

# ブラックホールから探る宇宙論

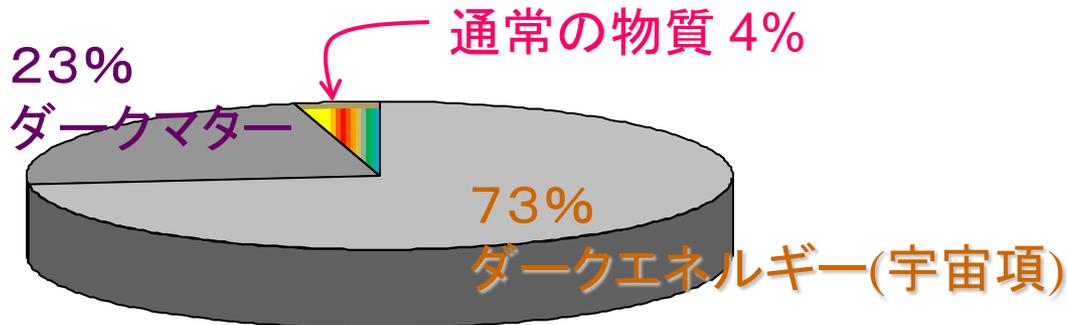
田中貴浩 (京大理)

# 宇宙論の諸相

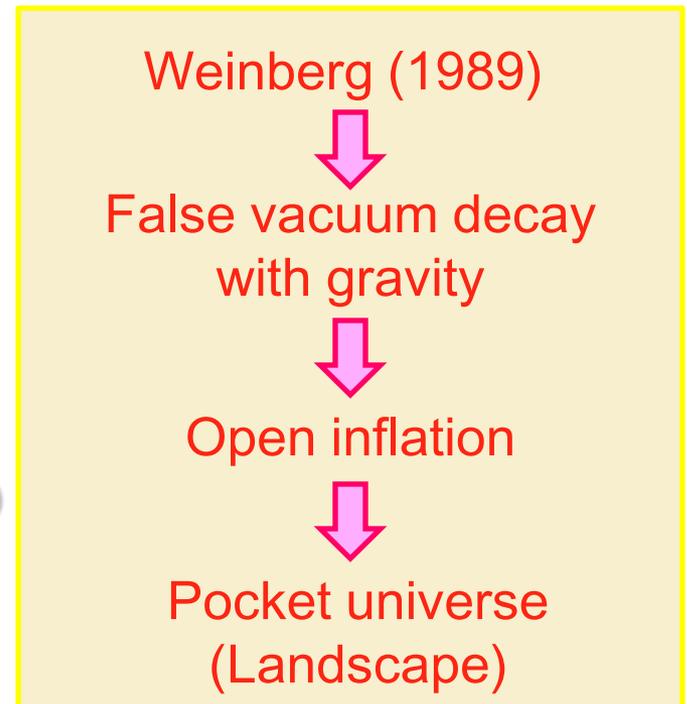
- 宇宙マイクロ波背景放射 — 構造形成  
インフレーション — 重力波 — 非線形
- 超対称模型に基づいた宇宙モデル  
インフレーション — バリオン生成 — ダークマター
- String cosmology  
インフレーション — ブレーンワールド — pre-big bang
- ...

## ■ 宇宙項問題

Dark energy — Dark matter



$$\rho_{\text{Dark Energy}} \approx (10^{-3} \text{ eV})^4 \ll (10^3 \text{ GeV})^4$$



宇宙論は一般相対論(4D GR)に基づいて構築されているが、

## ■ Einstein重力はどこまで正しいのか？

### ◆ Precision test of gravity

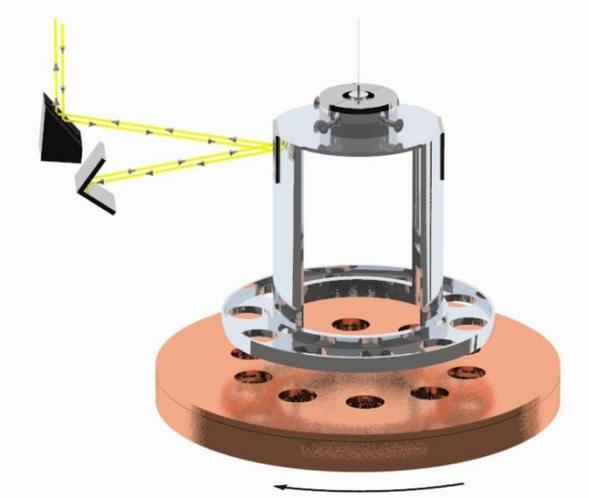
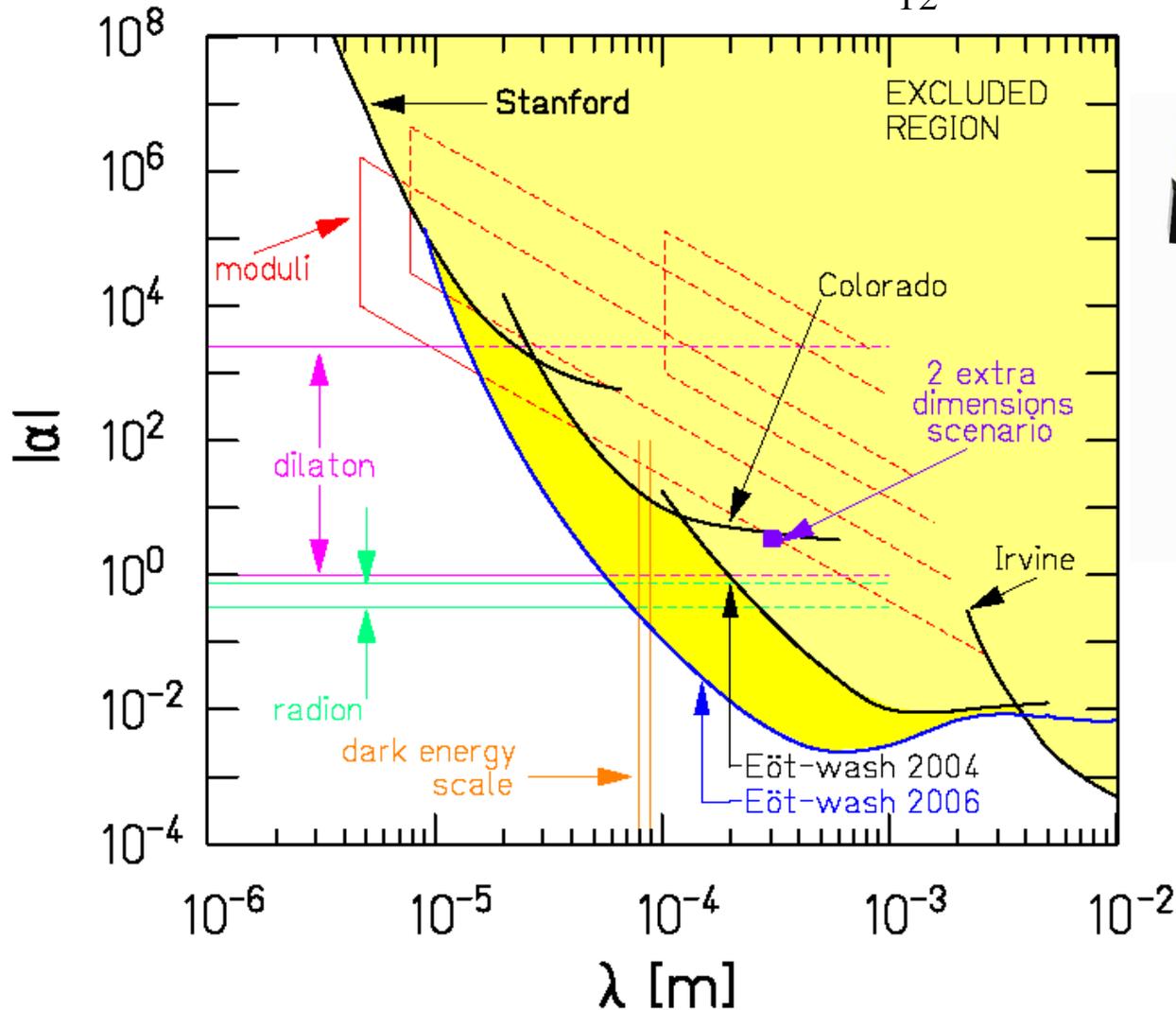
#### ● 弱重力

