

ファジー球面上の場の理論における
相関関数の研究¹

静岡大学大学院 総合科学技術研究科
修士課程 理学専攻
物理学コース

4153-1005 畠山洸太

¹本修士論文は2017年2月に静岡大学大学院総合科学技術研究科に提出した修士論文に加筆・修正を行ったものである。

概要

本修士論文の目的はファジー球面上の場の理論における相関関数の振る舞いを調べることである。まず、非可換空間上の場の理論について非可換平面を例に挙げて説明し、行列模型との対応を見る。さらに非可換空間の一種であるファジー球面上のスカラー場の理論についても説明し、行列模型との対応を見る。その後、ハイブリッドモンテカルロ法を用いた数値シミュレーションの結果を示す。相互作用のない自由場では解析的に知られている結果を再現した。相互作用のある場においては2点相関関数と4点相関関数の結果から、くりこみができることが強く示唆される。

目次

第 1 章	序論	4
第 2 章	非可換空間上の場の理論	6
2.1	非可換平面	6
2.1.1	座標と運動量	6
2.1.2	演算子	6
2.1.3	演算子の積	7
2.1.4	演算子のトレース	7
2.1.5	行列模型との対応	8
2.2	UV/IR mixing	9
第 3 章	ファジー球面上のスカラー場の理論	11
3.1	ファジー球面	11
3.2	スカラー場の理論	13
3.3	UV/IR anomaly	14
3.4	ブロッホコヒーレント状態	17
3.4.1	定義	17
3.4.2	性質	18
3.5	行列模型との対応	18
3.5.1	Berezin symbol	18
3.5.2	ステレオグラフィックプロジェクション	19
第 4 章	数値シミュレーションの結果と考察	24
4.1	結果	24
4.1.1	λ を固定した場合	26
4.1.2	μ^2 を固定した場合	30
4.2	考察	32
第 5 章	まとめと展望	33
付録 A	式の導出	35
A.1	3.3 節	35
A.1.1	(3.3.5)	35
A.1.2	(3.3.6)	36
A.1.3	(3.3.7)	37
A.2	3.4 節	38
A.2.1	(3.4.5)	38
A.2.2	(3.4.6)	38
A.2.3	(3.4.7)	39

A.3 3.5 節	40
A.3.1 (3.5.3)	40
付録 B $3j$ symbol と $6j$ symbol	43
付録 C 1点相関関数	44
付録 D 自由場	45
付録 E 3次元への拡張	47
E.1 作用	47
E.2 自由場	47
E.3 UV/IR anomaly	50
付録 F 数値シミュレーションの方法	52
F.1 ハイブリッドモンテカルロ法	52
F.2 Schwinger-Dyson 方程式	53
付録 G 誤差評価	55
G.1 統計誤差と誤差伝搬	55
G.2 ジャックナイフ法	55
G.3 自己相関	56
G.4 最小二乗法	56
参考文献	59

第1章 序論

この世界に存在する4つの力—電磁気力、弱い力、強い力、重力—の全てを統一的に記述する理論の中で、最有力候補として考えられているのが、弦理論 (string theory) である。

ところで、摂動論では安定な真空が無数生じるが、各真空で時空の次元やゲージ群、物質の構成などが異なってしまう。しかし、非摂動効果により真空が一意に決まることが期待される。初期宇宙の研究や力の統一を考える際に、非摂動論的なアプローチは重要である。

弦理論を非摂動的に定式化したものが、行列模型 (matrix model) である。行列模型の中には解析的に解けないものも存在するため、数値シミュレーションは行列模型を用いた研究において、強力な手法となる。

行列模型から、非可換空間上の場の理論が出てくることが知られている。非可換空間と量子重力理論 (quantum gravity theory) は関係していることが議論されている。非可換空間では、紫外と赤外が混ざってしまい (UV/IR mixing), 摂動論的なくりこみが非自明である。非可換空間上の場の理論が通常の場合の理論とどこまで同じで、どこが異なるのかを調べるのは重要である。

したがって、本修士論文の目的は、非可換空間—ここでは特にファジー球面上—上の相関関数を行列模型を用いて数値シミュレーションで計算し、ファジー球面上の場の理論が通常の場合の理論のようにくりこみができるかどうかを示すことである。

本論文の構成は、以下のとおりである。

- 第2章では、非可換空間の例として一番簡単な非可換平面を取り上げ、そこでの物理量の振る舞いを見ることで、非可換平面上の場の理論と行列模型との対応関係を明らかにする。非可換空間上の場の理論における特徴的な性質である UV/IR mixing について、この非可換平面で議論する。
- 第3章では、コンパクトな非可換空間の典型例である、ファジー球面上のスカラー ϕ^4 理論を考える。ファジー球面上の場の理論には UV/IR mixing は存在しないが、UV/IR anomaly [1] というものが存在することを示す。また、場の理論と行列模型の対応を考えるために、ブロッホコヒーレント状態とそこから Berezin symbol というものを導入し、それらの性質などを説明する。
- 第4章では、実際に行った数値シミュレーションの結果とその考察を与える。ファジー球面上で相関関数の計算を行い、その結果をグラフで示し、そこから考察を行う。
- 第5章では、本研究のまとめを行い、今後の展望を議論する。
- 付録 A では、本修士論文にある様々な式の導出を行っている。
- 付録 B では、本修士論文中に登場する $3j$ symbol と $6j$ symbol について述べている。
- 付録 C では、第4章では示さなかった1点相関関数に関して、数値シミュレーションの結果を示す。
- 付録 D では、第4章では示さなかった自由場に関して、数値シミュレーションの結果を示す。

- 付録 E では，時間方向を入れて 3次元とした場合を考える．
- 付録 F では，数値シミュレーションの方法である，ハイブリッドモンテカルロ法について説明する．また，シミュレーションのコードが正しいかを確認するために用いた，Schwinger-Dyson 方程式についても説明する．
- 付録 G では，数値シミュレーションにおける誤差を評価するための方法について説明する．

第2章 非可換空間上の場の理論

この章では、本論文において重要となる非可換空間 (noncommutative space) 上の場の理論について理解を深めるために、非可換平面 (noncommutative plane) について取り上げる。非可換平面における物理量の振る舞いを見ることで、非可換平面上の場の理論と行列模型との対応関係を明らかにする。また、非可換空間における重要な性質である UV/IR mixing についても述べる。

2.1 非可換平面

ここでは最も簡単な非可換空間である、2次元の非可換平面を考える。一般に、 d 次元への拡張は容易である。

2.1.1 座標と運動量

まず、座標を \hat{x}_1, \hat{x}_2 とすると、それらが交換しない。

$$[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = i\theta. \quad (2.1.1)$$

ここで、 θ は実定数で $\theta \rightarrow 0$ が可換極限に対応する。座標についている $\hat{}$ の意味は、普通の数ではなく演算子 (無限次元行列) であることを示している。共役運動量を以下のように定義する。

$$\hat{p}_1 = \theta^{-1}\hat{x}_2, \quad \hat{p}_2 = -\theta^{-1}\hat{x}_1. \quad (2.1.2)$$

また、運動量は以下の交換関係を満たす。

$$[\hat{p}_1, \hat{p}_2] = i\theta^{-1}. \quad (2.1.3)$$

座標の交換関係と運動量の定義から、以下の関係が満たされる。

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{i,j} \quad (i, j = 1, 2). \quad (2.1.4)$$

これは、見かけ上2次元での1粒子量子力学の正準交換関係の形をしているが、(2.1.2) から座標と運動量は独立ではないので、ヒルベルト空間としては1次元量子力学を考えることになる。

2.1.2 演算子

このヒルベルト空間に作用する演算子 \hat{f} は \hat{x}_i を用いて、以下のように展開される。

$$\hat{f} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} f(k) e^{ik \cdot \hat{x}}. \quad (2.1.5)$$

この \hat{f} に対して、2次元平面 \mathbf{R}^2 上の関数 $f(x)$ を次式で対応させることができる。

$$f(x) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} f(k) e^{ik \cdot x}. \quad (2.1.6)$$

\hat{f} と $f(x)$ の関係を直接書けば,

$$\hat{f} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int d^2x f(x) e^{-ik \cdot x} e^{ik \cdot \hat{x}} \quad (2.1.7)$$

となる.

(2.1.4) と (2.1.7) から,

$$[\hat{p}_i, \hat{f}] = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int d^2x [-i\partial_{x_i} f(x)] e^{-ik \cdot x} e^{ik \cdot \hat{x}}. \quad (2.1.8)$$

したがって, \mathbf{R}^2 上で以下の対応関係があることがわかる.

$$[\hat{p}_i,] \longleftrightarrow -i\partial_{x_i}. \quad (2.1.9)$$

2.1.3 演算子の積

次に, 演算子の積を考える.

$$\begin{aligned} \hat{f}\hat{g} &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2l}{(2\pi)^2} \int d^2x \int d^2y f(x) g(y) e^{-ik \cdot x} e^{-il \cdot y} e^{ik \cdot \hat{x}} e^{il \cdot \hat{x}} \\ &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2l}{(2\pi)^2} \int d^2x \int d^2y f(x) g(y) e^{-ik \cdot x} e^{-il \cdot y} e^{-\frac{i\theta}{2}(k_1 l_2 - k_2 l_1)} e^{i(k+l) \cdot \hat{x}} \\ &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2l}{(2\pi)^2} \int d^2x \int d^2y \left[e^{\frac{i\theta}{2}(\partial_{x_1} \partial_{y_2} - \partial_{x_2} \partial_{y_1})} f(x) g(y) \right] e^{-ik \cdot x} e^{-il \cdot y} e^{i(k+l) \cdot \hat{x}} \\ &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int d^2x \left[e^{\frac{i\theta}{2}(\partial_{x_1} \partial_{y_2} - \partial_{x_2} \partial_{y_1})} f(x) g(y) \right] \Big|_{y=x} e^{-ik \cdot x} e^{ik \cdot \hat{x}}. \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

(2.1.10) では, Baker-Cambell-Hausdorff の公式で, $[[A, B], A] = [[A, B], B] = 0$ のときに成り立つ

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A, B]} \quad (2.1.11)$$

という公式を用いた. これにより, 演算子の積がスター積 (Moyal 積とも呼ばれる.) に対応することがわかる.

$$\hat{f}\hat{g} \longleftrightarrow f(x) \star g(x) = \left[e^{\frac{i\theta}{2}(\partial_{x_1} \partial_{y_2} - \partial_{x_2} \partial_{y_1})} f(x) g(y) \right] \Big|_{y=x}. \quad (2.1.12)$$

一般に, $f(x) \star g(x) \neq g(x) \star f(x)$ であることは明らかで, 演算子の積は結合法則 $(\hat{f}\hat{g})\hat{h} = \hat{f}(\hat{g}\hat{h})$ を満たすので, スター積も同様に結合法則 $[f(x) \star g(x)] \star h(x) = f(x) \star [g(x) \star h(x)]$ を満たす. さらに, スター積を使った交換関係は,

$$\frac{1}{i\theta} [f(x), g(x)]_\star = \partial_{x_1} f(x) \partial_{x_2} g(x) - \partial_{x_2} f(x) \partial_{x_1} g(x) + O(\theta) \quad (2.1.13)$$

となる.

2.1.4 演算子のトレース

では, 演算子のトレースを考える. そのために, ヒルベルト空間において次のような基底を考える.

$$\hat{x}_1 |x_1\rangle = x_1 |x_1\rangle, \quad \hat{x}_2 |x_2\rangle = x_2 |x_2\rangle. \quad (2.1.14)$$

量子力学とのアナロジーから,

$$\int \frac{dx_1}{\sqrt{2\pi\theta}} |x_1\rangle\langle x_1| = 1, \quad \int \frac{dx_2}{\sqrt{2\pi\theta}} |x_2\rangle\langle x_2| = 1, \quad (2.1.15)$$

$$\langle x_1|x_2\rangle = e^{i\theta^{-1}x_1x_2} \quad (2.1.16)$$

が成り立つ. これらを用いると,

$$\begin{aligned} \text{tr}(\hat{f}) &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int d^2x \int \frac{dx'_1}{\sqrt{2\pi\theta}} f(x) e^{-ik \cdot x} \langle x'_1 | e^{ik \cdot \hat{x}} | x'_1 \rangle \\ &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int d^2x \int \frac{dx'_1}{\sqrt{2\pi\theta}} \int \frac{dx'_2}{\sqrt{2\pi\theta}} f(x) e^{-ik \cdot x} e^{i\frac{\theta}{2}k_1k_2} \langle x'_1 | e^{ik \cdot \hat{x}_1} e^{ik \cdot \hat{x}_2} | x'_2 \rangle \langle x'_2 | x'_1 \rangle \\ &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int d^2x \int \frac{d^2x'}{2\pi\theta} f(x) e^{-ik \cdot x} e^{i\frac{\theta}{2}k_1k_2} e^{i(k_1x'_1 + k_2x'_2)} = \int \frac{d^2x}{2\pi\theta} f(x) \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

となり, トレースが \mathbf{R}^2 上の積分に対応することがわかる.

$$\text{tr} \longleftrightarrow \int \frac{d^2x}{2\pi\theta}. \quad (2.1.18)$$

右辺は位相空間の体積を $2\pi\hbar$ で割ったものに相当する. トレースの巡回性を考えると,

$$\int d^2x f_1(x) \star f_2(x) \star \cdots \star f_n(x) = \int d^2x f_n(x) \star f_1(x) \star \cdots \star f_{n-1}(x) \quad (2.1.19)$$

が成り立つ. 特に, スター積の形から,

$$\int d^2x f(x) \star g(x) = \int d^2x f(x) g(x) \quad (2.1.20)$$

がいえる.

2.1.5 行列模型との対応

ここまで述べた性質を用いて, 「外場」 \hat{p}_i が入った作用を考える. 行列模型の作用 S_{MM} は,

$$S_{\text{MM}} = \sqrt{(2\pi)^d \det(\theta_{ij})} \text{tr} \left(-\frac{1}{2} [\hat{p}_i, \Phi]^2 + \frac{\mu^2}{2} \Phi^2 + \frac{\lambda}{4} \Phi^4 \right) \quad (2.1.21)$$

となる. ここで, $i, j = 1, \dots, d$ で, $[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = i\theta_{ij}^{-1}$ である. 対応関係を用いると, d 次元非可換平面上の場の理論の作用 S_{NCP} は次のようになる.

$$S_{\text{NCP}} = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_{x_i} \phi(x))^2 + \frac{\mu^2}{2} \phi(x)^2 + \frac{\lambda}{4} \phi(x) \star \phi(x) \star \phi(x) \star \phi(x) \right]. \quad (2.1.22)$$

場の2次の項は通常 ϕ^4 理論に一致するが, 相互作用項はスター積で書かれるため一致しない.

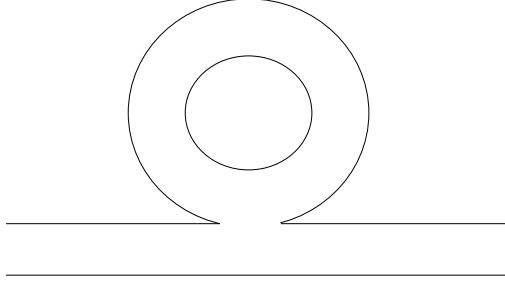


図 2.1: プラナーダイアグラム.

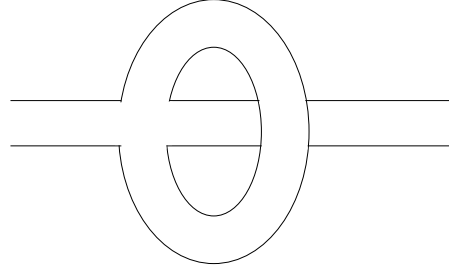


図 2.2: 非プラナーダイアグラム.

2.2 UV/IR mixing

最後に、非可換空間上の場の理論の重要な性質である UV/IR mixing について述べる．これは可換空間上の場の理論における紫外発散が、非可換空間上においては運動量を 0 にする極限（赤外領域）での発散として現れてしまう現象である．以下では、2次元非可換平面におけるプロパゲーターの 1-loop 補正の計算を行い、ここから UV/IR mixing を導く．

(2.1.22) で $d = 2$ として、これをフーリエモードで書き換えると、

$$S_{\text{NCP}} = S_{\text{NCP, free}} + S_{\text{NCP, int}}, \quad (2.2.1a)$$

$$S_{\text{NCP, free}} = \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} (2\pi)^2 \delta^{(2)}(p+q) \frac{1}{2} (p^2 + \mu^2) \phi(p) \phi(q), \quad (2.2.1b)$$

$$S_{\text{NCP, int}} = \frac{\lambda}{4} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 r}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 s}{(2\pi)^2} (2\pi)^2 \delta^{(2)}(p+q+r+s) \\ \times e^{-\frac{i\theta}{2} [p_1 q_2 - p_2 q_1 + (p_1 + q_1)(r_2 + s_2) - (p_2 + q_2)(r_1 + s_1) + r_1 s_2 - r_2 s_1]} \phi(p) \phi(q) \phi(r) \phi(s) \quad (2.2.1c)$$

となる．相互作用のない場合のプロパゲーターは通常の場合の理論と同様に、

$$\langle \phi(p) \phi(q) \rangle = (2\pi)^2 \delta^{(2)}(p+q) \frac{1}{p^2 + \mu^2} \quad (2.2.2)$$

である．スター積が非可換であるため、行列場の理論と同様に 2 重線でダイアグラムを描くのが妥当である．1-loop 補正には、プラナーダイアグラム (図 2.1) と非プラナーダイアグラム (図 2.2) がある．

プラナーダイアグラムと非プラナーダイアグラムを表す式はそれぞれ、(2.2.3) と (2.2.4) である．

$$-2\lambda \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{1}{q^2 + \mu^2}, \quad (2.2.3)$$

$$-\lambda \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{e^{-i\theta(p_1 q_2 - p_2 q_1)}}{q^2 + \mu^2}. \quad (2.2.4)$$

ここで、 p_i は外線の運動量である．(2.2.4) には位相因子 $e^{-i\theta(p_1 q_2 - p_2 q_1)}$ が入っているが、(2.2.3) にはそのようなものはなく、通常の場合の ϕ^4 理論に一致している．一般に、非可換空間上の場の理論においては、プラナーダイアグラムは対応する可換空間上の場の理論のそれと一致させることができる．

それでは, (2.2.4) の計算を行う. プロパゲーターの Schwinger 表示

$$\frac{1}{q^2 + \mu^2} = \int_0^\infty ds e^{-(q^2 + \mu^2)s} \quad (2.2.5)$$

を用いると,

$$(2.2.4) = -\lambda \int_0^\infty ds \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} e^{-(q^2 + \mu^2)s + i\theta(p_1q_2 - p_2q_1)} = -\frac{\lambda}{2\pi} \int_0^\infty ds \frac{1}{2s} e^{-\mu^2 s - \frac{\theta^2 p^2}{4s}} \quad (2.2.6)$$

となる. 可換空間 ($\theta = 0$) の場合, これは対数発散する. 正則化のために, 紫外カットオフ Λ を導入し, (2.2.6) に固有時間カットオフとして, $e^{-1/4\Lambda^2 s}$ を入れる. すると,

$$(2.2.6) = -\frac{\lambda}{2\pi} \int_0^\infty ds \frac{1}{2s} e^{-\mu^2 s - \frac{\theta^2 p^2}{4s} - \frac{1}{4\Lambda^2 s}} = -\frac{\lambda}{2\pi} K_0 \left(\mu \sqrt{\theta^2 p^2 + \frac{1}{\Lambda^2}} \right) \quad (2.2.7)$$

となる. ここで, $K_0(x)$ は第 2 種 Bessel 関数² で, その級数展開は

$$K_0(x) = \sum_{a=0}^{\infty} \frac{1}{a!^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2a} \left(-\gamma + \sum_{b=1}^a \frac{1}{b} - \log \frac{x}{2} \right) \quad (2.2.8)$$

である. なお, γ はオイラーの数³ である. これを用いると (2.2.7) は,

$$\frac{\lambda}{2\pi} \left[\gamma + \log \left(\frac{\mu}{2} \sqrt{\theta^2 p^2 + \frac{1}{\Lambda^2}} \right) \right] \left[1 + O \left(\mu \sqrt{\theta^2 p^2 + \frac{1}{\Lambda^2}} \right) \right] \quad (2.2.9)$$

と評価できる. $\theta = 0$ のとき, これはよく知られた紫外の対数発散を再現する. 一方, $\theta \neq 0$ のとき, $\Lambda \rightarrow \infty$ の極限は $p \neq 0$ である限り有限で紫外発散はない. しかし, 外線の運動量が小さくなる赤外領域 ($p \rightarrow 0$) では発散してしまう. 可換空間における, 紫外発散由来の赤外発散が起きていることになるため, UV/IR mixing と呼ばれる.

²一般形は, $K_\nu(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 \int_0^\infty dt t^{-\nu-1} e^{-t-x^2/4t}$ である.

