グラディエントフローによる
エネルギー運動量テンソル
—場の量子論における対称性と普遍性—

鈴木　博

九州大学

第 11 回湯川財団・木村利栄理論物理学賞・記念講演

謝辞

- 私のささやかな研究を、このような栄誉ある賞により評価して頂き、本当に感謝しております。
- これを今後の研究と教育の励みといたします。
- これまでお世話になりました先生方、受賞関連研究の共同研究者の方々（浅川正之、江尻信司、初田哲男、稗田健治、入谷匠、板垣翔太、伊藤悦子、石見涼、金谷和至、森川億人、笠井彩、北沢正清、牧野広樹、下条昂礼、白銀瑞樹、杉野文彦、鈴木遊、谷口裕介、梅田貴士、若林直輝の各氏）、また日頃支えてくれている家族に、改めて感謝したいと思います。

木村利栄先生

略歴など

- 東京都立大学理学部物理学科卒（指導教官は南方久和先生）
- 広島大学大学院理学研究科物理学専攻入学（1987 年）
- 竹原の理論物理学研究所
- 重力理論部門（木村利栄先生の講座）
- 在学中、佐々木節先生には Wald の輪講や共同研究で、藤川和男先生には指導教官として、特にお世話になった。
- 重力、時空、場の量子論といった言葉に惹かれてこの道に進んだ。
- 以来 30 年暗中模索であったが、最近やっと研究の仕方が分かってきた様にも思う。
- 今回、自分の原点のテーマに対してささやかでも貢献が出来たようで、本当に嬉しい。

対称性

- 対称性：物理系を不変に保つ変数の置き換え。
- 素粒子理論に出てくる場の理論は、高い対称性を持っているのがその特徴。
- ポアンカレ（ローレンツ、並進）対称性、ゲージ対称性、カイラル対称性、コンフォーマル対称性、超対称性、一般座標不変性...
- 例：ゲージ場 A_μ の作用積分、

$$S = \frac{1}{4g_0^2}\int d^4x\, F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}, \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu],$$

は、並進変換

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x+\xi),$$

のもとで不変。

ネーターの定理と Ward–高橋関係式

- 古典場に対して、対称性は保存カレントの存在を意味する。
- 並進対称性の場合には、エネルギー運動量テンソル（EMT）

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{g_0^2}\left(F_{\mu\rho}^a F_{\nu\rho}^a - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}^a F_{\rho\sigma}^a\right)$$

が保存する：

$$\partial_\mu T_{\mu\nu} = 0.$$

- 量子場の理論では、Ward–高橋 (WT) 関係式が保存則に対応する：

$$\langle \partial_\mu T_{\mu\nu}(x) A_\rho(y) \cdots \rangle = -\delta(y-x)\,\langle \partial_\nu A_\rho(y) \cdots \rangle + \cdots$$

- この関係式が理論の性質を特徴づける（エネルギー保存則、スケール変換測など）
- 一方、量子場の理論では、ネーターカレントは場の局所積である。

場の局所積としてのネーターカレント

- 場の局所積は一般に無限大：

$$\langle A_\mu(x)A_\nu(y)\rangle \sim \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{ip(x-y)}}{p^2} \overset{x\to y}{\to} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^2} \sim p^2.$$

- そこで、理論の自由度を有限にして定義する（正則化）。方法はユニークではない。例えば、次元正則化で

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{g_0^2}\left(F^a_{\mu\rho}F^a_{\nu\rho} - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}F^a_{\rho\sigma}F^a_{\rho\sigma}\right), \quad D = 4 - 2\epsilon.$$

- もしくは格子正則化で

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{g_0^2}\left(F^a_{\mu\rho}F^a_{\nu\rho} - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}F^a_{\rho\sigma}F^a_{\rho\sigma}\right),$$

ここで、格子上での場の強さは、例えば

$$2aF_{\mu\nu}(x) = U(x,\mu)U(x+a\hat{\mu},\nu)U(x+a\hat{\nu},\mu)^\dagger U(x,\nu)^\dagger - \text{h.c.},$$

と定義できる。

場の局所積としての EMT

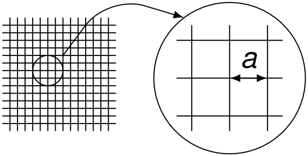
- 上の表式

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{g_0^2}\left(F^a_{\mu\rho}F^a_{\nu\rho} - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}F^a_{\rho\sigma}F^a_{\rho\sigma}\right),$$

は、見かけは同じでも、正則化によって物理的性質は全く異なる. . .