地上の実験室、太陽系内での実験

# 逆2乗則からのずれに対する制限

◆ Short range force

$$U = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} \left[ 1 + \alpha \exp(-r_{12}/\lambda) \right]$$

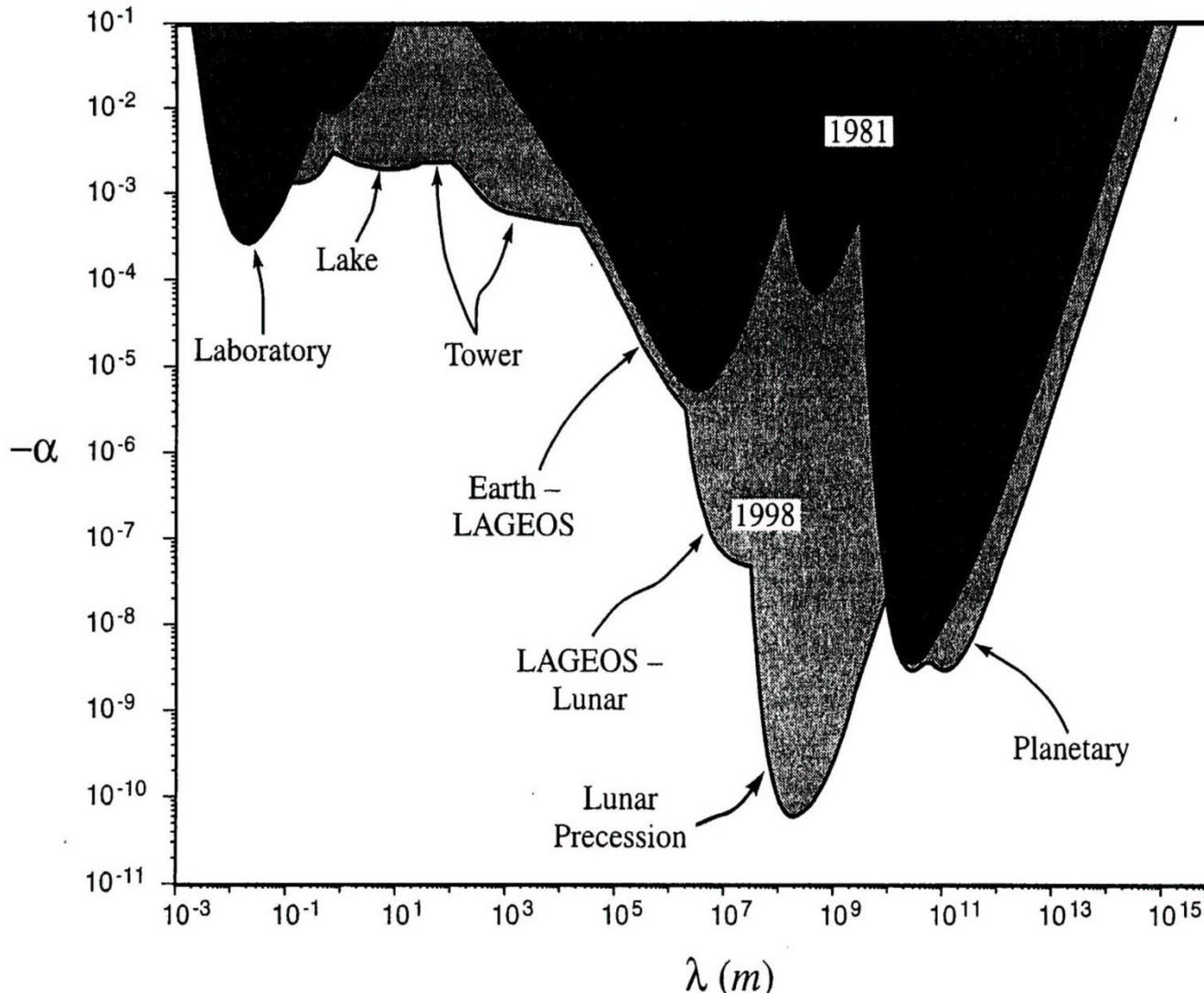


Capner et al  
hep-ph/0611184

# Constraint on Gravity

◆ intermediate range force

$$U = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} \left[ 1 + \alpha \exp(-r_{12}/\lambda) \right]$$



Fischbach & Talmadge  
 “The Search for Non-Newtonian Gravity”

(1998)

# Constraint on Gravity

Ref) Will gr-qc/0504086

## ◆ Parameterized post-Newton

### ◆ $\gamma$ : $g_{ij}$ components

- light bending

$$\delta\theta = \frac{1}{2}(1+\gamma)\times 1.75''$$

VLBI unpublished?

