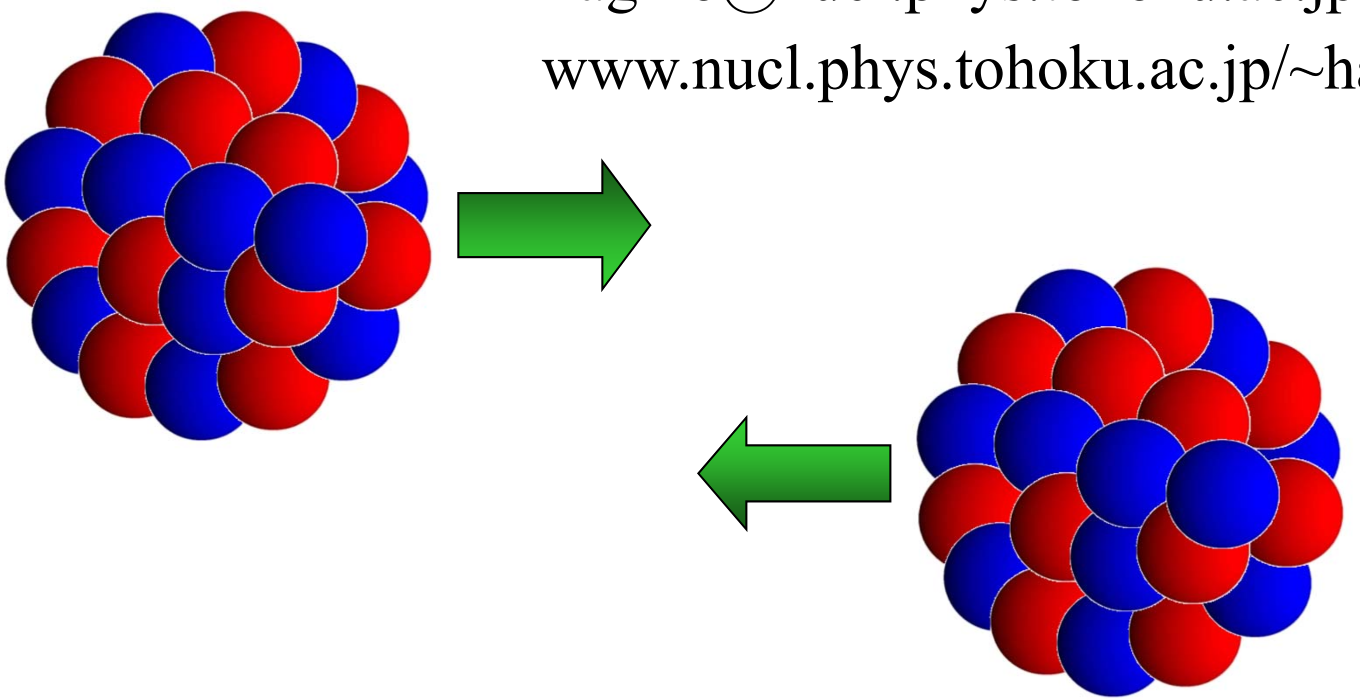
低エネルギー重イオン反応における量子多体ダイナミクス～核融合反応を中心として～

東北大学　　萩野浩一

hagino@nucl.phys.tohoku.ac.jp

www.nucl.phys.tohoku.ac.jp/~hagino



自己紹介

- 1989年4月～1993年3月　東北大学理学部物理学科（学部）
- 1993年4月～1995年3月　東北大学理学研究科（修士）
- 1995年4月～1998年3月　東北大学理学研究科（博士）

