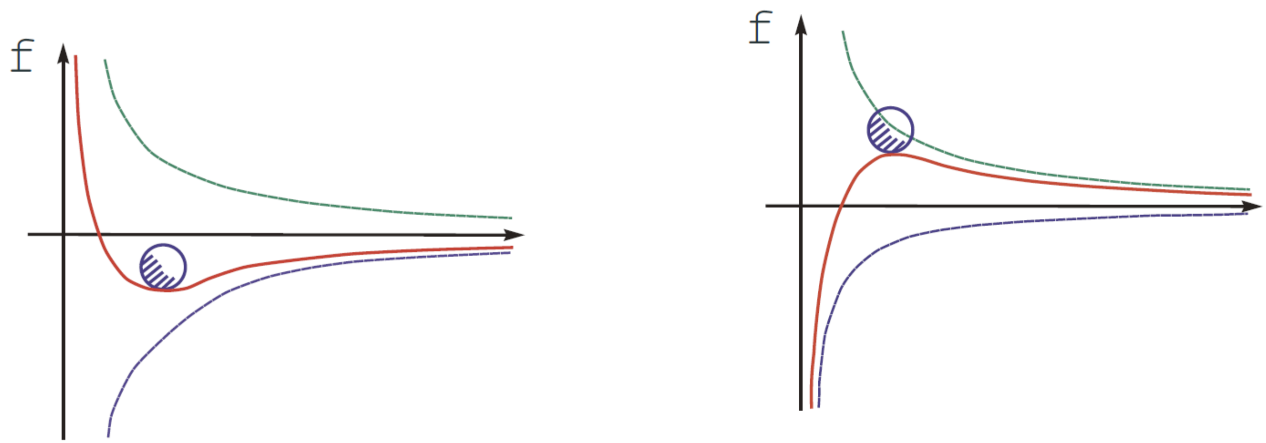
複数の回転軸をもつ
高次元ブラック・ホール

5次元ブラック・リング

高次元時空は一般に不安定？

C.f.　質量 M のまわりの質点の円 (ケプラー) 運動:

ポテンシャル　$\phi = -\frac{GM}{r^{n-2}} + \frac{L^2/2M}{r^2}$　　n : 空間の次元



4 次元時空: 安定な円軌道

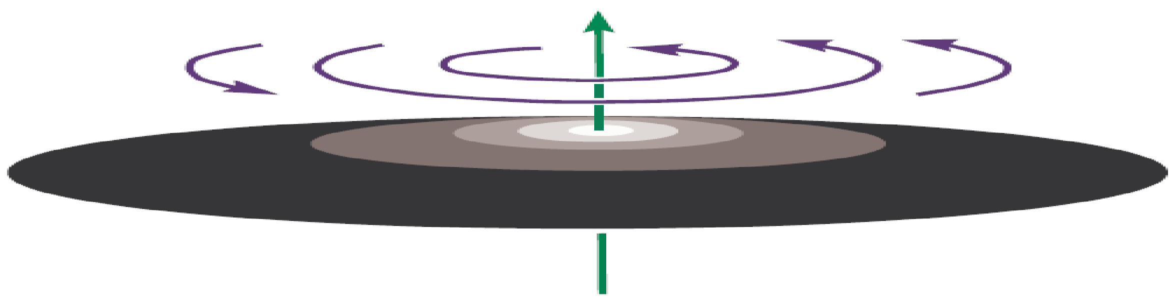
6 次元以上 円軌道は不安定
5 次元 円軌道は存在しない

高速回転ブラックホールの不安定性

$D \geq 6$　では、いくらでも早く回転できる

c.f.　4次元の場合には回転に上限があった　$|J| \leq M^2$

ホライズンの存在　$\Longleftrightarrow$　$0 = 1 + \dfrac{(J/M)^2}{r^2} - \dfrac{GM}{r^{D-3}}$



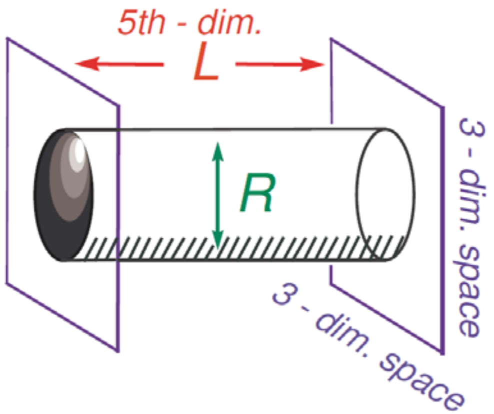
- ホライズンが扁平:　ブラック・ストリング的　$\Longrightarrow$　不安定　$7 \leq D \leq 9$