³ $\gamma \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \log n \right) = 0.57721 \dots$

第3章 ファジー球面上のスカラー場の理論

ここでは、コンパクトな非可換空間の典型例である、ファジー球面 (fuzzy sphere, 非可換球面とも呼ばれる.) 上でスカラー場の理論を考える。これは行列模型によって表される。量子力学において位相空間が $2\pi\hbar$ の最小単位に量子化されるのに対応して、非可換空間では $2\pi\theta$ に量子化される。したがって、非可換 \mathbf{R}^2 は非コンパクトなので、その空間上の場の理論を表す行列模型の行列サイズは無限次元になるが、球面はコンパクトなので、行列サイズは有限次元になる。

3.1 ファジー球面

ファジー球面上の座標 \hat{x}_i は $SU(2)$ のリー代数を満たす。

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\rho\varepsilon_{ijk}\hat{x}_k \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \quad (3.1.1)$$

非可換 \mathbf{R}^2 の場合と異なり、有限次元のヒルベルト空間上で \hat{x}_i は表現できる。 $(2j+1) \times (2j+1)$ 行列 $\hat{L}_i^{[j]}$ は $SU(2)$ のスピン j 表現 (j は非負整数または半整数) の生成子であり、これを用いると、

$$\hat{x}_i = \rho\hat{L}_i^{[j]} \quad (3.1.2)$$

と書ける。このとき、

$$\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 + \hat{x}_3^2 = \rho^2 j(j+1) \mathbf{1}_{2j+1} \quad (3.1.3)$$

であり、

$$R = \rho\sqrt{j(j+1)} \quad (3.1.4)$$

とすれば、(3.1.3) は半径 R の球の方程式となる。これが非可換球面と呼ばれる理由である。可換極限は、 $\rho \rightarrow 0, j \rightarrow \infty, R = \rho\sqrt{j(j+1)}$: 固定で与えられる。

$2j+1$ 次元のヒルベルト空間の基底として標準的なものをとる。

$$|jr\rangle \quad (r = -j, -j+1, \dots, j). \quad (3.1.5)$$

$SU(2)$ の生成子はこの基底に対して、

$$\hat{L}_\pm^{[j]} |jr\rangle = \sqrt{(j \mp r)(j \pm r + 1)} |jr \pm 1\rangle, \quad \hat{L}_3^{[j]} |jr\rangle = r |jr\rangle \quad (3.1.6)$$

と作用する。ここで、 $\hat{L}_\pm^{[j]} \equiv \hat{L}_1^{[j]} \pm i\hat{L}_2^{[j]}$ である。

このヒルベルト空間上の任意の演算子 \hat{f} は、

$$\hat{f} = \sum_{r,r'} f_{r,r'} |jr\rangle\langle jr'| \quad (3.1.7)$$

のように展開される。より便利な基底として、非可換球面調和関数を次式で定義する。

$$\hat{Y}_{lm}^{[j]} = \sqrt{2j+1} \sum_{r,r'} (-1)^{-j+r'} C_{jr}^l C_{j-r'}^m |jr\rangle\langle jr'|. \quad (3.1.8)$$

ここで, $C_{j_r j_{-r}}^{l m}$ は Clebsh-Gordan 係数であり, $0 \leq l \leq 2j$, $-l \leq m \leq l$ である. $2j$ が紫外のカットオフになることが後にわかる. これは2つのスピン j を合成していることに相当し, それを反映して以下の交換関係が成り立つ.

$$\left[\hat{L}_{\pm}^{[j]}, \hat{Y}_{lm}^{[j]} \right] = \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} \hat{Y}_{l m \pm 1}^{[j]}, \quad \left[\hat{L}_3^{[j]}, \hat{Y}_{lm}^{[j]} \right] = m \hat{Y}_{lm}^{[j]}. \quad (3.1.9)$$

エルミート共役は,

$$\left(\hat{Y}_{lm}^{[j]} \right)^\dagger = (-1)^m \hat{Y}_{l - m}^{[j]} \quad (3.1.10)$$

で与えられる. また, 以下の正規直交関係が成り立つ.

$$\frac{1}{2j+1} \text{tr} \left[\left(\hat{Y}_{lm}^{[j]} \right)^\dagger \hat{Y}_{l'm'}^{[j]} \right] = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}. \quad (3.1.11)$$

さらに, 2つの非可換球面調和関数の積は,

$$\hat{Y}_{l_2 m_2}^{[j]} \hat{Y}_{l_3 m_3}^{[j]} = \sum_{l_1, m_1} \hat{C}_{l_2 m_2 l_3 m_3}^{l_1 m_1} \hat{Y}_{l_1 m_1}^{[j]} \quad (3.1.12)$$

で与えられる. ここで,

$$\begin{aligned} \hat{C}_{l_2 m_2 l_3 m_3}^{l_1 m_1} &\equiv \frac{1}{2j+1} \text{tr} \left[\left(\hat{Y}_{l_1 m_1}^{[j]} \right)^\dagger \hat{Y}_{l_2 m_2}^{[j]} \hat{Y}_{l_3 m_3}^{[j]} \right] \\ &= (-1)^{l_1+2j} \sqrt{(2j+1)(2l_2+1)(2l_3+1)} C_{l_2 m_2 l_3 m_3}^{l_1 m_1} \left\{ \begin{matrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ j & j & j \end{matrix} \right\} \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

であり, $\{ \}$ は $6j$ symbol である.

一方, 通常の球面調和関数 $Y_{lm}(\Omega)$ は角運動量演算子

$$\mathcal{L}_{\pm} \equiv \mathcal{L}_1 \pm i \mathcal{L}_2 = e^{\pm i\varphi} \left(\pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad \mathcal{L}_3 = -i \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (3.1.14)$$

の作用の下で,

$$\mathcal{L}_{\pm} Y_{lm}(\Omega) = \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} Y_{l m \pm 1}(\Omega), \quad \mathcal{L}_3 Y_{lm}(\Omega) = m Y_{lm}(\Omega) \quad (3.1.15)$$

と振る舞う. ここで, $\Omega = (\theta, \varphi)$ は球面上の座標である. 複素共役と正規直交関係は以下のように与えられる.

$$Y_{lm}^*(\Omega) = (-1)^m Y_{l - m}(\Omega), \quad (3.1.16)$$

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} Y_{lm}^*(\Omega) Y_{l'm'}(\Omega) = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}. \quad (3.1.17)$$

ここで, $d\Omega \equiv \sin \theta d\theta d\varphi$ は面積要素である. (3.1.15) から (3.1.17) はそれぞれ (3.1.9) から (3.1.11) に対応している. さらに, 2つの球面調和関数の積は,

$$Y_{l_2 m_2}(\Omega) Y_{l_3 m_3}(\Omega) = \sum_{l_1, m_1} \sqrt{\frac{(2l_2+1)(2l_3+1)}{2l_1+1}} C_{l_2 0 l_3 0}^{l_1 0} C_{l_2 m_2 l_3 m_3}^{l_1 m_1} Y_{l_1 m_1}(\Omega) \quad (3.1.18)$$

である. ここで,

$$\sqrt{\frac{(2l_2+1)(2l_3+1)}{2l_1+1}} C_{l_2 0 l_3 0}^{l_1 0} C_{l_2 m_2 l_3 m_3}^{l_1 m_1} = \int \frac{d\Omega}{4\pi} Y_{l_1 m_1}^*(\Omega) Y_{l_2 m_2}(\Omega) Y_{l_3 m_3}(\Omega) \quad (3.1.19)$$

である。 $j \rightarrow \infty$ の可換極限で、 $l_1, l_2, l_3 \ll j$ のとき、

$$\hat{C}_{l_2 m_2 l_3 m_3}^{l_1 m_1} \rightarrow \sqrt{\frac{(2l_2 + 1)(2l_3 + 1)}{2l_1 + 1}} C_{l_2 0 l_3 0}^{l_1 0} C_{l_2 m_2 l_3 m_3}^{l_1 m_1} \quad (3.1.20)$$

がいえる。したがって、(3.1.18) が (3.1.12) に対応することがわかる。以上のことから、非可換球面調和関数は可換極限において球面調和関数に対応することがわかった。対応関係をまとめると以下のとおりである。

$$\hat{Y}_{lm}^{[j]} \longleftrightarrow Y_{lm}(\Omega), \quad (3.1.21)$$

$$\left[\hat{L}_i^{[j]}, \right] \longleftrightarrow \mathcal{L}_i, \quad (3.1.22)$$

$$\frac{1}{2j+1} \text{tr} \longleftrightarrow \int \frac{d\Omega}{4\pi}. \quad (3.1.23)$$

任意の演算子 \hat{f} は非可換球面調和関数によって、

$$\hat{f} = \sum_{l=0}^{2j} \sum_{m=-l}^l f_{lm} \hat{Y}_{lm}^{[j]} \quad (3.1.24)$$

のように展開される。これから、 S^2 上の関数が定義される。

$$f(\Omega) = \sum_{l=0}^{2j} \sum_{m=-l}^l f_{lm} Y_{lm}(\Omega). \quad (3.1.25)$$

これで、ヒルベルト空間上の演算子と非可換空間上の関数の対応がつく。 l についての和の上限 $2j$ が紫外のカットオフに相当する。この正則化は、回転対称性を保つ。

3.2 スカラー場の理論

2.1.5 節のときのように、 $(2j+1) \times (2j+1)$ エルミート行列 Φ についての「外場」 $\hat{L}_i^{[j]}$ の入った行列模型を考えると、

$$S_{\text{fuzzy}} = \frac{R^2}{2j+1} \text{tr} \left(-\frac{1}{2R^2} \left[\hat{L}_i^{[j]}, \Phi \right]^2 + \frac{\mu^2}{2} \Phi^2 + \frac{\lambda}{4} \Phi^4 \right) \quad (3.2.1)$$

となり、対応する可換球面上の通常の場合の理論は、

$$S_{S^2} = R^2 \int \frac{d\Omega}{4\pi} \left\{ -\frac{1}{2R^2} [\mathcal{L}_i \phi(\Omega)]^2 + \frac{\mu^2}{2} \phi^2(\Omega) + \frac{\lambda}{4} \phi^4(\Omega) \right\} \quad (3.2.2)$$

である。以下では、ファジー球面の半径と S^2 の半径をそれぞれ $R=1$ とする。

Φ を $\hat{Y}_{lm}^{[j]}$ で展開すると、(3.2.1) は以下のように書ける。

$$S_{\text{fuzzy}} = S_{\text{fuzzy, free}} + S_{\text{fuzzy, int}}, \quad (3.2.3a)$$

$$S_{\text{fuzzy, free}} = \sum_{l,m} \frac{(-1)^m}{2} [l(l+1) + \mu^2] \phi_{lm} \phi_{l-m}, \quad (3.2.3b)$$

$$S_{\text{fuzzy, int}} = \sum_{l_1, \dots, l_5} \sum_{m_1, \dots, m_5} \frac{\lambda (-1)^{m_5}}{4} \hat{C}_{l_1 m_1 l_2 m_2}^{l_5 m_5} \hat{C}_{l_3 m_3 l_4 m_4}^{l_5 - m_5} \phi_{l_1 m_1} \phi_{l_2 m_2} \phi_{l_3 m_3} \phi_{l_4 m_4}. \quad (3.2.3c)$$

一方, $\phi(\Omega)$ を $Y_{lm}(\Omega)$ で展開すると, (3.2.2) は以下のように書ける.

$$S_{S^2} = S_{S^2, \text{free}} + S_{S^2, \text{int}}, \quad (3.2.4a)$$

$$S_{S^2, \text{free}} = \sum_{l,m} \frac{(-1)^m}{2} [l(l+1) + \mu^2] \phi_{lm} \phi_{l-m}, \quad (3.2.4b)$$

$$S_{S^2, \text{int}} = \sum_{l_1, \dots, l_5} \sum_{m_1, \dots, m_5} \frac{\lambda(-1)^{m_5}}{4} \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)(2l_4+1)}{2l_5+1}} \\ \times C_{l_1 m_1}^{l_5 m_5} C_{l_2 m_2}^{l_5 - m_5} C_{l_3 m_3}^{l_5 0} C_{l_4 m_4}^{l_5 0} \phi_{l_1 m_1} \phi_{l_2 m_2} \phi_{l_3 m_3} \phi_{l_4 m_4}. \quad (3.2.4c)$$

(3.1.20) から, 2つの理論は $j \rightarrow \infty$ の極限で一致する. 実際, (3.1.20) で $l_1, l_2, l_3 \ll j$ の条件に注意すると, ツリーレベルでは正しいが, 量子補正を入れると, 2.2節で見たように UV/IR mixing と同じように両者に違いが出る. これは, 次節で見ることにする.

3.3 UV/IR anomaly

ここでは, ファジー球面上の場の理論には UV/IR mixing は存在しないが, 量子補正を考えると可換極限でも有限な違い—UV/IR anomaly—が生じることを見る.

(3.1.24) より, Φ は $\hat{Y}_{lm}^{[j]}$ を用いて以下のように展開される.

$$\Phi = \sum_{l=0}^{2j} \sum_{m=-l}^l \phi_{lm} \hat{Y}_{lm}^{[j]}, \quad \phi_{lm}^* = (-1)^m \phi_{l-m}. \quad (3.3.1)$$

n 点相関関数は,

$$\langle \phi_{l_1 m_1} \cdots \phi_{l_n m_n} \rangle = \frac{\int [\mathcal{D}\Phi] e^{-S_{\text{fuzzy}}} \phi_{l_1 m_1} \cdots \phi_{l_n m_n}}{\int [\mathcal{D}\Phi] e^{-S_{\text{fuzzy}}}} \quad (3.3.2)$$

であり, 2点相関関数は

$$\langle \phi_{lm} \phi_{l'm'}^* \rangle = (-1)^m \langle \phi_{lm} \phi_{l'-m'} \rangle = \frac{1}{l(l+1) + \mu^2} \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} \quad (3.3.3)$$

となる. ϕ^4 理論のヴァーテクスは,

$$\phi_{l_1 m_1} \cdots \phi_{l_4 m_4} V(l_1, m_1; \dots; l_4, m_4), \quad (3.3.4)$$

$$V(l_1, m_1; \dots; l_4, m_4) = \frac{\lambda}{4} (2j+1) (-1)^{l_1+l_2+l_3+l_4} \prod_{i=1}^4 \sqrt{2l_i+1} \sum_{l=0}^{2j} \sum_{m=-l}^l (-1)^m (2l+1) \\ \times \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_3 & l_4 & l \\ m_3 & m_4 & -m \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 & l_2 & l \\ j & j & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l_3 & l_4 & l \\ j & j & j \end{Bmatrix} \quad (3.3.5)$$

となる. なお, (3.3.5) は (l_i, m_i) の巡回置換について対称である. ここで, $\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$ は $3j$ symbol である.

図 2.1 と図 2.2 に相当するものを (3.3.3) を使って計算する。プラナーの寄与 $\left(\Gamma_{\text{planar}}^{(2)}\right)_{mm'}^{ll'}$ は,

$$\left(\Gamma_{\text{planar}}^{(2)}\right)_{mm'}^{ll'} = 2\lambda\delta_{l,l'}\delta_{m,-m'}(-1)^m I^P, \quad (3.3.6a)$$

$$I^P \equiv \sum_{K=0}^{2j} \frac{2K+1}{K(K+1)+\mu^2} \quad (3.3.6b)$$

である。同様に非プラナーの寄与 $\left(\Gamma_{\text{nonplanar}}^{(2)}\right)_{mm'}^{ll'}$ は,

$$\left(\Gamma_{\text{nonplanar}}^{(2)}\right)_{mm'}^{ll'} = \lambda\delta_{l,l'}\delta_{m,-m'}(-1)^m I^{NP}, \quad (3.3.7a)$$

$$I^{NP} \equiv \sum_{K=0}^{2j} (-1)^{l+K+2j} \frac{(2K+1)(2j+1)}{K(K+1)+\mu^2} \begin{Bmatrix} j & j & l \\ j & j & K \end{Bmatrix} \quad (3.3.7b)$$

となる。詳しい導出は、付録 A を参照してほしい。

では、 I^{NP} を以下のように書き換えてみる。

$$I^{NP} = \sum_{K=0}^{2j} \frac{2K+1}{K(K+1)+\mu^2} f_K, \quad (3.3.8a)$$

$$f_K \equiv (-1)^{l+K+2j} (2j+1) \begin{Bmatrix} j & j & l \\ j & j & K \end{Bmatrix}. \quad (3.3.8b)$$

ここで、 $l=0$ に対しては $f_K = 1$, $0 \leq K \leq 2j$ となるので、プラナーと非プラナーの 2 点相関関数は一致する。 $l=1$ のとき、

$$f_K = 1 - \frac{K(K+1)}{2j(j+1)} \quad (3.3.9)$$

となり、

$$I^{NP} = I^P - \frac{1}{2j(j+1)} \sum_{K=0}^{2j} \frac{K(K+1)(2K+1)}{K(K+1)+\mu^2} \quad (3.3.10)$$

がいえる。右辺第 2 項の K についての和は j^2 で発散するが、 $1/2j(j+1)$ により有限となるので、プラナーと非プラナーの 2 点相関関数の違いは有限となる。

では一般の l について、 $I^{NP} - I^P$ がどうなるかを近似的に確かめる。まず、2 点相関関数へのプラナーの寄与

$$I^P = \sum_{K=0}^{2j} \frac{2K+1}{K(K+1)+\mu^2} \sim \log j + O(1) \quad (3.3.11)$$

は、 $j \rightarrow \infty$ で古典的な球面上の対応する項に一致して対数発散する。次に非プラナーの寄与を考える。そのために、6j symbol の近似式

$$\begin{Bmatrix} j & j & l \\ j & j & K \end{Bmatrix} \approx \frac{(-1)^{l+2j+K}}{2j} P_l \left(1 - \frac{K^2}{2j^2}\right), \quad l \ll j, \quad 0 \leq K \leq 2j \quad (3.3.12)$$

を使う。ここで、 $P_l(x)$ は Legendre 多項式⁴である。すると $I^{NP} - I^P$ は、

$$\begin{aligned} I^{NP} - I^P &= \sum_{K=0}^{2j} \frac{2K+1}{K(K+1)+\mu^2} \left[(-1)^{l+K+2j} (2j+1) \begin{Bmatrix} j & j & l \\ j & j & K \end{Bmatrix} - 1 \right] \\ &\approx \sum_{K=0}^{2j} \frac{2K+1}{K(K+1)+\mu^2} \left[P_l \left(1 - \frac{K^2}{2j^2} \right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

となる。全ての l に対して、 $P_l(1) = 1$ なので、 $K \gg 1$ のみが効いて和を積分に近似できる。

$$\begin{aligned} I^{NP} - I^P &\approx \int_0^2 du \frac{2u + \frac{1}{j}}{u^2 + \frac{u}{j} + \left(\frac{\mu}{j}\right)^2} \left[P_l \left(1 - \frac{u^2}{2} \right) - 1 \right] \\ &\quad \downarrow \quad 1 - \frac{u^2}{2} = t \text{ とおく} \\ &= \int_{-1}^1 dt \frac{P_l(t) - 1}{1-t} + O\left(\frac{1}{j}\right). \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

この積分は全ての l に対して有限となる。また、積分に関して、

$$\int_{-1}^1 dt \frac{P_l(t) - 1}{1-t} = -2 \sum_{k=1}^l \frac{1}{k} = -2h(l) \quad (3.3.15)$$

がいえる。ここで、 $h(l)$ は調和数で、 $h(0) = 0$ である。大きい l に対しては $h(l) \approx \log l$ である。一方、小さい l に対しては有限になり、UV/IR mixing は生じない。したがって、1-loop の有効作用として

$$S_{1\text{-loop}} = S_{\text{fuzzy}} + \frac{1}{2j+1} \text{tr} \left[\frac{1}{2} \Phi \left\{ \delta\mu^2 - 2\lambda h(\tilde{\Delta}) \right\} \Phi \right] + O\left(\frac{1}{j}\right) \quad (3.3.16)$$

を得る。ここで、 $h(\tilde{\Delta})$ は \hat{Y}_{lm} の固有値 l を持つラプラシアン関数で、

$$\delta\mu^2 = 3\lambda \sum_{K=0}^{2j} \frac{2K+1}{K(K+1)+\mu^2} \quad (3.3.17)$$

はくりこまれた質量の 2 乗である。ここから、非可換性による効果は、 $1/j$ について解析的である。これは非自明な有限量子効果で、 l 依存性がある。このように、非可換 \mathbf{R}^2 の場合と異なり、ファジー球面上では赤外発散は生じない。

可換極限での場の理論は、 $j \rightarrow \infty$ で、 R, λ, μ を固定する極限で定義される。この極限では、可換球面上で量子化して得られる有効作用と 1-loop の有効作用では、

$$\Gamma_{\text{anomaly}}^{(2)} = -\frac{\lambda}{2j+1} \text{tr} \left[\Phi h(\tilde{\Delta}) \Phi \right] \quad (3.3.18)$$

だけ異なる。量子有効作用の一部に (3.3.18) が入っていて、大きい l に対しては $h(l) \approx \log l$ であるから、非局所的といえる。この項は量子化することと可換極限をとることは交換しないことを示す。通常の場合の理論では現れない効果で、これが UV/IR anomaly である。

⁴ $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$.

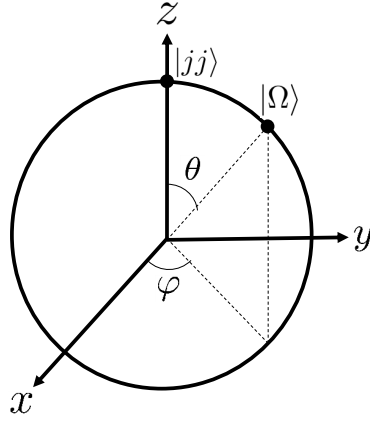


図 3.1: ブロッホコヒーレント状態.

