演習　確率過程・確率微分方程式

金澤輝代士

2011 年 8 月 26 日

目次

第 I 部

白色ノイズ

第 1 章

確率過程

1.1 Markov 過程

基本のまとめ

確率過程

系の発展が確率的に決定される過程を**確率過程**と呼ぶ。数学的な解析の為には、次の様な量を考えることになる。今、$t_1 \geq \cdots \geq \tau_1 \geq \ldots$ とする。例えば、時刻 $t_1, \ldots, t_n$ に測定した量 $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ に対する**確率分布関数**

$$p(\vec{x}_1, t_1; \ldots; \vec{x}_n, t_n) \tag{1.1}$$

は重要な量である。また、**遷移確率分布関数**

$$p(\vec{x}_1, t_1; \ldots | \vec{y}_1, \tau_1; \ldots) \equiv \frac{p(\vec{x}_1, t_1; \ldots; \vec{t}_1, \tau_1; \ldots)}{p(\vec{y}_1, \tau_1; \ldots)} \tag{1.2}$$

も確率過程を特徴づける重要な量である。

Markov 過程

次の性質がある確率過程を **Markov 過程**という。

$$p(\vec{x}_1, t_1; \ldots | \vec{y}_1, \tau_1; \ldots) = p(\vec{x}_1 . t_1; \ldots | \vec{y}_1, \tau_1) \tag{1.3}$$

これは時間発展の法則自体は過去の経路に依存しないことを示す。ノイズが過去相関を持たない時 (白色ノイズ) 等に出現する。

Chapman-Kolmogorov 方程式

Markov 過程では、確率の保存の式は次の様に表現される。

$$p(\vec{x}_1, t_1 | \vec{x}_3, t_3) = \int d\vec{x}_2 p(\vec{x}_1, t_1 | \vec{x}_2, t_2) p(\vec{x}_2, t_2 | \vec{x}_3, t_3) \tag{1.4}$$

経路の連続性

任意の $\epsilon > 0$ について

$$\lim_{dt\to+0}\frac{1}{dt}\int_{|x-z|>\epsilon} d\vec{x}p(\vec{x},t+dt|\vec{z},t)=0 \tag{1.5}$$

が成立するとき、**「確率過程の経路は連続である」**という。(Lindeberg 条件とも言う。)

微分形の Chapman-Kolmogorov 方程式

以下の i)ii)iii) の条件を課す。

i) $$\lim_{\Delta t\to+0}\frac{p(\vec{x},t+\Delta t|\vec{z},t)}{\Delta t}=W(\vec{x}|\vec{z},t) \tag{1.6}$$

($|\vec{x}-\vec{z}|<\epsilon$に対して、$\vec{x},\vec{z},t$ について一様に成立)

ii) $$\lim_{\Delta t\to+0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|\vec{x}-\vec{z}|<\epsilon} d\vec{x}(x_i-z_i)p(\vec{x},t+\Delta t|\vec{z},t)=A_i(\vec{z},t)+O(\epsilon) \tag{1.7}$$

iii) $$\lim_{\Delta t\to+0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|\vec{x}-\vec{z}|<\epsilon} d\vec{x}(x_i-z_i)(x_j-z_j)p(\vec{x},t+\Delta t|\vec{z},t)=B_{ij}(\vec{z},t)+O(\epsilon) \tag{1.8}$$

この時、次の **Chapman-Kolmogorov 方程式**が成立する。

$$\begin{aligned}\frac{\partial p(\vec{z},t|\vec{y}.t')}{\partial t} &= -\sum_i\frac{\partial}{\partial z_i}[A_i(\vec{z},t)p(\vec{z},t|\vec{y},t')]+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial z_j}[B_{ij}(\vec{z},t)p(\vec{z},t|\vec{y},t')]\\ &\quad+\int d\vec{x}[W(\vec{z}|\vec{x},t)p(\vec{x},t|\vec{y},t')-W(\vec{x}|\vec{z},t)p(\vec{z},t|\vec{y},t')]\end{aligned} \tag{1.9}$$

この式は確率過程の時間発展を追う場合に便利である。

特性関数

$$\phi(\vec{\eta})\equiv< e^{i\vec{\eta}\cdot\hat{\vec{x}}} >=\int d\vec{x}p(\vec{x})e^{i\vec{\eta}\cdot\vec{x}} \tag{1.10}$$