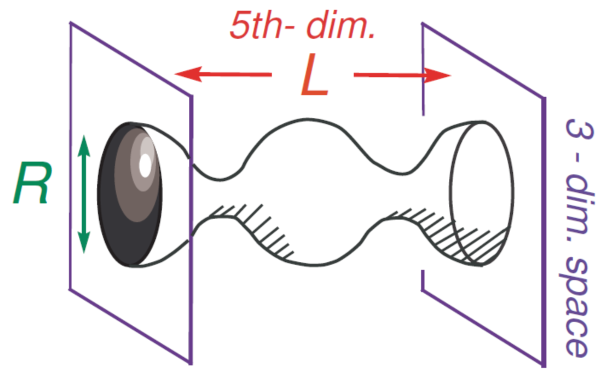
  軸対称数値解析　(Emparan-Myers 03)　(Dias et al 09)

- 非軸対称の場合　数値解析　$5 \leq D \leq 8$　(Shibata-Yoshino 10)

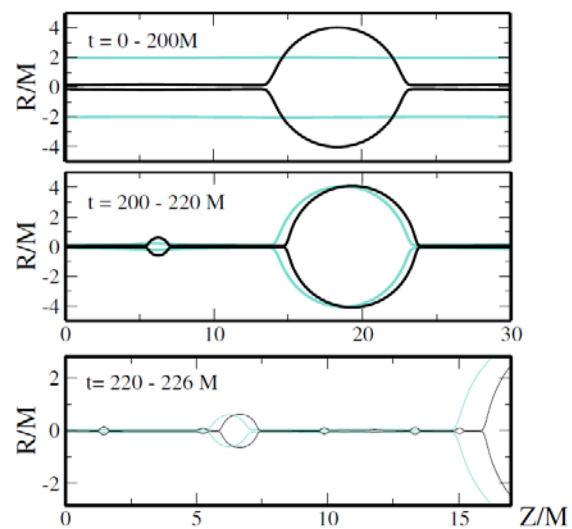
ブラック・ストリング

摂動を加えると ⇒　不安定モード





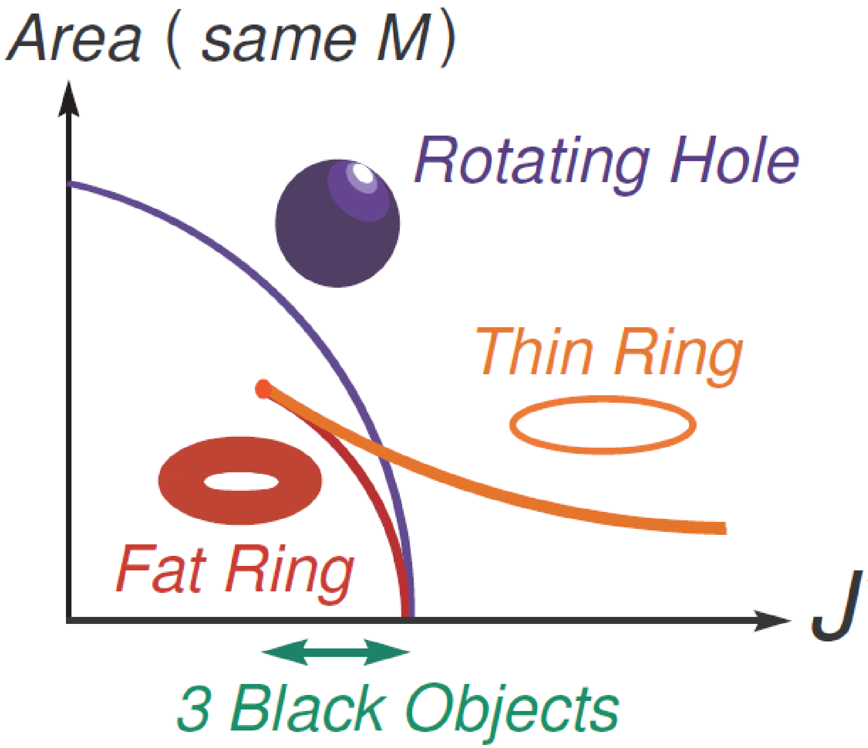
(Gregory & Laflamme '93)



