量子エンタングルメントとゲージ/重力対応

西岡　辰磨 (京大基研)

2022 年 1 月 19 日

第 15 回湯川記念財団・木村利栄理論物理学賞受賞記念講演

目次

目次

ブラックホールの物理

ブラックホールとは何か？

- 重力場が強すぎるため、光すら抜け出すことができない領域
- 実験的：この宇宙に多数存在!

  EHT による直接観測 (2019)
- 理論的：アインシュタイン方程式の解

  量子重力構築への重要な手がかり

[Event Horizon Telescope]

ブラックホールの熱力学

熱力学

- 第零法則：
  熱平衡状態で
  温度 T は一定

- 第一法則：
  エネルギー保存則

$$\mathrm{d}E = T\,\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V$$

- 第二法則：
  エントロピー増大則

$$\mathrm{d}S \geq 0$$

ブラックホール

- 表面重力 κ は一定

$$T = \frac{\kappa}{2\pi}$$

- ブラックホールエントロピー

$$S = \frac{A}{4G_N}$$

(A：ホライズンの面積)

- 面積増大則

$$\mathrm{d}A \geq 0$$

ブラックホールエントロピーの解釈?

- 重力理論：ブラックホールエントロピー [Bekenstein 72, Hawking 75]

$$S_{\mathrm{BH}} = \frac{A}{4G_N} , \qquad A : \text{ホライズンの面積}$$

- 統計力学：Boltzmann エントロピー

$$S = k_B \log W , \qquad W : \text{微視的状態数}$$

- 情報理論：Shannon エントロピー [Shannon 48]

$$H = -\sum_i p(x_i) \log p(x_i) , \qquad \{p(x_i)\} : \text{確率分布}$$

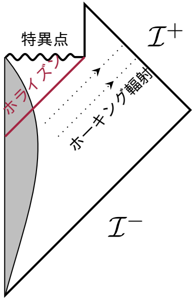
ブラックホールエントロピーは統計力学的
および情報理論的な解釈を持つか?

ブラックホールエントロピーの謎

- 体積ではなく面積に比例

  ⇒ 重力の自由度はホライズンに局在?

  (ホログラフィー原理 ['t Hooft 93, Susskind 94])



- 量子効果 (ホーキング輻射) によりエントロピーは減少し、蒸発後は始状態に（ほとんど）依存しない: [Hawking 76]

$$\rho_{\text{純粋}} \xrightarrow[\text{蒸発過程}]{} \rho_{\text{混合}}$$

⇒ ユニタリティーと矛盾! （情報喪失問題）

ブラックホールの理解には内部状態を記述する微視的理論が必要

いくつかのアプローチ

- 超弦理論（D ブレーン）によるブラックホールの微視的な構成
  [Strominger-Vafa 96, · · ·]

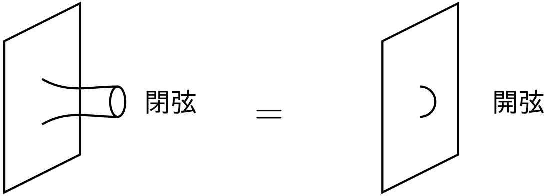
- ホログラフィー原理（ゲージ/重力対応）を通して対応する場の量子論による理解 [Maldacena 97, Witten 98, · · ·]

- 非摂動効果（ワームホール解）を取り入れた重力理論の解析
  [Pennington 19, Pennington-Shenker-Stanford-Yang 19, Almheiri-Engelhardt-Marolf-Maxfield 19, Almheiri-Mahajan-Maldacena-Zhao 19, Almheiri-Hartman-Maldacena-Shaghoulian-Tajdini 19, · · ·]

ホログラフィー原理（ゲージ/重力対応）

ある時空 $\mathcal{M}$ 上の （量子）重力理論	$=$	境界 $\partial\mathcal{M}$ 上の 場の量子論

例：超弦理論での D ブレーンの二つの見方：



重力理論　　　　ゲージ理論

ホログラフィー原理の具体例：AdS/CFT 対応

AdS/CFT 対応 [Maldacena 97]

$(d+1)$ 次元 AdS 時空上の重力理論

||

d 次元（ラージ N）共形場理論

- GKP-W 関係式 $e^{-I_{\text{AdS}}[\phi_0]} = \langle e^{\int \phi_0 \mathcal{O}} \rangle_{\text{CFT}}$ を用いて様々な物理量の比較が可能!
- AdS ブラックホール = 有限温度の CFT

  BH エントロピーは CFT の熱力学エントロピーとして理解できる [Witten 98]

$$S_{\text{AdS BH}} = S_{\text{CFT, therm}}$$

境界上の共形場理論（CFT）

[*Circle limit III*, Escher]

反ド・ジッター (AdS) 時空上の重力理論

より現実的なゲージ/重力対応?