演習問題

問 1【経路の連続性 (1)】

条件 (1.6) が成立する時、経路の連続は次の式で表現できることを示せ。

$$W(\vec{x}|\vec{z},t) = 0 \quad (\text{for} \quad \vec{x} \neq \vec{z}) \tag{1.11}$$

【問題の意図】「経路が連続である⇔ジャンピングの確率が 0」という非常に直観的な結果である。

問 2【経路の連続性 (2)】

種々の確率過程について、経路が連続か否かを調べてみよう。次の様な遷移確率を持つ過程について経路の連続性を論じよ。

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \ p(x,t+dt|z,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 dt}} e^{-\frac{(x-z)^2}{2\sigma^2 dt}} \ \ (\text{Wiener 過程}) \\
&(2)\ \ p(x,t+dt|z,t) = \frac{dt}{\pi[(x-z)^2 + dt^2]} \ \ (\text{Cauchy 過程})
\end{aligned}
$$

問 3【微分形の Chapman-Kolmogorov 方程式の導出 (1)】

式 (1.6),(1.7) は、2 次までの遷移幅の期待値を計算している。これは局所的な場の変化の寄与を表している。さて、実は高次の項は全て消えることを示すことが出来る。次の手順によって示してみよう。

まず、3 次の係数を次の式で定義する。

$$\lim_{\Delta t \to +0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|\vec{x}-\vec{z}|<\epsilon} d\vec{x} (x_i - z_i)(x_j - z_j)(x_k - z_k) p(\vec{x}, t+\Delta t|\vec{z}, t) = C_{ijk}(\vec{z}, t) + O(\epsilon) \tag{1.12}$$

次に、

$$\bar{C}(\vec{\alpha}, \vec{z}, t) \equiv \sum_{ijk} \alpha_i \alpha_j \alpha_k C_{ijk}(\vec{z}, t) \tag{1.13}$$

を定義する。この $\bar{C}$ を絶対値評価し、$|\bar{C}(\vec{\alpha}, \vec{z}, t)| = O(\epsilon)$ を示せ。

問 4【微分形の Chapman-Kolmogorov 方程式の導出 (2)】

Chapman-Kolmogorov 方程式を導出しよう。まず、2 回微分可能な任意の関数 $f(\vec{z})$ を用意する。この関数について次の積分を考える。

$$\frac{d}{dt} \int d\vec{x} f(\vec{x}) p(\vec{x}, t|\vec{y}, t') \tag{1.14}$$

(1) 積分 (1.14) を変形して次の形になることを示せ。

$$(1.14) = \lim_{\Delta t \to +0} \frac{1}{\Delta t}\{\int d\vec{x} \int d\vec{z} f(\vec{x}) p(\vec{x}, t+\Delta t|\vec{z}, t) p(\vec{z}, t|\vec{y}, t') - \int d\vec{z} f(\vec{z}) p(\vec{z}, t|\vec{y}, t')\} \tag{1.15}$$

(2) 更に変形を進め、式 (1.15) が次の形になることを示せ。

$$(1.15) = \lim_{\Delta t \to +0} \frac{1}{\Delta t}\{\int_{|\vec{x}-\vec{z}|<\epsilon} d\vec{x} d\vec{z} [\sum_i (x_i - z_i) \frac{\partial f}{\partial z_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(x_i - z_i)(x_j - z_j)\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}] \times p(\vec{x}, t+\Delta t|\vec{z}, t) p(\vec{z}, t|\vec{y}, t') \tag{1.16}$$

$$+ \int_{|\vec{x}-\vec{z}|<\epsilon} d\vec{x} d\vec{z} |\vec{x}-\vec{z}|^2 R(\vec{x}, \vec{z}) p(\vec{x}, t+\Delta t|\vec{z}, t) p(\vec{z}, t|\vec{y}, t') \tag{1.17}$$

$$+ \int_{|\vec{x}-\vec{z}|\geq\epsilon} d\vec{x} d\vec{z} f(\vec{x}) p(\vec{x}, t+\Delta t|\vec{z}, t) p(\vec{z}, t|\vec{y}, t') \tag{1.18}$$

$$+ \int_{|\vec{x}-\vec{z}|<\epsilon} d\vec{x} d\vec{z} f(\vec{z}) p(\vec{x}, t+\Delta t|\vec{z}, t) p(\vec{z}, t|\vec{y}, t') \tag{1.19}$$

$$- \int d\vec{x} d\vec{z} f(\vec{z}) p(\vec{x}, t+\Delta t|\vec{z}, t) p(\vec{z}, t|\vec{y}, t')\} \tag{1.20}$$