- 階層的に潰れてゆく

Lehner-Pretorius 10)

５次元ブラックホールとリングの相図



同じ $(M,\ J_1,\ J_2 = 0)$ に対して

１個のブラック・ホールと

２個のブラック・リングが存在

４次元のときの様な一意性定理は、もはや成立しない

高次元ブラックホールの分類問題

- 高次元ブラックホールは安定か？

  安定・不安定性　⇒　自然界に存在するのか？

  新しい解系列への分岐？

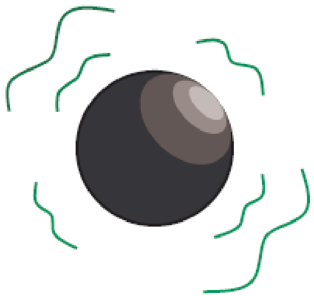
  重力波・シグナル

- どんな対称性をもっているのか？

  可能な形状（トポロジー）など、多様性への制限

安定性

ブラックホールの重力摂動論



" 軽く叩いて" 反応を見る

$$g_{ab} \to g_{ab} + \Delta g_{ab}$$

- 安定性解析:　不安定モードの有無

$$\Delta g_{ab} \sim \exp(+\Omega t) \quad (\Omega > 0)$$

- 準固有振動:　特徴的音色

$$\Delta g_{ab} \sim \exp(-i\omega t - \Omega t) \quad (\omega \in \mathbb{R})$$

PHYSICAL REVIEW D **66**, 064024 (2002)

Gravitational instability in higher dimensions

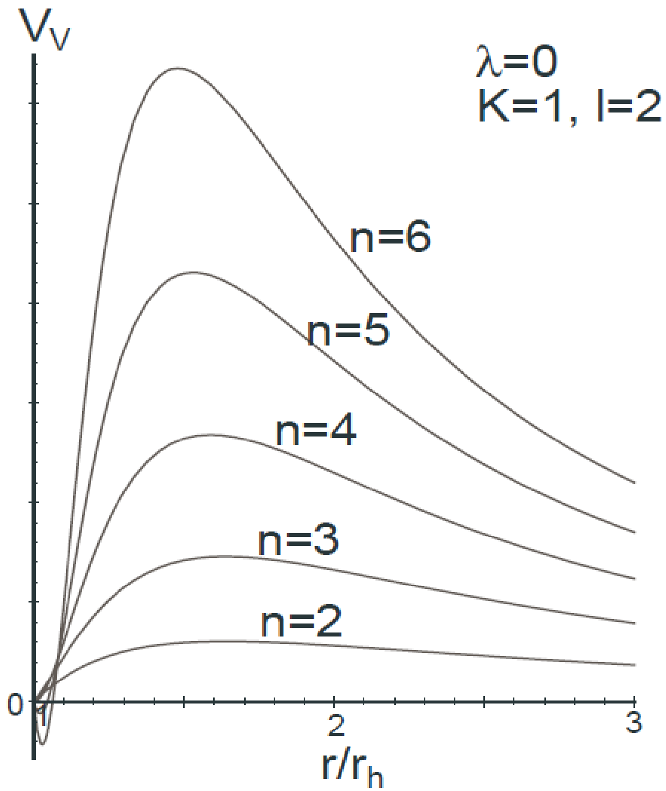
Gary Gibbons* and Sean A. Hartnoll†

テンソル型摂動に着目
ホライズンが非自明なアインシュタイン多様体の場合に不安定

ベクトル型やスカラー型摂動については議論されていない．

RSブレーン宇宙モデルの摂動論 (Kodama-AI-Seto 00)でのベクトル型やスカラー型摂動の基礎方程式系は高次元ブラックホールにも適用可能。

ベクトル・モードのポテンシャル



ホライズン近傍で負になる ⇒ 不安定モードの存在？

六

II-4 Vector - perturbation

$$\delta g^{(V)}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & h_a \mathbb{V}_j \\ \text{"} & H\, D_{(i} \mathbb{V}_{j)} \end{pmatrix} \qquad a = (t, r)$$