重イオン核融合反応の研究

原子核の集団励起が核融合に及ぼす影響

D論「重イオン核融合反応における多次元量子トンネル現象」

- 1998年10月～2000年11月　ワシントン大　（ポスドク）

重イオン核融合反応の研究は継続

（実験データの解析、不安定核の融合反応）

RPA相関の研究（Bertsch 氏との共同研究）

- 2000年11月～2004年4月　京大基研　（助手）

この間 2002年9月～2003年8月はIPNオルセー

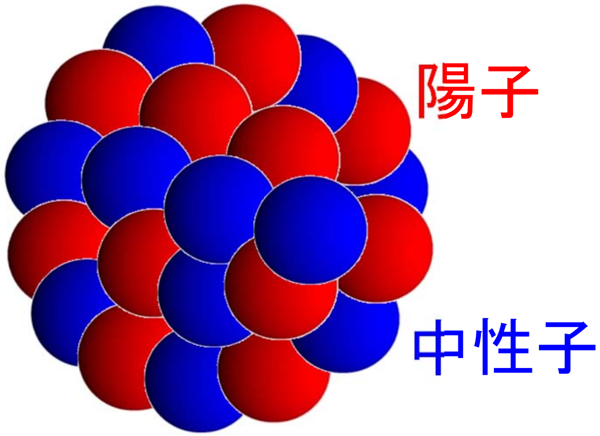
不安定核の平均場理論（佐川氏、Giai 氏との共同研究）

陽子過剰核の陽子放出崩壊

- 2004年5月～　東北大学理学研究科（助教授→ 准教授）

軽い中性子過剰核の3体模型計算（佐川氏との共同研究）

原子核 ＝ 強い相互作用をする粒子（ハドロン）
の集合体



Z個の陽子と
N個の中性子

フェルミオン多体系

- 有限量子多体系
- 自己束縛系

粒子が多体系をつくることによって初めて現われる豊富で多様な物理現象の解明

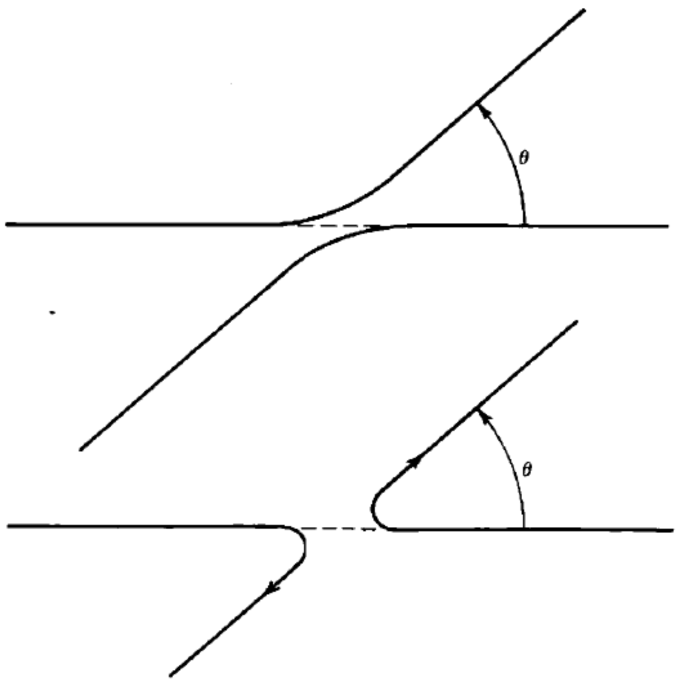
「量子多体論」

●そのような原子核2つが衝突するとどのようなことが起こるのか？
●量子力学の具体的な応用

原子核反応にみる量子力学: Mott 散乱

同種粒子の散乱

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= |f(\theta) \pm f(\pi-\theta)|^2 \\
&= |f(\theta)|^2 + |f(\pi-\theta)|^2 \pm f^*(\theta)f(\pi-\theta) \pm f(\theta)f^*(\pi-\theta)
\end{aligned}
$$