3.4 ブロッホコヒーレント状態

行列模型とファジー球面上の場の理論との対応関係を考えるにあたり、ブロッホコヒーレント状態 (Bloch coherent state) を用いるのが便利である。

3.4.1 定義

$2j+1$ 次元のヒルベルト空間の標準的な基底 (3.1.5) とこの基底への $SU(2)$ の生成子 $\hat{L}_i^{[j]}$ の作用 (3.1.6) を思い出すと、以下のようなものであった。

$$\begin{aligned}
 |jr\rangle & \quad (r = -j, -j+1, \dots, j), \\
 \hat{L}_{\pm}^{[j]} & \equiv \hat{L}_1^{[j]} \pm i\hat{L}_2^{[j]}, \\
 \hat{L}_{\pm}^{[j]} |jr\rangle & = \sqrt{(j \mp r)(j \pm r + 1)} |j, r \pm 1\rangle, \\
 \hat{L}_3^{[j]} |jr\rangle & = r |jr\rangle.
 \end{aligned}$$

ここから先では、 $\hat{L}_i^{[j]}$ を簡単に L_i と書くことにする。このとき、 $|jj\rangle$ は球の北極に対応する。ここで、球面上の $\Omega = (\theta, \varphi)$ に対応する状態 $|\Omega\rangle$ は $|jj\rangle$ に回転行列を作用させたものである (図 3.1 を参照)。

$$|\Omega\rangle = e^{i\theta(L_1 \sin \varphi - L_2 \cos \varphi)} |jj\rangle. \quad (3.4.1)$$

ここから、

$$n_i L_i |\Omega\rangle = j |\Omega\rangle \quad (3.4.2)$$

が成り立つ。ここで、 $\vec{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ である。この状態 $|\Omega\rangle$ をブロッホコヒーレント状態という。また、(3.4.1) は $z = \tan \frac{\theta}{2} e^{i\varphi}$ とすると、次のように書き換えることができる。

$$(3.4.1) = e^{zL_-} e^{-L_3 \log(1+|z|^2)} e^{-\bar{z}L_+} |jj\rangle \quad (3.4.3)$$

$$= \sum_{r=-j}^j \binom{2j}{j+r}^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{j+r} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{j-r} e^{i(j-r)\varphi} |jr\rangle. \quad (3.4.4)$$

3.4.2 性質

(3.4.4) から、ブロッホコヒーレント状態は以下を満たす。

$$\langle \Omega_1 | \Omega_2 \rangle = \left[\cos \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} + \sin \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} \right]^{2j}, \quad (3.4.5)$$

$$|\langle \Omega_1 | \Omega_2 \rangle| = \left(\cos \frac{\chi}{2} \right)^{2j}, \quad \chi = \arccos(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2), \quad (3.4.6)$$

$$(2j+1) \int \frac{d\Omega}{4\pi} |\Omega\rangle\langle\Omega| = 1. \quad (3.4.7)$$

以上の性質に関する導出は、付録 A を参照してほしい。

(3.4.6) の右辺に $\chi = 2/\sqrt{j}$ を代入すると、

$$\left(\cos \frac{\chi}{2} \right)^{2j} = \left(\cos \frac{1}{\sqrt{j}} \right)^{2j} \simeq \left(1 - \frac{1}{2j} \right)^{2j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} e^{-1} \quad (3.4.8)$$

がわかる。これより、ブロッホコヒーレント状態は $1/\sqrt{j}$ の幅を持つ。

3.5 行列模型との対応

3.5.1 Berezin symbol

3.4 節のブロッホコヒーレント状態を用いて、新たに Berezin symbol というものを考える。

$$f_\Phi(\Omega) \equiv \langle \Omega | \Phi | \Omega \rangle. \quad (3.5.1)$$

ここで、 Φ は $(2j+1) \times (2j+1)$ エルミート行列である。

$$f_\Phi(\Omega) = \phi(\Omega) \quad (3.5.2)$$

とにおいて Berezin symbol を用いると、

$$f_{[L_i, \Phi]}(\Omega) = \mathcal{L}_i f_\Phi(\Omega) \quad (3.5.3)$$

がいえる。この証明は付録 A を参照してほしい。次に、Berezin symbol を用いてスター積を以下のように定義する。

$$f_A(\Omega) \star f_B(\Omega) \equiv f_{AB}(\Omega) = \langle \Omega | AB | \Omega \rangle. \quad (3.5.4)$$

この定義とブロッホコヒーレント状態の完全性 (3.4.7) から、

$$f_A(\Omega) \star f_B(\Omega) = (2j+1) \int \frac{d\Omega'}{4\pi} \langle \Omega | A | \Omega' \rangle \langle \Omega' | B | \Omega \rangle \quad (3.5.5)$$

と書けて、行列模型と場の理論との対応を見ることができる。

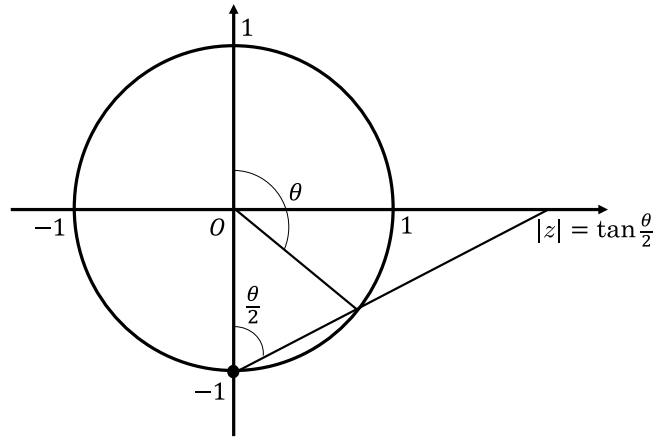


図 3.2: ステレオグラフィックプロジェクション. 球面上の角度 θ の点を南極から赤道上の z 平面に射影する.

3.5.2 ステレオグラフィックプロジェクション

3.2 節では, 球面調和関数を使って行列模型と場の理論との対応を見たが, この節では Berezin symbol を使って対応を見る. そのために, 球面上の理論を z 平面に射影する (図 3.2 を参照). これをステレオグラフィックプロジェクション (stereographic projection) という.

$$z = \tan \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \quad (3.5.6)$$

とおけば,

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} e^{i\varphi}, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = i \tan \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \quad (3.5.7)$$

であり,

$$\begin{aligned} dzd\bar{z} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \bar{z}}{\partial \theta} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial \varphi} \end{vmatrix} d\theta d\varphi = -i \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{\sin \theta} \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= -i \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} d\Omega \\ &= -\frac{i}{2} \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2 d\Omega \\ &= -\frac{i}{2} (1 + |z|^2)^2 d\Omega \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

となる. ここで, $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ とすると,

$$dzd\bar{z} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} \end{vmatrix} dx dy = \begin{vmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{vmatrix} dx dy = -2i dx dy \equiv -2i d^2 z \quad (3.5.9)$$

となるので,

$$d\Omega = 4 \frac{d^2 z}{(1 + |z|^2)^2} \quad (3.5.10)$$

がいえる.

今、ブロッホコヒーレント状態に対して、

$$|\Omega\rangle = |z\rangle \quad (3.5.11)$$

とおくと、(3.4.4) から、

$$\begin{aligned} |z\rangle &= \sum_{r=-j}^j \binom{2j}{j+r}^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{j+r} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{j-r} e^{i(j-r)\varphi} |jr\rangle \\ &= \left(\frac{1}{2} \sin \theta e^{i\varphi}\right)^j \sum_{r=-j}^j \binom{2j}{j+r}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\tan \frac{\theta}{2} e^{i\varphi}}\right)^r |jr\rangle \\ &= \left(\frac{z}{1+|z|^2}\right)^j \sum_{r=-j}^j \binom{2j}{j+r}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{z^r} |jr\rangle \end{aligned} \quad (3.5.12)$$

がいえる。また、完全性は

$$\frac{2j+1}{4\pi} 4 \int \frac{d^2z}{(1+|z|^2)^2} |z\rangle\langle z| = (2j+1) \int \frac{d\Omega}{4\pi} |\Omega\rangle\langle\Omega| = 1 \quad (3.5.13)$$

となる。

α, β を複素としたとき、

$$\langle\beta|A|\beta\rangle \equiv f_A(\Omega) = f_A(\beta, \bar{\beta}) \quad (3.5.14)$$

と表せば、スター積は

$$f_A \star f_B(\beta, \bar{\beta}) = \langle\beta|AB|\beta\rangle \quad (3.5.15)$$

となる。ここで、

$$\frac{\langle\beta|A|\alpha\rangle}{\langle\beta|\alpha\rangle} \quad (3.5.16)$$

を導入する。

$$\begin{aligned} \frac{\langle\beta|A|\alpha\rangle}{\langle\beta|\alpha\rangle} &= e^{-\beta \frac{\partial}{\partial \alpha}} \frac{\langle\beta|A|\alpha+\beta\rangle}{\langle\beta|\alpha+\beta\rangle} \\ &= e^{-\beta \frac{\partial}{\partial \alpha}} e^{\alpha \frac{\partial}{\partial \beta}} \frac{\langle\beta|A|\beta\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle} \\ &= e^{-\beta \frac{\partial}{\partial \alpha}} e^{\alpha \frac{\partial}{\partial \beta}} \langle\beta|A|\beta\rangle \\ &= e^{-\beta \frac{\partial}{\partial \alpha}} e^{\alpha \frac{\partial}{\partial \beta}} f_A(\beta, \bar{\beta}). \end{aligned} \quad (3.5.17)$$

同様に考えると、

$$\frac{\langle\alpha|A|\beta\rangle}{\langle\alpha|\beta\rangle} = e^{-\bar{\beta} \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}}} e^{\bar{\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{\beta}}} \langle\beta|A|\beta\rangle = e^{-\bar{\beta} \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}}} e^{\bar{\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{\beta}}} f_A(\beta, \bar{\beta}) \quad (3.5.18)$$

となる。すると、スター積は、

$$\begin{aligned} &f_A \star f_B(\beta, \bar{\beta}) \\ &= \langle\beta|AB|\beta\rangle \\ &= \frac{2j+1}{4\pi} 4 \int \frac{d^2\alpha}{(1+|\alpha|^2)^2} \frac{\langle\beta|A|\alpha\rangle}{\langle\beta|\alpha\rangle} \frac{\langle\alpha|B|\beta\rangle}{\langle\alpha|\beta\rangle} |\langle\beta|\alpha\rangle|^2 \\ &= \frac{2j+1}{4\pi} 4 \int \frac{d^2\alpha}{(1+|\alpha|^2)^2} e^{-\beta \frac{\partial}{\partial \alpha}} e^{\alpha \frac{\partial}{\partial \beta}} f_A(\beta, \bar{\beta}) e^{-\bar{\beta} \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}}} e^{\bar{\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{\beta}}} f_B(\beta, \bar{\beta}) |\langle\beta|\alpha\rangle|^2 \end{aligned} \quad (3.5.19)$$

となる。ここで,

$$\begin{aligned}
\langle \beta | \alpha \rangle &= \left[\frac{\bar{\beta} \alpha}{(1 + |\beta|^2)(1 + |\alpha|^2)} \right]^j \sum_{r=-j}^j \binom{2j}{j+r} \left(\frac{1}{\bar{\beta} \alpha} \right)^r \\
&= \left[\frac{\bar{\beta} \alpha}{(1 + |\beta|^2)(1 + |\alpha|^2)} \right]^j \sum_{s=0}^{2j} \binom{2j}{s} \left(\frac{1}{\bar{\beta} \alpha} \right)^{s-j} \\
&= \left[\frac{1}{(1 + |\beta|^2)(1 + |\alpha|^2)} \right]^j (1 + \bar{\beta} \alpha)^{2j} \tag{3.5.20}
\end{aligned}$$

である。

以上の関係から、行列模型の作用における2次の項とスカラー ϕ^4 理論の作用における2次の項とが一致することを見る。

$$\begin{aligned}
&\frac{4\pi}{2j+1} \text{tr}(AB) \\
&= \frac{4\pi}{2j+1} \left(\frac{2j+1}{4\pi} \right)^2 \int \frac{d^2 \alpha}{(1 + |\alpha|^2)^2} \frac{d^2 \beta}{(1 + |\beta|^2)^2} \langle \beta | A | \alpha \rangle \langle \alpha | B | \beta \rangle \\
&= \frac{2j+1}{4\pi} 4^2 \int \frac{d^2 \alpha}{(1 + |\alpha|^2)^2} \frac{d^2 \beta}{(1 + |\beta|^2)^2} e^{-\beta \frac{\partial}{\partial \alpha}} e^{\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{\beta}}} f_A(\beta, \bar{\beta}) e^{-\bar{\beta} \frac{\partial}{\partial \alpha}} e^{\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{\beta}}} f_B(\beta, \bar{\beta}) |\langle \beta | \alpha \rangle|^2 \\
&\quad \downarrow \alpha, \bar{\alpha} \text{ について部分積分} \\
&= \frac{2j+1}{4\pi} 4^2 \int d^2 \alpha d^2 \beta \frac{1}{(1 + |\alpha + \beta|^2)^2} \frac{1}{(1 + |\beta|^2)^2} |\langle \beta | \alpha + \beta \rangle|^2 e^{\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{\beta}}} f_A(\beta, \bar{\beta}) e^{\bar{\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{\beta}}} f_B(\beta, \bar{\beta}). \tag{3.5.21}
\end{aligned}$$

ここで (3.5.20) より,

$$\begin{aligned}
&|\langle \beta | \alpha + \beta \rangle|^2 \\
&= \langle \beta | \alpha + \beta \rangle \langle \alpha + \beta | \beta \rangle \\
&= \left[\frac{1}{(1 + |\beta|^2)(1 + |\alpha + \beta|^2)} \right]^{2j} [1 + \bar{\beta}(\alpha + \beta)]^{2j} [1 + \beta(\bar{\alpha} + \bar{\beta})]^{2j}. \tag{3.5.22}
\end{aligned}$$

であり, $e^{\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{\beta}}}$ と $e^{\bar{\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{\beta}}}$ が作用して, $\beta \rightarrow \beta - \alpha$ と $\bar{\beta} \rightarrow \bar{\beta} - \bar{\alpha}$ のようにずれることを考えると,

$$\begin{aligned}
&(3.5.22) \\
&\quad \downarrow \beta \rightarrow \beta - \alpha \text{ とする} \\
&\rightarrow \left\{ \frac{[1 + \bar{\beta}(\alpha + \beta - \alpha)][1 + (\beta - \alpha)(\bar{\alpha} + \bar{\beta})]}{[1 + \bar{\beta}(\beta - \alpha)][1 + (\bar{\alpha} + \bar{\beta})(\alpha + \beta - \alpha)]} \right\}^{2j}
\end{aligned}$$

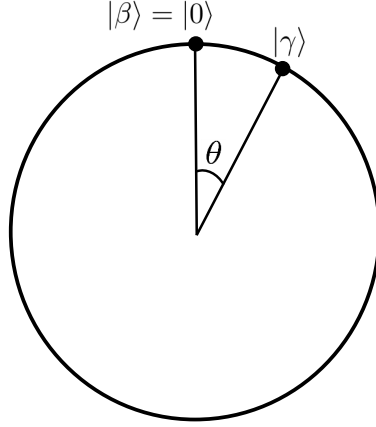


図 3.3: 状態間の角度.

$$\begin{aligned}
& \downarrow \bar{\beta} \rightarrow \bar{\beta} - \bar{\alpha} \text{ とする} \\
& \rightarrow \left\{ \frac{[1 + (\bar{\beta} - \bar{\alpha})\beta][1 + (\beta - \alpha)(\bar{\alpha} + \bar{\beta} - \bar{\alpha})]}{[1 + (\bar{\beta} - \bar{\alpha})(\beta - \alpha)][1 + (\bar{\alpha} + \bar{\beta} - \bar{\alpha})\beta]} \right\}^{2j} \\
& = \left\{ \frac{[1 + (\bar{\beta} - \bar{\alpha})\beta][1 + (\beta - \alpha)\bar{\beta}]}{(1 + |\beta - \alpha|^2)(1 + |\beta|^2)} \right\}^{2j} \tag{3.5.23}
\end{aligned}$$

となる. $\gamma = \beta - \alpha$ とおくと,

$$(3.5.23) = \left[\frac{(1 + \bar{\gamma}\beta)(1 + \gamma\bar{\beta})}{(1 + |\gamma|^2)(1 + |\beta|^2)} \right]^{2j} = |\langle\beta|\gamma\rangle|^2 \tag{3.5.24}$$

となり,

$$(3.5.21) = \frac{2j+1}{4\pi} 4^2 \int \frac{d^2\beta}{(1 + |\beta|^2)^2} \frac{d^2\gamma}{(1 + |\gamma|^2)^2} |\langle\beta|\gamma\rangle|^2 f_A(\beta, \bar{\gamma}) f_B(\beta, \bar{\gamma}) \tag{3.5.25}$$

がいえる. 非可換平面上の自由場におけるスター積では, 積分は1つだったので ((2.1.22) を参照), ここでは γ 積分を実行する. $|\beta\rangle$ を北極 $|0\rangle$ として, そこから θ だけ離れた点での状態を $|\gamma\rangle$ とする (図 3.3 を参照). このとき,

$$|\langle\beta|\gamma\rangle|^2 = \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{4j} \tag{3.5.26}$$

となり, これは $j \rightarrow \infty$ で $\theta = 0$ となって, 鋭いピークを持つ. よって, 次の量

$$\begin{aligned}
\frac{2j+1}{4\pi} 4 \int \frac{d^2\gamma}{(1 + |\gamma|^2)^2} |\langle 0|\gamma\rangle|^2 &= \frac{2j+1}{4\pi} \int d\theta d\varphi \sin \theta \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{4j} \\
&= \frac{2j+1}{2} \int_0^\varepsilon d\theta \, 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{4j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \downarrow \quad \cos \theta = x \text{ とおく} \\
& = 2(2j+1) \int_{\cos \frac{\varepsilon}{2}}^1 dx x^{4j+1} \\
& = \frac{2(2j+1)}{4j+2} \left[1 - \left(\cos \frac{\varepsilon}{2} \right)^{4j+2} \right] \\
& \downarrow \quad \cos \frac{\varepsilon}{2} < 1 \text{ より } \left(\cos \frac{\varepsilon}{2} \right)^j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \\
& \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 1
\end{aligned} \tag{3.5.27}$$

は δ 関数のように振る舞うことがわかる。よって,

$$\frac{4\pi}{2j+1} \text{tr}(AB) = 4 \int \frac{d^2\beta}{(1+|\beta|^2)^2} f_A(\beta, \bar{\beta}) f_B(\beta, \bar{\beta}) = \int d\Omega f_A(\Omega) f_B(\Omega) \tag{3.5.28}$$

であり, これと (3.5.3) から行列模型の作用における 2 次の項とスカラー ϕ^4 理論の作用における 2 次の項とが一致することがわかる。

次に, 相互作用項である 4 次の項について考える。スター積を北極で評価すると,

$$\begin{aligned}
(f_A \star f_B)(0,0) & \approx \sum_{p=0} \frac{(2j)^{-p}}{p!} \left[\frac{\partial^p}{\partial \alpha^p} \frac{\partial^p}{\partial \bar{\beta}^p} f_A(\alpha, \bar{\alpha}) f_B(\beta, \bar{\beta}) \right]_{\alpha=\beta=0} \\
& = e^{\frac{1}{2j} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{\beta}}} f_A(\alpha, \bar{\alpha}) f_B(\beta, \bar{\beta}) \Big|_{\alpha=\beta=0}
\end{aligned} \tag{3.5.29}$$

となる。[[$f_A \star f_B$](0,0)] * [[$f_C \star f_D$](0,0)] は部分積分を行っても, スター積から微分をなくすことができないので, 非可換平面と同様にファジー球面においても 4 次の項は可換空間上の理論と一致しない。非可換パラメーターは $\Theta \sim 1/j$ とわかる。可換極限では $\Theta \rightarrow 0$ となるが, 量子論において非可換性の効果は UV/IR anomaly として残る。

第4章 数値シミュレーションの結果と考察

ファジー球面上の場の理論の可換極限を考えるために、今回は行列模型を用いて1点相関関数、2点相関関数、連結な (connected) 4点相関関数の3つに注目して数値シミュレーションを行った。以下にその結果⁵と考察を示す。なお、相互作用がない自由場の場合は連続理論と一致することを確かめた。これは、作成したプログラムのコードが正しいか確認する意味もある。詳しくは付録Dを参照してほしい。

4.1 結果

ここでは2次元で相互作用のある場合について議論する。
相互作用がある場合、行列模型の作用は(3.2.1)より

$$S = \frac{1}{N} \text{tr} \left(-\frac{1}{2} [L_i, \Phi]^2 + \frac{\mu^2}{2} \Phi^2 + \frac{\lambda}{4} \Phi^4 \right)$$

であった。ここで、ファジー球面の半径は $R = 1$ とした。また、 $N = 2j + 1$ は行列サイズであり、第3章で見たように紫外のカットオフである。つまり、 N を大きくすることは紫外のカットオフを大きくすることに相当する。

行列 Φ の Berezin symbol と場 $\phi(\Omega)$ を対応させるためにここで、

$$\langle \Omega | \Phi | \Omega \rangle = \phi(\Omega) \quad (4.1.1)$$

と表記する。行列 Φ がくりこまれた行列 Φ_r を用いて

$$\Phi = \sqrt{Z(N)} \Phi_r \quad (4.1.2)$$

のように表されるとする。ここで、 $Z(N)$ は波動関数くりこみの因子であり、行列サイズ N に依存する。このとき、Berezin symbol もくりこまれて、

$$\varphi_r(\Omega) = \langle \Omega | \Phi_r | \Omega \rangle \quad (4.1.3)$$

と書ける。数値シミュレーションで計算する相関関数は、

$$\text{1点相関関数: } \langle \varphi(\Omega_1) \rangle, \quad (4.1.4a)$$

$$\text{2点相関関数: } \langle \varphi(\Omega_i) \varphi(\Omega_j) \rangle \quad (1 \leq i < j \leq 4), \quad (4.1.4b)$$

$$\text{4点相関関数: } \langle \varphi(\Omega_1) \varphi(\Omega_2) \varphi(\Omega_3) \varphi(\Omega_4) \rangle \quad (4.1.4c)$$

の3種類である。付録Cで示すように、

$$\langle \varphi(\Omega_1) \rangle = 0, \quad (4.1.5a)$$

$$\langle \varphi(\Omega_i) \varphi(\Omega_j) \rangle_c = \langle \varphi(\Omega_i) \varphi(\Omega_j) \rangle \quad (4.1.5b)$$

⁵本修士論文提出後に得られたいくつかの結果に内容を更新してある。

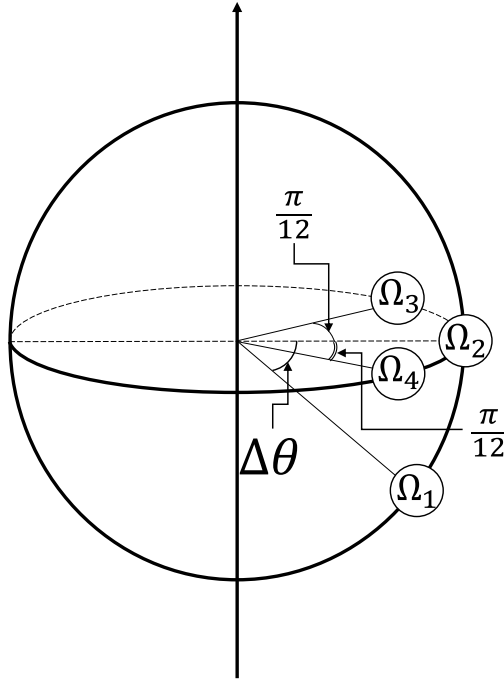


図 4.1: 球面上での点のとり方.