- AdS 時空 $\rightarrow$ 負の宇宙項を持つ
- 我々の宇宙 $\rightarrow$ （ほぼ）平坦時空 $\rightarrow$ AdS/CFT 対応が使えない!

しかし、4 次元の漸近平坦な極限（ゼロ温度）ブラックホールのホライズン近傍は普遍的な構造を持つ [Kunduri-Lucietti-Reall 07]

$$\mathrm{d}s^2 = \Gamma(\theta)\left[-r^2\,\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{r^2} + \alpha(\theta)\,\mathrm{d}\theta^2\right] + \gamma(\theta)\,(\mathrm{d}\phi + k\,r\,\mathrm{d}t)^2$$

極限ブラックホール/CFT 対応 [Hartman-Murata-TN-Strominger 08, Compere-Murata-TN 08]

この計量の上の量子重力はカイラルな 2 次元 CFT と双対である

漸近対称性

漸近対称性

計量の空間無限遠付近に適切な「境界条件」を課して、その条件を満たす一般座標変換の一部

- $\zeta \in$ 漸近対称性に対して保存電荷(生成子)Q_ζ が存在(Noether の定理)
- 多くの場合、漸近対称性 $=$ 計量の対称性
- 非自明な例:[Brown-Henneaux 86]

  AdS_3 時空の漸近対称性 $=$ Virasoro 対称性

  $\Rightarrow$ $\mathrm{AdS}_3/\mathrm{CFT}_2$ 対応を示唆!

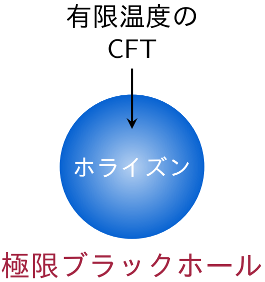
ゲージ対称性の生成子の優れた解説書

極限ブラックホール/CFT 対応

- 極限ブラックホールのホライズン近傍は古典的には $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{SL}(2, R)$ 対称性を持つ
- 漸近的にホライズン近傍に近い計量を考えると「漸近対称性」として中心電荷

$$c_L = 3k \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \sqrt{\Gamma(\theta)\, \alpha(\theta)\, \gamma(\theta)}$$

の（カイラルな）Virasoro 対称性が表れる



極限ブラックホールのエントロピーは
双対な CFT の統計的エントロピーとして説明できる!

$$S_{\text{Extreme BH}} = \frac{\pi^2}{3}\, c_L\, T_L = S_{\text{CFT, therm}} \qquad \left(T_L = \frac{1}{2\pi k} \right)$$

目次

量子エンタングルメント

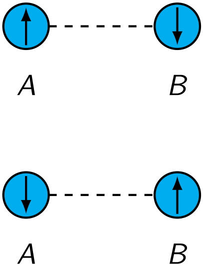
- 古典論：系は一つ状態（決定論的）
- 量子論：系は複数の状態の重ね合わせ（確率論的）
    - 特に量子系が二つの部分系からなる場合

$$|\psi\rangle = \sum_i \sqrt{p_i}\, |i\rangle_A \otimes |\tilde{i}\rangle_B \ , \quad \left(\sum_i p_i = 1\right)$$

系 A の状態に応じて系 B の状態は異なる（量子相関）

    - 例：二準位系（EPR/Bell ペア）

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|\uparrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B \right]$$



状態 $|\psi\rangle$ の量子相関の「強さ」を定量化できるか？

部分系 A のエンタングルメント・エントロピー

密度行列 ρ_{tot} で記述される量子系 $\mathcal{H}_{\mathrm{tot}} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ に対して

$$S_A \equiv -\mathrm{tr}_A \left[\rho_A \log \rho_A\right] \ , \qquad \rho_A \equiv \mathrm{tr}_B \left[\rho_{\mathrm{tot}}\right]$$

一般に純粋状態 $\rho_{\mathrm{tot}} = |\psi\rangle\langle\psi|, \ |\psi\rangle = \sum_i \sqrt{p_i}\, |i\rangle_A \otimes |\tilde{i}\rangle_B$ の場合