次元正則化 → 並進対称性を保ち、WT 関係式が成立する

格子正則化 → 並進対称性を保たず、WT 関係式が成立しない



- これに関連して、格子正則化では、EMT は完全にトレースレス、

$$T_{\mu\mu} = \frac{1}{g_0^2}\left(F^a_{\mu\rho}F^a_{\mu\rho} - \frac{1}{4}\delta_{\mu\mu}F^a_{\rho\sigma}F^a_{\rho\sigma}\right) \equiv 0, \quad \because \delta_{\mu\nu} = 4,$$

物理量としての EMT

- EMT など、一般に保存するネーターカレントは観測可能量であり、系を特徴づける重要な物理量である。
- EMT $T_{\mu\nu}$：エネルギー、（角）運動量、圧力、応力、粘性係数、比熱、くりこみ群関数...
- もちろん、重力の源である：

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}.$$

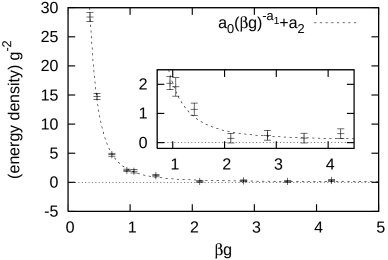
- 量子場の理論において、EMT を含む相関関数を計算することには非常に興味がある（いわゆる AdS/CFT 対応でも代表的な量）。

2 次元 $\mathcal{N} = (2,2)$ 超対称ヤン–ミルズ理論の真空エネルギー密度 $\mathcal{E}_0$ の測定

- ベキ零超対称性 Q を厳密に保つ格子正則化（杉野 (2004)）
- 金森–杉野–H.S. (2007):

$$\mathcal{E}_0 = \lim_{T\to 0} \langle \mathcal{H} \rangle_T = \lim_{T\to 0} \left\langle \frac{1}{2} Q \mathcal{J}_0^0 \right\rangle_T, \quad \mathcal{J}_0^0\text{: 超対称カレントの 0 成分.}$$

- 金森 (2009) $\mathcal{E}_0 = 0.09(9)\left({}^{+10}_{-8}\right) g^2$:

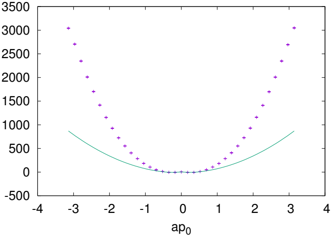


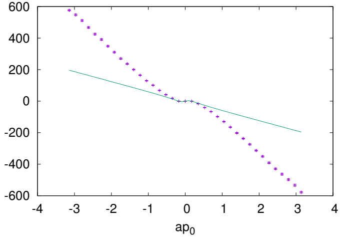
- この系では、超対称性が自発的に破れていないことを示唆する。

2次元 $\mathcal{N} = (2,2)$ ウェス–ズミノ模型の低エネルギーでの中心電荷 c の測定（ランダウ–ギンツブルグ模型）

- 超対称性や並進対称性を保つ非摂動論的定式化（加堂–H.S. (2009)）
- 鎌田–H.S. (2011)：超対称カレントの 2 点関数から c を測定。
- 森川–H.S.（準備中）：EMT の 2 点関数

$$\int d^2x\, e^{-ipx} \langle T_{zz}(x) T_{zz}(0) \rangle \to \frac{\pi c}{12} \frac{p_z^3}{p_{\bar{z}}}.$$