である. したがって, (4.1.4) と (4.1.5) から連結な 4 点相関関数は

$$\begin{aligned} \langle \varphi(\Omega_1)\varphi(\Omega_2)\varphi(\Omega_3)\varphi(\Omega_4) \rangle_c &= \langle \varphi(\Omega_1)\varphi(\Omega_2)\varphi(\Omega_3)\varphi(\Omega_4) \rangle - \langle \varphi(\Omega_1)\varphi(\Omega_2) \rangle \langle \varphi(\Omega_3)\varphi(\Omega_4) \rangle \\ &\quad - \langle \varphi(\Omega_1)\varphi(\Omega_3) \rangle \langle \varphi(\Omega_2)\varphi(\Omega_4) \rangle - \langle \varphi(\Omega_1)\varphi(\Omega_4) \rangle \langle \varphi(\Omega_2)\varphi(\Omega_3) \rangle \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

と書ける. すると, くりこまれた相関関数は

$$\langle \varphi(\Omega_1) \rangle = \sqrt{Z(N)} \langle \varphi_r(\Omega_1) \rangle, \quad (4.1.7a)$$

$$\langle \varphi(\Omega_i)\varphi(\Omega_j) \rangle = Z(N) \langle \varphi_r(\Omega_i)\varphi_r(\Omega_j) \rangle, \quad (4.1.7b)$$

$$\langle \varphi(\Omega_1)\varphi(\Omega_2)\varphi(\Omega_3)\varphi(\Omega_4) \rangle_c = Z(N)^2 \langle \varphi_r(\Omega_1)\varphi_r(\Omega_2)\varphi_r(\Omega_3)\varphi_r(\Omega_4) \rangle_c \quad (4.1.7c)$$

となる. このくりこまれた相関関数が行列サイズ N に依らなくなることを見る.

球面上の角度は,

$$\Omega_1 = \left(\frac{\pi}{2} + \Delta\theta, 0 \right), \quad \Omega_2 = \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right), \quad \Omega_3 = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{12} \right), \quad \Omega_4 = \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{12} \right) \quad (4.1.8)$$

であり, Ω_1 を Ω_2 から南極の方へ変化させ, 他の 3 点については固定した (図 4.1 を参照). なお, $\Delta\theta$ は 0.1 刻みで $0.3 \leq \Delta\theta \leq 1.5$ の範囲でとった.

4.1.1 節と 4.1.2 節で, λ と μ^2 をそれぞれ固定した場合の結果を示す. このとき, 異なる N についてのくりこまれた相関関数が, 波動関数くりこみによって一致するように固定していないパラメーター (μ^2 または λ) を選んだ. 波動関数くりこみのやり方は,

$$\log \langle \varphi(\Omega_1)\varphi(\Omega_2) \rangle = \log Z(N) + \log \langle \varphi_r(\Omega_1)\varphi_r(\Omega_2) \rangle \quad (4.1.9)$$

として, 2 つの異なる行列サイズ N, N' について, $\log [Z(N)/Z(N')] \equiv \alpha_{N' \rightarrow N}$ だけ行列サイズ N' の対数をとった 2 点相関関数をシフトさせた. 2 つの対数をとった 2 点相関関数の各 $\Delta\theta$ における

N	μ^2
24	-7.97
32	-11.5
40	-14.08

表 4.1: $\lambda = 1.0$ に固定したときの各 N に対する μ^2 の値.

$N' \rightarrow N$	$\alpha_{N' \rightarrow N}^{\lambda \text{ fixed}}$	$\delta\alpha_{N' \rightarrow N}^{\lambda \text{ fixed}}$	$\zeta_{N' \rightarrow N}^{\lambda \text{ fixed}}$	$(\zeta_{N' \rightarrow N}^{\lambda \text{ fixed}})^2$
24 \rightarrow 32	0.2334	0.0108	1.263	1.595
40 \rightarrow 32	-0.1489	0.0101	0.8617	0.7425

表 4.2: $\alpha_{N' \rightarrow N}^{\lambda \text{ fixed}}$, $\delta\alpha_{N' \rightarrow N}^{\lambda \text{ fixed}}$, $\zeta_{N' \rightarrow N}^{\lambda \text{ fixed}}$ と $(\zeta_{N' \rightarrow N}^{\lambda \text{ fixed}})^2$.

値の差の2乗が最小になるように最小二乗法を行い、シフトさせる値 $\alpha_{N' \rightarrow N}$ とその誤差 $\delta\alpha_{N' \rightarrow N}$ を決めた. また, この $\alpha_{N' \rightarrow N}$ から波動関数くりこみの因子の比 $Z(N)/Z(N')$ が

$$\frac{Z(N)}{Z(N')} = e^{\alpha_{N' \rightarrow N}} \equiv \zeta_{N' \rightarrow N} \quad (4.1.10)$$

であることがわかる.

4.1.1 λ を固定した場合

今回, 3つの行列サイズ $N = 24, 32, 40$ に関して相互作用項の係数を $\lambda = 1.0$ で固定して, μ^2 を表 4.1 にあるように選んだ. μ^2 の選び方は 4.2 節で考察する.

まず, 対数をとった2点相関関数 $\log\langle\varphi(\Omega_1)\varphi(\Omega_2)\rangle$ を考える. $N = 32$ のグラフに合うように $N = 24$ のグラフをシフトしたものが図 4.2 であり, $N = 32$ のグラフに合うように $N = 40$ のグラフをシフトしたものが図 4.3 である. シフトの値は, 表 4.2 にある $\alpha_{N' \rightarrow N}^{\lambda \text{ fixed}}$ である.

次に, 2点相関関数 $\langle\varphi(\Omega_1)\varphi(\Omega_2)\rangle$ を考える. $N = 32$ のグラフに合うように $N = 24$ のグラフを $\zeta_{24 \rightarrow 32}^{\lambda \text{ fixed}} = 1.263$ 倍したものが図 4.4 であり, $N = 32$ のグラフに合うように $N = 40$ のグラフを $\zeta_{40 \rightarrow 32}^{\lambda \text{ fixed}} = 0.8617$ 倍したものが図 4.5 である. ここで, $\zeta_{N' \rightarrow N}^{\lambda \text{ fixed}}$ は波動関数くりこみの因子の比であり, 表 4.2 で与えられている. 図 4.4 と図 4.5 を比べると, 行列サイズが大きくなるにつれて中心値が一致する様子が見て取れる.

最後に, 連結な4点相関関数 $\langle\varphi(\Omega_1)\varphi(\Omega_2)\varphi(\Omega_3)\varphi(\Omega_4)\rangle_c$ について見る. $N = 32$ のグラフに合うように $N = 24$ のグラフを $(\zeta_{24 \rightarrow 32}^{\lambda \text{ fixed}})^2 = 1.595$ 倍したものが図 4.6 であり, $N = 32$ のグラフに合うように $N = 40$ のグラフを $(\zeta_{40 \rightarrow 32}^{\lambda \text{ fixed}})^2 = 0.7425$ 倍したものが図 4.7 である.

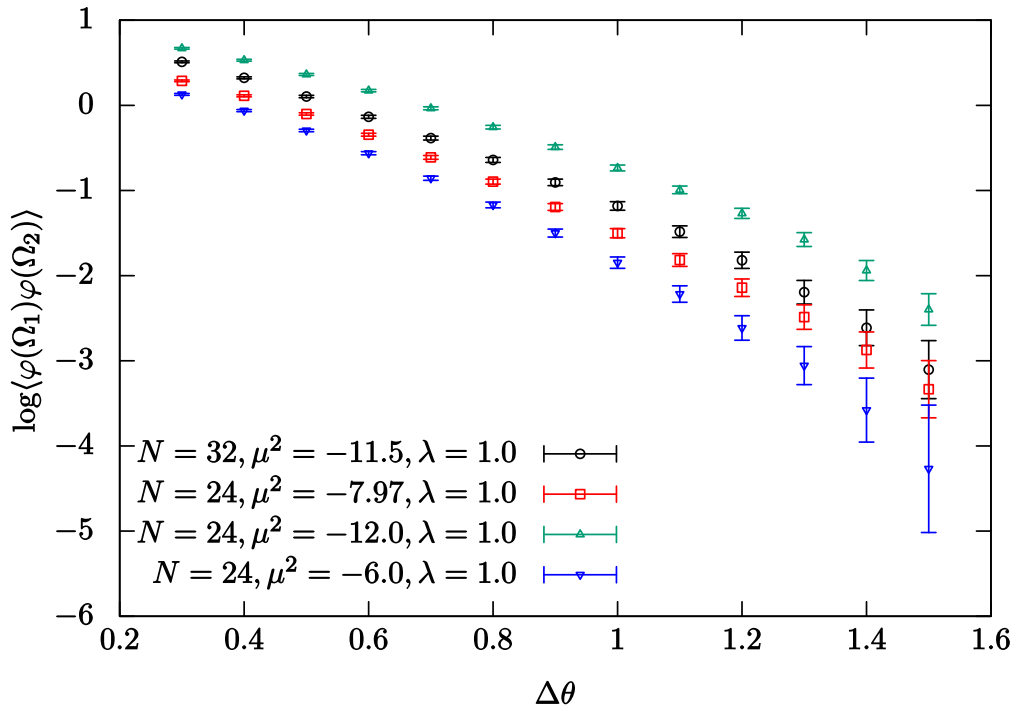


図 4.2: $N = 32$ についての対数をとった 2 点相関関数のグラフに合うように, $N = 24$ のグラフを $\alpha_{24 \rightarrow 32}^{\lambda \text{ fixed}}$ だけ縦軸の方向にシフトさせたもの.

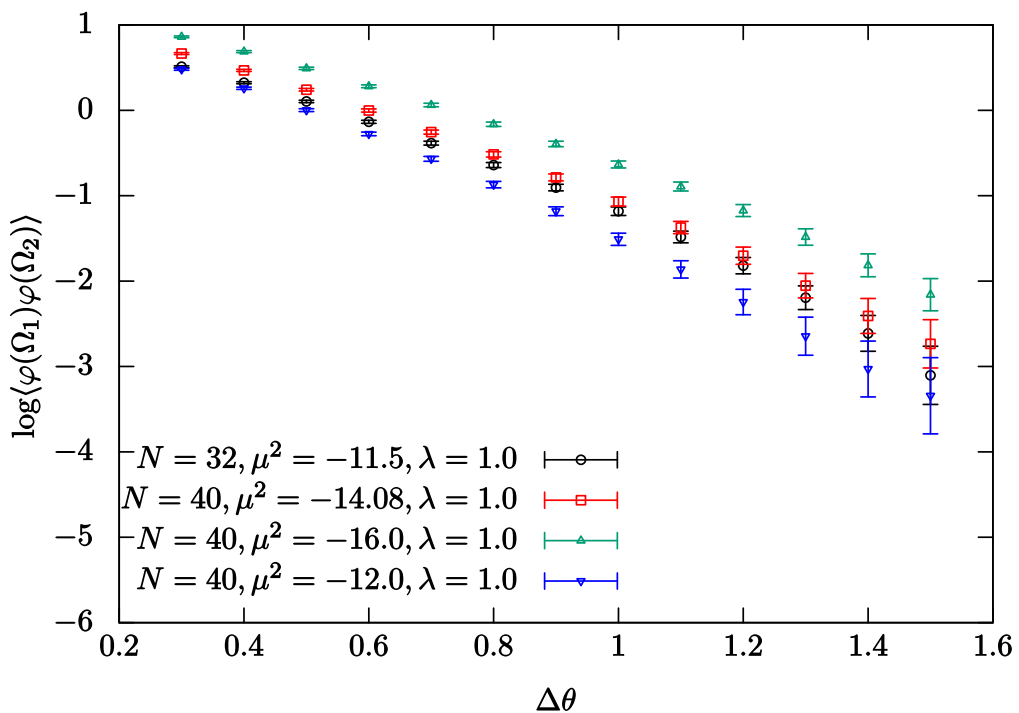


図 4.3: $N = 32$ についての対数をとった 2 点相関関数のグラフに合うように, $N = 40$ のグラフを $\alpha_{40 \rightarrow 32}^{\lambda \text{ fixed}}$ だけ縦軸の方向にシフトさせたもの.

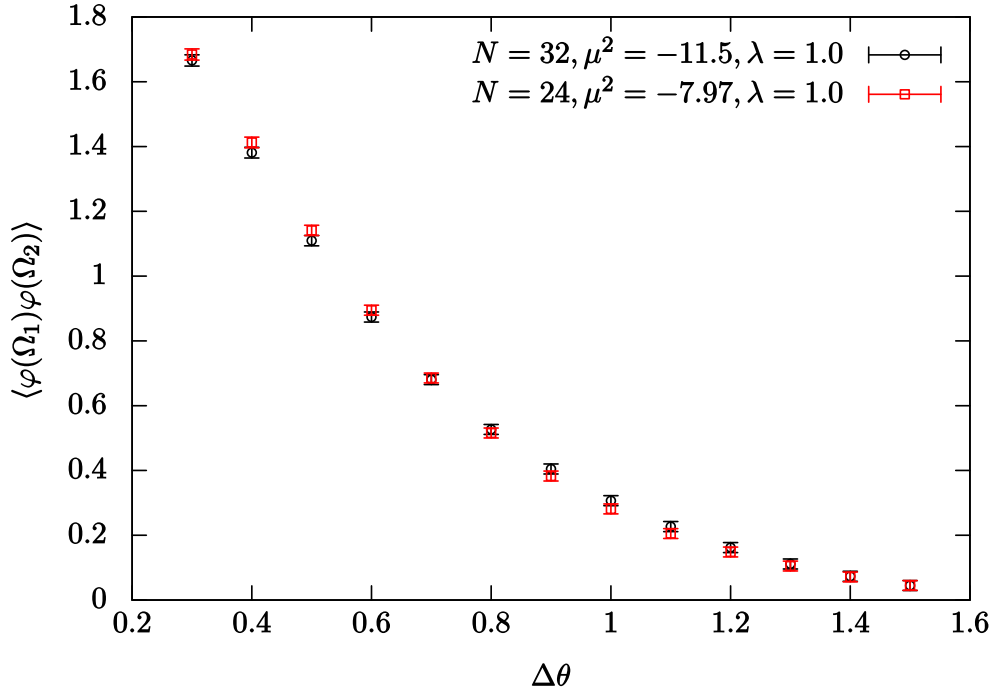


図 4.4: $N = 32$ についての 2 点相関関数のグラフに合うように, $N = 24$ のグラフを $\zeta_{24 \rightarrow 32}^{\lambda \text{ fixed}}$ 倍したものの.

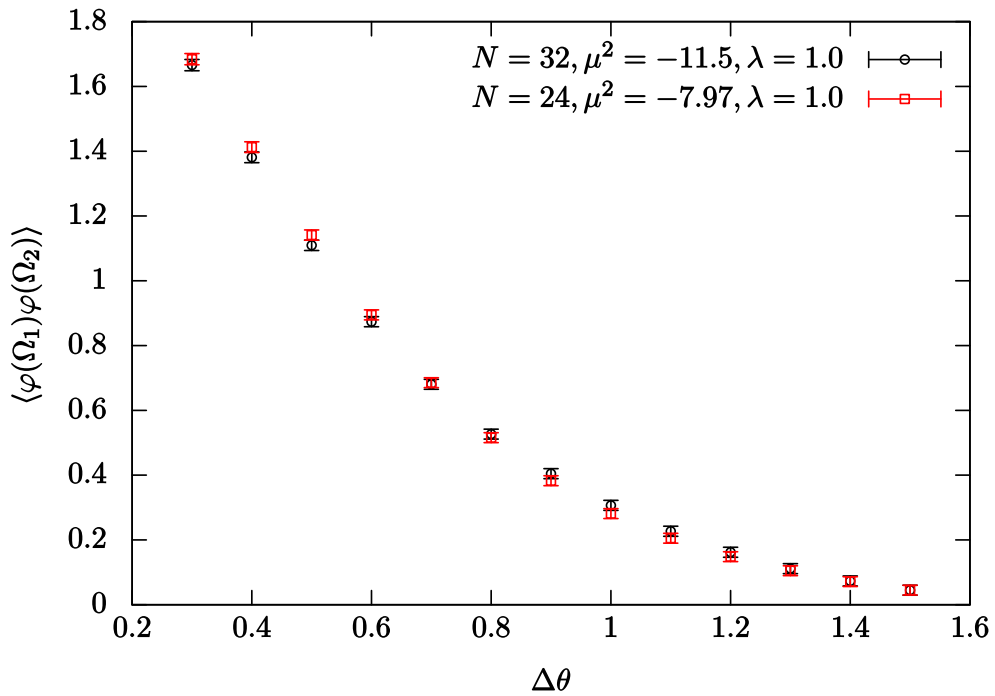


図 4.5: $N = 32$ についての 2 点相関関数のグラフに合うように $N = 40$ のグラフを $\zeta_{40 \rightarrow 32}^{\lambda \text{ fixed}}$ 倍したものの.

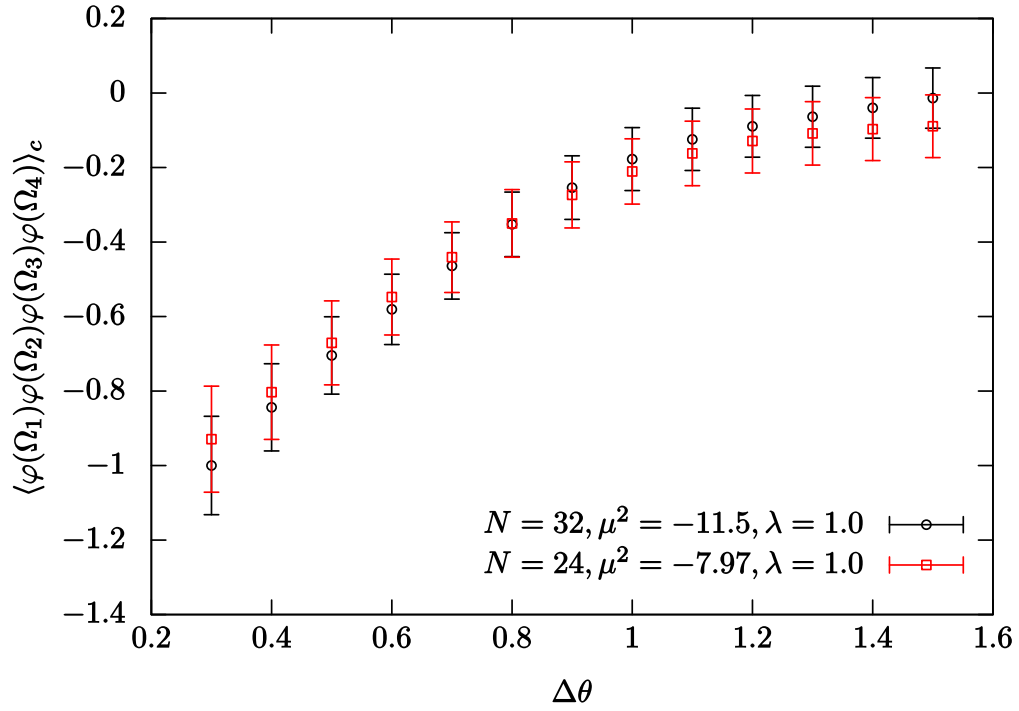


図 4.6: $N = 32$ についての連結な 4 点相関関数のグラフに合うように, $N = 24$ のグラフを $(\zeta_{24 \rightarrow 32}^{\lambda \text{ fixed}})^2$ 倍したもの.

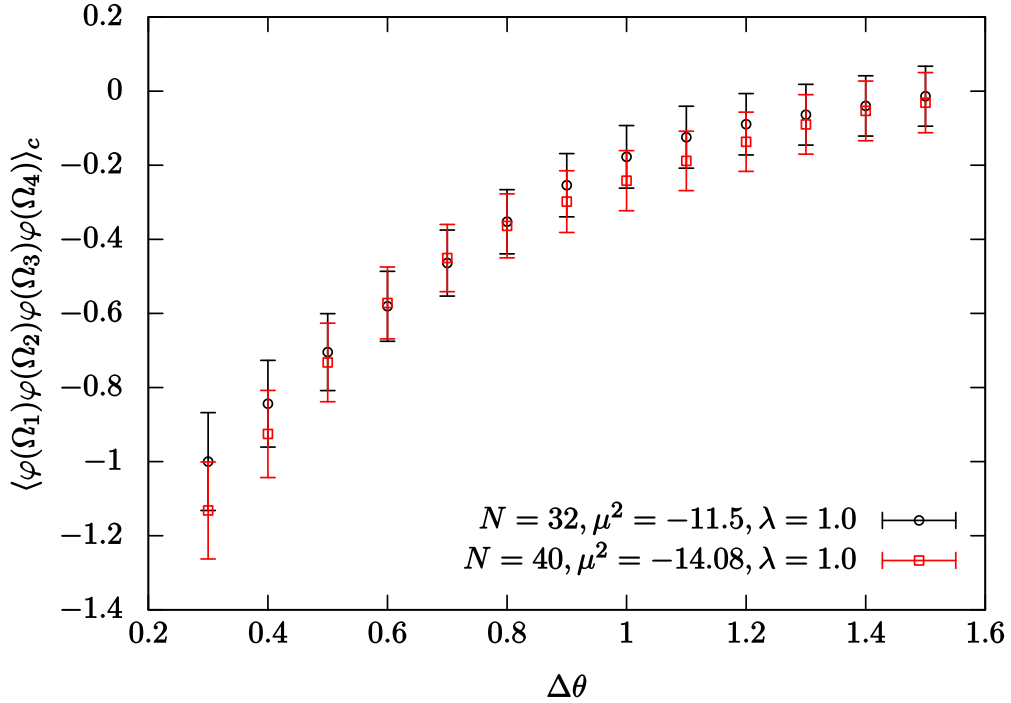


図 4.7: $N = 32$ についての連結な 4 点相関関数のグラフに合うように, $N = 40$ のグラフを $(\zeta_{40 \rightarrow 32}^{\lambda \text{ fixed}})^2$ 倍したもの.