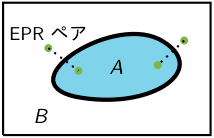
$$S_A = -\sum_i p_i \log p_i$$

S_A は確率分布 $\{p_i\}$ の Shannon エントロピーと一致する

場の量子論におけるエンタングルメント

- 場の量子論では時間一定面を二つの部分系に分けて考える

- S_A は領域 A の形に依存する



時間一定面

エンタングルメント エントロピー ＝ 境界 ∂A をまたぐ“大域的な相関”

- d 次元場の量子論の場合：(ϵ: 紫外カットオフ)

$$S_A = c_{d-2} \underbrace{\frac{\mathrm{Area}(\partial A)}{\epsilon^{d-2}}}_{\text{面積則}} + c_{d-4} \frac{\ell^{d-4}}{\epsilon^{d-4}} + \cdots \qquad (\ell : \text{系 } A \text{ のサイズ})$$

場の量子論が重力双対を持つとき、エンタングルメント・エントロピーはどのように計算されるのか？

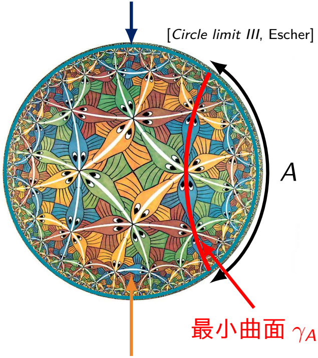
ホログラフィックエンタングルメント・エントロピー

重力双対を持つ場の量子論では次が成立：

笠-高柳公式 [Ryu-Takayanagi 06]

$$S_A = \frac{\mathrm{Area}(\gamma_A)}{4G_N}$$

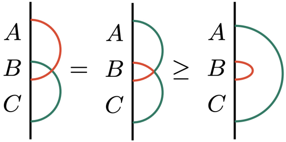
- ブラックホールエントロピーの一般化
- AdS/CFT 対応を通して強結合場の量子論のエンタングルメント・エントロピーが計算できる
- 情報と幾何を結ぶ式 $\to$ 時空の量子化を示唆!



ホログラフィック公式の検証

- 強劣加法性の幾何的証明 [Headrick-Takayanagi 07, Headrick 13, Wall 14]

$$S_{A\cup B}+S_{B\cup C}\geq S_{A\cup B\cup C}+S_B$$



- CFT の普遍項の再現

$$S_A=c_{d-2}\frac{\mathrm{Area}(\partial A)}{\epsilon^{d-2}}+\cdots+\begin{cases}(-1)^{\frac{d}{2}+1}\,A\,\log\frac{\ell}{\epsilon}+(\text{有限項}) & d:\text{偶}\\ (-1)^{\frac{d-1}{2}}\,F & d:\text{奇}\end{cases}$$

  - A, F は紫外カットオフの選び方に依存しない物理的な量（普遍項）
  - 特に A は（A 型の）共形アノマリーの中心電荷
  - Einstein 重力の場合は

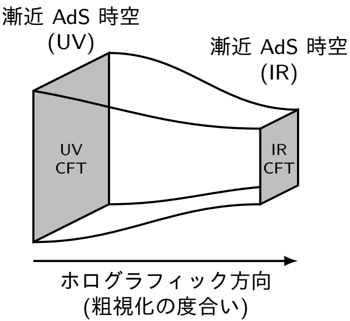
$$A=\frac{L^{d-1}}{2G_N}\frac{\pi^{\frac{d}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)},\qquad F=\frac{L^{d-1}}{4G_N}\frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\qquad (L:\text{AdS 半径})$$

くりこみ群と $\mathcal{C}$-定理

- ホログラフィックくりこみ群：

  二つの漸近 AdS 時空を繋ぐ重力解

$$L_{\mathrm{UV}} \geq L_{\mathrm{IR}}$$



ホログラフィック $\mathcal{C}$-定理 [Myers-Sinha 10]

重力双対をもつ d 次元場の量子論では次が成立：

$$\tilde{F}_{\mathrm{UV}} \geq \tilde{F}_{\mathrm{IR}}\ , \qquad \tilde{F} \equiv \begin{cases} A & d: 偶 \\ F & d: 奇 \end{cases}$$

この主張は一般の場の量子論でも成立するか？

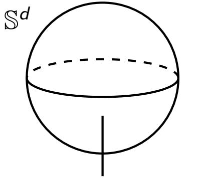
- $d = 2$: c-定理 [Zamolodchikov 86], $d = 4$: a-定理 [Komargodski-Schwimmer 11] は証明済み
- 偶数次元では A-定理予想に帰着