- $\mathbb{V}_j$: Vector harmonics

$$(\Delta_n + k_V^2)\mathbb{V}_j = 0 , \quad D_i \mathbb{V}^i = 0$$

on "n-sphere"

- gauge-invariant variable "F^a"

$$F^a \equiv r^{n-2} h^a - \frac{r^n}{2} D^a (H/r^2)$$

- Einsten's equation

$$\begin{cases} D_a F^a = 0 & \text{----} \quad ① \\ \Box F^a + \cdots\cdots = 0 & \text{---} \quad ② \end{cases}$$

① $\Rightarrow$ $\exists\, \Phi$ s.t. $F^a = \epsilon^{ab} D_b (r^{n/2} \Phi_V)$

② $\Rightarrow$

$$\boxed{\left(\Box_2 - \frac{V_V}{f(r)} \right) \Phi_V = 0}$$

A Master equation for Vector perturbation

$\equiv$ Regge-Wheeler eqn. in 4-D

Newton Institute, Cambridge 05

II-5 Scalar-perturbation

- Expand "$\delta g^{(s)}_{\mu\nu}$" by scalar harmonics "$\mathbb{S}$"

$$(\Delta_n + k_s^2)\mathbb{S} = 0, \qquad k_s^2 \equiv \ell(\ell+n-1)$$

- construct gauge-invariant variables "X, Y, Z"

- Einstein's equation for X. Y. Z.

(Fourier transf. in "t")

$$(\text{※})\left\{\begin{array}{l} \bullet \begin{pmatrix} \partial_r X \\ \partial_r Y \\ \partial_r Z \end{pmatrix} = \text{Linear Functions of } X,\ Y,\ Z \\ \bullet \text{ Linear Algebraic relation among } X,\ Y,\ Z \end{array}\right.$$

--- can be reduced to a single wave eqn. for

$\Phi_S \equiv$ (a "nice" linear combination of X. Y. Z)

$$\boxed{\left(\Box_2 - \frac{V_S}{f(r)}\right)\Phi_S = 0}$$

Fourier Inverse Transf.

A Master equation for Scalar-perturbation

$\equiv$ Zerilli-eqn. in 4-D

$\because$ Reducibility of the system (※)

(Xanthopoulos '81)

Kodama & AI '03

重力摂動マスター方程式

高次元静的ブラックホールの安定性は固有値問題に帰着

$$\omega^2 \Phi = A\Phi := \left(-\frac{\partial^2}{\partial r_*^2} + U(r) \right) \Phi$$