N	λ
32	1.0
40	1.234

表 4.3: $\mu^2 = -6.0$ に固定したときの各 N に対する λ の値.

$N' \rightarrow N$	$\alpha_{N' \rightarrow N}^{\mu^2 \text{ fixed}}$	$\delta\alpha_{N' \rightarrow N}^{\mu^2 \text{ fixed}}$	$\zeta_{N' \rightarrow N}^{\mu^2 \text{ fixed}}$	$\left(\zeta_{N' \rightarrow N}^{\mu^2 \text{ fixed}}\right)^2$
32 \rightarrow 40	0.122	0.007	1.129	1.275

表 4.4: $\alpha_{N' \rightarrow N}^{\mu^2 \text{ fixed}}$, $\delta\alpha_{N' \rightarrow N}^{\mu^2 \text{ fixed}}$, $\zeta_{N' \rightarrow N}^{\mu^2 \text{ fixed}}$ と $\left(\zeta_{N' \rightarrow N}^{\mu^2 \text{ fixed}}\right)^2$.

4.1.2 μ^2 を固定した場合

ここでは, $N = 32, 40$ に関して質量項の係数を $\mu^2 = -6.0$ で固定して, λ を表 4.3 にあるように選んだ.

2点相関関数 $\langle\varphi(\Omega_1)\varphi(\Omega_2)\rangle$ について, $N = 40$ のグラフに合うように $N = 32$ のグラフを $\zeta_{32 \rightarrow 40}^{\mu^2 \text{ fixed}} = 1.129$ 倍したものが図 4.8 であり, 連結な 4点相関関数 $\langle\varphi(\Omega_1)\varphi(\Omega_2)\varphi(\Omega_3)\varphi(\Omega_4)\rangle_c$ について, $N = 40$ のグラフに合うように $N = 32$ のグラフを $\left(\zeta_{32 \rightarrow 40}^{\mu^2 \text{ fixed}}\right)^2 = 1.275$ 倍したものが図 4.9 である. どちらのグラフも波動関数くりこみをすることで一致することが見て取れる.

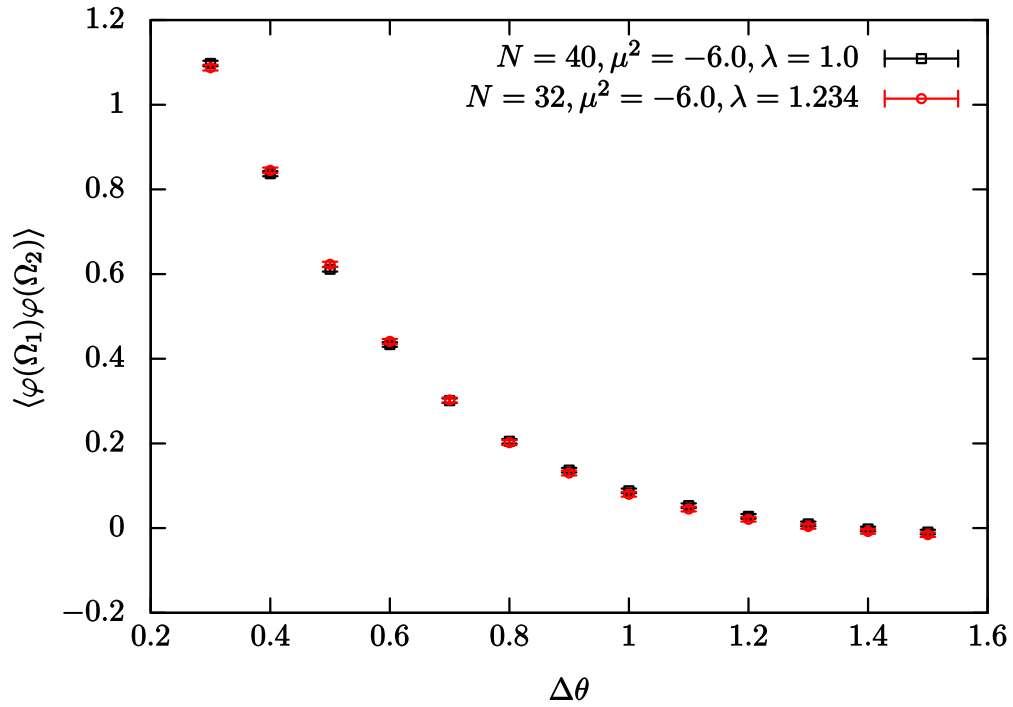


図 4.8: $N = 40$ についての 2 点相関関数のグラフに合うように, $N = 32$ のグラフを $\zeta_{32 \rightarrow 40}^{\mu^2 \text{ fixed}}$ 倍したものの。

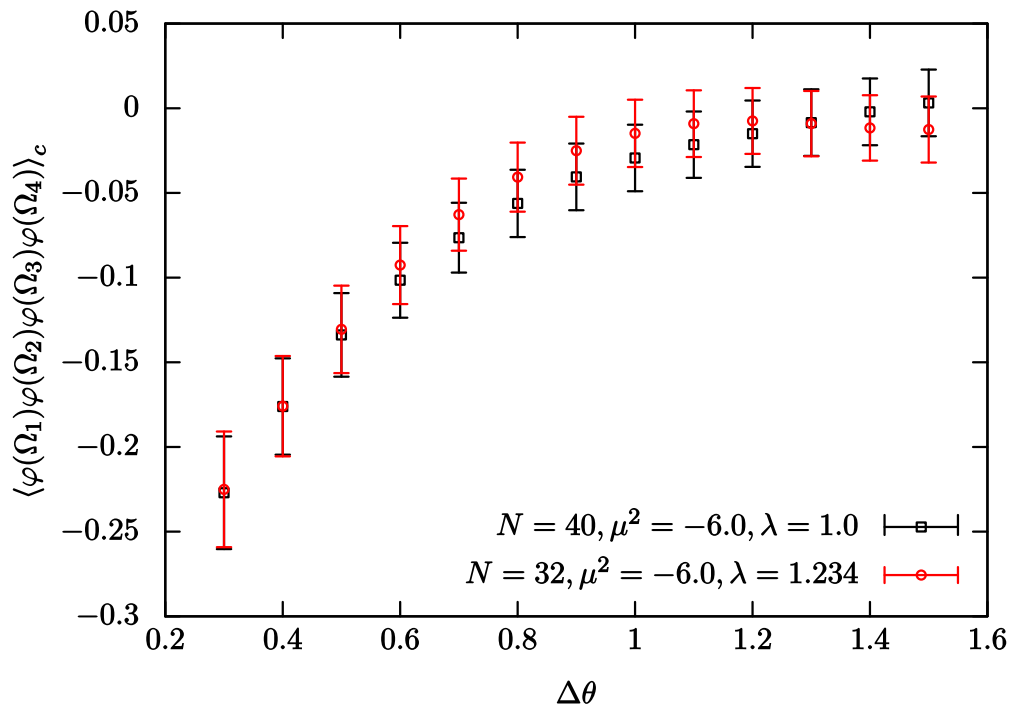


図 4.9: $N = 40$ についての連結な 4 点相関関数のグラフに合うように, $N = 32$ のグラフを $(\zeta_{32 \rightarrow 40}^{\mu^2 \text{ fixed}})^2$ 倍したものの。

4.2 考察

行列サイズの異なる対数をとった2点相関関数のグラフを縦軸方向のシフトにより重ねることができた。ここから $Z(N)$ の比がわかり、対数をとらない2点相関関数や連結な4点相関関数についても異なる行列サイズのグラフ同士が重なる様子を見ることができた。

今回、グラフを示す際に $0 \leq \Delta\theta \leq 0.2$ の範囲は除いた。この理由としては、紫外のカットオフ(行列サイズに依存)による影響を考慮したためである。行列サイズ N を大きくすれば、 $\Delta\theta$ が小さいところも採用できるようになるはずである。

次に μ^2 について考える。以下では、 N の関数として $\mu^2(N)$ と表す。 $\mu^2(24)$ と $\mu^2(32)$ については、様々な値について相関関数を調べ、4.1.1 節で示した図 4.4 や図 4.6 のような一致が見られる値を $N = 24, 32$ それぞれに対する $\mu^2(N)$ の値とした。そして、関数形を

$$\mu^2(N) = \mu_0^2 - a \log N \quad (4.2.1)$$

と仮定すると、

$$\begin{aligned} \mu^2(24) - \mu^2(32) &= -7.97 + 11.5 = 3.53 \\ &= a \log \frac{32}{24} \\ a &= \frac{3.53}{\log(4/3)} \simeq 12.3 \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

となる。ここから、 $\mu^2(40)$ は

$$\begin{aligned} \mu^2(32) - \mu^2(40) &= a \log \frac{40}{32} \\ -11.5 - \mu^2(40) &= 12.3 \log \frac{5}{4} \simeq 2.74 \\ \mu^2(40) &= -11.5 - 2.74 \simeq -14.2 \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

であると予想される。これは図 4.5 や図 4.7 で一致が見られた $\mu^2(40) = -14.08$ に近いものの異なる値となっている。したがって、 $\mu^2(N)$ には $N \rightarrow \infty$ で消えるような補正項が含まれていると考えられる。

第5章 まとめと展望

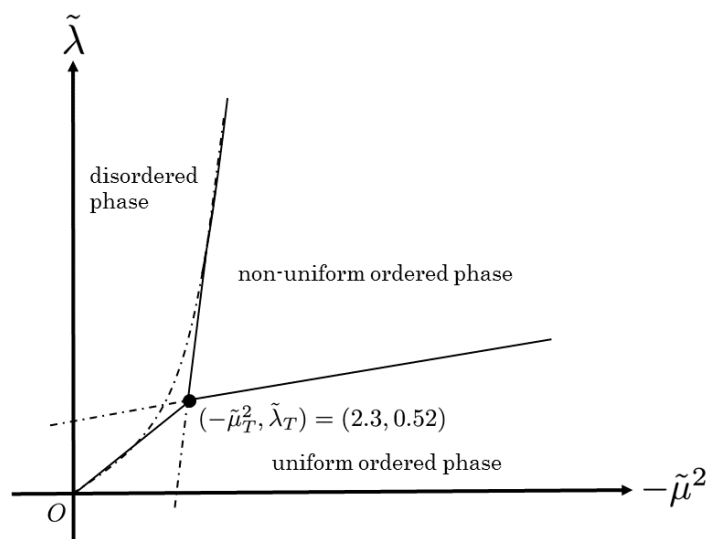


図 5.1: 相図 ([2] Figure 6 より. $\tilde{\lambda} \equiv \lambda/N$, $\tilde{\mu}^2 \equiv \mu^2/N^{3/2}$).

本研究では、ファジー球面上の場の理論における相関関数を Berezin symbol を用いた数値シミュレーションにより計算した。シミュレーションではハイブリッドモンテカルロ法（付録 F.1 節を参照）を用いた。

付録 D や付録 E.2 に示したように相互作用がない場合は 2 次元と 3 次元で、シミュレーションにより計算された 2 点相関関数と連続理論の 2 点相関関数が一致することを確認したので、プログラムのコードが正しいことが保証された。

4.1.1 節で示したように、相互作用があって λ を固定した場合、異なる行列サイズの 2 点相関関数から波動関数くりこみの因子 $Z(N)$ の比がわかり、これを用いて連結な 4 点相関関数のグラフを重ねることができた。このことから、波動関数くりこみを行えば 1 つのパラメーター（このときは μ^2 ）の調整をするだけで、くりこみができることが示唆された。4.1.2 節では、 μ^2 を固定し λ を調整して、4.1.1 節と同様のことを行った。以上 2 つの結果から、波動関数くりこみを行えば 1 つのパラメーター（ μ^2 または λ ）の調整をするだけで、くりこみができることが強く示唆される。

UV/IR anomaly の存在により、ファジー球面上の場の理論がくりこみできるかどうかは自明ではなかったので、ファジー球面上の場の理論も通常の場合の理論のようにくりこめて、well-defined であることが強く示唆される。

さらに、図 5.1 のような相図が [2] で報告されている。今回調べた (μ^2, λ) の組は図 5.1 における disordered phase に存在している。これは確かに 1 点相関関数が 0 になることと合致している。

今後の課題は以下のものを調べることである。

- $Z(N)$ の関数形

μ^2 については

$$\mu^2(N) = \mu_0^2 - a \log N + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

という関数形をとることが示唆されたが、 $Z(N)$ がどのような関数形を取るかを調べるには、より多くの N について調べなければいけない。

- 異なる相でのくりこみ

図 5.1 における non-uniform ordered phase や uniform ordered phase にある (μ^2, λ) の組でもくりこみができるかどうか調べたい。

- 相転移線直上での振る舞い

図 5.1 の相転移線直上で、通常の共形場理論 (Conformal field theory: CFT) と同じになるかどうかにも興味がある。

- 非可換性の効果

今回の結果から、ファジー球面上の場の理論が通常の場合の理論のようくりこみができることが強く示唆されたが、ファジー球面上の場の理論と対応する S^2 上の場の理論の相関関数を比較することにより、非可換性の効果がどのように見えるのかを調べたい。

付録A 式の導出

ここでは、本文中に出てきた式の導出を与える。

A.1 3.3節

A.1.1 (3.3.5)

まず、次のものを考える。以下では、非可換球面調和関数 $\hat{Y}_{lm}^{[j]}$ を \hat{Y}_{lm} と略記する。

$$\begin{aligned}
 \frac{\lambda}{4} \frac{1}{2j+1} \text{tr}(\Phi^4) &= \sum_{l_1, \dots, l_4} \sum_{m_1, \dots, m_4} \phi_{l_1 m_1} \cdots \phi_{l_4 m_4} \frac{\lambda}{4} \frac{1}{2j+1} \text{tr}(\hat{Y}_{l_1 m_1} \cdots \hat{Y}_{l_4 m_4}), \quad (\text{A.1.1}) \\
 V(l_1, m_1; \dots; l_4, m_4) &\equiv \frac{\lambda}{4} \frac{1}{2j+1} \text{tr}(\hat{Y}_{l_1 m_1} \hat{Y}_{l_2 m_2} \hat{Y}_{l_3 m_3} \hat{Y}_{l_4 m_4}) \\
 &\downarrow (3.1.12) \\
 &= \frac{\lambda}{4} \sum_{l, l'} \sum_{m, m'} \hat{C}_{l_1 m_1}^{l m} \hat{C}_{l_2 m_2}^{l' m'} \hat{C}_{l_3 m_3}^{l m} \hat{C}_{l_4 m_4}^{l' m'} \frac{1}{2j+1} \text{tr}(\hat{Y}_{lm} \hat{Y}_{l'm'}) \\
 &\downarrow (3.1.10), (3.1.11) \\
 &= \frac{\lambda}{4} \sum_{l, l'} \sum_{m, m'} \hat{C}_{l_1 m_1}^{l m} \hat{C}_{l_2 m_2}^{l' m'} \hat{C}_{l_3 m_3}^{l m} \hat{C}_{l_4 m_4}^{l' m'} (-1)^m \delta_{l, l'} \delta_{-m, m'} \\
 &= \frac{\lambda}{4} \sum_{l', m'} (-1)^{m'} \hat{C}_{l_1 m_1}^{l' -m'} \hat{C}_{l_2 m_2}^{l' -m'} \hat{C}_{l_3 m_3}^{l' m'} \hat{C}_{l_4 m_4}^{l' m'} \\
 &\downarrow (3.1.13) \\
 &= \frac{\lambda}{4} (2j+1) \prod_{i=1}^4 \sqrt{2l_i + 1} \\
 &\quad \times \sum_{l', m'} (-1)^{m'} C_{l_1 m_1}^{l' -m'} C_{l_2 m_2}^{l' -m'} C_{l_3 m_3}^{l' m'} C_{l_4 m_4}^{l' m'} \begin{Bmatrix} l_1 & l_2 & l' \\ j & j & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l_3 & l_4 & l' \\ j & j & j \end{Bmatrix} \\
 &\downarrow (\text{B.0.1}) \\
 &= \frac{\lambda}{4} (2j+1) (-1)^{\sum_{i=1}^4 l_i} \prod_{i=1}^4 \sqrt{2l_i + 1} \sum_{l, m} (-1)^m (2l+1) \\
 &\quad \times \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_3 & l_4 & l \\ m_3 & m_4 & -m \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 & l_2 & l' \\ j & j & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l_3 & l_4 & l \\ j & j & j \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.1.2})
 \end{aligned}$$

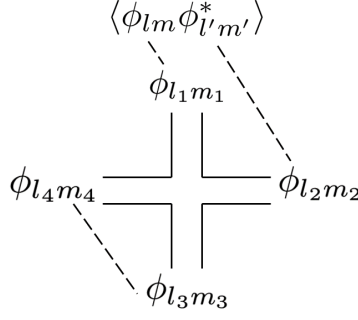


図 A.1: プラナーの contract.

A.1.2 (3.3.6)

図 A.1 では ϕ_{lm} と $\phi_{l_1 m_1}$, $\phi_{l'm'}^*$ と $\phi_{l_2 m_2}$, $\phi_{l_3 m_3}$ と $\phi_{l_4 m_4}$ を contract させているが, 8 通り全てが同じ寄与になる.

$$\begin{aligned}
& 8 \sum_{l_1, \dots, l_4} \sum_{m_1, \dots, m_4} (-1)^m \frac{\delta_{l_1, l} \delta_{m_1, -m}}{l_1(l_1+1) + \mu^2} \frac{\delta_{l', l_2} \delta_{m', m_2}}{l'(l'+1) + \mu^2} (-1)^{m_4} \frac{\delta_{l_3, l_4} \delta_{m_3, -m_4}}{l_3(l_3+1) + \mu^2} \\
& \quad \times \frac{\lambda}{4} (2j+1) (-1)^{\sum_{i=1}^4 l_i} \prod_{i=1}^4 \sqrt{2l_i+1} \sum_{l'', m''} (-1)^{m''} (2l''+1) \\
& \quad \quad \times \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l'' \\ m_1 & m_2 & m'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_3 & l_4 & l'' \\ m_3 & m_4 & -m'' \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 & l_2 & l'' \\ j & j & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l_3 & l_4 & l'' \\ j & j & j \end{Bmatrix} \\
= & 2\lambda(2j+1) \frac{(-1)^m}{l(l+1) + \mu^2} \frac{\sqrt{(2l+1)(2l'+1)}}{l'(l'+1) + \mu^2} \sum_{l_3, m_3} \frac{(-1)^{-m_3}}{l_3(l_3+1) + \mu^2} (-1)^{l+l'+2l_3} (2l_3+1) \\
& \quad \times \sum_{l'', m''} (-1)^{m''} (2l''+1) \begin{pmatrix} l & l' & l'' \\ -m & m' & m'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_3 & l_3 & l'' \\ m_3 & -m_3 & -m'' \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} l & l' & l'' \\ j & j & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l_3 & l_3 & l'' \\ j & j & j \end{Bmatrix} \\
\downarrow & \text{(B.0.3)} \\
= & 2\lambda(2j+1) \frac{(-1)^m}{l_1(l_1+1) + \mu^2} (-1)^{l+l'} \frac{\sqrt{(2l+1)(2l'+1)}}{l'(l'+1) + \mu^2} \sum_{l_3, m_3} \frac{\sqrt{2l_3+1}}{l_3(l_3+1) + \mu^2} (-1)^{l''+m''+l_3-m_3} \\
& \quad \times C_{l_3-m_3}^{l_3-m_3} l'' m'' \delta_{m'', 0} \begin{pmatrix} l & l' & l'' \\ -m & m' & m'' \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} l & l' & 0 \\ j & j & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l_3 & l_3 & 0 \\ j & j & j \end{Bmatrix} \\
\downarrow & \text{(B.0.4), (B.0.5)} \\
= & 2\lambda(2j+1) \frac{(-1)^m}{l(l+1) + \mu^2} \frac{\delta_{l, l'} \delta_{m, -m'}}{l'(l'+1) + \mu^2} (-1)^{4l+l'} \sqrt{2l'+1} \\
& \quad \times \sum_{l_3} \frac{2l_3+1}{l_3(l_3+1) + \mu^2} (-1)^{l_3} \sqrt{2l_3+1} \begin{Bmatrix} l & l' & 0 \\ j & j & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l_3 & l_3 & 0 \\ j & j & j \end{Bmatrix} \\
\downarrow & \text{(B.0.9), (B.0.10)} \\
= & \left[2\lambda(2j+1) \delta_{l, l'} \delta_{m, -m'} (-1)^m \sum_{l_3} \frac{2l_3+1}{l_3(l_3+1) + \mu^2} \right] \times \frac{1}{l(l+1) + \mu^2} \frac{1}{l'(l'+1) + \mu^2}
\end{aligned}$$

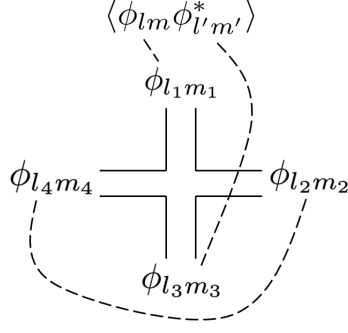


図 A.2: 非プラナーの contract.

$$= \left(\Gamma_{\text{planar}}^{(2)} \right)_{mm'}^{l'} \times \frac{1}{l(l+1) + \mu^2} \frac{1}{l'(l'+1) + \mu^2}. \quad (\text{A.1.3})$$

ここで, $l, l', l'', l_i, m, m', m'', m_i$ ($i = 1, \dots, 4$) は整数で, j は半整数であることに注意する.