但し、$R(\vec{x}, \vec{z})$ は Taylor 展開の余剰項である。

$$f(\vec{x}) = f(\vec{z}) + \sum_i \frac{\partial f(\vec{z})}{\partial z_i}(x_i - z_i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 f(\vec{z})}{\partial z_i \partial z_j}(x_i - z_i)(x_j - z_j) + |\vec{x}-\vec{z}|^2 R(\vec{x}, \vec{z})$$

(3) 項 (1.16) を変形して次の形になることを示せ。

$$\int d\vec{z} [\sum_i A_i(\vec{z}) \frac{\partial f}{\partial z_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} B_{ij}(\vec{z}) \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}] p(\vec{z}, t|\vec{y}, t') + O(\epsilon) \tag{1.21}$$

(4) 項 (1.17) を変形し、(1.17) $= o(\epsilon)$ を示せ。

(5) 項 (1.18),(1.19),(1.20) を変形し、

$$\int_{|\vec{x}-\vec{z}|\geq\epsilon} d\vec{x} d\vec{z} f(\vec{z}) [W(\vec{z}|\vec{x}, t) p(\vec{x}, t|\vec{y}, t') - W(\vec{x}|\vec{z}, t) p(\vec{z}, t|\vec{y}, t')] \tag{1.22}$$

になることを示せ。

(6) 今までの式変形の結果を用いて微分形の Chapman-Kolmogorov 方程式を導出せよ。

問 5【Wiener 過程】

遷移確率が

$$p(x, t+dt|z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 dt}} e^{-\frac{(x-z)^2}{2\sigma^2 dt}}$$

で与えられる過程に対して微分形の Chapman-Kolmogorov 方程式を書き下し、その解を求めよ。但し、初期条件を $p(x_0) = \delta(x_0)$ とする。

問 6【Wiener 過程の特性関数】

問 5 の過程の特性関数を求めよ。

問 7【Gauss ノイズに駆動される運動】

次の様な運動方程式を考える。

$$\frac{d\hat{X}}{dt} = -\gamma\hat{X} + \hat{\xi} \tag{1.23}$$

ところで今、$\hat{\xi}$ が確率変数だとして確率分布が次で与えられているとする。

$$p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 dt}} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}dt} \tag{1.24}$$

この時、$A(x,t), B(x,t), W(x|z,t)$ がどうなるかを素朴に考え、[*1]微分形の Chapman-Kolmogorov 方程式を書き下せ。

問 8【Cauchy 過程】

遷移確率が

$$p(x, t+dt|z,t) = \frac{dt}{\pi[(x-z)^2 + dt^2]}$$

で与えられる過程に対して微分形の Chapman-Kolmogorov 方程式を書き下せ。

問 9【Poisson 過程】

遷移確率が

$$p(x, t+dt|z,t) = \lambda\delta(z+1-x)dt \tag{1.25}$$

で与えられる過程に対して微分形の Chapman-Kolmogorov 方程式を書き下せ。

問 10【Poisson 過程の特性関数・長時間近似】

問 9 の過程の特性関数を求めよ。また、長時間近似を行うとどうなるか？

問 11【存在不可能なノイズ】

次の様な運動方程式を考える。

$$\frac{d\hat{X}}{dt} = -\gamma\hat{X} + \hat{\xi} \tag{1.26}$$

[*1] 確率微分方程式の正確な取り扱いについては後で説明する。

ところで今、$\hat{\xi}$ が確率変数だとして確率分布が次で与えられているとする。

$$p(\xi) = \frac{(4dt)^{\frac{1}{4}}}{\sigma\Gamma(\frac{1}{4})} e^{-\frac{\xi^4}{2\sigma^4}dt} \tag{1.27}$$

この時、$A(x,t), B(x,t), W(x|z,t)$ がどうなるかを素朴に考え、微分形の Chapman-Kolmogorov 方程式を書き下せ。また、この事から何が言えるか？