$$\Phi \propto \exp\left(-i\omega t\right)$$

もし $A \geqslant 0$ $\Rightarrow$ $\omega^2 \geqslant 0$: ω は“実数”$\Rightarrow$ 安定

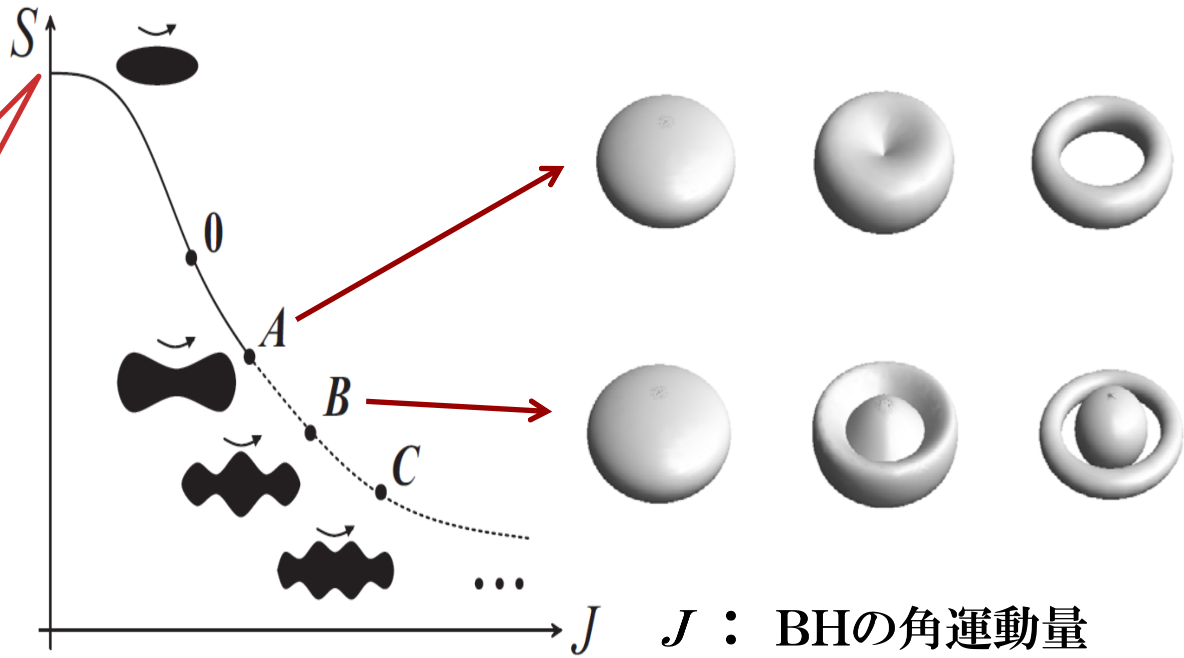
- 自己共役演算子 A のスペクトル解析

$\Rightarrow$ 静的真空解の場合 任意次元で“安定”

AI & Kodama ‘03

高次元ブラックホールの相図

S ： ホライズンの断面積
＝BHエントロピー



少なくとも
ここは安定

AI & Kodama

J ： BHの角運動量

高次元ブラックホールの位相空間は広大…

対称性

- 「ブラックホールの剛性定理」

  定常ブラックホールは剛体回転する

⇓

$D \geqslant 4$ 定常ブラックホールは静的か、又は 軸対称 である

意義
- 時空対称性の拡大
- ブラックホール熱力学の基礎
- 一意性定理の証明の要

定常ブラックホールは剛体回転するか？

2004年 クリスマス Santa Barbara

最初のアプローチ方法

- 5次元の場合 ⇒ ホライズン断面は3次元

J. Math. Phys. 35 (9), September 1994 細谷研の研究が使えないか？

Compact homogeneous universes

Tatsuhiko Koike,[a] Masayuki Tanimoto,[b] and Akio Hosoya[c]
Department of Physics, Tokyo Institute of Technology, Oh-Okayama, Meguro-ku, Tokyo 152, Japan

- 一般次元の場合

Symmetries of Cosmological Cauchy Horizons*

Vincent Moncrief[1] and James Isenberg[2]

1 Department of Physics, Yale University, P.O. Box 6666, New Haven, CT 06511, USA
2 Department of Mathematics, University of Oregon, Eugene, OR 97403, USA

On spacetimes containing Killing vector fields with non-closed orbits*

定常ブラックホールは剛体回転するか？

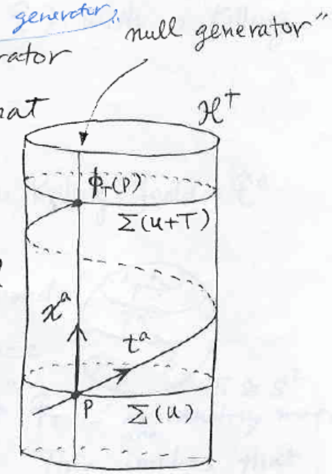
2006年2月 Santa Barbara
高次元ブラックホール研究会

2004年 クリスマス Santa Barbara

The proof in $d=4$ case by Hawking – Ellis consists essentially of the following 3 steps.

(I) Let ϕ be the flow of t^a. One can show that there exists a $T \neq 0$ (period) such that "ϕ_T maps each generator of $\mathcal{H}^+$ into itself."
Thus, the orbits of the Killing field t^a on $\mathcal{H}^+$ repeatedly intersect the same generator.

(II) One can then ~~assign~~ choose a parameter of each generator, to each generator a parameter, u, in such a way that



- $u|_{\phi_T(p)} = u|_p + T$
- generator tangent is rescaled
  $x^a \equiv (\partial/\partial u)^a$,
  $x^c \nabla_c x^a = \kappa x^a$, $x^c \nabla_c \kappa = 0$.

Furthermore, one can show $\pounds_x g_{ab} = 0$ on $\mathcal{H}^+$.
Hence x^a is a Killing field defined locally on $\mathcal{H}^+$.