- $W = \Phi^3$ の場合、低エネルギー領域でのフィットから、
  $c = 1.061(36) \Leftrightarrow c = 1$

4 次元 $\mathcal{N}=1$ 超対称ヤン–ミルズ理論の格子定式化における EMT（H.S. (2012)）

- 格子正則化は並進対称性や超対称性を破る。
- 連続極限 $a \to 0$ で超対称 WT 関係式が回復するように、理論のパラメターの微調整が一般には必要
- これがなされたと仮定すると、我々は保存する超対称カレントを持っている：

$$S_\mu = -\mathcal{Z}_S \frac{1}{2g_0^2} \sigma_{\rho\sigma}\gamma_\mu \psi^a F_{\rho\sigma}^a + \mathcal{Z}_T \gamma_\nu \psi^a F_{\mu\nu}^a.$$

- 超対称カレントと EMT は超対称変換で結びついている（Ferrara–Zumino）。

$$\delta S_\mu = 2\gamma_\nu \xi T_{\mu\nu} + \cdots$$

この関係を格子上で使ってみる $\Rightarrow$ 保存する EMT の構成。
- 超対称でない理論での EMT は？（Fleming）

EMT の普遍的な表式？

- 次元正則化は並進対称性を保つため、素朴な表式、

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{g_0^2}\left(F^a_{\mu\rho}F^a_{\nu\rho} - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}F^a_{\rho\sigma}F^a_{\rho\sigma}\right)$$

  で OK。ただし、次元正則化は摂動論に準拠している。
- 格子正則化は並進対称性を保たないため、非自明な補正が必要：

$$T_{\mu\nu} = Z_1\frac{1}{g_0^2}\left(\sum_{\rho} F^a_{\mu\rho}F^a_{\nu\rho} - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}\sum_{\rho\sigma}F^a_{\rho\sigma}F^a_{\rho\sigma}\right) + Z_2\delta_{\mu\nu}\sum_{\rho\sigma}F^a_{\rho\sigma}F^a_{\rho\sigma} + Z_3\delta_{\mu\nu}\sum_{\rho}F^a_{\mu\rho}F^a_{\nu\rho}.$$

  ここで、定数 Z_i は格子作用や演算子の離散化に依存する。
- しかし、エネルギー運動量テンソルという物理量自体は、正則化によらない概念のはず ⇒ 普遍的な表式が得られないか？
- 物理は正則化（$\simeq$ 超高エネルギーの理論の構造）の詳細によらないはず（普遍性の考え）

グラディエントフロー

- グラディエントフロー (Narayanan–Neuberger (2006), Lüscher (2010)) という手法がこの問題に興味深いアプローチを与える。
- 裸のゲージ場 $A_\mu(x)$ を初期値

$$B_\mu(t=0,x) = A_\mu(x)$$

としフローさせた場 $B_\mu(t,x)$ を、仮想的な時間 t に沿った

$$\partial_t B_\mu^a(t,x) = -g_0^2 \frac{\delta S}{\delta B_\mu^a(t,x)} = D_\nu G_{\nu\mu}^a(t,x) = \Delta B_\mu^a(t,x) + \cdots, \quad t \geq 0$$

の時間発展で定義する。ここで、$D_\nu G_{\nu\mu} = \partial_\nu G_{\nu\mu} + [B_\nu, G_{\nu\mu}]$、

$$G_{\mu\nu}(t,x) = \partial_\mu B_\nu(t,x) - \partial_\nu B_\mu(t,x) + [B_\mu(t,x), B_\nu(t,x)].$$

- 一種の拡散方程式（拡散長 $x \sim \sqrt{8t}$）。$t \to$ 大 で場の配位が滑らかになっていく。

グラディエント・フローの驚くべき性質（Lüscher–Weisz (2011)）

- フローさせた場 $B_\mu(t,x)$ $(t>0)$ の任意の相関関数

$$\langle B_{\mu_1}(t_1,x_1)B_{\mu_2}(t_2,x_2)\cdots\rangle$$

は、元々のゲージ理論のパラメターのくりこみ

$$g_0^2=\mu^{2\epsilon}g^2Z, \qquad (\lambda_0=\lambda Z_3^{-1}),$$

の元で波動関数くりこみなしで有限になる。
- 上で、$x_i\to x_j$ として場の局所積を考えても、有限性は保たれる。
- これは摂動論の全次数で証明できる。証明自体は BRS 対称性を用いる技術的には複雑なもの。
- フローさせたゲージ場の局所積、例えば