"Quantum Physics", S. Gasiorowicz

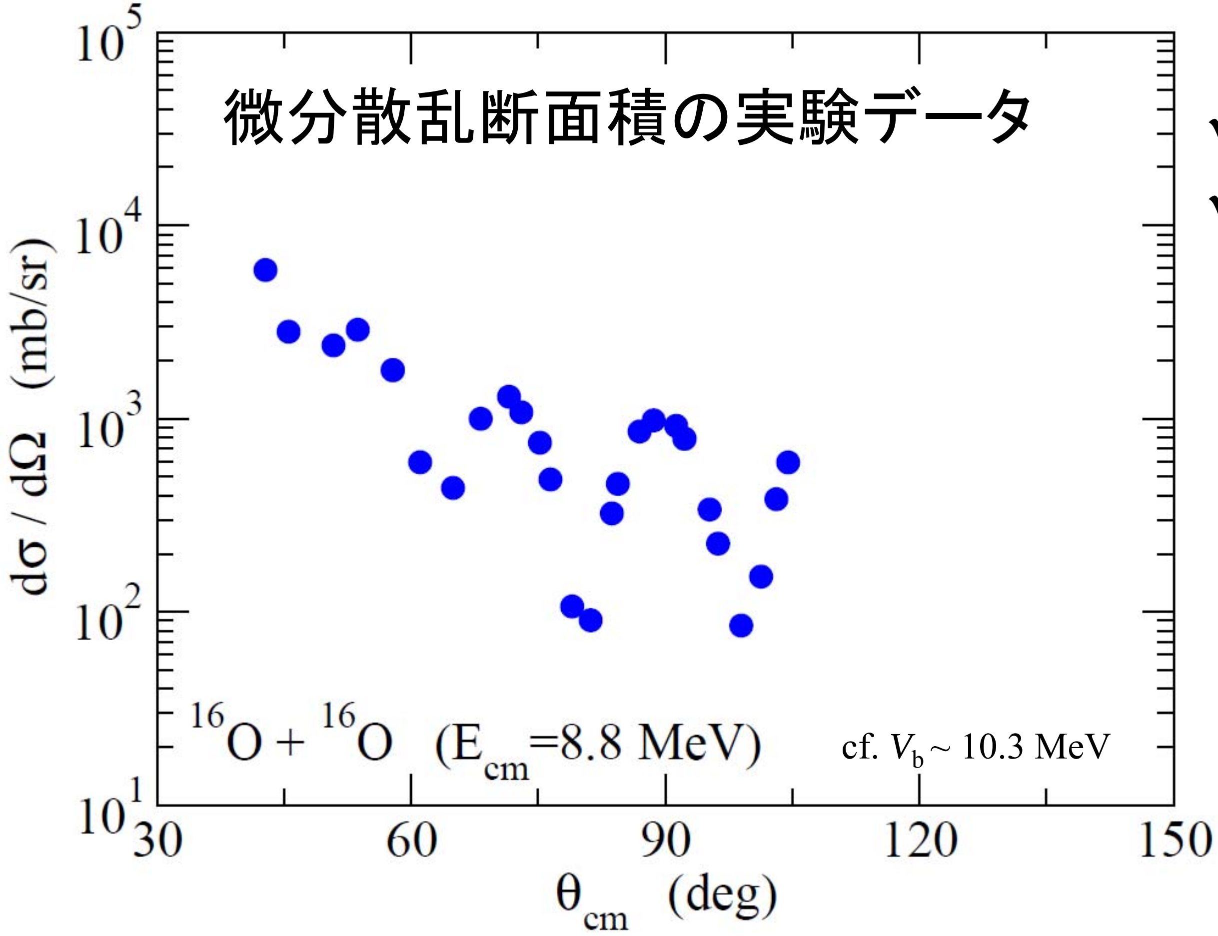
2つのプロセスは区別できない

↓

量子力学では、
確率振幅を足してから2乗

→ 干渉

^{16}O 原子核による^{16}O原子核の弾性散乱