(III) x^a can be extended to a Killing vector field in the spacetime (M, g_{ab}) by assuming analyticity and by using the Einstein equations.

x^a ← where one shows that

$$\boxed{\pounds_x \left(\frac{\partial^n}{\partial r^n} g_{\mu\nu} \right) = 0}$$

$\frac{\partial}{\partial r}$: null vector transverse to $\mathcal{H}^+$.

by a method of induction ← Einstein equations.

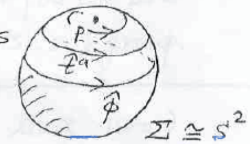
Step (II) and (III) do not seem to depend on the spacetime dimension, and we expect it can be carried over to $d > 4$ case.

On the otherhand. Step (I) relies on the dimension (and the topology) of $(\Sigma, \hat{g}_{ab})$. Now let me explain this point.

— We first note that isometries ϕ generated by t^a give rise to isometries $\hat{\phi}$ on $(\Sigma, \hat{g})$ with a Killing field $\hat{t}^a$ on $(\Sigma, \hat{g})$

— In $d=4$ case, $\Sigma \cong S^2$, hence the Killing field $\hat{t}^a$ has a "fixed point p" on Σ.

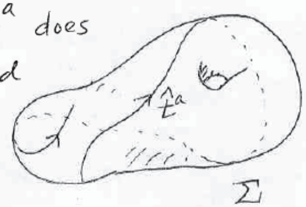
The action of $\hat{\phi}$ on Σ ~~is~~ corresponds to a "rotation" on the tangent space $T_p\Sigma$ with "period T." $\longrightarrow$ $\hat{\phi}_T$ is the identity map.



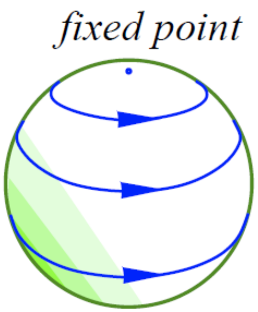
(So, $\hat{t}^a$ has closed orbits on Σ). This implies that on $\mathcal{H}^+$, ϕ maps each generator into the same one.

Factor space of $\mathcal{H}^+$ by ϕ_T is N of cmpt Cauchy horizon.

— In $d > 4$ case, topology of Σ is in general non-trivial, and the Killing field $\hat{t}^a$ does NOT necessarily have a fixed point and may NOT have closed orbits.



ブラックホールの剛体定理　証明の要



4次元のブラックホール：Hawking 73

2次元球面上の軌道は必ず閉じる。

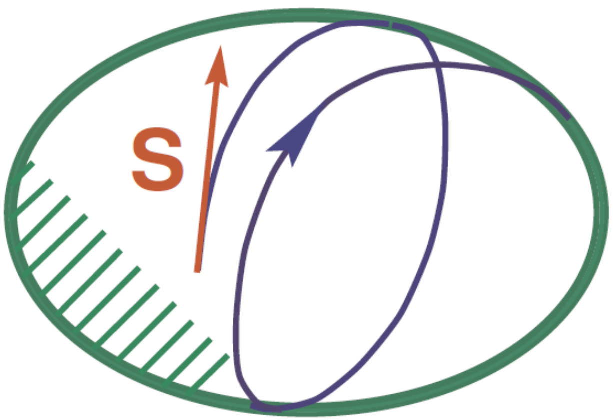
高次元ブラックホールの問題点：
3次元以上では一般に軌道が閉じない。

高次元 $D \geqslant 5$ の場合の問題点

“正しい”断面や K^a を求めるために解くべき方程式は、断面 Σ 上で

$$S^a D_a \Psi(x) = J(x)$$

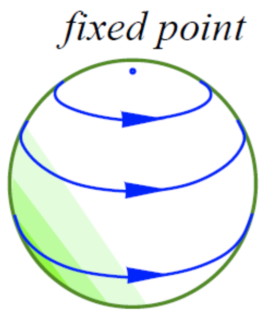
の型で与えられる



S^a の軌道が閉じない場合 S に沿っての積分が well-defined になる保障はない

閉じない軌道に沿った積分を解きたい

ブラックホールの剛体定理　証明の要



4次元のブラックホール：　Hawking 73

2次元球面上の軌道は必ず閉じる。

高次元ブラックホールの問題点：
3次元以上では一般に軌道が閉じない。

解決のアイディア

エルゴード定理を利用
“閉じない軌道に沿った時間積分”をホライズン閉曲面での
“空間平均”で置き換える

Hollands-AI-Wald ’07

剛性定理 ＝ 剛体回転

NATURE PHYSICAL SCIENCE VOL. 238 JULY 31 1972

Rigidity of a Black Hole

AT each point on the Killing horizon bounding a stationary axisymmetric black hole there is a well defined local angular velocity Ω of rotation, defined by the equation

$$l^a = k^a + \Omega m^a \tag{1}$$

where l^a is the (suitably normalized) null generator of the Killing horizon, and k^a and m^a are the standard Killing vector generators of the stationary and the axisymmetric symmetry group motions of the space.