A.1.3 (3.3.7)

図 A.2 では ϕ_{lm} と $\phi_{l_1 m_1}$, $\phi_{l'm'}^*$ と $\phi_{l_3 m_3}$, $\phi_{l_2 m_2}$ と $\phi_{l_4 m_4}$ を contract させているが, ϕ_{lm} と contract する $\phi_{l_i m_i}$ ($i = 1, \dots, 4$) を決めると, $\phi_{l'm'}^*$ と contract するものは決まってしまうので, この場合は同じ寄与になるものは 4 つしかない.

$$\begin{aligned}
& 4 \sum_{l_1, \dots, l_4} \sum_{m_1, \dots, m_4} (-1)^m \frac{\delta_{l_1, l} \delta_{m_1, -m}}{l_1(l_1+1) + \mu^2} \frac{\delta_{l', l_3} \delta_{m', m_3}}{l_3(l_3+1) + \mu^2} (-1)^{m_4} \frac{\delta_{l_2, l_4} \delta_{m_2, -m_4}}{l_2(l_2+1) + \mu^2} \\
& \times \frac{\lambda}{4} (2j+1) (-1)^{\sum_{i=1}^4 l_i} \prod_{i=1}^4 \sqrt{2l_i+1} \sum_{l'', m''} (-1)^{m''} (2l''+1) \\
& \times \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l'' \\ m_1 & m_2 & m'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_3 & l_4 & l'' \\ m_3 & m_4 & -m'' \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 & l_2 & l'' \\ j & j & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l_3 & l_4 & l'' \\ j & j & j \end{Bmatrix} \\
= & \lambda (2j+1) \frac{(-1)^m}{l(l+1) + \mu^2} \frac{\sqrt{(2l+1)(2l'+1)}}{l'(l'+1) + \mu^2} \sum_{l_4, m_4} \frac{(-1)^{-m_4}}{l_4(l_4+1) + \mu^2} (-1)^{l+l'+2l_4} (2l_4+1) \\
& \times \sum_{l'', m''} (-1)^{m''} (2l''+1) \begin{pmatrix} l & l_4 & l'' \\ -m & -m_4 & m'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l' & l_4 & l'' \\ m' & m_4 & -m'' \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} l & l_4 & l'' \\ j & j & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l' & l_4 & l'' \\ j & j & j \end{Bmatrix} \\
\downarrow & (\text{B.0.6}), (\text{B.0.7}) \\
= & \lambda (2j+1) \frac{(-1)^m}{l(l+1) + \mu^2} \frac{\sqrt{(2l+1)(2l'+1)}}{l'(l'+1) + \mu^2} \sum_{l_4, m_4} \frac{2l_4+1}{l_4(l_4+1) + \mu^2} (-1)^{m+l+l'+2l_4} \\
& \times \sum_{l'', m''} (-1)^{2l+l'+3l''+3l_4+m''} \frac{2l''+1}{2l_4+1} C_{l'' m''}^{l_4 m_4}{}_{l-m} C_{l'' m''}^{l_4 m_4}{}_{l'-m'} \begin{Bmatrix} l & l_4 & l'' \\ j & j & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l' & l_4 & l'' \\ j & j & j \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \downarrow \text{(B.0.8)} \\
& = \lambda(2j+1) \frac{(-1)^m}{l(l+1) + \mu^2} \frac{1}{l'(l'+1) + \mu^2} \sqrt{\frac{2l'+1}{2l+1}} \delta_{l,l'} \delta_{m,-m'} (-1)^{m+3l+2l'} \\
& \quad \times \sum_{l_4, l''} \frac{2l_4+1}{l_4(l_4+1) + \mu^2} (2l''+1) (-1)^{5l_4+l''} \begin{Bmatrix} l & l_4 & l'' \\ j & j & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l' & l_4 & l'' \\ j & j & j \end{Bmatrix} \\
& \downarrow \text{(B.0.11)} \\
& = \left[\lambda(2j+1) \delta_{l,l'} \delta_{m,-m'} (-1)^m \sum_{l_4} (-1)^{l+l_4+2j} \frac{(2l_4+1)(2j+1)}{l_4(l_4+1) + \mu^2} \begin{Bmatrix} j & j & l \\ j & j & l_4 \end{Bmatrix} \right] \\
& \quad \times \frac{1}{l(l+1) + \mu^2} \frac{1}{l'(l'+1) + \mu^2} \sqrt{\frac{2l'+1}{2l+1}} \\
& = \left(\Gamma_{\text{nonplanar}}^{(2)} \right)_{mm'}^{ll'} \times \frac{1}{l(l+1) + \mu^2} \frac{1}{l'(l'+1) + \mu^2} \sqrt{\frac{2l'+1}{2l+1}}. \tag{A.1.4}
\end{aligned}$$

A.2 3.4 節

A.2.1 (3.4.5)

$$\begin{aligned}
\langle \Omega_1 | \Omega_2 \rangle & = \sum_{r=-j}^j \binom{2j}{j+r} \left(\cos \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} \right)^{j+r} \left(\sin \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} \right)^{j-r} e^{i(j-r)(\varphi_2 - \varphi_1)} \langle jr | jr \rangle \\
& = \sum_{r=-j}^j \binom{2j}{j+r} \left(\cos \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} \right)^{j+r} \left(e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} \sin \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} \right)^{j-r} \\
& = \left[\cos \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} + \sin \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} \right]^{2j}. \tag{A.2.1}
\end{aligned}$$

A.2.2 (3.4.6)

$\langle \Omega_1 | \Omega_2 \rangle$ の 2 乗を考える.

$$\begin{aligned}
|\langle \Omega_1 | \Omega_2 \rangle|^2 & = \left\{ \left[\cos \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} + \sin \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} \right]^{2j} \right\}^2 \\
& = \left[\cos^2 \frac{\theta_1}{2} \cos^2 \frac{\theta_2}{2} + \sin^2 \frac{\theta_1}{2} \sin^2 \frac{\theta_2}{2} + 2 \cos \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} \sin \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} \right]^{2j} \\
& = \left[\frac{1 + \cos \theta_1}{2} \frac{1 + \cos \theta_2}{2} + \frac{1 - \cos \theta_1}{2} \frac{1 - \cos \theta_2}{2} + \frac{\sin \theta_1 \sin \theta_2}{4} \cdot 2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \right]^{2j} \\
& = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \{ \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \} \right]^{2j} \\
& = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \chi \right)^{2j} \\
& = \left(\cos^2 \frac{\chi}{2} \right)^{2j}. \tag{A.2.2}
\end{aligned}$$

したがって,

$$|\langle \Omega_1 | \Omega_2 \rangle| = \left(\cos \frac{\chi}{2} \right)^{2j} \quad (\text{A.2.3})$$

となる. なお,

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 &= (\sin \theta_1 \cos \varphi_1, \sin \theta_1 \sin \varphi_1, \cos \theta_1) \cdot (\sin \theta_2 \cos \varphi_2, \sin \theta_2 \sin \varphi_2, \cos \theta_2) \\ &= \sin \theta_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_2 \cos \varphi_2 + \sin \theta_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_2 \sin \varphi_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ &\equiv \cos \chi \end{aligned} \quad (\text{A.2.4})$$

である.

A.2.3 (3.4.7)

$$\begin{aligned} (2j+1) \int \frac{d\Omega}{4\pi} |\Omega\rangle\langle\Omega| &= \frac{2j+1}{4\pi} \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \int_0^{2\pi} d\varphi \sum_{r,r'=-j}^j \binom{2j}{j+r}^{\frac{1}{2}} \binom{2j}{j+r'}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{2j+r+r'} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{2j-r-r'} e^{i(-r+r')\varphi} |jr\rangle\langle jr'| \\ &= \frac{2j+1}{2} \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \sum_{r=-j}^j \binom{2j}{j+r} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} \right)^{j+r} \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} \right)^{j-r} |jr\rangle\langle jr| \\ &\quad \downarrow \cos \theta = x \text{ とおく} \\ &= \frac{2j+1}{2^{2j+1}} \int_{-1}^1 dx \sum_{r=-j}^j \binom{2j}{j+r} (1+x)^{j+r} (1-x)^{j-r} |jr\rangle\langle jr| \\ &\quad \downarrow j-r \text{ 回部分積分} \\ &= \frac{2j+1}{2^{2j+1}} \sum_{r=-j}^j \frac{1}{(2j)!} \int_{-1}^1 dx (1+x)^{2j} (-1)^{2j} \frac{d^{2j}}{dx^{2j}} (1-x)^{2j} |jr\rangle\langle jr| \\ &= \frac{2j+1}{2^{2j+1}} \sum_{r=-j}^j \frac{1}{(2j)!} \int_{-1}^1 dx (1+x)^{2j} |jr\rangle\langle jr| \\ &= \sum_{r=-j}^j |jr\rangle\langle jr| = 1. \end{aligned} \quad (\text{A.2.5})$$

A.3 3.5 節

A.3.1 (3.5.3)

まず, $f_{[L_3, \Phi]}(\Omega)$ について考える.

$$\begin{aligned}
f_{[L_3, \Phi]}(\Omega) &= \langle \Omega | [L_3, \Phi] | \Omega \rangle \\
&= \langle \Omega | (L_3 \Phi - \Phi L_3) | \Omega \rangle \\
&= \sum_{r, r' = -j}^j \binom{2j}{j+r}^{\frac{1}{2}} \binom{2j}{j+r'}^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{2j+r+r'} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{2j-r-r'} e^{i(r-r')\varphi} \langle jr | \Phi | jr' \rangle \\
&= -i \frac{\partial}{\partial \varphi} \langle \Omega | \Phi | \Omega \rangle \\
&= \mathcal{L}_3 f_{\Phi}(\Omega).
\end{aligned} \tag{A.3.1}$$

次に $f_{[L_+, \Phi]}(\Omega)$ について考える.

$$\begin{aligned}
f_{[L_+, \Phi]}(\Omega) &= \langle \Omega | [L_+, \Phi] | \Omega \rangle. \\
&= \sum_{r, r' = -j}^j \binom{2j}{j+r}^{\frac{1}{2}} \binom{2j}{j+r'}^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{2j+r+r'} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{2j-r-r'} \\
&\quad \times e^{i(r-r')\varphi} \langle jr | (L_+ \Phi - \Phi L_+) | jr' \rangle
\end{aligned} \tag{A.3.2}$$

ここで,

$$\langle jr | L_+ = \sqrt{(j+r)(j-r+1)} \langle jr-1 |, \tag{A.3.3a}$$

$$L_+ |jr'\rangle = \sqrt{(j-r')(j+r'+1)} |jr'+1\rangle \tag{A.3.3b}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
\text{(A.3.2)} &= \sum_{r, r' = -j}^j \binom{2j}{j+r}^{\frac{1}{2}} \binom{2j}{j+r'}^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{2j+r+r'} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{2j-r-r'} \\
&\quad \times e^{i(r-r')\varphi} \sqrt{(j+r)(j-r+1)} \langle jr-1 | \Phi | jr' \rangle \\
&\quad - \sum_{r, r' = -j}^j \binom{2j}{j+r}^{\frac{1}{2}} \binom{2j}{j+r'}^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{2j+r+r'} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{2j-r-r'} \\
&\quad \times e^{i(r-r')\varphi} \sqrt{(j-r')(j+r'+1)} \langle jr | \Phi | jr'+1 \rangle \\
&\quad \downarrow \text{第一項目では } r-1 \rightarrow r, \text{ 第二項目では } r'+1 \rightarrow r' \text{ とする} \\
&= \sum_{r=-j-1}^{j-1} \sum_{r'=-j}^j \binom{2j}{j+r+1}^{\frac{1}{2}} \binom{2j}{j+r'}^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{2j+r+r'+1} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{2j-r-r'-1} \\
&\quad \times e^{i(r-r'+1)\varphi} \sqrt{(j-r)(j+r+1)} \langle jr | \Phi | jr' \rangle \\
&\quad - \sum_{r=-j}^j \sum_{r'=-j+1}^{j+1} \binom{2j}{j+r}^{\frac{1}{2}} \binom{2j}{j+r'-1}^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{2j+r+r'-1} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{2j-r-r'+1} \\
&\quad \times e^{i(r-r'+1)\varphi} \sqrt{(j+r')(j-r'+1)} \langle jr | \Phi | jr' \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{r=-j-1}^{j-1} \sum_{r'=-j}^j \sqrt{\frac{j-r}{j+r+1}} \binom{2j}{j+r}^{\frac{1}{2}} \binom{2j}{j+r'}^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{2j+r+r'+1} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{2j-r-r'-1} \\
&\quad \times e^{i(r-r'+1)\varphi} \sqrt{(j-r)(j+r+1)} \langle jr | \Phi | jr' \rangle \\
&- \sum_{r=-j}^j \sum_{r'=-j+1}^{j+1} \binom{2j}{j+r}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{j-r'}{j-r'+1}} \binom{2j}{j+r'}^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{2j+r+r'-1} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{2j-r-r'+1} \\
&\quad \times e^{i(r-r'+1)\varphi} \sqrt{(j+r')(j-r'+1)} \langle jr | \Phi | jr' \rangle \\
&= \sum_{r=-j-1}^{j-1} \sum_{r'=-j}^j \binom{2j}{j+r}^{\frac{1}{2}} \binom{2j}{j+r'}^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{2j+r+r'+1} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{2j-r-r'-1} \\
&\quad \times e^{i(r-r'+1)\varphi} (j-r) \langle jr | \Phi | jr' \rangle \\
&- \sum_{r=-j}^j \sum_{r'=-j+1}^{j+1} \binom{2j}{j+r}^{\frac{1}{2}} \binom{2j}{j+r'}^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{2j+r+r'-1} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{2j-r-r'+1} \\
&\quad \times e^{i(r-r'+1)\varphi} (j+r') \langle jr | \Phi | jr' \rangle. \tag{A.3.4}
\end{aligned}$$

一方で, $\mathcal{L}_+ \langle \Omega | \Phi | \Omega \rangle$ を見ると,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_+ \langle \Omega | \Phi | \Omega \rangle &= e^{i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \langle \Omega | \Phi | \Omega \rangle \\
&= e^{i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \sum_{r,r'=-j}^j \binom{2j}{j+r}^{\frac{1}{2}} \binom{2j}{j+r'}^{\frac{1}{2}} e^{i(r-r')\varphi} \\
&\quad \times \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{2j+r+r'} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{2j-r-r'} \langle jr | \Phi | jr' \rangle \\
&= \sum_{r,r'=-j}^j \binom{2j}{j+r}^{\frac{1}{2}} \binom{2j}{j+r'}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left[\left(-\frac{1}{2} \right)^{2j+r+r'} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{2j+r+r'-1} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{2j-r-r'+1} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{2} \right)^{2j-r-r'} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{2j+r+r'+1} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{2j-r-r'-1} \right] e^{i(r-r'+1)\varphi} \langle jr | \Phi | jr' \rangle \\
&+ \sum_{r,r'=-j}^j \binom{2j}{j+r}^{\frac{1}{2}} \binom{2j}{j+r'}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left[-\frac{r-r'}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{2j+r+r'+1} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{2j-r-r'-1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{r-r'}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{2j+r+r'-1} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{2j-r-r'+1} \right] e^{i(r-r'+1)\varphi} \langle jr | \Phi | jr' \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{r,r'=-j}^j \binom{2j}{j+r}^{\frac{1}{2}} \binom{2j}{j+r'}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left[-\frac{2j+r+r'-r+r'}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{2j+r+r'-1} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{2j-r-r'+1} \right. \\
&\quad \quad \left. + \frac{2j-r-r'-r+r'}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{2j+r+r'+1} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{2j-r-r'-1} \right] \\
&\quad \quad \quad \times e^{i(r-r'+1)\varphi} \langle jr|\Phi|jr'\rangle \\
&= \sum_{r,r'=-j}^j \binom{2j}{j+r}^{\frac{1}{2}} \binom{2j}{j+r'}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left[(j-r) \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{2j+r+r'+1} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{2j-r-r'-1} \right. \\
&\quad \quad \left. - (j+r') \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{2j+r+r'-1} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{2j-r-r'+1} \right] e^{i(r-r'+1)\varphi} \langle jr|\Phi|jr'\rangle \quad (\text{A.3.5})
\end{aligned}$$

となり, $\mathcal{L}_+ \langle \Omega|\Phi|\Omega \rangle = f_{[L_+,\Phi]}(\Omega)$ がいえた. 同様にして,

$$\mathcal{L}_- \langle \Omega|\Phi|\Omega \rangle = f_{[L_-,\Phi]}(\Omega) \quad (\text{A.3.6})$$

がいえて, (3.5.3) が示せた.

付録B $3j$ symbol と $6j$ symbol

ここでは, [3] を参考に $3j$ symbol と $6j$ symbol の具体的な表式を求める.

まず, $3j$ symbol について考える. Clebsch-Gordan 係数は $3j$ symbol を用いると,

$$C_{l_1 m_1 l_2 -m_2}^{l' -m'} = (-1)^{l_1 - l_2 - m'} \sqrt{2l' + 1} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l' \\ m_1 & -m_2 & m' \end{pmatrix} \quad (\text{B.0.1})$$

と書ける. 一方, $3j$ symbol は Clebsch-Gordan 係数を用いると,

$$\begin{pmatrix} l_3 & l_3 & l'' \\ m_3 & -m_3 & -m'' \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{m''}}{\sqrt{2l'' + 1}} C_{l_3 m_3 l_3 -m_3}^{l'' m''} = \frac{(-1)^{l'' + m'' + l_3 - m_3}}{\sqrt{2l_3 + 1}} C_{l_3 -m_3}^{l_3 -m_3 l'' m''} \quad (\text{B.0.2})$$

と書ける. ここで角運動量保存から, $m_3 + m'' = m_3$ なので $m'' = 0$ となり,

$$(\text{B.0.2}) = \frac{(-1)^{l'' + m'' + l_3 - m_3}}{\sqrt{2l_3 + 1}} C_{l_3 -m_3}^{l_3 -m_3 l'' m''} \delta_{m'', 0} \quad (\text{B.0.3})$$

となる. m_3 についての和をとれば,

$$\sum_{m_3} C_{l_3 -m_3}^{l_3 -m_3 l'' m''} = (2l_3 + 1) \delta_{l'', 0} \quad (\text{B.0.4})$$

となる. また,

$$\begin{pmatrix} l & l' & 0 \\ m & m' & 0 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{l-m}}{\sqrt{2l+1}} \delta_{l, l'} \delta_{m, -m'}, \quad (\text{B.0.5})$$

$$\begin{pmatrix} l & l_4 & l'' \\ -m & -m_4 & m'' \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{l'' + m'' + l - m}}{\sqrt{2l_4 + 1}} C_{l'' m''}^{l_4 m_4 l - m}, \quad (\text{B.0.6})$$

$$\begin{pmatrix} l' & l_4 & l'' \\ m' & m_4 & -m'' \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{-l_4 + m'' - m'}}{\sqrt{2l_4 + 1}} C_{l'' m''}^{l_4 m_4 l' - m'} \quad (\text{B.0.7})$$

であり, (B.0.6) と (B.0.7) の Clebsch-Gordan 係数の積について m_4 と m'' の和をとれば,

$$\sum_{m_4, m''} C_{l'' m''}^{l_4 m_4 l - m} C_{l'' m''}^{l_4 m_4 l' - m'} = \frac{2l_4 + 1}{2l + 1} \delta_{l, l'} \delta_{m, -m'} \quad (\text{B.0.8})$$

となる.

また, $6j$ symbol については,

$$\left\{ \begin{matrix} l & l' & 0 \\ j & j & j \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^{l+2j}}{\sqrt{(2l'+1)(2j+1)}} \delta_{l, l'}, \quad (\text{B.0.9})$$

$$\left\{ \begin{matrix} l_3 & l_3 & 0 \\ j & j & j \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^{l_3+2j}}{\sqrt{(2l_3+1)(2j+1)}}, \quad (\text{B.0.10})$$

$$\sum_{l''} (-1)^{2j+l''} (2l'' + 1) \left\{ \begin{matrix} l & l_4 & l'' \\ j & j & j \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l & l_4 & l'' \\ j & j & j \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j & j & l \\ j & j & l_4 \end{matrix} \right\} \quad (\text{B.0.11})$$

がいえる.