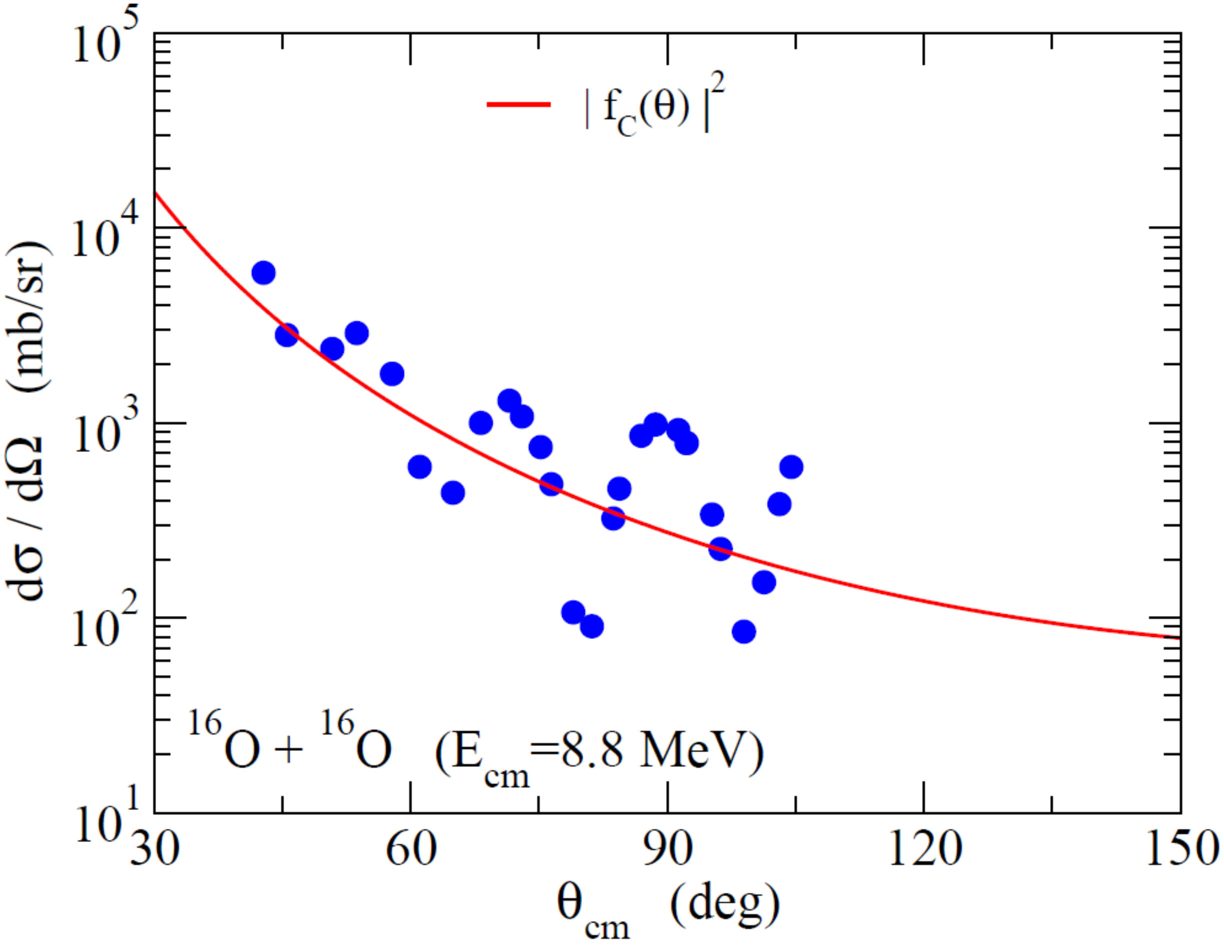


✓(重心系で)90度対称
✓振動パターン

D.A. Bromley et al.,
Phys. Rev. 123('61)878

^{16}O 原子核による^{16}O原子核の弾性散乱

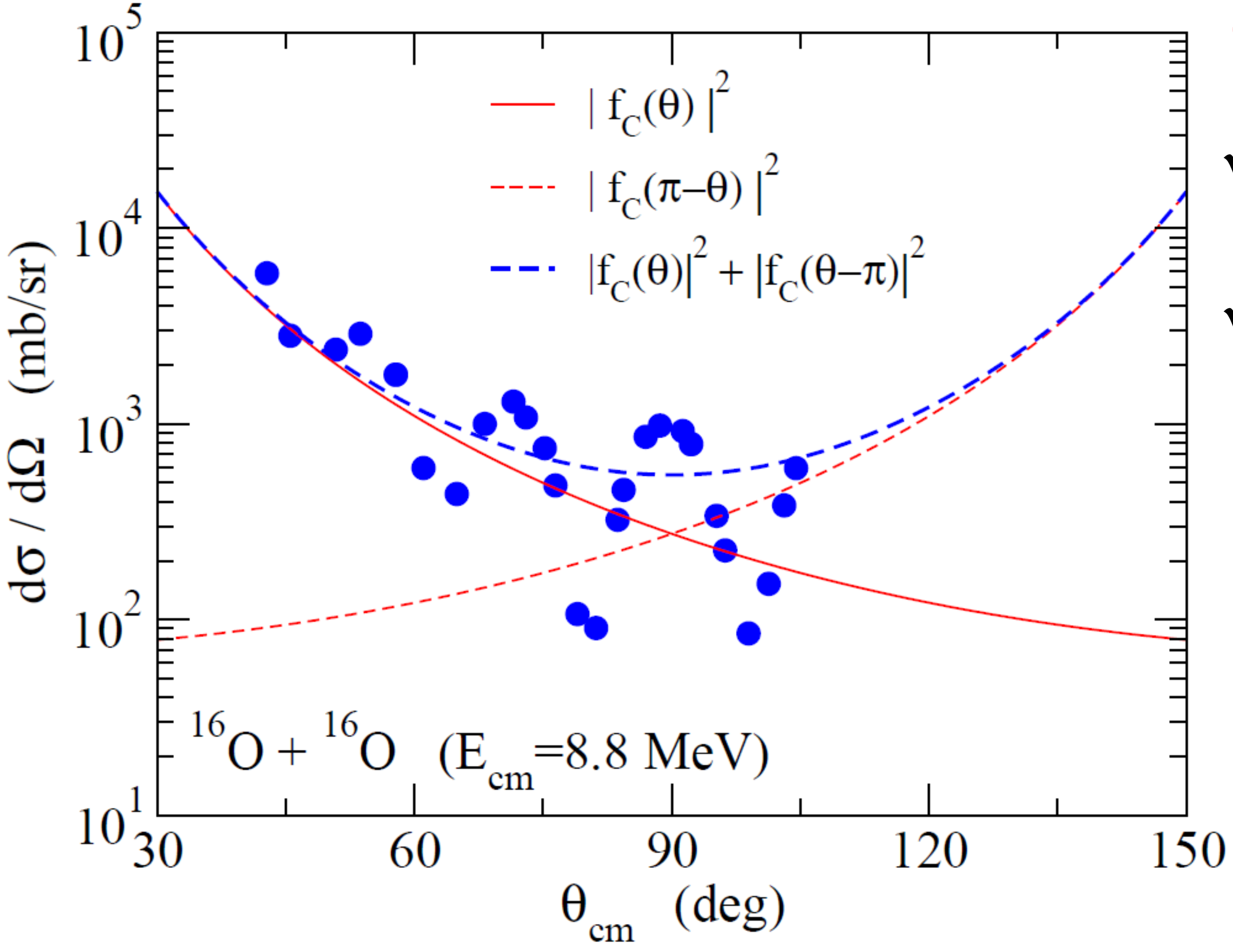