$$\frac{1}{2}(\gamma-1) \approx 1.6\times 10^{-4}$$

- Shapiro time delay

$$\frac{1}{2}(\gamma-1) \approx 10^{-5}$$

### ◆ $\beta$ : 1PN $g_{00}$ components

$$g_{00} = -1 + 2U - 2\beta U^2$$

- perihelion shift

43 arcsec/100yr

$$\beta - 1 \approx 3\times 10^{-3}$$

- Nordtvedt effect

$$\beta - 1 \approx 5\times 10^{-4}$$

# ■ Einstein重力はどこまで正しいのか？

## ◆ Precision test of gravity

### ● 弱重力

地上の実験室、太陽系内での実験

### ● 強重力

弱重力の場合のようには確かめられていない

### ● 宇宙膨張は非線形重力だが、

2つの重力でしか見えないdarkな成分を必要とする

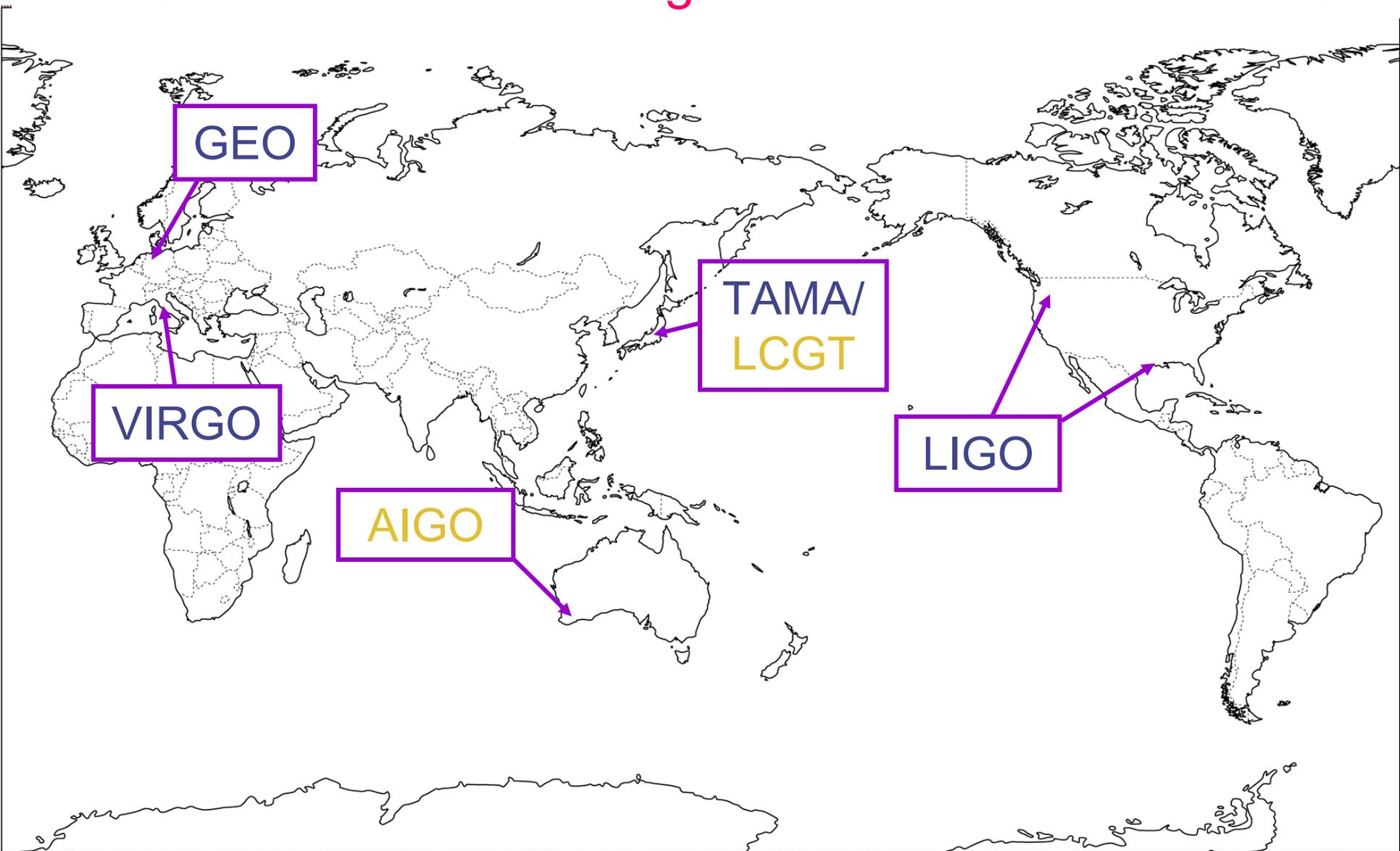
～宇宙項問題を重力理論の変更で解決しよう！

コンパクト星が起こす天体現象

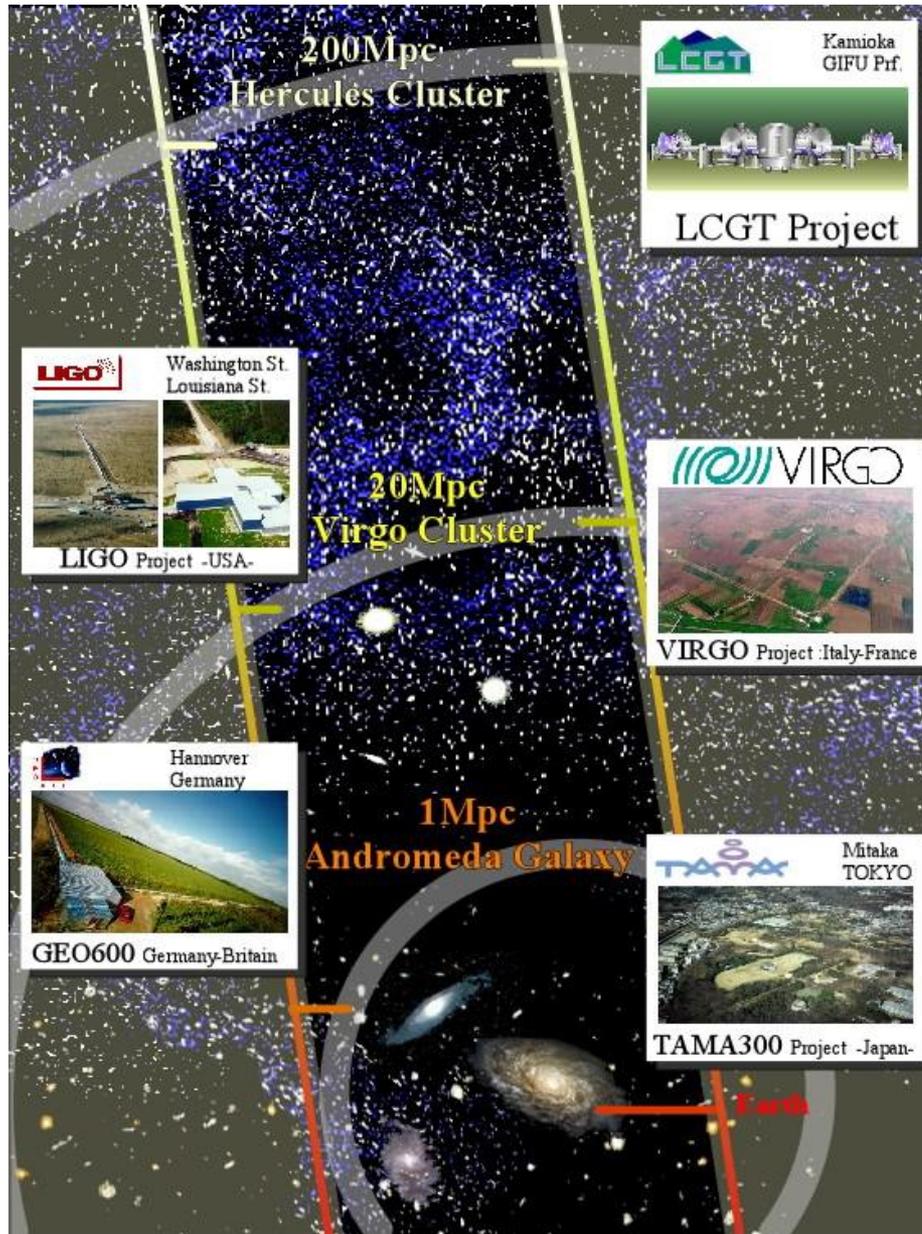
⇒ 重力波

(光速で伝わる潮汐力の波)

# Network of interferometric gravitational wave detectors



# Current and future sensitivity of GW detectors



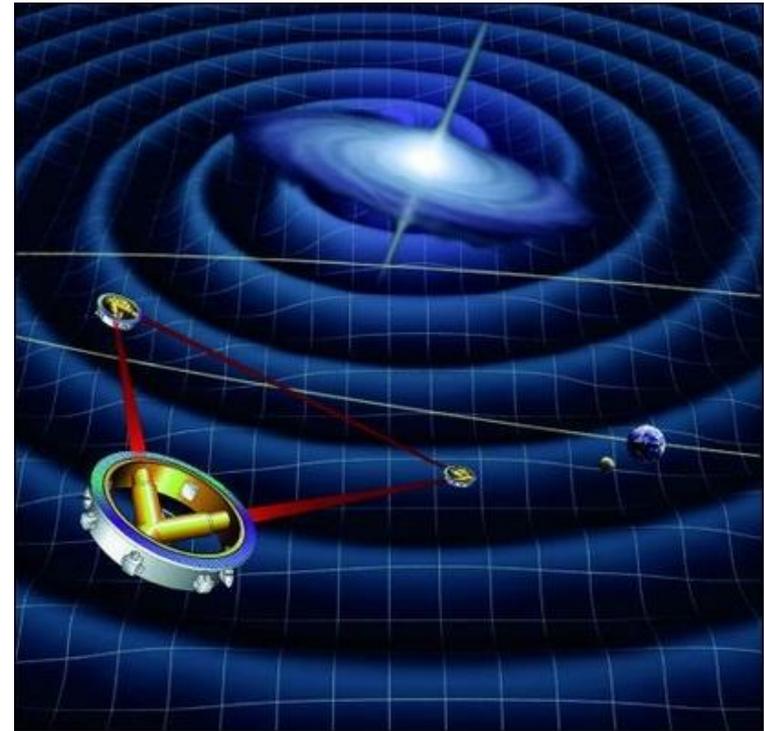
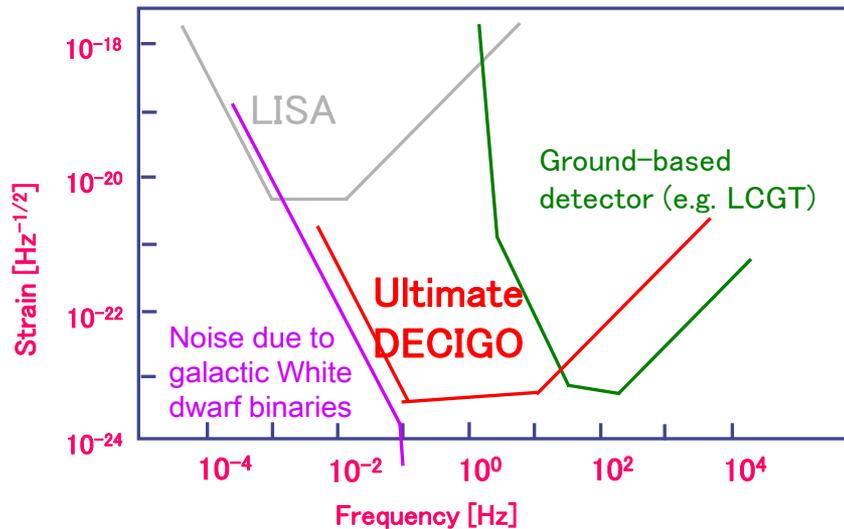
Next generation of GW detectors will detect the coalescence of binary neutron stars up to 200~300 Mpc. The boundary of the observable region of our universe is at about 4000Mpc.