【問題の意図】後述するように、ノイズには強い制限が付く。勝手な分布を作ることは出来ない。それは $dt \to +0$ の極限を取るからであり、問 14 は「$dt \to +0$ で生き残るノイズは何か？」という問いに対する答えになっている。

問 12【Lévy **過程**】

一般のノイズに駆動される自由粒子のランダムウォークをモデル化したい。どういうモデル化をするのが適当か？

【問題の意図】これは Gauss ノイズを拡張した非 Gauss ノイズを含むノイズのクラスであり、**Lévy 過程**と呼ぶ。

問 13【Lévy **過程の特性関数**】

問 12 の過程に対して、特性関数を求めよ。

【問題の意図】Lévy 過程の特性関数には標準形がある。この問題はその標準形を求めている。

問 14【**伊藤**-Lévy **分解**】

任意のノイズは Gauss ノイズと複数の Poisson ノイズの組み合わせで表現できることを証明せよ。(※ヒント:問 13)

【問題の意図】任意のノイズを分解する強力な定理である。この直観的な意味は後の問題を通じて行う。

第 2 章

白色 Gauss ノイズ

2.1 確率積分

基本のまとめ

記号の約束

時間 $[s, v]$ $(s < v)$ の離散化を n 点で行い、$t_0 = s < t_1 = \frac{1}{n}(v-s) < \cdots < t_i = \frac{i}{n}(v-s) < \cdots < t_{n-1} = v$ とする。また、確率変数 $\hat{A}$ の期待値を $< \hat{A} > \equiv \int daP(a)a$ によって定義する。最後に $n \to +\infty \Leftrightarrow dt \equiv \frac{v-s}{n} \to 0$ の極限を取るものとする。

白色 Gauss ノイズ

過去相関を持たず、次の様な確率分布を持つ確率変数を**白色 Gauss ノイズ**と呼ぶ。*1

$$p(\xi) = \sqrt{\frac{dt}{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}dt} \tag{2.1}$$

Wiener 過程

分散が 1 の白色 Gauss ノイズ $\hat{\xi}(t)$ に駆動される確率過程を **Wiener 過程**と呼ぶ。式では次の様に定義される。

$$\hat{W}(t) \equiv \int_s^t dt' \hat{\xi}(t') = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{t-s}{n} \hat{\xi}(t_i) \tag{2.2}$$

形式的には $d\hat{W}(t) = \hat{\xi}(t)dt$ と書かれる。この Wiener 過程については次の性質が成り立つ。

$$(1) < d\hat{W} >= 0 \quad (2) < d\hat{W}^2 >= dt \quad (3) d\hat{W}^2 = dt \quad (4) d\hat{W}^n = 0 \ (n > 2) \tag{2.3}$$

---

*1 特に $\sigma = 1$ のノイズを標準 Gauss ノイズと呼ぶことにする。

(3),(4) は期待値を取っていない量についての性質であり、非常に良い性質である。この等式は **Mean Square 極限**での等式である。Mean Square 極限は次の式で定義される。

$$(MS)\lim_{n\to+\infty}\hat{X}_n=\hat{X}\Leftrightarrow\lim_{n\to+\infty}<(\hat{X}_n-\hat{X})^2>=0 \tag{2.4}$$

伊藤積分

$$(I)\int_s^v d\hat{W}(t)f(\hat{W}(t))\equiv\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n-1}[\hat{W}(t_{i+1})-\hat{W}(t_i)]f(\hat{W}(t_i)) \tag{2.5}$$

伊藤の公式

$$df[\hat{W}]=\frac{\partial f}{\partial W}d\hat{W}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial W^2}dt \tag{2.6}$$

Stratonovich **積分**

$$(S)\int_s^v d\hat{W}(t)f(\hat{W}(t))\equiv\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n-1}[\hat{W}(t_{i+1})-\hat{W}(t_i)]f(\frac{\hat{W}(t_i)+\hat{W}(t_{i+1})}{2}) \tag{2.7}$$

この Stratonovich 積分に関しては**通常の計算規則**が成り立つ。

変換公式

$$(S)\int_s^v d\hat{W}(t)f(\hat{W}(t))=(I)\int_s^v d\hat{W}(t)f(\hat{W}(t))+\frac{1}{2}\int_s^v dt\frac{df}{dW}(\hat{W}(t))$$