仮に2つの原子核が同種粒子でないとした場合



✓(重心系で)90度対称
✓振動パターン
ともに説明不可

^{16}O 原子核による^{16}O原子核の弾性散乱

同種粒子であることは考慮するが「**古典力学的に**」足した場合
（2乗してから足す）

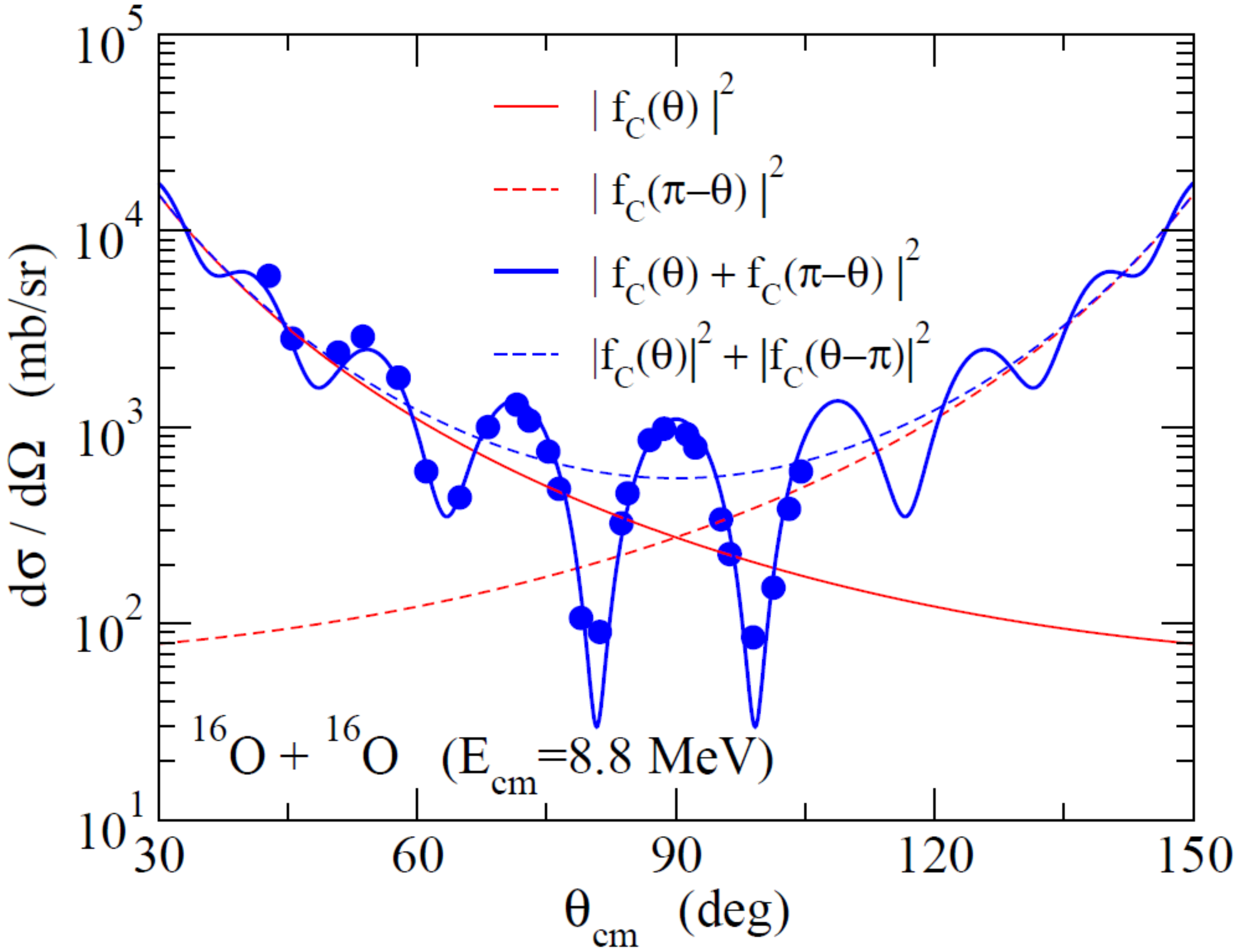