$$G_{\mu\nu}^a(t,x)G_{\mu\nu}^a(t,x)$$

などは、全て自動的に正則化によらない有限な演算子となる。

フェルミオンフロー（Lüscher (2013)）

- フェルミオンに対しても同様に

$$\partial_t\chi(t,x) = \Delta\chi(t,x), \qquad \chi(t=0,x) = \psi(x),$$
$$\partial_t\bar{\chi}(t,x) = \bar{\chi}(t,x)\overleftarrow{\Delta}, \qquad \bar{\chi}(t=0,x) = \bar{\psi}(x),$$

ここで

$$\Delta = D_\mu D_\mu, \qquad D_\mu = \partial_\mu + B_\mu,$$
$$\overleftarrow{\Delta} = \overleftarrow{D}_\mu \overleftarrow{D}_\mu, \qquad \overleftarrow{D}_\mu \equiv \overleftarrow{\partial}_\mu - B_\mu.$$

- フローさせたフェルミオンは波動関数くりこみが必要：

$$\chi_R(t,x) = Z_\chi^{1/2}\chi(t,x), \qquad \bar{\chi}_R(t,x) = Z_\chi^{1/2}\bar{\chi}(t,x),$$
$$Z_\chi = 1 + \frac{g^2}{(4\pi)^2}C_2(R)3\frac{1}{\epsilon} + O(g^4).$$

- しかし、依然、$\chi_R(t,x)$ と $\bar{\chi}_R(t,x)$ の任意の局所積は、自動的に有限な演算子になる。

我々の戦略

- 次元正則化では、正しい EMT の表式を知っている！（ここで、ディラックフェルミオンの寄与も含めた。）

$$
\begin{aligned}
T_{\mu\nu} &= \frac{1}{g_0^2}\left(F^a_{\mu\rho}F^a_{\nu\rho} - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}F^a_{\rho\sigma}F^a_{\rho\sigma}\right) \\
&\quad + \frac{1}{4}\bar{\psi}\left(\gamma_\mu \overleftrightarrow{D}_\nu + \gamma_\nu \overleftrightarrow{D}_\mu\right)\psi(x) - \delta_{\mu\nu}\bar{\psi}(x)\left(\frac{1}{2}\overleftrightarrow{\not{D}}\, m_0\psi\right) - \mathrm{VEV}.
\end{aligned}
$$

- フローさせた場の局所積で、次元正則化のもとで上の表式に一致するものを構成する：

正則化によらないはず

フローさせた場の局所積

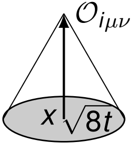
次元正則化 （例えば）格子正則化

正しい EMT 低エネルギー相関関数の計算など

- グラディエントフローによって、異なる正則化間の橋渡しをする

具体的にどうやるか？（小フロー時間展開）

- フローさせた場の局所積と元のゲージ場の局所積の関係は、一般に極めて複雑である。
- しかし、$t \to 0$ の極限では、両者の関係が簡単化する可能性がある。
- 小フロー時間展開（Lüscher–Weisz (2011)）：



$$\tilde{\mathcal{O}}_{i\mu\nu}(t,x) = \langle \tilde{\mathcal{O}}_{i\mu\nu}(t,x) \rangle \mathbb{1} + \sum_j \zeta_{ij}(t) \left[\mathcal{O}_{j\mu\nu}(x) - \mathrm{VEV} \right] + O(t).$$

- これを逆解きして、

$$\mathcal{O}_{i\mu\nu}(x) - \mathrm{VEV} = \lim_{t\to 0} \left\{ \sum_j \left(\zeta^{-1} \right)_{ij} (t) \left[\tilde{\mathcal{O}}_{j\mu\nu}(t,x) - \langle \tilde{\mathcal{O}}_{j\mu\nu}(t,x) \rangle \mathbb{1} \right] \right\}.$$

さらに、くりこみ群の議論から...