演習問題

問 1【白色 Gauss ノイズの性質】

次の量を計算せよ。

$$(1) < \hat{\xi}(t) > \quad (2) < \hat{\xi}(t)^2 > \tag{2.8}$$

但し、確率分布は次の式で与えられる。

$$p(\xi(t_i)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 dt}} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}dt} \tag{2.9}$$

【問題の意図】この結果は Gauss ノイズの特異性を示している。また、デルタ関数が $\delta(0) \sim \frac{1}{dt}$ であることを考えると、$< \hat{\xi}(t')\hat{\xi}(t'') > \sim \delta(t' - t'')$ を示唆している。

問 2【Wiener 過程の性質】

次の性質を導出せよ。但し、(3) の等式は Mean Square 極限の意味での等式である。

$$(1) < d\hat{W} >= 0 \quad (2) < d\hat{W}^2 >= dt \quad (3) d\hat{W}^2 = dt \tag{2.10}$$

問 3【伊藤積分の計算練習 (1)】

次の量を計算せよ。

$$(1)\ (I)\int_s^v d\hat{W}(t')\hat{W}(t') \quad (2)\ (I)\int_s^v d\hat{W}(t')[\hat{W}(t')]^2 \quad (3)\ (I)\int_s^v d\hat{W}(t')[\hat{W}(t')]^n$$

但し、次の式変形を参考にしてもよい。

$$\begin{aligned} d[\hat{W}(t)]^2 &= [\hat{W}(t) + d\hat{W}(t)]^2 - \hat{W}(t)^2 \\ &= 2\hat{W}(t)d\hat{W}(t) + [d\hat{W}(t)]^2 \\ &= 2\hat{W}(t)d\hat{W}(t) + dt \\ d[\hat{W}(t)]^n &= n\hat{W}(t)^{n-1}d\hat{W}(t) + \frac{n(n-1)}{2}\hat{W}(t)^{n-2}dt \end{aligned}$$

【問題の意図】通常の積分は、微分と積分が逆演算であることを積極的に利用して計算する。確率積分においても同じようにすれば良い。即ち、x^n の積分を行いたいなら、x^{n+1} を微分して公式を得る。このアプローチで問題となるのは、「$d\hat{W}(t)^n \quad (n \geq 2)$ を如何に扱うか」という事である。この点を上手く扱う為に (2.3) 式を積極的に使用する。

問 4【Stratonovich **積分の計算練習** (1)】

次の量を計算せよ。

$$(1)\ \ (S)\int_s^v d\hat{W}(t')\hat{W}(t')\quad (2)\ \ (S)\int_s^v d\hat{W}(t')[\hat{W}(t')]^2\quad (3)\ \ (S)\int_s^v d\hat{W}(t')[\hat{W}(t')]^n$$

【問題の意図】この結果は、Stratonovich 積分のもとで通常の計算規則が性質していることを示唆している。

問 5【**伊藤の公式の導出**】

伊藤の公式を導出せよ。但し、大雑把で良い。(※ヒント：Taylor 展開)

$$df[\hat{W}] = \frac{\partial f}{\partial W}d\hat{W} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial W^2}dt \tag{2.11}$$

問 6【**伊藤の公式の計算練習**】

伊藤の公式を用いて次の微分計算を実行せよ。(※ (1)(2) の結果は問 3 と整合的な結果である。)

$$(1)\ \ d[\hat{W}^2]\quad (2)\ \ d[\hat{W}^n]\quad (3) d[e^{\hat{W}}]\quad (4) d[\sin\hat{W}]\quad (5)\ \ d[\log\hat{W}]$$

問 7【**通常の計算規則**】

$f(x)$ を必要回数だけ微分可能な任意の関数とする。また、$F(x) \equiv \int dx f(x)$ とする。Stratonovich 積分について次の性質が成り立つことを示せ。

$$(S)\int_s^v d\hat{W}(t')f(\hat{W}(t')) = F(\hat{W}(v)) - F(\hat{W}(s)) \tag{2.12}$$