<http://www.icrr.u-tokyo.ac.jp/gr/gr.html>

# Space gravitational waves antenna

## LISA (The Laser Interferometer Space Antenna)

宇宙空間では地面振動から解放され、基線長も伸ばすことができるので、低振動数側に感度があるdetectorが作れる。



## DECIGO ( DECI hertz Interferometer Gravitational wave Observatory )

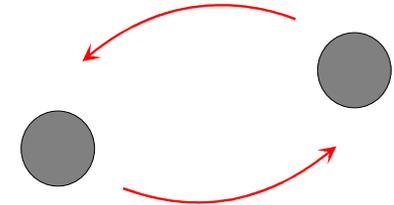
Seto, Kawamura and Nakamura PRL87 221103 (2001)

# Inspiring binaries

(Cutler et al, PRL 70 2984(1993))

## もっとも重要な重力波源のひとつ

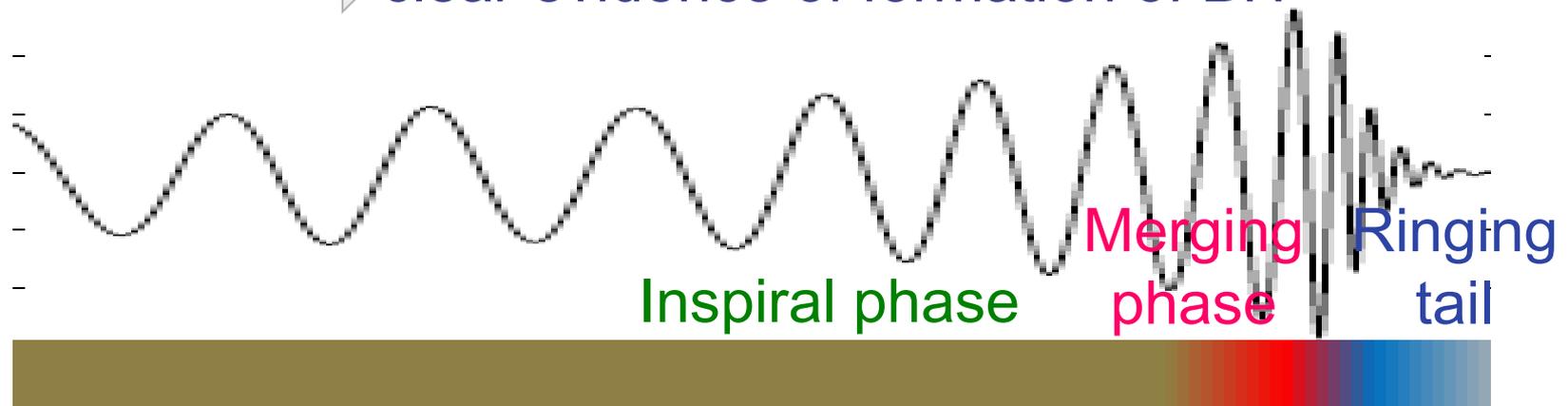
- Inspiral phase (large separation)
- Merging phase - numerical relativity
  - radius of neutron star



→ equation of state of high density nuclear matter

- Ringing tail - quasi-normal oscillation of BH

→ clear evidence of formation of BH



# Inspiral phase

Clean system

星の内部構造がほとんど無視できる

Inspiral phaseに対して、もっとも

信頼度の高い波形の理論予測が可能と期待される。

何故、高い精度の波形の予測が必要とされるのか？

🌍 for detection

⇒ event rate of coalescence in the universeがわかる。

Expected event rates are a few/yr for adv. LIGO/VIRGO or LCGT.

$10^{5-6}$ /yr for ultimate DECIGO

🌍 for parameter extraction

⇒ massやspinの分布までわかる。

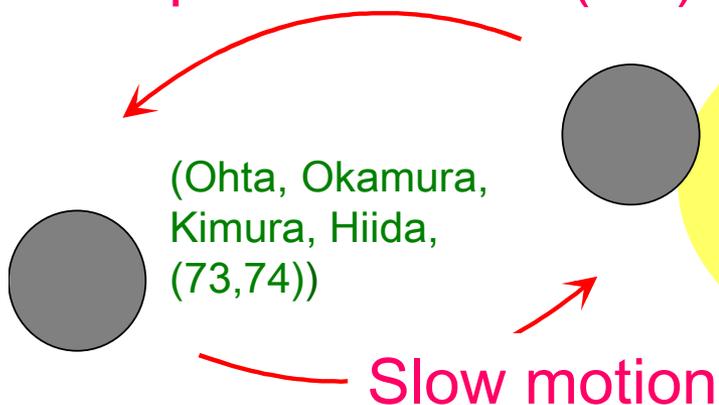
🌍 for precision test of general relativity

(Berti et al, PRD 71:084025,2005)

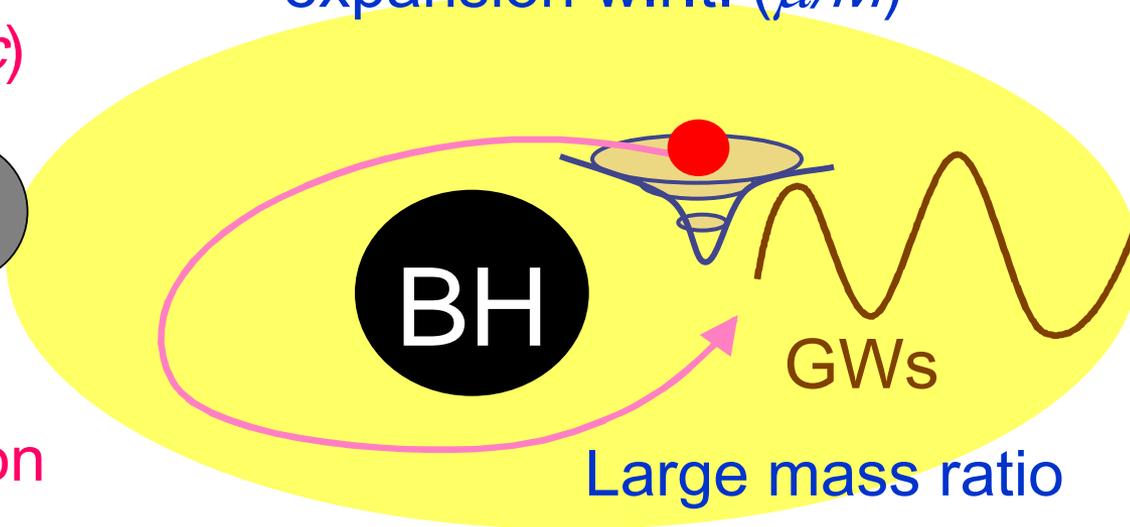
⇒ How correct is general relativity ?

# Post-Newtonian approximation & BH perturbation

Standard post-Newtonian approximation  
= expansion w.r.t.  $(v/c)$



Black hole perturbation  
= expansion w.r.t.  $(\mu/M)$



	$v^0$	$v^1$	$v^2$	$v^3$	$v^4$	$v^5$	$v^6$	$v^7$	$v^8$	$v^9$	$v^{10}$	$v^{11}$
$\mu^0$	○		○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
$\mu^1$			○		○	○	○	○				
$\mu^2$					○		○	○				
$\mu^3$							○					
$\mu^4$												

post-Newtonian

○ : done

BH perturbation

next order BH perturbation

# Radiation reaction for a particle in general orbits in rotating black hole background

- GW waveform ~ 連星軌道の時間発展  
~ radiation reactionによる  
「運動の定数」の時間発展  
Energy and angular momentum  $E, L_z \Leftrightarrow$  Killing vector  
Carter constant  $Q \not\leftrightarrow$  Killing vector
- Radiation reaction to the Carter constant  
は長い間の未解決問題であった.
- We succeeded in calculating the averaged change rate of  $Q$  for the first time, developing the idea of using “radiative” (“retarded”/2 – “advanced”/2) Green function proposed by Mino. (Mino Phys. Rev. D67 084027 ('03))  
(Sago, Tanaka, Hikida, Nakano, Prog. Theor. Phys. 114 509('05))

# Theoretical prediction of Wave form

## Template in Fourier space

$$h(f) \approx A f^{-7/6} e^{i\Psi(f)}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{20\pi^3}} \frac{M^{5/6}}{D_L}, \quad M = \mu^{3/5} M^{2/5}, \quad \eta = \frac{\mu}{M}$$

$$\Psi = 2\pi f t_c - \phi_c + \frac{3}{128} (\pi M f)^{-5/3} \left[ 1 + \frac{20}{9} \left( \frac{743}{331} + \frac{11}{4} \eta \right) u^{2/3} - \frac{(16\pi - \beta)u}{1.5\text{PN}} + \dots \right]$$

$$u \equiv \pi M f = O(v^3)$$

1PN

1.5PN

for quasi-circular orbit

- We know how higher expansion proceeds.