- つまり、もし係数 $\zeta_{ij}(t)$ の $t \to 0$ の振る舞いが分かれば、ゲージ場の局所積が引き出せる。
- 上式の局所積が全て裸のものとするならば、

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\right)_0 \zeta_{ij}(t) = 0,$$

であり、$\zeta_{ij}(t)$ は、running パラメターで表した時に、繰り込みスケール μ に依存しないことが言える。そこで、例えば、$\mu = 1/\sqrt{8t}$ と取ることができる:

$$\zeta_{ij}(t)\,[g, m; \mu] = \zeta_{ij}(t)\left[\bar{g}(1/\sqrt{8t}), \bar{m}(1/\sqrt{8t}); 1/\sqrt{8t}\right].$$

- $t \to 0$ では漸近的自由性より $\bar{g}(1/\sqrt{8t}) \to 0$ であり、$t \to 0$ での展開係数 $\zeta_{ij}(t)$ は、摂動論で評価できる。
- Wilson の演算子積展開（OPE）に類似

一般のベクトル型ゲージ理論での EMT

- 普遍的な表式（H.S. (2013), 牧野–H.S. (2014)）

$$
\begin{aligned}
T_{\mu\nu} = \lim_{t\to 0}\Big\{ & c_1(t) G^a_{\mu\rho}(t,x) G^a_{\nu\rho}(t,x) + \left[c_2(t) - \frac{1}{4} c_1(t) \right] \delta_{\mu\nu} G^a_{\rho\sigma}(t,x) G^a_{\rho\sigma}(t,x) \\
& + c_3(t) \mathring{\bar{\chi}}(t,x) \left(\gamma_\mu \overleftrightarrow{D}_\nu + \gamma_\nu \overleftrightarrow{D}_\mu \right) \mathring{\chi}(t,x) \\
& + \left[c_4(t) - 2c_3(t) \right] \delta_{\mu\nu} \mathring{\bar{\chi}}(t,x) \overleftrightarrow{\not{D}} \mathring{\chi}(t,x) + c_5'(t) \mathring{\bar{\chi}}(t,x) \mathring{\chi}(t,x) - \mathrm{VEV} \Big\},
\end{aligned}
$$

$$
c_1(t) = \frac{1}{\bar{g}^2} - b_0 \ln \pi - \frac{1}{(4\pi)^2} \left[\frac{7}{3} C_2(G) - \frac{3}{2} T(R) N_f \right],
$$

$$
c_2(t) = \frac{1}{8} \frac{1}{(4\pi)^2} \left[\frac{11}{3} C_2(G) + \frac{11}{3} T(R) N_f \right], \quad c_3(t) = \frac{1}{4} \left\{ 1 + \frac{\bar{g}^2}{(4\pi)^2} C_2(R) \left[\frac{3}{2} + \ln(432) \right] \right\},
$$

$$
c_4(t) = \frac{1}{8} d_0 \bar{g}^2, \qquad c_5'(t) = -\bar{m} \left\{ 1 + \frac{\bar{g}^2}{(4\pi)^2} C_2(R) \left[3 \ln \pi + \frac{7}{2} + \ln(432) \right] \right\}.
$$

ここで、$\bar{g} \equiv \bar{g}(1/\sqrt{8t})$ と $\bar{m} \equiv \bar{m}(1/\sqrt{8t})$ は MS スキームでの running パラメター
（$b_0 = \frac{1}{(4\pi)^2} \left[\frac{11}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} T(R) N_f \right]$、$d_0 = \frac{1}{(4\pi)^2} 6 C_2(R)$））

- 明白に有限な表式。閉じた形で求まるところが面白い。

Ringed フェルミオン場

- ここで、フェルミオン場のあらわな波動関数繰り込みを避けるため、以下の変数を導入した：

$$\mathring{\chi}(t,x) = \mathcal{C}\frac{\chi(t,x)}{\sqrt{t^2\left\langle\bar{\chi}(t,x)\overleftrightarrow{\not{D}}\chi(t,x)\right\rangle}} = \chi_R(t,x) + O(g^2),$$