【問題の意図】この定理により、Stratonovich 積分は通常の計算規則を用いて計算してよい。

問 8【Stratonovich **積分の計算練習** (2)】

問 4 を問 7 を意識して解き直せ。

問 9【**変換公式の導出**】

伊藤積分と Stratonovich 積分の間の変換公式を導出せよ。但し、大雑把で良い。

$$(S)\int_s^v d\hat{W}(t)f(\hat{W}(t)) = (I)\int_s^v d\hat{W}(t)f(\hat{W}(t)) + \frac{1}{2}\int_s^v dt\frac{df}{dW}(\hat{W}(t))$$

問 10【変換公式の計算練習 (1)】

次の Stratonovich 積分を伊藤積分に直せ。

$$(1)\ (S)\int_s^v d\hat{W}(t)e^{-\hat{W}(t)}\quad (2)\ (S)\int_s^v d\hat{W}(t)\log\hat{W}(t)\quad (3)\ (S)\int_s^v d\hat{W}(t)\cos\hat{W}(t)$$

問 11【変換公式の計算練習 (2)】

次の伊藤積分を Stratonovich 積分に直せ。

$$(1)\ (I)\int_s^v d\hat{W}(t)e^{-\hat{W}(t)}\quad (2)\ (I)\int_s^v d\hat{W}(t)\log\hat{W}(t)\quad (3)\ (I)\int_s^v d\hat{W}(t)\cos\hat{W}(t)$$

問 12【伊藤積分の計算練習 (2)】

問 11 の (1)〜(3) を求積せよ。(※ヒント：問 7)

【問題の意図】Stratonovich 積分に伊藤積分を直せば通常の計算方法で積分出来る。つまり、積分の解析計算を行うときは Stratoinovich 型に直したほうがよい。

問 13【Stratonovich 積分の多義性】

次の等式を示せ。

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n}[\hat{W}_{i+1}-\hat{W}_i]f(\frac{\hat{W}_{i+1}+\hat{W}_i}{2})=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n}[\hat{W}_{i+1}-\hat{W}_i]\frac{f(\hat{W}_{i+1})+f(\hat{W}_i)}{2}$$

【問題の意図】Stratonovich 積分と同じ値を取る確率積分は多数ある。これらは全て「Stratonovich 積分」と呼ばれることがある。[*2]

[*2] Stratonovich 積分の多義性を論じている文献に岩波書店「現代物理学業書　統計力学」(鈴木増雄) がある。

2.2　確率微分方程式

基本のまとめ

確率微分方程式と確率積分

次の様な微分方程式を素朴に考える。

$$\frac{d\hat{X}}{dt} = f(\hat{X}) + g(\hat{X})\hat{\xi} \tag{2.13}$$

ただし、$\hat{\xi}$ は標準 Gauss ノイズである。この式はまだ未定義である。この式を形式的に次の様な積分形に書き直す。

$$\hat{X}(t) = \hat{X}(0) + \int_0^t ds f(\hat{X}(s)) + \int_0^t d\hat{W}(s) g(\hat{X}(s)) \tag{2.14}$$

この右辺第 3 項を何らかの意味での確率積分としよう。確率積分の種類を指定することで一意に答えが定まる。一意に定まった**確率積分方程式**を**形式的に微分形で書いた**ものを**確率微分方程式**と呼ぶことにする。

伊藤型確率微分方程式

伊藤積分を次の様に定義する。

$$(I)\int_s^v d\hat{W}(t) g(\hat{X}(t)) \equiv \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} [\hat{W}(t_{i+1}) - \hat{W}(t_i)] g(\hat{X}(t_i)) \tag{2.15}$$

この伊藤積分を用いて次の様な**伊藤型確率積分方程式**を定義する。

$$\hat{X}(t) = \hat{X}(0) + \int_0^t ds f(\hat{X}(s)) + (I)\int_0^t d\hat{W}(s) g(\hat{X}(s)) \tag{2.16}$$

この式を形式的に

$$(I) d\hat{X} = f(\hat{X}) dt + g(\hat{X}) d\hat{W} \tag{2.17}$$

と書き、**伊藤型確率微分方程式**と呼ぶ。

Stratonovich 型確率微分方程式

Stratonovich 積分を次の様に定義する。

$$(S)\int_s^v d\hat{W}(t) g(\hat{X}(t)) \equiv \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} [\hat{W}(t_{i+1}) - \hat{W}(t_i)] g(\frac{\hat{X}(t_i) + \hat{X}(t_{i+1})}{2}) \tag{2.18}$$