付録C 1点相関関数

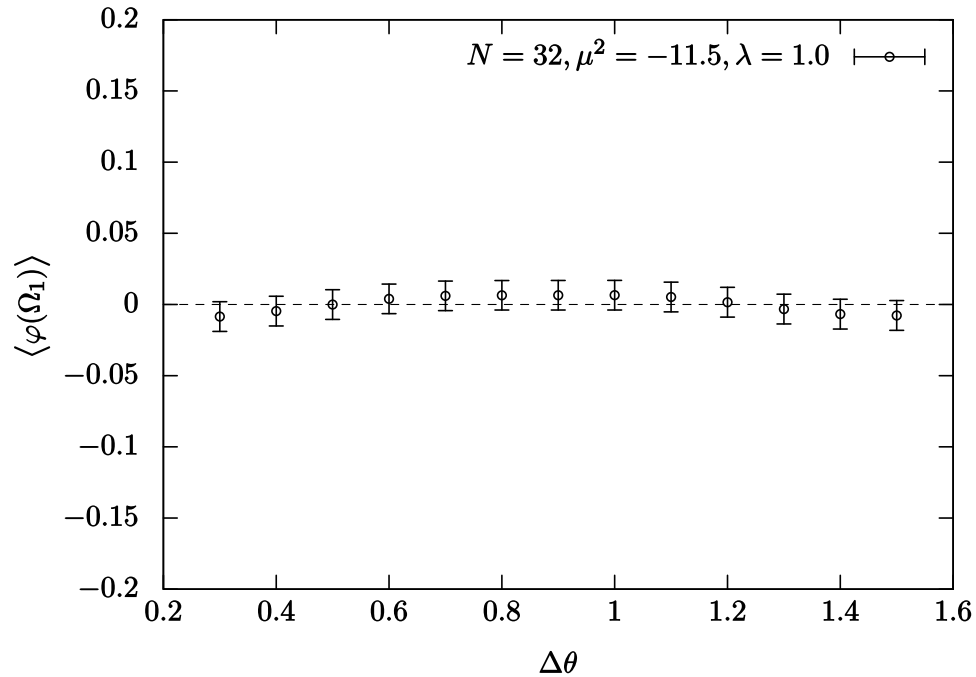


図 C.1: $N = 32, \mu^2 = -11.5, \lambda = 1.0$ の 1 点相関関数.

図 C.1 は $N = 32, \mu^2 = -11.5, \lambda = 1.0$ の 1 点相関関数を第 4 章に示した $\Delta\theta$ の範囲でプロットしたものである。第 4 章に示されたグラフ中のその他のパラメーターの 1 点相関関数についても、エラーバーの範囲で 0 になることを確かめた。よって、

$$\langle \varphi(\Omega_1) \rangle = 0 \quad (\text{C.0.1})$$

がいえて、相は破れていない。

なおここから、連結な 2 点相関関数は

$$\langle \varphi(\Omega_i) \varphi(\Omega_j) \rangle_c = \langle \varphi(\Omega_i) \varphi(\Omega_j) \rangle \quad (1 \leq i < j \leq 4) \quad (\text{C.0.2})$$

といえるので、2 点相関関数に関しては数値シミュレーションで計算したものをそのまま用いた。

付録D 自由場

自由場の場合に、数値シミュレーションにより計算された2点相関関数が連続理論のそれと一致することを確認した。これを行う目的は、シミュレーションのコードが正しいかどうかを調べるというものである。

2次元自由場における連続理論の作用は

$$S = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \left\{ -\frac{1}{2} [\mathcal{L}_i \phi(\Omega)]^2 + \frac{\mu^2}{2} \phi^2(\Omega) \right\} = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{1}{2} [\phi(\Omega) \mathcal{L}_i^2 \phi(\Omega) + \mu^2 \phi^2(\Omega)] \quad (\text{D.0.1})$$

である。ここで、球面調和関数 $Y_{lm}(\Omega)$ を用いて $\phi(\Omega)$ を展開すると、

$$\phi(\Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \phi_{lm} Y_{lm}(\Omega), \quad \phi_{lm}^* = (-1)^m \phi_{l-m} \quad (\text{D.0.2})$$

となり、

$$\mathcal{L}_i^2 \phi(\Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l l(l+1) \phi_{lm} Y_{lm}(\Omega) \quad (\text{D.0.3})$$

であるから、作用は

$$S = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (-1)^m \phi_{l-m} [l(l+1) + \mu^2] \phi_{lm} \quad (\text{D.0.4})$$

となる。このとき、

$$\langle \phi_{lm} \phi_{l'm'} \rangle = \frac{4\pi (-1)^m}{l(l+1) + \mu^2} \delta_{l,l'} \delta_{m,-m'} \quad (\text{D.0.5})$$

がいえて、ここから

$$\begin{aligned} \langle \phi(\Omega_1) \phi(\Omega_2) \rangle &= \sum_{l,l'} \sum_{m,m'} \langle \phi_{lm} \phi_{l'm'} \rangle Y_{lm}(\Omega_1) Y_{l'm'}(\Omega_2) \\ &= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{(-1)^m}{l(l+1) + \mu^2} Y_{lm}(\Omega_1) Y_{l-m}(\Omega_2) \end{aligned} \quad (\text{D.0.6})$$

となることがわかる。

$\Omega = (\theta, \varphi)$ で、 $z = \tan \frac{\theta}{2} e^{i\varphi}$ であるが、

$$\Omega_1 = \left(\frac{\pi}{2} + \Delta\theta, 0 \right), \quad \Omega_2 = \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right), \quad z_1 = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Delta\theta}{2} \right), \quad z_2 = 1 \quad (\text{D.0.7})$$

とにおいて2点相関関数の振る舞いを確かめた。図D.1の曲線は $\mu^2 = 1.0$ として (D.0.6) から求まる可換理論の2点相関関数を指数関数でフィットしたものであり、

$$\langle \phi(\Omega_1) \phi(\Omega_2) \rangle = a e^{-b\Delta\theta} + c, \quad a = 4.05(2), \quad b = 1.63(1), \quad c = 0.44(4) \quad (\text{D.0.8})$$

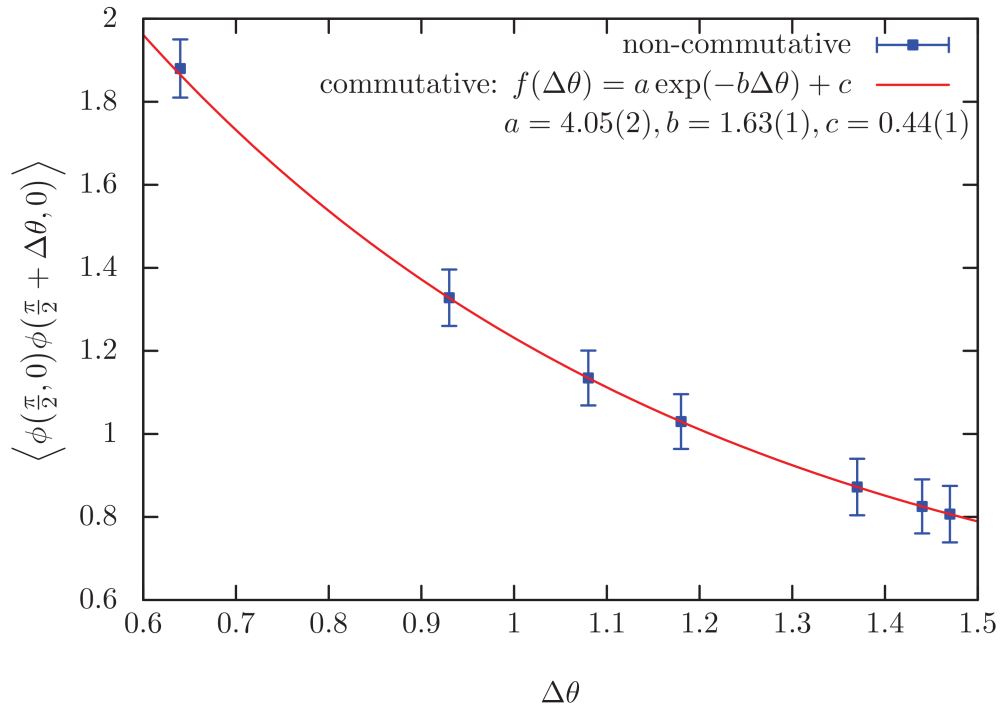


図 D.1: 2次元自由場の2点相関関数.

z_1	2	3	4	5	10	15	20
$\Delta\theta$	0.64	0.93	1.08	1.18	1.37	1.44	1.47

表 D.1: z_1 と $\Delta\theta$ の読み替え

である。エラーバーがついているものは、Berezin symbol を用いて数値シミュレーションを行って求めた2点相関関数である。5つの行列サイズ $N = 16, 20, 24, 28, 32$ に対してシミュレーションを行い、各点で $N \rightarrow \infty$ に外挿したものをプロットした。ここでの点のとり方は本文中と異なり、 $z_2 = 1$ と $z_1 = 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20$ の7点の間についての2点相関関数を見ていることに注意したい。 z_1 と $\Delta\theta$ の読み替えは表 D.1 のとおりである。

図 D.1 より、2次元自由場においては連続理論と Berezin symbol を用いて計算した2点相関関数が一致したので、プログラムのコードに誤りがないことが確かめられた。

付録E 3次元への拡張

本修士論文では角度のみの2次元の場合のみを考えたが、ここでは時間方向を入れた3次元の場合に拡張することを考える。

E.1 作用

(3.2.1) と (3.2.2) を3次元に拡張した作用は、

$$S_{\text{fuzzy}}^{3d} = \frac{R^2}{2j+1} \int_0^\beta dt \operatorname{tr} \left\{ \frac{1}{2} \dot{\Phi}^2(t) - \frac{1}{2R^2} [\hat{L}_i^{[j]}, \Phi(t)]^2 + \frac{\mu^2}{2} \Phi^2(t) + \frac{\lambda}{4} \Phi^4(t) \right\}, \quad (\text{E.1.1})$$

$$S_{S^2}^{3d} = R^2 \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int_0^\beta dt \left\{ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2(t, \Omega) - \frac{1}{2R^2} [\mathcal{L}_i \phi(t, \Omega)]^2 + \frac{\mu^2}{2} \phi^2(t, \Omega) + \frac{\lambda}{4} \phi^4(t, \Omega) \right\} \quad (\text{E.1.2})$$

となる。なお、時間方向を円周 β の S^1 上にとった。このとき、 β は温度の逆数として物理的に解釈される。以下では、フアジー球面の半径と S^2 の半径をそれぞれ $R=1$ とする。

E.2 自由場

3次元自由場における連続理論の作用は、 \mathcal{L}_i について部分積分を行えば、以下のようになる。

$$\begin{aligned} S &= \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int_0^\beta dt \left\{ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2(t, \Omega) - \frac{k}{2} [\mathcal{L}_i \phi(t, \Omega)]^2 + \frac{\mu^2}{2} \phi^2(t, \Omega) \right\} \\ &= \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int_0^\beta dt \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2(t, \Omega) + \frac{k}{2} \phi(t, \Omega) \mathcal{L}_i^2 \phi(t, \Omega) + \frac{\mu^2}{2} \phi^2(t, \Omega) \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.2.1})$$

次に、 $\phi(t, \Omega)$ をフーリエモードで書き換える。

$$\phi(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \tilde{\phi}(\omega, \Omega) = \frac{1}{\beta} \sum_{K=-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{2\pi K}{\beta} t} \tilde{\phi}(K, \Omega). \quad (\text{E.2.2})$$

ここで、 $\omega \equiv 2\pi K/\beta$ とした。さらに t を

$$t = sa, \quad a \equiv \frac{\beta}{M} \quad (\text{E.2.3})$$

と離散化すると、

$$\phi(s, \Omega) = \frac{1}{Ma} \sum_{K=0}^{M-1} e^{-i\frac{2\pi K}{M} s} \tilde{\phi}(K, \Omega) \quad (\text{E.2.4})$$

となる。 $\phi(s, \Omega)$ の複素共役は、

$$\begin{aligned}
\phi^*(s, \Omega) &= \frac{1}{Ma} \sum_{K=0}^{M-1} e^{i\frac{2\pi K}{M}s} \tilde{\phi}^*(K, \Omega) \\
&\downarrow K = M - K' \text{ とする} \\
&= \frac{1}{Ma} \sum_{K'=1}^{M-1} e^{-i\frac{2\pi K'}{M}s} \tilde{\phi}^*(M - K', \Omega) \\
&= \frac{1}{Ma} \tilde{\phi}^*(0, \Omega) + \frac{1}{Ma} \sum_{K=0}^{M-1} e^{-i\frac{2\pi K}{M}s} \tilde{\phi}^*(M - K, \Omega) = \phi(s, \Omega) \quad (\text{E.2.5})
\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\tilde{\phi}(0, \Omega) = \tilde{\phi}^*(0, \Omega), \quad \tilde{\phi}(K, \Omega) = \tilde{\phi}^*(M - K, \Omega) \quad (K = 1, 2, \dots, M - 1) \quad (\text{E.2.6})$$

となるので、これをまとめると、

$$\tilde{\phi}(K, \Omega) = \tilde{\phi}^*(M - K, \Omega) \quad (K = 0, 1, \dots, M), \quad \tilde{\phi}(M, \Omega) = \tilde{\phi}(0, \Omega) \quad (\text{E.2.7})$$

がいえる。

上記の離散化をこの作用に用いると、時間に関する微分は差分になり、

$$S = a \sum_{s=1}^M \int \frac{d\Omega}{4\pi} \left[\frac{1}{2} \left\{ \frac{\phi(s+1, \Omega) - \phi(s, \Omega)}{a} \right\}^2 + \frac{1}{2} \phi(s, \Omega) \mathcal{L}_i^2 \phi(s, \Omega) + \frac{\mu^2}{2} \phi^2(s, \Omega) \right] \quad (\text{E.2.8})$$

となる。ここで、各項について見ると、

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^M [\phi(s+1, \Omega) - \phi(s, \Omega)]^2 \\
&= \frac{1}{M^2 a^2} \sum_{s=1}^M \sum_{K, K'=0}^{M-1} \left(e^{-i\frac{2\pi K}{M}} - 1 \right) \left(e^{-i\frac{2\pi K'}{M}} - 1 \right) e^{-i\frac{2\pi(K+K')}{M}s} \tilde{\phi}(K, \Omega) \tilde{\phi}(K', \Omega) \\
&\downarrow \tilde{\phi}(K', \Omega) = \tilde{\phi}(M - K', \Omega), \quad M - K' = K'' \text{ とする} \\
&= \frac{1}{M^2 a^2} \sum_{s=1}^M \sum_{K=0}^{M-1} \sum_{K''=1}^M \left(e^{-i\frac{2\pi K}{M}} - 1 \right) \left(e^{i\frac{2\pi K''}{M}} - 1 \right) e^{-i\frac{2\pi(K-K'')}{M}s} \tilde{\phi}(K, \Omega) \tilde{\phi}^*(K'', \Omega) \\
&= \frac{1}{Ma^2} \sum_{K=0}^{M-1} \left(e^{-i\frac{2\pi K}{M}} - 1 \right) \left(e^{i\frac{2\pi K}{M}} - 1 \right) \tilde{\phi}(K, \Omega) \tilde{\phi}^*(K, \Omega) \\
&= \frac{1}{Ma^2} \sum_{K=0}^{M-1} \left(2 - 2 \cos \frac{2\pi K}{M} \right) \tilde{\phi}(K, \Omega) \tilde{\phi}^*(K, \Omega), \quad (\text{E.2.9}) \\
\sum_{s=1}^M \phi(s, \Omega) \mathcal{L}_i^2 \phi(s, \Omega) &= \frac{1}{M^2 a^2} \sum_{s=1}^M \sum_{K, K'=0}^{M-1} e^{-i\frac{2\pi(K+K')}{M}s} \tilde{\phi}(K, \Omega) \mathcal{L}_i^2 \tilde{\phi}(K', \Omega) \\
&= \frac{1}{M^2 a^2} \sum_{s=1}^M \sum_{K=0}^{M-1} \sum_{K''=1}^M e^{-i\frac{2\pi(K-K'')}{M}s} \tilde{\phi}(K, \Omega) \mathcal{L}_i^2 \tilde{\phi}^*(K'', \Omega) \\
&= \frac{1}{Ma^2} \sum_{K=0}^{M-1} \tilde{\phi}(K, \Omega) \mathcal{L}_i^2 \tilde{\phi}^*(K, \Omega), \quad (\text{E.2.10})
\end{aligned}$$

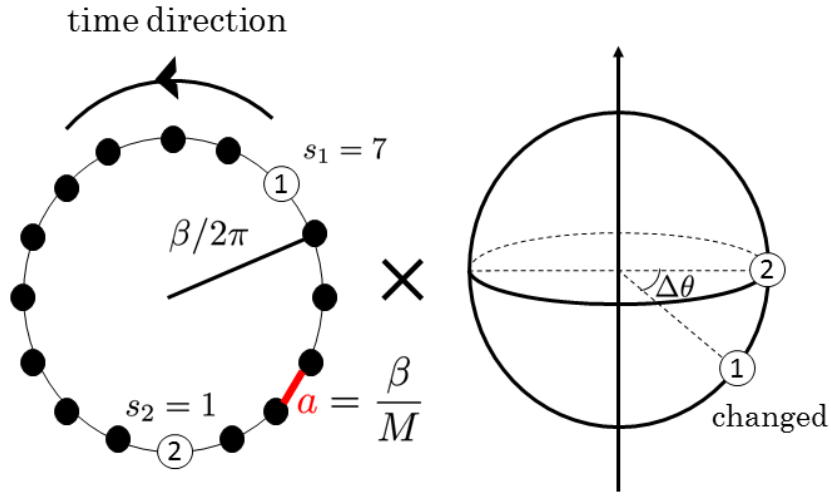


図 E.1: $S^1 \times S^2$. (ⓐ は Ω_i を表す.)

$$\sum_{s=1}^M \phi^2(s, \Omega) = \frac{1}{M^2 a^2} \sum_{s=1}^M \sum_{K, K'=0}^{M-1} e^{-i \frac{2\pi(K+K')}{M} s} \tilde{\phi}(K, \Omega) \tilde{\phi}(K', \Omega) = \frac{1}{M a^2} \sum_{K=0}^{M-1} \tilde{\phi}(K, \Omega) \tilde{\phi}^*(K, \Omega) \quad (\text{E.2.11})$$

となる。よって、作用は以下のように書き換わる。

$$S = \frac{1}{M a} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \sum_{K=0}^{M-1} \frac{1}{2} \tilde{\phi}(K, \Omega) \left[\frac{2}{a^2} \left(1 - \cos \frac{2\pi K}{M} \right) + \mathcal{L}_i^2 + \mu^2 \right] \tilde{\phi}^*(K, \Omega) \quad (\text{E.2.12})$$

ここで、 $\tilde{\phi}(K, \Omega)$ を球面調和関数⁶ $Y_{lm}(\Omega)$ を用いて展開すると、

$$\tilde{\phi}(K, \Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \tilde{\phi}_{lm}(K) Y_{lm}(\Omega) \quad (\text{E.2.13})$$

となり、作用は球面調和関数の正規直交関係 (3.1.17) に注意すると、

$$S = \frac{1}{4\pi M a} \sum_{K=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2} \tilde{\phi}_{lm}(K) \left[\frac{2}{a^2} \left(1 - \cos \frac{2\pi K}{M} \right) + l(l+1) + \mu^2 \right] \tilde{\phi}_{lm}^*(K) \quad (\text{E.2.14})$$

と書ける。よって、

$$\left\langle \tilde{\phi}_{lm}(K) \tilde{\phi}_{l'm'}^*(K') \right\rangle = \frac{4\pi M a}{\frac{2}{a^2} \left(1 - \cos \frac{2\pi K}{M} \right) + l(l+1) + \mu^2} \delta_{K, K'} \delta_{l, l'} \delta_{m, m'} \quad (\text{E.2.15})$$

がわかる。したがって、3次元での2点相関関数は

$$\begin{aligned} & \langle \phi(s_1, \Omega_1) \phi(s_2, \Omega_2) \rangle \\ &= \frac{1}{M^2 a^2} \sum_{K, K'=0}^{M-1} \sum_{l, l'=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{m'=-l'}^{l'} e^{-i \frac{2\pi K}{M} s_1} e^{i \frac{2\pi K'}{M} s_2} Y_{lm}(\Omega_1) Y_{l'm'}^*(\Omega_2) \left\langle \tilde{\phi}_{lm}(K) \tilde{\phi}_{l'm'}^*(K') \right\rangle \\ &= \frac{4\pi}{M a} \sum_{K=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{e^{-i \frac{2\pi K}{M} (s_1 - s_2)} Y_{lm}(\Omega_1) Y_{lm}^*(\Omega_2)}{\frac{2}{a^2} \left(1 - \cos \frac{2\pi K}{M} \right) + l(l+1) + \mu^2} \\ & \quad \downarrow \text{(3.1.16) より, } Y_{lm}^*(\Omega_2) = (-1)^m Y_{l-m}(\Omega_2) \\ &= \frac{4\pi}{M a} \sum_{K=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{(-1)^m e^{-i \frac{2\pi K}{M} (s_1 - s_2)} Y_{lm}(\Omega_1) Y_{l-m}(\Omega_2)}{\frac{2}{a^2} \left(1 - \cos \frac{2\pi K}{M} \right) + l(l+1) + \mu^2} \quad (\text{E.2.16}) \end{aligned}$$

⁶ この球面調和関数は、通常の球面調和関数の $\sqrt{4\pi}$ 倍で定義されている。

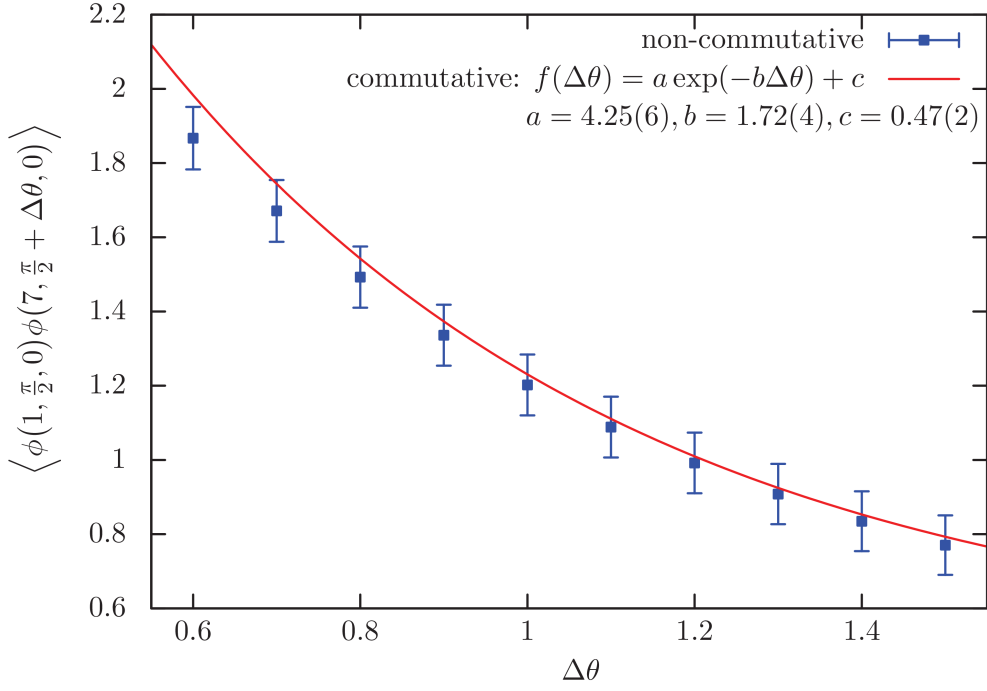


図 E.2: 3次元自由場の2点相関関数.