  ここで

$$\mathcal{C} \equiv \sqrt{\frac{-2\dim(R)}{(4\pi)^2}}.$$

  $\mathring{\bar{\chi}}(t,x)$ も同様。

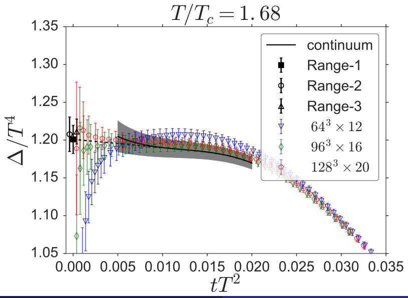
- 波動関数繰り込み因子 Z_χ が分子分母でキャンセルするため、$\mathring{\chi}(t,x)$ と $\mathring{\bar{\chi}}(t,x)$ の任意の局所積は繰り込まれた複合演算子になる。

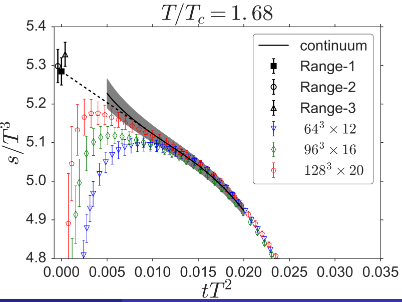
$SU(3)$ ヤン–ミルズ理論での EMT の 1 点関数

- FlowQCD Collaboration（浅川–初田–入谷–伊藤–北沢–H.S.)
- 有限温度での EMT の 1 点関数：トレースアノマリーとエントロピー密度：

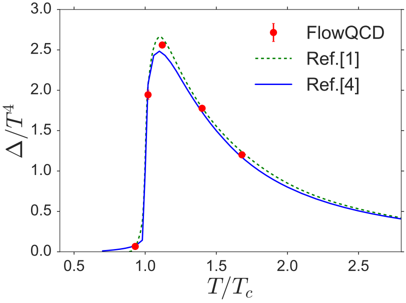
$$\langle \varepsilon - 3p \rangle = -\langle T_{\mu\mu} \rangle ,$$
$$\langle \varepsilon + p \rangle = -\langle T_{00} \rangle + \frac{1}{3} \sum_{i=1,2,3} \langle T_{ii} \rangle .$$

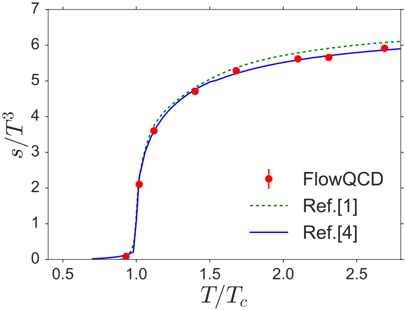
- 格子間隔 $a = 0.013$–$0.061\,\mathrm{fm} \ll \sqrt{8t}$、配位数 $\sim$ 1000–2000：





- 温度の関数としてのトレースアノマリーとエントロピー密度（状態方程式）：





Ref. [1]: Boyd et al. (1996), Ref. [4]: Borsanyi et al. (2012), 積分法の結果

- 我々の推論の正しさを強く示唆する！

$N_f = 2 + 1$ QCD での EMT の一点関数

- WHOT-QCD Collaboration （江尻–石見–金谷–北沢–谷口–梅田–若林–H.S.)
- 格子間隔 $a = 0.07$ fm 固定, $m_\pi / m_\rho \simeq 0.63$, $m_{\eta ss} / m_\phi \simeq 0.74$, $N_s = 32$, 配位数 $\sim$ 100–1000.