この Stratonovich 積分を用いて次の様な **Stratonovich 型確率積分方程式**を定義する。

$$\hat{X}(t) = \hat{X}(0) + \int_0^t ds f(\hat{X}(s)) + (S)\int_0^t d\hat{W}(s) g(\hat{X}(s)) \tag{2.19}$$

この式を形式的に

$$(S)d\hat{X} = f(\hat{X})dt + g(\hat{X})d\hat{W} \tag{2.20}$$

と書き、**Stratonovich 型確率微分方程式**と呼ぶ。

伊藤解析

$$(I)d\hat{X} = a(\hat{X})dt + b(\hat{X})d\hat{W} \tag{2.21}$$

$$(I)df[\hat{X}] = \frac{\partial f}{\partial x}[a(\hat{X})dt + b(\hat{X})d\hat{W}] + \frac{b^2(\hat{X})}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dt \tag{2.22}$$

Stratonovich 解析

$$(S)d\hat{X} = \alpha(\hat{X})dt + \beta(\hat{X})d\hat{W} \tag{2.23}$$

$$(S)df[\hat{X}] = \frac{\partial f}{\partial x}[\alpha(\hat{X})dt + \beta(\hat{X})d\hat{W}] \tag{2.24}$$

変換公式 (1)

$$(I)d\hat{X} = adt + bd\hat{W} \tag{2.25}$$

$$(S)d\hat{X} = (a - \frac{1}{2}b\partial_x b)dt + bd\hat{W} \tag{2.26}$$

変換公式 (2)

$$(S)d\hat{X} = \alpha dt + \beta d\hat{W} \tag{2.27}$$

$$(I)d\hat{X} = (\alpha + \frac{1}{2}\beta\partial_x\beta)dt + \beta d\hat{W} \tag{2.28}$$

確率微分方程式の求積法

Stratonovich 解析では通常の計算規則が使える。よって、伊藤型の確率微分方程式を Stratonovich 型に書き直し、Stratonovich 型の確率微分方程式を形式的に求積すれば良い。

演習問題

問 1【伊藤解析の公式の導出】

次の様な伊藤型確率微分方程式を考える。

$$(I)d\hat{X} = a(\hat{X})dt + b(\hat{X})d\hat{W} \tag{2.29}$$

この時、2 回微分可能な任意の関数 $f(x)$ について、伊藤の公式が成立することを示せ。但し、大雑把で良い。

$$(I)df[\hat{X}] = \frac{\partial f}{\partial x}[a(\hat{X})dt + b(\hat{X})d\hat{W}] + \frac{b^2(\hat{X})}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dt \tag{2.30}$$

問 2【伊藤の公式の練習問題 (1)】

次の様な伊藤型確率微分方程式を考える。

$$(I)d\hat{X} = -\hat{X}dt + d\hat{W} \tag{2.31}$$

伊藤の公式を用いて次の微分計算を実行せよ。

$$(1)\ \ d[\hat{X}^2]\ \ \ (2)\ \ d[\hat{X}^n]\ \ \ (3)d[e^{\hat{X}}]\ \ \ (4)d[\sin\hat{X}]\ \ \ (5)\ \ d[\log\hat{X}]$$

問 3【伊藤の公式の練習問題 (2)】

次の様な伊藤型確率微分方程式を考える。

$$(I)d\hat{X} = -\hat{X}dt + \hat{X}d\hat{W} \tag{2.32}$$

伊藤の公式を用いて次の微分計算を実行せよ。

$$(1)\ \ d[\hat{X}^2]\ \ \ (2)\ \ d[\hat{X}^n]\ \ \ (3)d[e^{\hat{X}}]\ \ \ (4)d[\sin\hat{X}]\ \ \ (5)\ \ d[\log\hat{X}]$$

問 4【伊藤の公式の練習問題 (3)】

初期条件が $\hat{X}(0) = x_0$ の確率微分方程式

$$(I)d\hat{X} = -\hat{X}dt + \sigma\hat{X}d\hat{W} \tag{2.33}$$

の解が

$$\hat{X}(t) = x_0 e^{\{-(1+\frac{\sigma^2}{2})t + \hat{W}(t) - \hat{W}(0)\}} \tag{2.34}$$