⇒ Only for detection,

higher order template may not be necessary?

- We need higher order accurate template for precise measurement of parameters (or test of GR).

*c.f.*

observational error in  
parameter estimate

$\propto$

signal to noise ratio

# ● Test of GR

## Effect of modified gravity theory

Scalar-tensor type

Mass of graviton

$$\Psi = \dots + \frac{3}{128} (\pi M f)^{-5/3} \left[ \alpha u^{-2/3} + 1 + \left( \frac{3715}{756} + \frac{55}{9} \eta + \frac{128}{3} \eta \beta_g \right) u^{2/3} - (16\pi - \beta) u + \dots \right]$$

$\alpha \propto \frac{1}{\omega_{BD}}$  Dipole radiation = -1 PN

$\beta_g = \frac{\pi^2 M}{\lambda_g^2} \int a^2 d\eta$   $u = \pi M f = O(v^3)$

Current constraint on dipole radiation:

$$\omega_{BD} > 140, (600)$$

4U 1820-30 ( NS-WD in NGC6624)

(Will & Zaglauer, ApJ **346** 366 (1989))

Current bound:

$$\lambda_g > 10^{-3} \text{pc}$$

Neutron star binaryの重力波放出によるorbital decay

Constraint from future observation:

LISA-  $10^7 M_{\odot} \text{BH} + 10^7 M_{\odot} \text{BH}$ :  
graviton compton wavelength

$$\lambda_g > 1 \text{kpc}$$

(Berti & Will, PRD**71** 084025(2005))

Constraint from future observation:

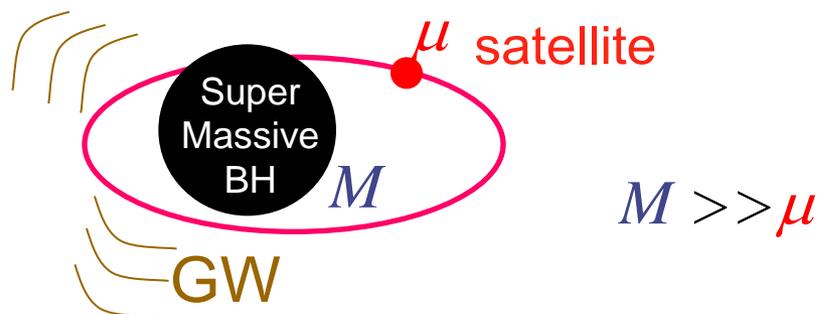
$$\text{LISA- } 1.4 M_{\odot} \text{NS} + 400 M_{\odot} \text{BH}: \omega_{BD} > 2 \times 10^4$$

(Berti & Will, PRD**71** 084025(2005))

$$\text{Decigo- } 1.4 M_{\odot} \text{NS} + 10 M_{\odot} \text{BH}: \omega_{BD} > 5 \times 10^9 ?$$

## Test of GR

Black hole 時空をprobeする extreme mass-ratio inspiral



“BH in GR has no hair.”

Kerr 時空は  $M$  と  $a$  の2つのparameterしか持っていない

重力理論の変更は異なるBlack hole 時空を预言するか？

IR (long range) modification of gravity

Scalar-tensor理論  $\sim f(R)$  gravity

BHはEinstein重力と同じ(no-hair)

Lorentz violating models — Ghost condensation

Kerr解も存在するが、hairもある

Massive gravity  $\Rightarrow$  DGP braneworld

Braneworld?

# ブレーションワールド

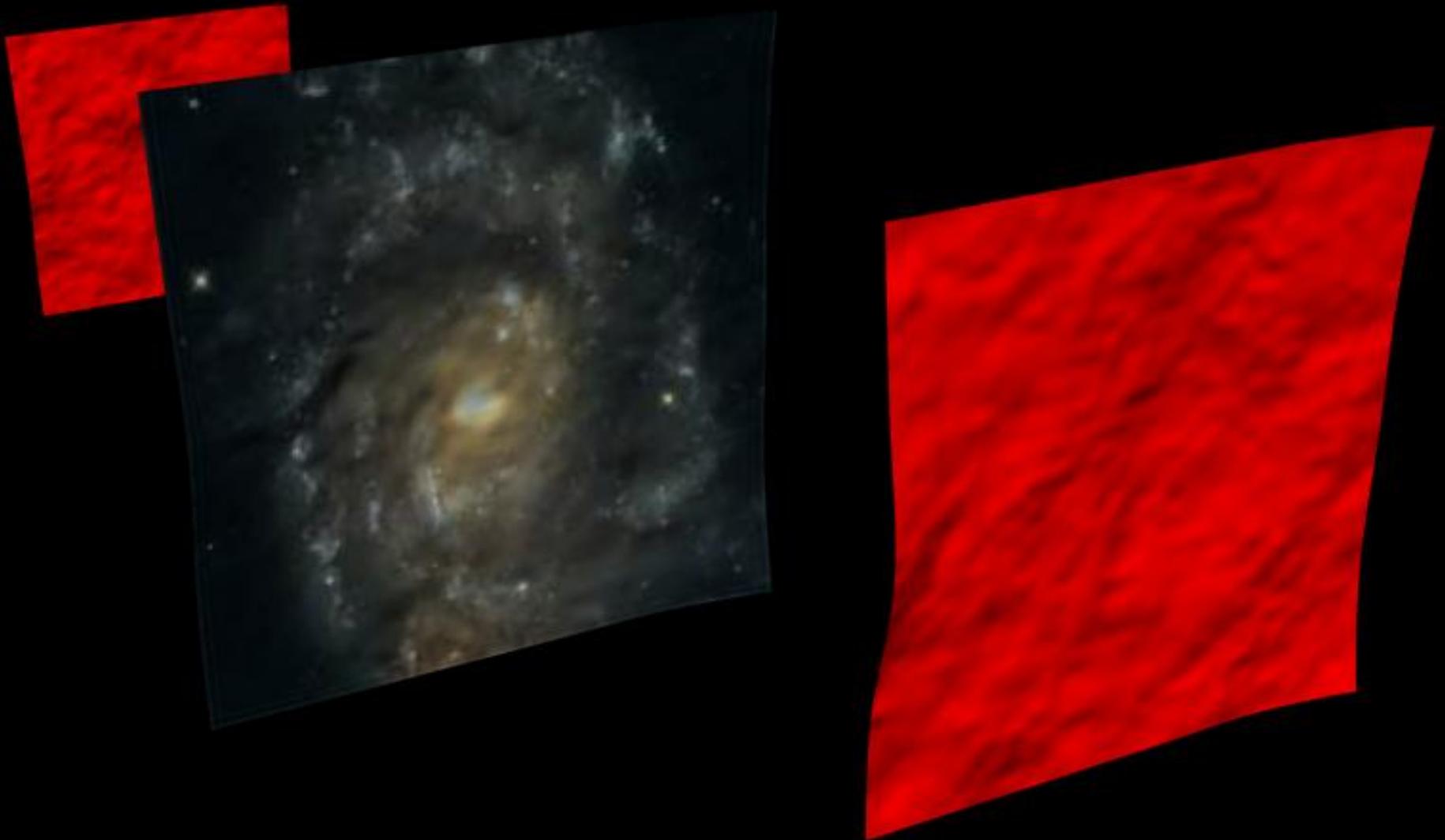
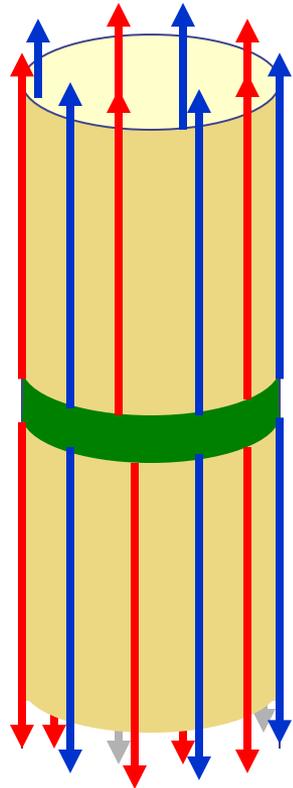