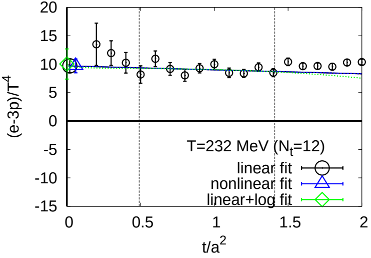


Figure: $(e - 3p)/T^4$, $T = 232\,\text{MeV}$

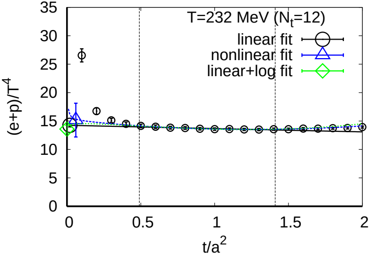


Figure: $(e + p)/T^4$, $T = 232\,\text{MeV}$

$N_f = 2 + 1$ QCD での EMT の一点関数

- 格子間隔 $a = 0.070\,\mathrm{fm}$ 固定, $m_\pi/m_\rho \simeq 0.63$, $m_{\eta_{ss}}/m_\phi \simeq 0.74$, $N_s = 32$, 配位数 $\sim$ 100–1000.

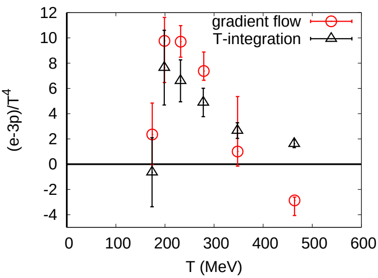


Figure: Black: T. Umeda et al. [WHOT-QCD Collaboration] (2012)

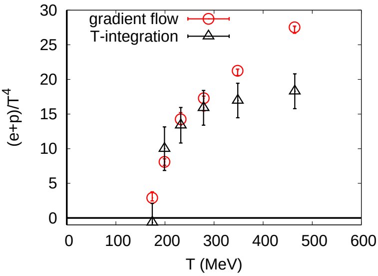


Figure: Black: T. Umeda et al. [WHOT-QCD Collaboration] (2012)

関連する研究（一部）

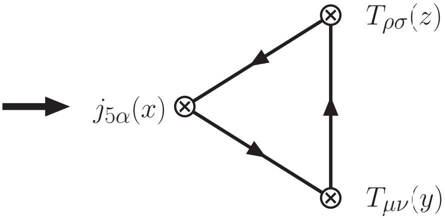
- $SU(3)$ ヤン–ミルズ理論の有限温度相転移での潜熱（江尻–石見–白銀–若林–金谷–北沢–谷口–梅田–H.S.）
- $N_f = 2 + 1$ QCD、物理点での状態方程式（WHOT-QCD Collaboration, 進行中）
- カイラルカレントの構成（遠藤–稗田–三浦–H.S. (2015), 稗田–H.S. (2016)）
- 有限温度でのトポロジカル感受率（谷口–金谷–梅田–H.S. (2016)）
- $SU(3)$ ヤン–ミルズ理論での EMT の 2 点関数、線形応答関係、保存則（北沢–入谷–浅川–初田）
- $N_f = 2 + 1$ QCD での EMT の 2 点関数（WHOT-QCD Collaboration, 進行中)
- 4 次元 $\mathcal{N} = 1$ 超対称ヤン–ミルズ理論でのグラディエントフロー（菊池–大野木 (2014)）
- 4 次元 $\mathcal{N} = 1$ 超対称ヤン–ミルズ理論での超対称カレントの構成（稗田–笠井–牧野–H.S. (2016)）

重力場中の軸性 $U(1)$ アノマリー

- 木村利栄, “Divergence of axial-vector current in the gravitational field,” PTP 42 (1969) 1191 (Received June 14, 1969):

$$D^\alpha j_{5\alpha} = \frac{1}{384\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\lambda\tau}R^{\rho\sigma}{}_{\lambda\tau}, \qquad j_{5\alpha} = \bar{\psi}\gamma_\alpha\gamma_5\psi.$$

- Adler, “Axial vector vertex in spinor electrodynamics,” PRD 177 (1969) 2426 (Received Sept 24, 1968).
- 平坦時空からの展開では、三角形ダイアグラムの発散、