であることを示せ。

問 5【Stratonovich 解析の公式の導出】

次の様な Stratonovich 型確率微分方程式を考える。

$$(S)d\hat{X} = \alpha(\hat{X})dt + \beta(\hat{X})d\hat{W} \tag{2.35}$$

この時、2 回微分可能な任意の関数 $f(x)$ について、次の「通常の計算規則」が成立することを示せ。但し、大雑把で良い。

$$(S)df[\hat{X}] = \frac{\partial f}{\partial x}[\alpha(\hat{X})dt + \beta(\hat{X})d\hat{W}] \tag{2.36}$$

問 6【Stratonovich 解析の練習問題 (1)】

次の様な Stratonovich 型確率微分方程式を考える。

$$(S)d\hat{X} = -\hat{X}dt + d\hat{W} \tag{2.37}$$

次の微分計算を実行せよ。

$$(1)\ \ d[\hat{X}^2]\ \ \ (2)\ \ d[\hat{X}^n]\ \ \ (3)d[e^{\hat{X}}]\ \ \ (4)d[\sin\hat{X}]\ \ \ (5)\ \ d[\log\hat{X}]$$

問 7【Stratonovich 解析の練習問題 (2)】

次の様な Stratonovich 型確率微分方程式を考える。

$$(S)d\hat{X} = -\hat{X}dt + \hat{X}d\hat{W} \tag{2.38}$$

次の微分計算を実行せよ。

$$(1)\ \ d[\hat{X}^2]\ \ \ (2)\ \ d[\hat{X}^n]\ \ \ (3)d[e^{\hat{X}}]\ \ \ (4)d[\sin\hat{X}]\ \ \ (5)\ \ d[\log\hat{X}]$$

問 8【変換公式】

$$\hat{X} = \int_0^t ads + (I)\int_0^t bd\hat{W} \tag{2.39}$$

は

$$\hat{X} = \int_o^t (a - \frac{1}{2}b\partial_x b)dt + (S)\int_0^t bd\hat{W} \tag{2.40}$$

であることを示せ。但し、大雑把にで良い。これを形式的に書くと、

$$(I)d\hat{X} = adt + bd\hat{W} \Longleftrightarrow (S)d\hat{X} = (a - \frac{1}{2}b\partial_x b)dt + bd\hat{W} \tag{2.41}$$

となる。

問 9【確率微分方程式の求積問題 (1)】

次の確率微分方程式を求積せよ。但し、いずれも初期条件は $\hat{X}(0)=x_0$ である。

$$(1)\ \ (S)d\hat{X} = -\gamma\hat{X}dt + d\hat{W} \tag{2.42}$$

$$(2)\ \ (S)d\hat{X} = (-\gamma dt + \sigma d\hat{W})\hat{X} \tag{2.43}$$

$$(3)\ \ (S)d\hat{X} = \hat{X}^2 d\hat{W} \tag{2.44}$$

問 10【確率微分方程式の求積問題 (2)】

次の確率微分方程式を求積せよ。但し、いずれも初期条件は $\hat{X}(0)=x_0$ である。

$$(1)\ \ (I)d\hat{X} = -\gamma\hat{X}dt + d\hat{W} \tag{2.45}$$

$$(2)\ \ (I)d\hat{X} = (-\gamma dt + \sigma d\hat{W})\hat{X} \tag{2.46}$$

$$(3)\ \ (I)d\hat{X} = -\hat{X}^3 dt + \hat{X}^2 d\hat{W} \tag{2.47}$$

2.3 分布関数の時間発展

基本のまとめ

Fokker-Planck 方程式

定常解

演習問題

問 1【Fokker-Planck **方程式の導出** (1)】

問 2【Fokker-Planck **方程式の導出** (2)】

第 3 章

白色非 Gauss ノイズ (Lеv́y 過程)

3.1 確率積分・確率微分方程式

3.2 微分法

3.3 積分法

3.4 一般化 Fokker-Planck 方程式

第 II 部

有色ノイズ

第 4 章

色付きノイズ確率微分方程式

4.1 期待値の計算

4.2 一般化 Fokker-Planck 方程式

第 5 章

有色ノイズの摂動論

5.1 白色近似

5.2 弱ノイズ近似