奇数次元の $\mathcal{C}$-定理：F-定理

- d: 奇数の場合は以下が予想されていた

F-定理 [Jafferis-Klebanov-Pufu-Safdi 11, Klebanov-Pufu-Safdi 11]

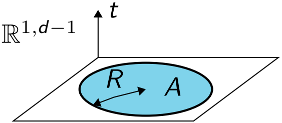
$$F_{\mathrm{UV}}[\mathbb{S}^d] \geq F_{\mathrm{IR}}[\mathbb{S}^d]\,, \qquad F[\mathbb{S}^d] \equiv -\log Z[\mathbb{S}^d]$$



- 理論が CFT で A が球状領域の場合：

[Casini-Huerta-Myers 11]

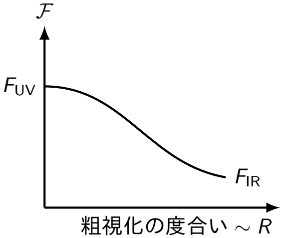
$$F[\mathbb{S}^d] \equiv -\log Z[\mathbb{S}^d] = F \qquad (d : \text{奇})$$



球面分配関数 $Z[\mathbb{S}^d]$ とエンタングルメント・エントロピーを結びつける驚くべき関係式!

エンタングルメントと 3 次元の F-定理

- 中心電荷 A や F は理論の「有効自由度」とみなせる
- 3 次元では S_A の 強劣加法性とローレンツ不変性から F-定理が証明可能! [Casini et al 12, 17]



- 具体的には半径 R の円板のエンタングルメント・エントロピー $S(R)$ を使って以下の定理が示された

3 次元の F-定理

くりこまれたエンタングルメント・エントロピー $\mathcal{F}(R) = (R\partial_R - 1)\, S(R)$ が次の性質を満たす：

$$\mathcal{F}(R)|_{\mathrm{CFT}} = F[\mathbb{S}^d]|_{\mathrm{CFT}}\ , \qquad \mathcal{F}'(R) \le 0$$

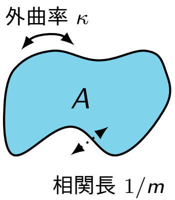
質量ギャップを持つ 3 次元系の F-定理の検証

F-定理を検証するため質量ギャップ m を持つ系を考える

- S_A は $m \gg 1$ で次の形をとる
  [Klebanov-TN-Pufu-Safdi 12]

$$S_A = \alpha \frac{\ell_{\partial A}}{\epsilon} + \beta\, m\, \ell_{\partial A} - \gamma - c_1 \frac{1}{m} \oint_{\partial A} \mathrm{d}s\, \kappa^2 + O(1/m^3)$$

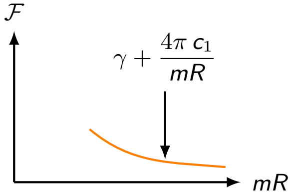
（自由場や重力双対を持つ場の量子論では $c_1 > 0$）



- 特に A が半径 R の円板の場合
  $(\ell_{\partial A} = 2\pi R, \kappa = 1/R)$

$$\mathcal{F}(R) = \gamma + \frac{4\pi\, c_1}{mR} + O(1/m^3)$$

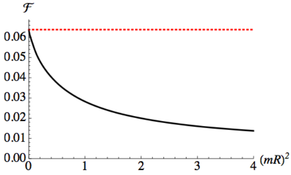
確かに IR 領域 $(mR \gg 1)$ で単調減少する!



F-定理と c-定理の違い

- 一方 UV 領域 ($mR \ll 1$) では自由場でも解析解が知られていない

- 自由スカラー場の場合に $\mathcal{F}$ を数値的に調べると UV 領域でも単調減少している



- しかし $mR = 0$ 周り（UV 固定点）で $\mathcal{F}$ は定常ではない

$$\mathcal{F}'|_{mR=0} \neq 0$$

- この性質は固定点で常に定常な 2 次元の c-定理とは大きく異なる

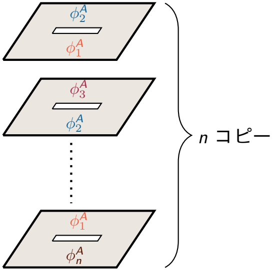
[Klebanov-TN-Pufu-Safdi 12, TN 14]