を評価すればよい。

重力場中の軸性 $U(1)$ アノマリー（森川–H.S.）

- グラディエントフロー表示：ゲージ相互作用がない場合は単純に、

$$j_{5\alpha}(x) = \lim_{t\to 0} \bar{\chi}(t,x)\gamma_\alpha\gamma_5\chi(t,x),$$

$$T_{\mu\nu}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{4}\bar{\chi}(t,x)\left(\gamma_\mu \overleftrightarrow{\partial}_\nu + \gamma_\nu \overleftrightarrow{\partial}_\mu - 2\delta_{\mu\nu}\overleftrightarrow{\not\partial}\right)\chi(t,x).$$

- これらを用いると

$$\begin{aligned}
&\text{F.T.}\,\langle \partial_\alpha j_{5\alpha}(x) T_{\mu\nu}(y) T_{\rho\sigma}(z)\rangle \\
&= \frac{1}{(4\pi)^2}\Bigg\{\epsilon_{\mu\rho\beta\gamma}p_\beta q_\gamma \Bigg[\frac{1}{162}p_\nu p_\sigma + \frac{1}{162}q_\nu q_\sigma + \frac{1}{81}p_\nu q_\sigma + \frac{5}{162}q_\nu p_\sigma \\
&\qquad + \delta_{\nu\sigma}\left(-\frac{1}{54t} + \frac{4}{81}p^2 + \frac{5}{162}pq + \frac{4}{81}q^2\right)\Bigg] + (\mu\leftrightarrow\nu, \rho\leftrightarrow\sigma)\Bigg\}
\end{aligned}$$

となり、期待される結果

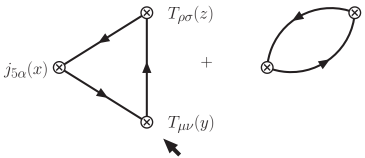
$$\text{F.T.}\,\langle \partial_\alpha j_{5\alpha}(x) T_{\mu\nu}(y) T_{\rho\sigma}(z)\rangle = \frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{6}\left[\epsilon_{\mu\rho\beta\gamma}p_\beta q_\gamma(q_\nu p_\sigma - \delta_{\nu\sigma}pq) + (\mu\leftrightarrow\nu, \rho\leftrightarrow\sigma)\right]$$

と全く一致しない...

重力場中の軸性 $U(1)$ アノマリー（森川–H.S.）

- これは予期されるところで、我々の EMT の構成は、それが他の局所積と座標空間で一致した時には、うまくいく保証がない。
- 一致点での補正 $\Rightarrow$ 運動量の多項式を、一般座標不変性と局所ローレンツ不変性がの WT 関係式が満たされるように選ぶ必要がある：

$$\langle j_{5\alpha}(x)\partial_\mu T_{\mu\nu}(y)T_{\rho\sigma}(z)\rangle + \partial^y_\mu\partial^y_\beta\delta(y-z)\left\langle j_{5\alpha}(x)\underbrace{\frac{1}{16}\bar\psi(z)\{\gamma_\rho\delta_{\sigma\beta}+\gamma_\sigma\delta_{\rho\beta}-2\delta_{\rho\sigma}\gamma_\beta,\sigma_{\mu\nu}\}\psi(z)}_{\text{新しい局所積}}\right\rangle = 0.$$



- 近いうちに報告したい...

まとめと展望

- 場の量子論において、時空対称性に付随した、EMT と関連した物理量の非摂動論的測定は興味深い。
- ここでは、グラディエントフローという手法を用いて、EMT の普遍的な表式を得た。
- この表式は、EMT が座標空間で孤立している on-shell 相関関数の中で有効である。
- 格子正則化で使うことができ、実際に QCD の状態方程式への応用を紹介した。
- QCD での EMT の 2 点関数：保存則？ 粘性係数？
- （ホログラフィック）くりこみ群との関連？
- 曲がった時空でのグラディエントフロー？

$$\partial_t B_\mu(t,x) = g^{\nu\rho}(x) D_\nu G_{\rho,\mu}(t,x),$$

$$\partial_t \chi(t,x) = g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu \chi(t,x), \qquad \partial_t \bar{\chi}(t,x) = \bar{\chi}(t,x) g^{\mu\nu} \overleftarrow{D}_\mu \overleftarrow{D}_\mu.$$

- ご清聴ありがとうございました。