イラスト: 小林努

# 新しいコンパクト化の方法 (Braneworld)

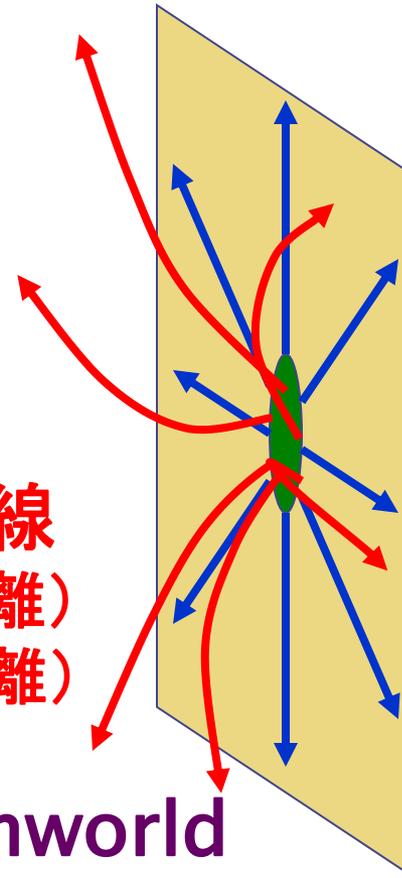


青: 電気力線  
 $F \propto 1/r^2$

赤: 重力の力線  
 $F \propto 1/r^{D-2}$  (近距離)  
 $1/r^2$  (遠距離)

Kaluza-Klein  
コンパクト化

高次元方向には一様



Braneworld

重力のみが高次元時空中を伝播

Standard modelの場合はブレーンに局在  
-局在していないと実験と完全に矛盾

重力は時空の力学  
なので、高次元時空  
があれば、そこを重  
力が伝わるのは自  
然。

重力に対する観測  
的制限が弱い為、  
余剰次元の大きさ  
が比較的大きくても  
無矛盾。  $\sim 0.1\text{mm}$

# Warped extra dimension

階層性問題をwarpによって説明しようという提案

5D anti-de Sitter

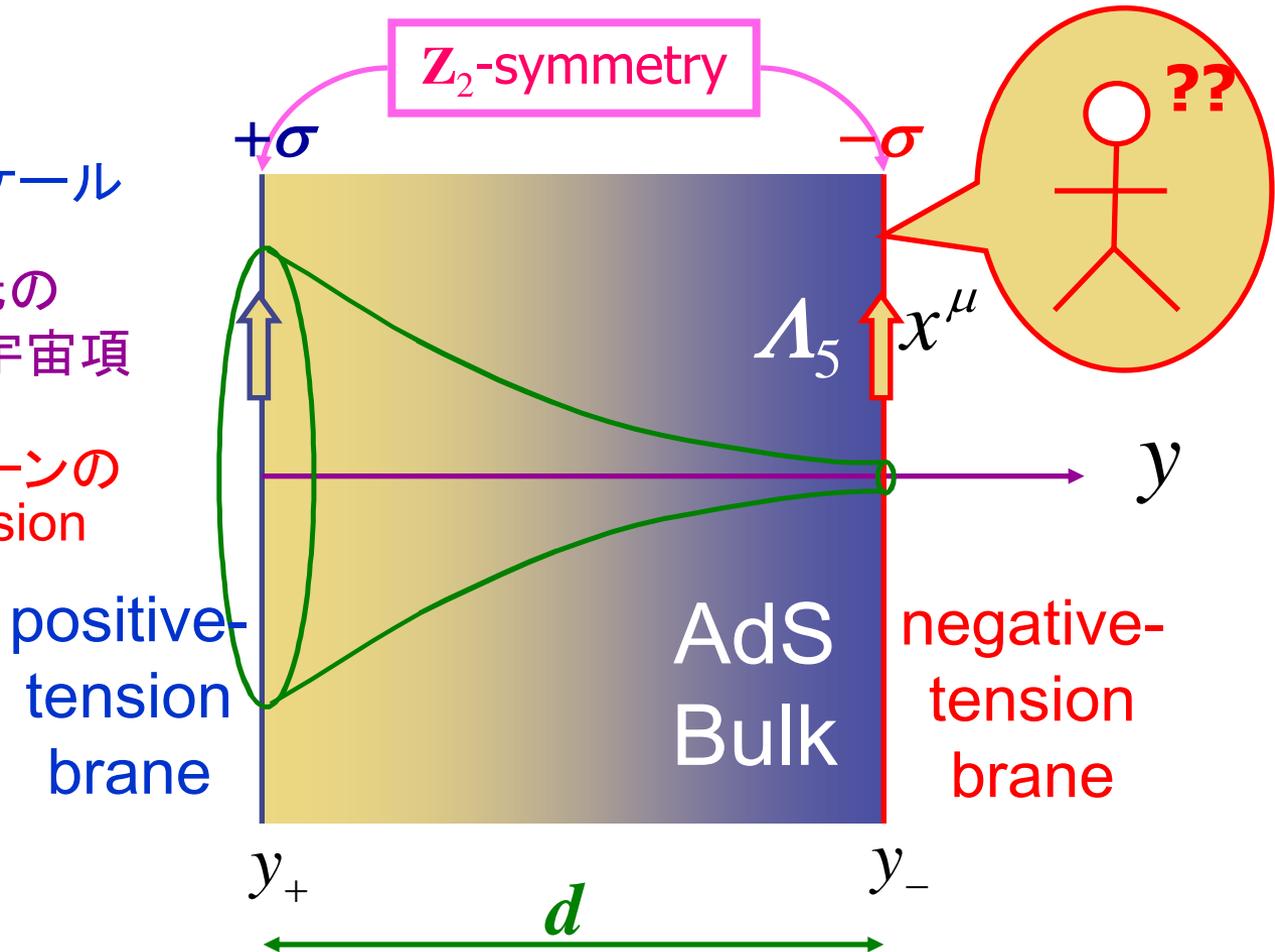
Randall Sundrum I model (1999)

$$ds^2 = dy^2 + e^{-2y/l} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)$$