となる． M を時間方向の分割数とすれば，時間の格子間隔は，(E.2.3) の a である（図 E.1 を参照）．図 E.2 は $\mu^2 = 1.0, \beta = 1.0, M = 16, 0.6 \leq \Delta\theta \leq 1.5$ の範囲で $\Delta\theta$ を 0.1 刻みとして，

$$(s_1, \Omega_1) = \left(7, \frac{\pi}{2} + \Delta\theta, 0\right), \quad (s_2, \Omega_2) = \left(1, \frac{\pi}{2}, 0\right) \quad (\text{E.2.17})$$

の間の2点相関関数を示したものである．曲線は (E.2.16) から求まる可換理論の2点相関関数を指数関数でフィットしたものであり，

$$\langle \phi(s_1, \Omega_1) \phi(s_2, \Omega_2) \rangle = a e^{-b\Delta\theta} + c, \quad a = 4.25(6), \quad b = 1.72(4), \quad c = 0.47(2) \quad (\text{E.2.18})$$

である．エラーバーがついているのは，Berezin symbol を用いて数値シミュレーションを行って求めた2点相関関数である．3つの行列サイズ $N = 16, 20, 24$ に対してシミュレーションを行い，各点で $N \rightarrow \infty$ に外挿したものをプロットした． $\Delta\theta = 0.6$ の値がずれているのは，より大きな行列サイズでシミュレーションした2点相関関数の値も含めて外挿すれば曲線に合うようになる可能性がある．また，ずれの原因としては非可換性が効いている可能性も考えられる．これについては，さらなるシミュレーションを行うことで原因が明らかになると考えられる．

E.3 UV/IR anomaly

時間方向を入れて3次元とした場合，(3.3.1) から (3.3.7) までは以下のように書き換えられる．

$$\Phi(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{2j} \sum_{m=-l}^l e^{-i\frac{2\pi p}{\beta}t} \phi_{lmp} \hat{Y}_{lm}^{[j]}, \quad \phi_{lmp}^* = (-1)^m \phi_{l-m-p}. \quad (\text{E.3.1})$$

n 点相関関数は,

$$\langle \phi_{l_1 m_1 p_1} \cdots \phi_{l_n m_n p_n} \rangle = \frac{\int [\mathcal{D}\Phi] e^{-S_{\text{fuzzy}}^{3d}} \phi_{l_1 m_1 p_1} \cdots \phi_{l_n m_n p_n}}{\int [\mathcal{D}\Phi] e^{-S_{\text{fuzzy}}^{3d}}} \quad (\text{E.3.2})$$

であり, 2点相関関数は

$$\langle \phi_{lm} \phi_{l'm'}^* \rangle = (-1)^m \langle \phi_{lm} \phi_{l'-m'-p'} \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{1}{\left(\frac{2\pi p'}{\beta}\right)^2 + l(l+1) + \mu^2} \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} \delta_{p,p'} \quad (\text{E.3.3})$$

となる. ϕ^4 理論のヴァーテックスは,

$$\begin{aligned} & \phi_{l_1 m_1 p_1} \cdots \phi_{l_4 m_4 p_4} V(l_1, m_1, p_1; \dots; l_4, m_4, p_4), \\ & V(l_1, m_1, p_1; \dots; l_4, m_4, p_4) \\ &= \beta \delta_{(\sum_{i=1}^4 p_i), 0} \frac{\lambda}{4} (2j+1) (-1)^{\sum_{i=1}^4 l_i} \prod_{i=1}^4 \sqrt{2l_i+1} \sum_{l=0}^{2j} \sum_{m=-l}^l (-1)^m (2l+1) \\ & \times \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_3 & l_4 & l \\ m_3 & m_4 & -m \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 & l_2 & l \\ j & j & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l_3 & l_4 & l \\ j & j & j \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{E.3.5})$$

となる. なお, $V(l_1, m_1, p_1; \dots; l_4, m_4, p_4)$ は (l_i, m_i, p_i) の巡回置換に対して対称である. プラナーの寄与は,

$$\left[\left(\Gamma_{\text{planar}}^{(2)} \right)_{mm'}^{ll'} \right]_{pp'} = 2\lambda \delta_{l,l'} \delta_{m,-m'} \delta_{p,-p'} (-1)^m (I^P)_p, \quad (\text{E.3.6a})$$

$$(I^P)_p \equiv \sum_{p=0}^{2j} \sum_{K=0}^{2j} \frac{2K+1}{\left(\frac{2\pi p}{\beta}\right)^2 + K(K+1) + \mu^2} \quad (\text{E.3.6b})$$

であり, 非プラナーの寄与は,

$$\left[\left(\Gamma_{\text{nonplanar}}^{(2)} \right)_{mm'}^{ll'} \right]_{pp'} = \lambda \delta_{l,l'} \delta_{m,-m'} \delta_{p,-p'} (-1)^m (I^{NP})_p, \quad (\text{E.3.7a})$$

$$(I^{NP})_p \equiv \sum_{p=0}^{2j} \sum_{K=0}^{2j} (-1)^{l+K+2j} \frac{(2K+1)(2j+1)}{\left(\frac{2\pi p}{\beta}\right)^2 + K(K+1) + \mu^2} \begin{Bmatrix} j & j & l \\ j & j & K \end{Bmatrix} \quad (\text{E.3.7b})$$

となる.

付録F 数値シミュレーションの方法

F.1 ハイブリッドモンテカルロ法

本研究では、行列要素を生成するためにハイブリッドモンテカルロ (Hybrid Monte Carlo) 法を用いた。この付録F.1ではその概要について説明する。

ある状態 ϕ の確率を決める作用を $S(\phi)$ としたとき、次の手順で変数 ϕ を更新する。

1. ϕ を初期状態にとり、その共役運動量 π を確率

$$P(\pi) \propto e^{-\pi^2/2} \quad (\text{F.1.1})$$

で生成する。

2. 分子動力学法により、 ϕ を以下のように更新する。

$$\dot{\phi}(t) = \frac{\partial H[\phi(t), \pi(t)]}{\partial \pi(t)} = \pi(t), \quad (\text{F.1.2})$$

$$\dot{\pi}(t) = -\frac{\partial H[\phi(t), \pi(t)]}{\partial \phi(t)} = -\frac{\partial S(\phi(t))}{\partial \phi(t)}, \quad (\text{F.1.3})$$

$$H[\phi(t), \pi(t)] = \frac{\pi^2}{2} + S(\phi(t)). \quad (\text{F.1.4})$$

この表式は時間 t が連続の場合だが、実際の数値シミュレーションは離散的に行われるので、時間についても離散化する必要がある。時間が $0 \leq t \leq \tau$ の範囲にあるとき、ステップ数 N_τ で分割する。ここで、 $\varepsilon = \tau/N_\tau$ とする。このとき、分子動力学法による運動方程式はリープフロッグ (leap-frog, かえる跳び) 法により、次のように差分化される。

初期条件を

$$\begin{cases} \phi(0) = 0 \\ \pi(0) = \pi \end{cases} \quad (\text{F.1.5})$$

として、第1ステップで

$$\pi\left(\frac{1}{2}\right) = \pi(0) - \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial S(\phi(0))}{\partial \phi(0)} \quad (\text{F.1.6})$$

とする。そして、主ステップ ($n = 0, 1, \dots, N_\tau - 2$) で

$$\begin{cases} \phi(n+1) = \phi(n) + \varepsilon \pi\left(n + \frac{1}{2}\right) \\ \pi\left(n + \frac{3}{2}\right) = \pi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \varepsilon \frac{\partial S(\phi(n+1))}{\partial \phi(n+1)} \end{cases} \quad (\text{F.1.7})$$

として、最終ステップで

$$\phi' = \phi(N_\tau) = \phi(N_\tau - 1) + \varepsilon\pi\left(N_\tau - \frac{1}{2}\right), \quad (\text{F.1.8})$$

$$\pi' = \pi(N_\tau) = \pi\left(N_\tau - \frac{1}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial S(\phi(N_\tau))}{\partial \phi(N_\tau)} \quad (\text{F.1.9})$$

とする。ここで、 $\phi(n) \equiv \phi(t = n\varepsilon)$ と略記している。

3. ϕ' と π' を以下の確率で受け入れる。これをメトロポリス・テスト (Metropolis test) という。

$$P(\{\phi, \pi\} \rightarrow \{\phi', \pi'\}) = \min\{1, e^{-\Delta H}\}, \quad (\text{F.1.10})$$

$$\Delta H = H[\phi', \pi'] - H[\phi, \pi] \quad (\text{F.1.11})$$

ここで、

$$\min\{1, e^{-\Delta H}\} = \begin{cases} \text{受け入れ, } \Delta H < 0 \\ \text{確率 } e^{-\Delta H} \text{ で受け入れ, } \Delta H > 0 \end{cases} \quad (\text{F.1.12})$$

である。数値シミュレーションを行う際には、乱数を用いてメトロポリス・テストを行う。

4. メトロポリス・テストによって受け入れられた場合、 $\{\phi, \pi\}$ を $\{\phi', \pi'\}$ に更新し、拒否された場合には $\{\phi, \pi\}$ を保持する。
5. π の生成に戻る。

π の生成に引き続いた分子動力学法による ϕ の更新 (ハイブリッド分子動力学法) と受け入れ・拒否の段階を組み合わせることから、ハイブリッドモンテカルロ法という。これにより、効率よいモンテカルロシミュレーションが可能となる。

F.2 Schwinger-Dyson 方程式

時間方向の入った、3次元の場合に作成したプログラムのコードが正しいかを確かめるために、Schwinger-Dyson 方程式

$$0 = \int d\Phi \frac{\partial}{\partial \Phi_{ij}(s)} \left[\Phi_{ij}(s) e^{-S_{\text{fuzzy}}^{3d}} \right] \quad (\text{F.2.1})$$

から求まる期待値を数値シミュレーションにおいて計算した。以下ではその期待値の導出を行う。

$$\begin{aligned} 0 &= \int d\Phi \frac{\partial}{\partial \Phi_{ij}(s)} \left[\Phi_{ij}(s) e^{-S_{\text{fuzzy}}^{3d}} \right] \\ &= \int d\Phi N^2 e^{-S_{\text{fuzzy}}^{3d}} - \int d\Phi \Phi_{ij}(s) \frac{\partial S_{\text{fuzzy}}^{3d}}{\partial \Phi_{ij}(s)} e^{-S_{\text{fuzzy}}^{3d}} \\ N^2 \int d\Phi e^{-S_{\text{fuzzy}}^{3d}} &= \int d\Phi \Phi_{ij}(s) \frac{\partial S_{\text{fuzzy}}^{3d}}{\partial \Phi_{ij}(s)} e^{-S_{\text{fuzzy}}^{3d}} \end{aligned} \quad (\text{F.2.2})$$

ここで、分配関数 \mathcal{Z} とある物理量 \mathcal{O} の期待値は、

$$\mathcal{Z} = \int d\Phi e^{-S}, \quad (\text{F.2.3})$$

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\int d\Phi \mathcal{O} e^{-S}}{\int d\Phi e^{-S}} = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int d\Phi \mathcal{O} e^{-S} \quad (\text{F.2.4})$$

であるから,

$$N^2 = \left\langle \Phi_{ij}(s) \frac{\partial S_{\text{fuzzy}}^{3d}}{\partial \Phi_{ij}(s)} \right\rangle \quad (\text{F.2.5})$$

となる. さらに, 時間についての和を取れば,

$$\sum_s \left\langle \Phi_{ij}(s) \frac{\partial S_{\text{fuzzy}}^{3d}}{\partial \Phi_{ij}(s)} \right\rangle = N^2 M \quad (\text{F.2.6})$$

がいえ. ここで, N はエルミート行列 $\Phi(s)$ のサイズで, M は時間方向の分割数である.

付録G 誤差評価

数値シミュレーションにより相関関数を計算したが、その値には誤差が存在する。その評価のために、ジャックナイフ (jackknife) 法を用いた。この付録 G では、誤差評価について述べる。

G.1 統計誤差と誤差伝搬

物理量 \mathcal{O} の期待値を N 個の平均で近似した場合、平均値とその統計誤差は次式で与えられる。

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{O}_i, \quad (\text{G.1.1})$$

$$\delta \langle \mathcal{O} \rangle = \sqrt{\frac{\langle (\mathcal{O} - \langle \mathcal{O} \rangle)^2 \rangle}{N-1}} = \sqrt{\frac{\langle \mathcal{O}^2 \rangle - \langle \mathcal{O} \rangle^2}{N-1}}. \quad (\text{G.1.2})$$

より複雑な物理量に対しては、次の誤差伝搬の式を用いる。

$$\delta \langle f(\{\mathcal{O}_a\}) \rangle \equiv \sum_a \left| \left\langle \frac{\partial f}{\partial \mathcal{O}_a} \right\rangle \delta \langle \mathcal{O}_a \rangle \right|. \quad (\text{G.1.3})$$

ここで、 $\{\mathcal{O}_a\}$ は様々な物理量の集まりで、 f はそれらの任意関数である。

G.2 ジャックナイフ法

複雑な物理量に対して誤差伝搬の式を使うと、大抵の場合は誤差を過大に見積もってしまう。これは、各 \mathcal{O}_a に相関があり、誤差の一部が相殺されて真の誤差が誤差伝搬の評価より小さくなるためである。この欠点を補うのがジャックナイフ法である。bin size n のジャックナイフ法の手順は以下の通りである。

1. 全データ数が $N = n \times N_n$ となるように全体を $N_n \equiv N/n$ 個の bin に分ける。それぞれの bin には、 n 個のデータがある。
2. 1つの bin b のデータに対する添字の集合を B_b として、その bin を除いた平均を

$$\langle \mathcal{O} \rangle_b = \frac{1}{N-n} \sum_{k \notin B_b} \mathcal{O}_k \quad (\text{G.2.1})$$

と定義する。

3. $\langle \mathcal{O} \rangle_b$ を用いると、 f の平均と誤差は

$$\langle f(\mathcal{O}) \rangle = \frac{1}{N_n} \sum_{b=1}^{N_n} f(\langle \mathcal{O} \rangle_b), \quad (\text{G.2.2})$$

$$\delta \langle f(\mathcal{O}) \rangle = \sqrt{(N_n - 1)[\langle f(\mathcal{O})^2 \rangle - \langle f(\mathcal{O}) \rangle^2]} \quad (\text{G.2.3})$$

となる。

ジャックナイフ法の長所としては、以下のものが挙げられる。

- 任意の物理量 $f(\mathcal{O})$ に対し、誤差計算ができる。
- 物理量の中の相関を取り入れた評価になっている。
- 取り除くデータの大きさを増加させると、モンテカルロ法で生成されたデータ間の自己相関を評価できる。

G.3 自己相関

モンテカルロ法によって生成された変数で計算されたデータ $\{\mathcal{O}_i\}$ を考える。このとき、異なる変数上で計算されたデータ間の相関を自己相関 (auto correlation) と呼ぶ。自己相関は、以下で定義される自己相関関数 $A(t)$ から評価される。

$$A(t) = \frac{1}{N-t} \sum_{i=1}^{N-t} \mathcal{O}_i \mathcal{O}_{i+t} - \langle \mathcal{O} \rangle^2. \quad (\text{G.3.1})$$

自己相関時間 τ_a は規格化された $A(t)$ の漸近的な振る舞いとして、次のように定義される。

$$C(t) = \frac{A(t)}{A(0)} \simeq \exp(-t/\tau_a). \quad (\text{G.3.2})$$

τ_a はモンテカルロ法により熱平衡に達するモンテカルロ時間の目安を与える。

また、積分された自己相関時間 $\tau_{a,\text{int}}$ は、

$$\tau_{a,\text{int}} = \frac{1}{2} + \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^t C(i) \quad (\text{G.3.3})$$

で与えられるが、実際には有限の t で定義された $\tau_{a,\text{int}}$ が t の関数として、

$$\tau_{a,\text{int}} = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^t C(i) \rightarrow \text{const.} \quad (\text{G.3.4})$$

となったときに、それを $\tau_{a,\text{int}}$ として採用する。ただし、 $t \ll N$ でないと信頼できる評価はできない。

$\tau_{a,\text{int}}$ がわかっている場合、 $\delta\langle \mathcal{O} \rangle$ は

$$\delta\langle \mathcal{O} \rangle = \sqrt{\frac{\langle \mathcal{O}^2 \rangle - \langle \mathcal{O} \rangle^2}{N/2\tau_{a,\text{int}} - 1}} \quad (\text{G.3.5})$$

で与えられる。つまり、自己相関のために独立な配位は $N \rightarrow N/2\tau_{a,\text{int}}$ になったと考えられる。

G.4 最小二乗法

本研究における数値シミュレーションでは、様々なサイズの行列の配位を生成し、そこから相関関数の計算を行っている。解析的な結果と比較のために、ファジー球面上の各点における相関関数の値を各 N ごとにプロットしたものを、 $N \rightarrow \infty$ に外挿する。 $1/N^2$ について、1次関数 $y = a/N^2 + b$

のフィッティングができ、 $1/N^2 = 0$ が $N \rightarrow \infty$ に対応する。各相関関数の値には誤差が含まれるので、 b の値にも誤差が生じる。その誤差を求めるために、最小二乗法が必要となる。

一般に、 n 個の (x_i, y_i) ($1 \leq i \leq n$)という組があり、 x_i には誤差はなく、 y_i には σ_i という誤差があるとする。 y_i が x_i について1次関数のように振る舞うとき、

$$S = \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - ax_i - b}{\sigma_i} \right)^2 \quad (\text{G.4.1})$$

を最小にするような a, b が採用されるべきである。つまり、

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n \frac{x_i(ax_i + b - y_i)}{\sigma_i^2} = 2 \sum_{i=1}^n \frac{ax_i^2 + bx_i - x_i y_i}{\sigma_i^2} = 0, \quad (\text{G.4.2})$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n \frac{ax_i + b - y_i}{\sigma_i^2} = 0 \quad (\text{G.4.3})$$

を満たす a, b を見つければよい。これら2式から、

$$a = \frac{\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\sigma_i^2}}{\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\sigma_i} \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2}, \quad (\text{G.4.4})$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\sigma_i} \right)^2 \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}}{\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\sigma_i} \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2}, \quad (\text{G.4.5})$$

$$\frac{1}{\sigma^2} \equiv \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \quad (\text{G.4.6})$$

が導かれる。 b の誤差を求めるには b をさらに y_i について微分する。

$$\frac{\partial b}{\partial y_i} = \frac{\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\sigma_i} \right)^2 - \frac{x_i}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\sigma_i} \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2}. \quad (\text{G.4.7})$$

これを用いると b の誤差 σ_b は、以下のようになる。

$$\sigma_b = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sigma_i \frac{\partial b}{\partial y_i} \right)^2}. \quad (\text{G.4.8})$$

謝辞

本修士論文の執筆にあたり，指導教員の土屋麻人教授には，初歩的な質問にも丁寧にお答え頂いたことを始め，様々な手厚いご指導をしていただき，大変お世話になりました。

また，鈴木淳史教授と松山晶彦教授には副査を務めていただきました。修士論文に目を通していただき，お二人から頂いた助言によって，本修士論文をよりよい形にすることができました。ありがとうございました。

日頃お世話になっている研究室の皆様を始め，本修士論文の執筆に様々な形でご協力して下さった方々に心から感謝申し上げます。ありがとうございました。

本研究の数値シミュレーションにおいては，京都大学基礎物理学研究所のスーパーコンピューター CRAY XC40 を利用させていただきました。こちらについても，厚く御礼申し上げます。

参考文献

- [1] C. S. Chu, J. Madore and H. Steinacker, *JHEP* **0108**, 038 (2001) [hep-th/0106205].
- [2] F. Garcia Flores, X. Martin and D. O’Conner, *Int. J. Mod. Phys. A* **24**, 3917 (2009) [arXiv:0903.1986 [hep-lat]].
- [3] D. Varshalovich , A. Moskalev and V. Khersonskii, “*Quantum Theory of Angular Momentum*” (World Scientific, Singapore, 1988).
- [4] 土屋麻人, “弦理論と行列模型”, サイエンス社 (2014).
- [5] 森口繁一, 宇田川銚久, 一松信, “岩波 数学公式 III”, 岩波書店 (1987).
- [6] 鈴木真理子, “非可換球面上のエンタングルメントエントロピー”, 静岡大学, 博士論文 (2016).
- [7] 奥野静華, “ファジー球面上のエンタングルメントエントロピー”, 静岡大学, 修士論文 (2016).
- [8] 青木慎也, “格子上の場の理論”, 丸善出版 (2012).
- [9] K. Hatakeyama and A. Tsuchiya, *PTEP* **2017**, no. 6, 063B01 (2017) [arXiv:1704.01698 [hep-th]].