I have shown[1] that for any stationary axisymmetric black hole, the rotation represented by this angular velocity is necessarily rigid, in the sense that the angular velocity Ω is constant over the entire Killing horizon. In the particular case of a Kerr black hole this constant is given by

$$\Omega = \tfrac{1}{2} J M^{-1}\{M^2 + (M^4 - J^2)^{\frac{1}{2}}\}^{-1} \tag{2}$$

where M is the mass of the black hole and J its angular momentum, in units with $c = G = 1$.

I thank James Hartle and Stephen Hawking for discussions.

B. CARTER

Institute of Theoretical Astronomy, Cambridge

まとめ：高次元ブラックホール理論

4次元　⇒　一意性：　安定　⇒　カー解

高次元　⇒　多様性：　不安定

課題

- 厳密解の系統的分類・相図
- 剛性・対称性の大きさ
- 安定・不安定性（一般の場合）
- 超弦理論の実験場
- 4次元宇宙との接点

お話しすること

- 何に興味をもってきたか。
  時空特異点と負曲率インフレーション

- 何をやっているのか。
  高次元一般相対論とブラックホール

- これから。
  ひらけゆく新しい宇宙像

$$d = 4$$

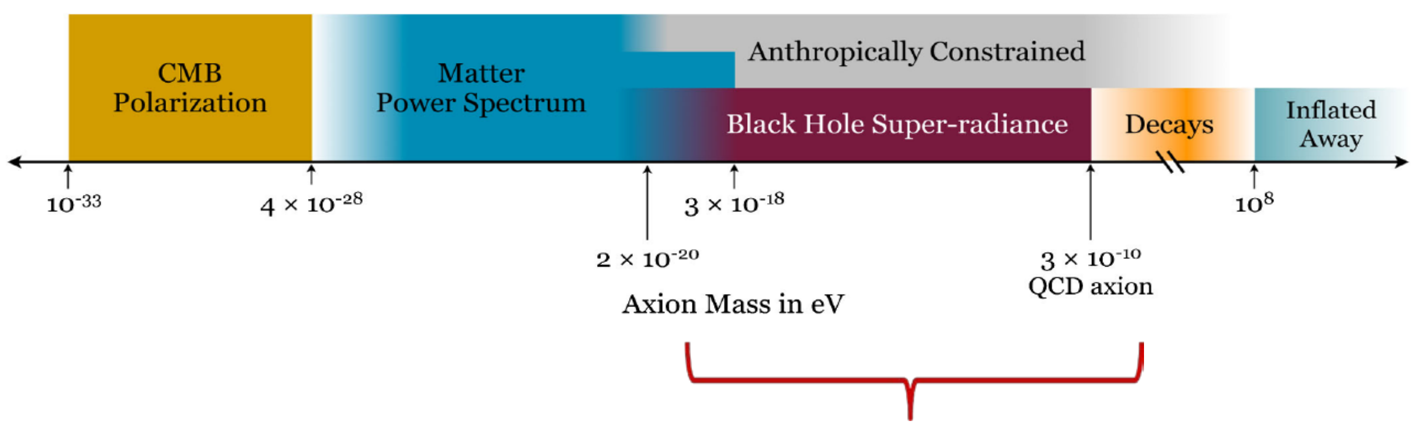
高次元の痕跡を探査

4次元有効理論とブラックホール

高次元重力理論を4次元にコンパクト化

多様な超軽量ボソン場(アクシオン)が
不可避的に生成される

Arvanitaki-et al 0905.4720



多様なアクシオン宇宙のブラックホールによる探査

Kodama-Yoshino, etal 2014

超弦理論の余剰次元コンパクト化，ブレーン宇宙モデルなど

高次元理論から4次元宇宙への様々な可能性が増えるとともに
“物理的実体としての高次元時空”の可能性がひらけてきた。

理論と観測の突合せ方法の考案、検証可能性を
探る基礎研究を突き詰める必要。

高次元空間がもし存在すれば、
私たちの宇宙像を一新する。

一方で

- ホログラフィー原理

時空（重力）の自由度 ⇒ 他の物理的自由度で理解

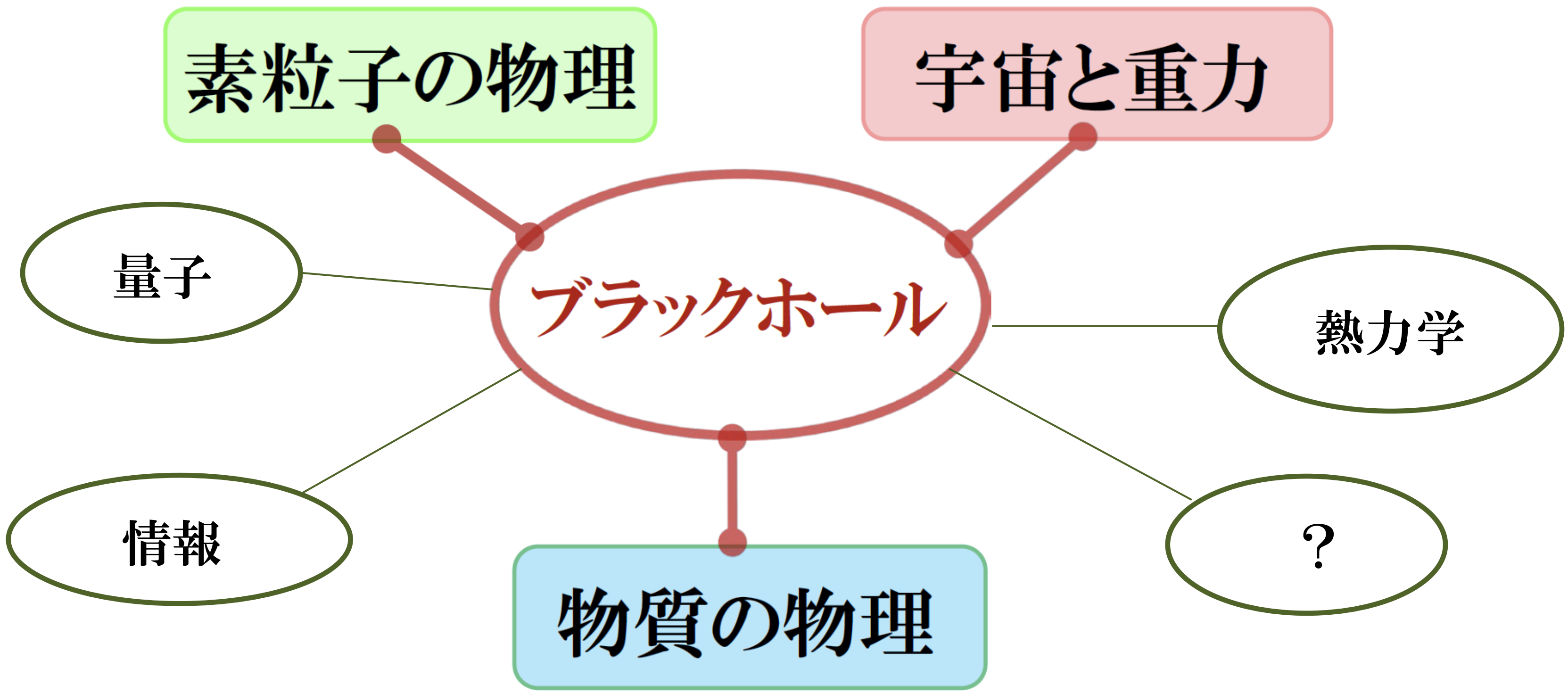
実体としての（高次元）時空は不要（！？）
新しい時空描像

さらに

ホログラフィック超伝導 etc AdSブラックホールと様々な強結合・強相関の量子多体系の対応関係

宇宙物理や素粒子論・超弦理論の文脈を超えた
ブラックホール物理の多様な拡がり

異なる現象・理論をつないで交流する



ブラックホールは*シルクロード*

ブラックホールで拓く
新しい宇宙像