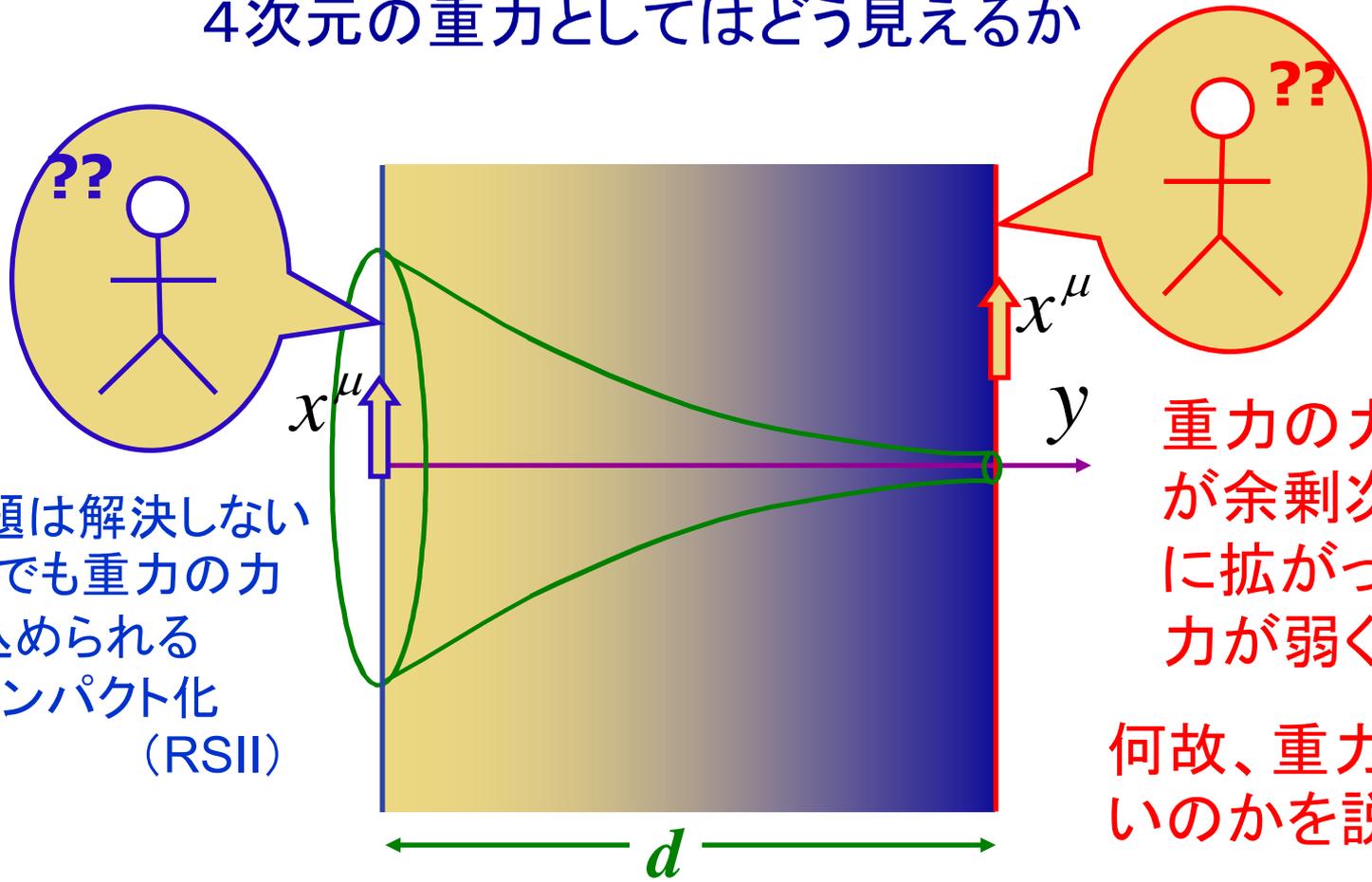
$l$ : AdS 曲率スケール

$$\Lambda_5 = -\frac{6}{l^2} \text{ 5次元の負の宇宙項}$$

$$\sigma = \frac{3}{4\pi G_5 l} \text{ ブレーンの tension}$$



# 4次元の重力としてはどう見えるか



階層性問題は解決しないが、 $d \rightarrow \infty$ でも重力の力線が閉じ込められる  
 ⇒新しいコンパクト化 (RSII)

重力の力線が余剰次元に広がって重力が弱くなる

何故、重力が弱いのかを説明

positive tension brane に住む場合

$$M_{pl}^2 = (1 - e^{-2d/\ell}) M_5^3 \ell$$

negative tension brane に住む場合

$$M_{pl}^2 = (e^{2d/\ell} - 1) M_5^3 \ell$$

$(10^{19} \text{GeV})^2$ 
 $(\text{TeV})^2$

$d \sim 40$  で階層性問題を解決

# RSII braneworld における重力と宇宙論

## ◆ 何故 RSII modelが盛んに研究されてきたのか?

通常、コンパクト化すると4次元の有効理論としてはコンパクト化のサイズに対応したmassless scalarの自由度が現れる。**有害(第5の力)**

$$\delta g_{\mu\nu} \propto \square^{-1} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)$$

この係数は4次元一般相対論では1/2だが、余分なscalar場の自由度があると1/2からずれる

current bound:  $\text{ズレ} < 10^{-5}$

無害にするため、

コンパクト化のサイズを固定 (stabilization)するメカニズムを加える

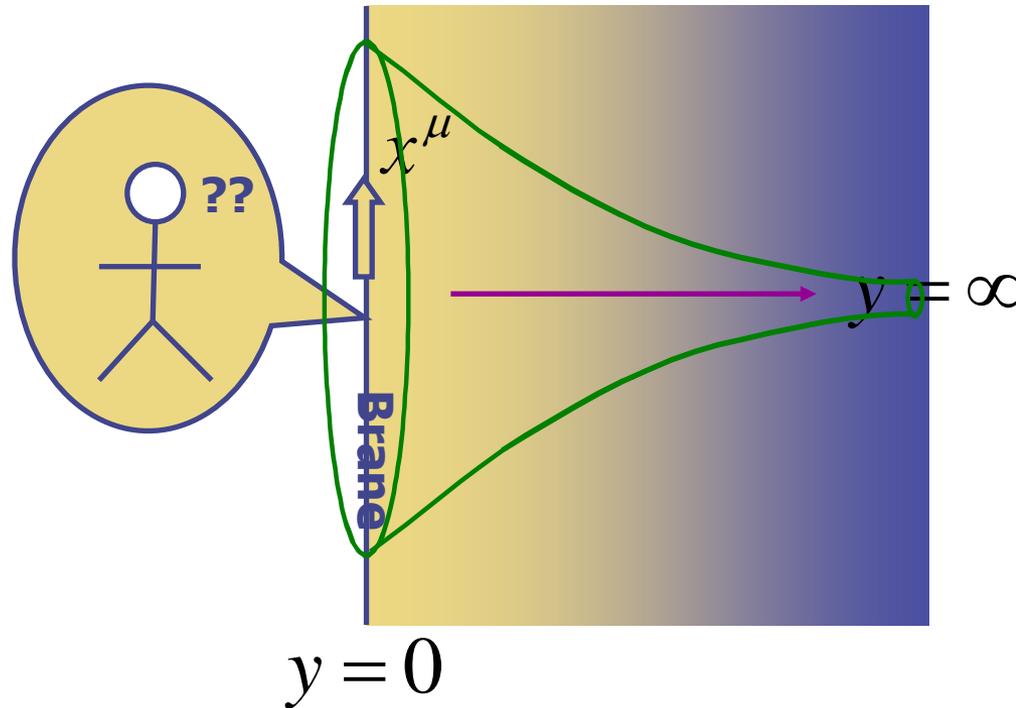
⇒ massiveになり短距離力になるため無害

湯川型のポテンシャル  $\frac{1}{r} e^{-mr}$

しかし、(mass scale)<sup>-1</sup> ~ (compact化のサイズ) 以上では影響がほとんどない。  
逆に、そのサイズ以下ではstabilizationのメカニズムに依存

一方、

RSIIではwarped geometryの効果でeffectiveにコンパクト化が実現されている。



Stabilizationを必要としないため、逆に重力がnon-trivial!

## ◆ 1999年秋

- Effective Einstein eq.  
Shiromizu Maeda & Sasaki (2000)
- RSII (infinite extra-dimension)  
における長波長での補正  
 $1/r^3$ の補正項を正しく求めた  
Garriga & Tanaka (2000)

弱い重力の近似では4D GRからのずれは小さいが、BH解は見つかっていない。

## ◆ 2001年夏

- Black holeの古典的蒸発  
(AdS/CFT対応)  
Tanaka (2003), Emparan et al (2002)



Newton institute



Jaume Garrigaの家族と共に(2001)

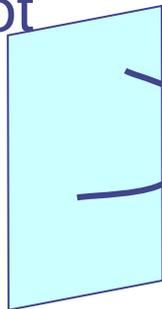
# AdS/CFT correspondence

( Maldacena ('98) )

( Hawking, Hertog, Reall ('00) )

String snapshot

ブレーン

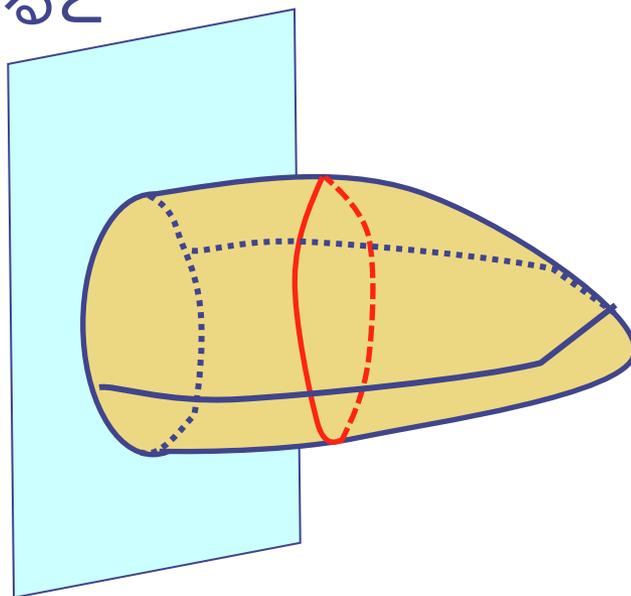


ブレーンに局在したゲージ場



バルクを飛ぶグラビトン

時間座標も加えると



“4次元のゲージ場の理論” ~ “5次元重力理論”