- 3 次元でもくりこみ群の固定点で定常な関数 $\mathcal{F}$ が構成できるかどうかは分かっていない

目次

経路積分形式を用いると

$$\mathrm{tr}_A\left[\rho_A^n\right] = \frac{1}{(Z_1)^n}$$



$$= \frac{Z_n}{(Z_1)^n}$$

Rényi エントロピー

$$S_A^{(n)} \equiv \frac{1}{1-n}\log\frac{Z_n}{(Z_1)^n}$$

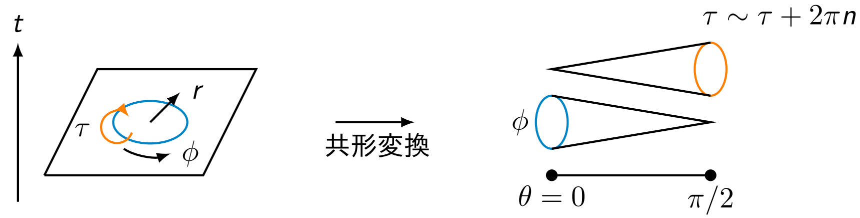
- $n \to 1$ 極限で

$$S_A = \lim_{n\to 1} S_A^{(n)}$$

Z_n: 領域 A にカットを持つ
n 重被覆空間上の分配関数

分配関数 Z_n の計算に帰着!

共形変換 [Casini-Huerta-Myers 10]



$\mathbb{R}^3$

$$ds^2 = dt^2 + dr^2 + r^2\, d\phi^2$$

$\mathbb{S}^3$

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\tau^2 + \cos^2\theta\, d\phi^2$$

3 次元 CFT, $A =$ 円板

$Z_n[\mathbb{R}^3] = Z[\mathbb{S}^3_n]$,　　$\mathbb{S}^3_n$: $\mathbb{S}^3$の n 重被覆空間

CFT の Rényi エントロピー

3 次元 CFT で円板領域の Rényi エントロピー

$$S_n = \frac{1}{1-n} \log \frac{Z[\mathbb{S}^3_n]}{(Z[\mathbb{S}^3])^n}$$

- 自由場の場合、$Z[\mathbb{S}^3_n]$ は 1-ループ計算で厳密に得られる
  [Klebanov-Pufu-Sachdev-Safdi 11]

- 超対称ゲージ理論の場合は $Z[\mathbb{S}^3]$ $(n = 1)$ が局所化の方法で厳密計算できる [Kapstin-Willet-Yaakov 09, Jafferis, Hama-Hosomichi-Lee 10]

  $\Rightarrow$ F-定理の定量的検証 [Jafferis-Klebanov-Pufu-Safdi 11]

超対称 Rényi エントロピー

素朴な疑問

超対称ゲージ理論の場合、円板領域の
Rényi エントロピーも厳密に計算出来るか？

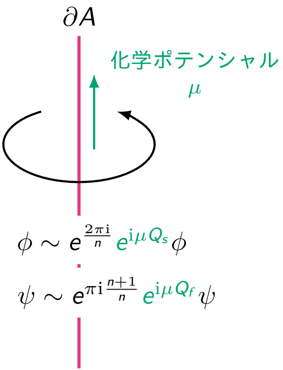
⇒ そのままでは超対称性が破れる
(ボソンとフェルミオンの周期が合わない)

しかし超対称性を保つような変形を行えば可能!

超対称 Rényi エントロピー [TN-Yaakov 13]

$$S_n^{\mathrm{susy}} = \frac{1}{1-n} \log \left| \frac{Z_n^{\mathrm{susy}}}{(Z_1^{\mathrm{susy}})^n} \right|$$

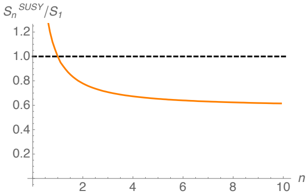
Z_n^{susy}: 化学ポテンシャル入りの分配関数



化学ポテンシャルを入れて
ボソンとフェルミオンの
周期を合わせることができ
る

超対称 Rényi エントロピーの性質

- 強結合ゲージ理論でも厳密計算できる
- 通常の Rényi エントロピーと定性的に似た振る舞いをする
- ラージ N 極限で簡単な n 依存性を示す



ラージ N 極限

$$S_n^{\text{susy}} = \frac{3n+1}{4n} S_1$$

- 双対な（超対称）重力解が存在し、CFT のラージ N 極限での計算と一致する [TN 14]

目次

- より一般的な場合の $\mathcal{C}$-定理の提唱 [Kobayashi-TN-Sato-Watanabe 18, TN-Sato 21]

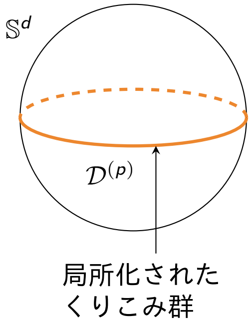
一般化された $\mathcal{C}$-定理予想

p 次元の欠損演算子 $\mathcal{D}^{(p)}$ について

$$\tilde{D} \equiv \sin\left(\frac{\pi p}{2}\right) \log |\langle\, \mathcal{D}^{(p)} \,\rangle|$$

は $\mathcal{D}^{(p)}$ 上に局所化されたくりこみ群の下で単調減少する：

$$\tilde{D}_{\mathrm{UV}} \geq \tilde{D}_{\mathrm{IR}}$$



$p = 1$ [Cuomo-Komargodski-Raviv-Moshe 21], $p = 2$ [Jensen-O'Bannon 15] は証明された

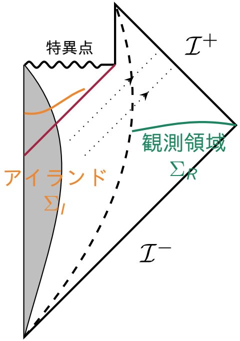
Q. 一般の p でも証明できるか？

ブラックホール情報喪失問題とアイランド公式

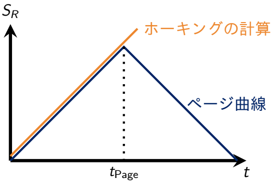
- ゲージ/重力対応における笠-高柳公式を拡張した「アイランド公式」[Penington 19, Almheiriet al. 19, ⋯]:

$$S_R = \min_{\Sigma_I}\left\{\operatorname*{ext}_{\Sigma_I}\left[\frac{\mathrm{Area}(\partial\Sigma_I)}{4G_N} + \underbrace{S_{\mathrm{mat}}(\Sigma_R \cup \Sigma_I)}_{\text{物質場の寄与}}\right]\right\}$$

Σ_I: アイランド領域



- 非摂動効果（ワームホール解）を取りこむ
- ユニタリー性が回復し、ページ曲線を再現!

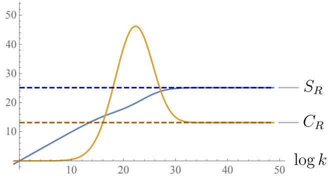


アイランドとエンタングルメント比熱

熱・統計力学	量子情報量
逆温度	レプリカ変数：$\beta = n$
エントロピー	Rényi エントロピー
比熱	エンタングルメント比熱 [Yao-Qi 10, Nakaguchi-TN 16]

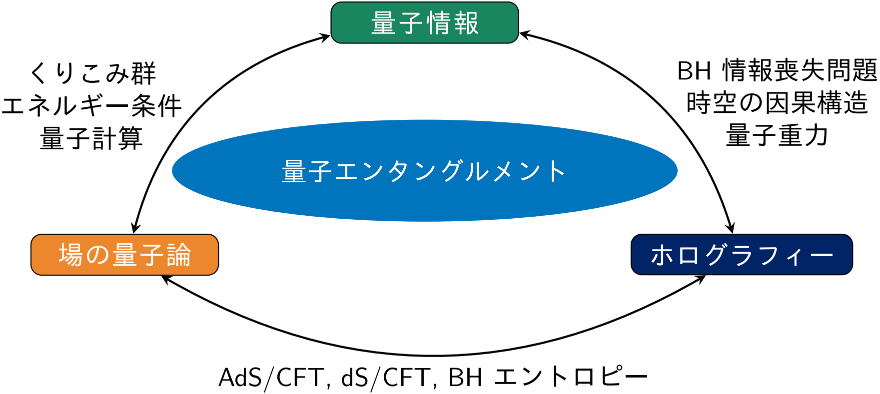
エンタングルメント比熱の新たな応用：[Kawabata-TN-Okuyama-Watanabe 21]

ホーキング輻射のエンタングルメント比熱は
ブラックホール解とワームホール解の間の
相転移を検知する!



Q. 重力双対でのエンタングルメント比熱の幾何学的表現？

今後の展望


量子情報
くりこみ群
エネルギー条件
量子計算
BH 情報喪失問題
時空の因果構造
量子重力
量子エンタングルメント
場の量子論
ホログラフィー
AdS/CFT, dS/CFT, BH エントロピー

ご清聴ありがとうございました。