# Classical black hole evaporation conjecture

(T.T. gr-qc/0203082)

(Emparan et.al. hep-th/0206155)

4D Einstein+CFT  
with the lowest order  
quantum correction

AdS/CFT  
correspondence  
  
equivalent

Classical 5D  
dynamics of  
RS-II model

4D BH with CFT

$$\left( \begin{array}{l} \text{number of} \\ \text{field of CFT} \end{array} \right) \approx \frac{\ell^2}{\kappa_4^2}$$

  
equivalent

5D BH on brane

Hawking radiation in  
4D Einstein+CFT  
picture

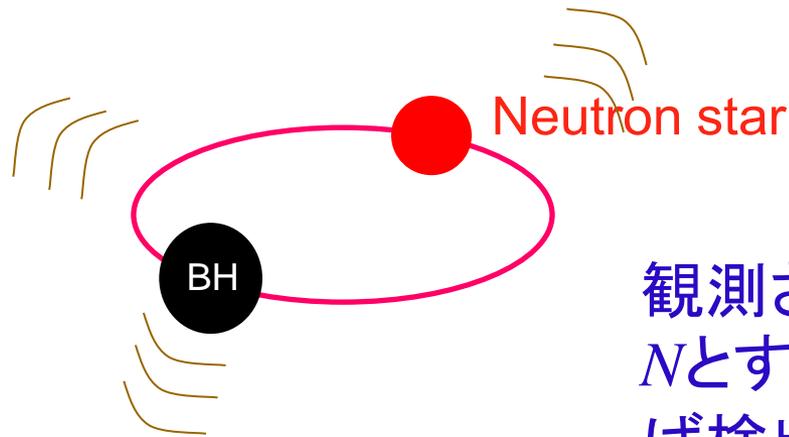
  
equivalent

Classical  
evaporation  
of 5D BH

## Time scale of BH evaporation

$$\tau = \left( \frac{M}{M_{Solar}} \right)^3 \left( \frac{1\text{mm}}{\ell} \right)^2 \times 1\text{year}$$

$$\frac{\dot{M}}{M} \approx \left( \text{Number of species} \right) \times \frac{1}{G_N^2 M^3} \approx \frac{\ell^2}{(G_N M)^3}$$



観測された重力波の振動回数を  $N$  とすると  $1/N$  程度の mass を失えば検出可能。

LISA-  $1.4M_{\odot}\text{NS}+3M_{\odot}\text{BH}$ :  $\ell < 0.01\text{mm}$ ?

$1.4M_{\odot}\text{NS}$  が pulsar で PSR1913+16 程度の精度で観測されたとすると  
 $\ell < 10^{-4}\text{mm}$ ?

# Dvali-Gabadadze-Porrati model

(Phys. Lett. B485, 208 (2000))

- 4次元のEinstein-Hilbert作用を加えたbraneworldのモデル

$$S = M_5^3 \int d^5x \sqrt{g} R + \int d^4x \sqrt{g^{(4)}} (M_4^2 R^{(4)} + L_{matt})$$

$$M_5^3 = M_4^2 / 2r_c$$

Critical length scaleが存在

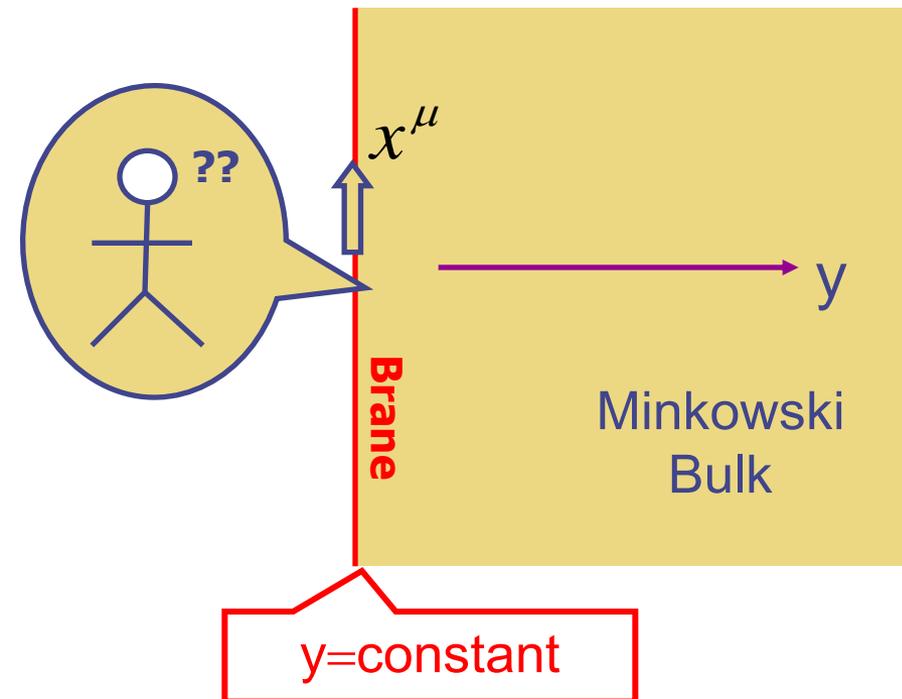
- Bulkは無限に広がっているが、 $r < r_c$ では4次元の項が効いて重力は4次元元的になる。逆に、長波長では5次元元的。

- 線形解析からは4次元のEinstein gravityではなく $\omega = 0$ のBrans-Dicke理論のようにふるまう。

即ち、光の曲がり角が25%小さい。

- ところが、非線形効果が効いて、Einstein gravityからのずれが小さくとどまるという不思議な性質がある。

- *Self-acceleration* 解の存在



# DGPモデルにおける重力の補正

## Weakly non-linearでの摂動の方程式

(Tanaka, Phys.Rev.D69 024001('04))

$$\star Dh_{\mu\nu} \approx 2M_4^{-2} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} T \right) + \frac{1}{r_c} \gamma_{\mu\nu} \square \hat{\xi}^5$$

$$D \equiv -\square + r_c^{-1} \sqrt{-\square}$$

$\hat{\xi}^5$  brane bendingの自由度

この係数が小さい為に弱い重力源でも**非線形項**が重要になる

$$\left( \frac{3}{r_c} \right) \square \hat{\xi}^5 \approx M_4^{-2} T + \underbrace{(\gamma^{\mu\nu} \gamma^{\rho\sigma} - \gamma^{\mu\rho} \gamma^{\nu\sigma})}_{\text{non-linear terms}} \hat{\xi}^5_{,\mu\nu} \hat{\xi}^5_{,\rho\sigma}$$

この式を線形化して★の式に代入すると

$$Dh_{\mu\nu} \approx 2M_4^{-2} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \gamma_{\mu\nu} T \right)$$

非線形項が効くと  $\hat{\xi}^5$  が★の式の中で無視できて短距離では4D GRが再現される

BHやNSのclose binaryのような強い重力の系では4D GRが良い近似なのか？  
BH解はKerr解に似ているのか？

# まとめ

- 宇宙項問題～二つのdarkな成分
  - ⇒ exoticな重力理論（Weinbergのno-go theorem）
- 重力波天文学の幕開けは近い。
  - ブラックホールを含む系からの重力波は強い重力における重力理論の変更(IR modification)をプローブすると期待されている。
  - 一般相対論に基づく理論的な重力波の波形予測の進展
- Exoticな重力理論における非線形重力に関しては理論的にもわかっていないことが多い。
  - ブレーンワールドにおけるブラックホール解
- 加速器でのブラックホール生成？
- ブラックホールが見えるようになってくる将来に備えて、ブラックホールから宇宙論を考えるために、理論的に解かれなくてはならない課題はまだたくさんある。