✓（重心系で）90度対称
はOKだが

✓振動パターンはダメ

^{16}O 原子核による^{16}O原子核の弾性散乱

量子力学的に振幅を足してから2乗する場合

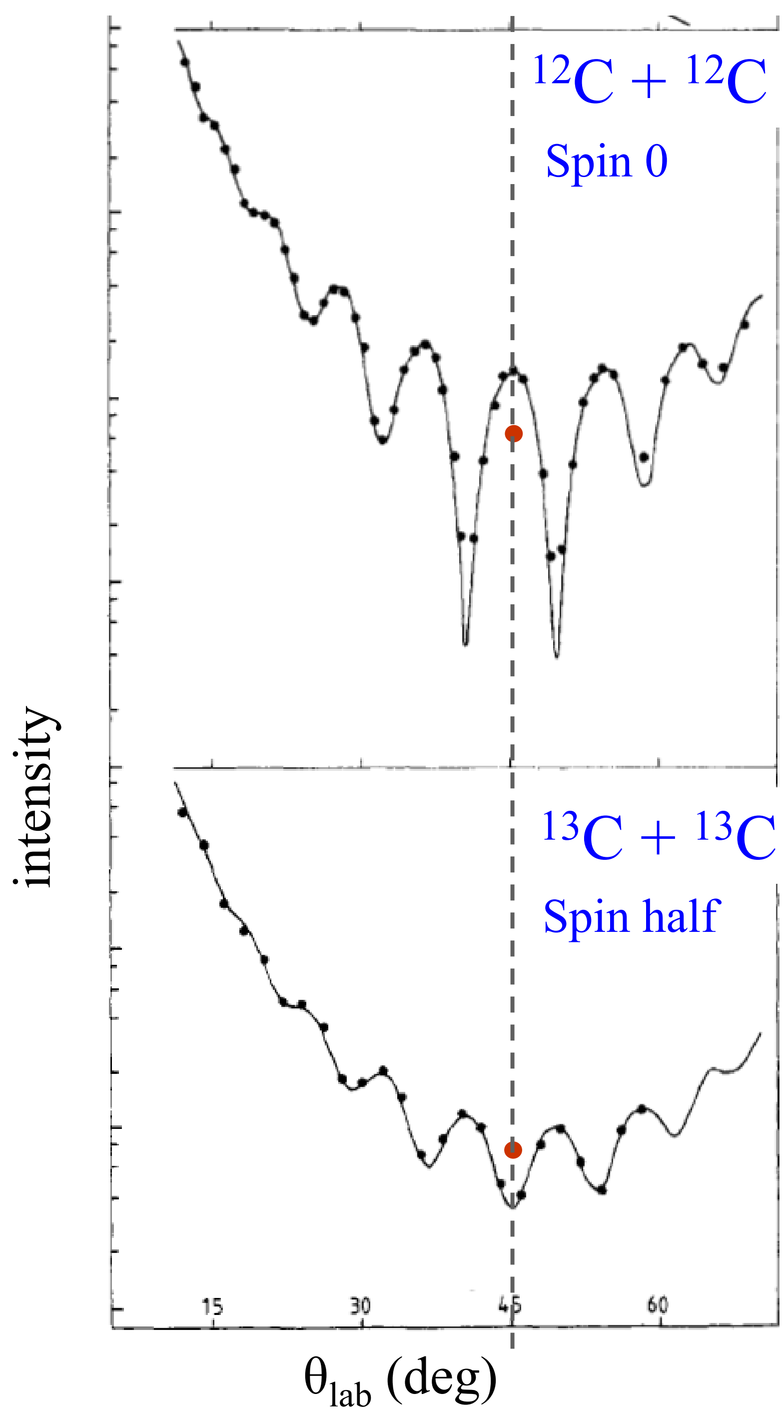


✓(重心系で)90度対称
✓振動パターン(干渉)

の両方ともOK

原子核が量子力学的な振る舞いをする恰好の例の一つ

cf. ただし重イオン反応は古典的な概念で理解できることも
しばしば(のちほど)



同種ボゾン系
constructive interference

同種フェルミオン系
destructive interference

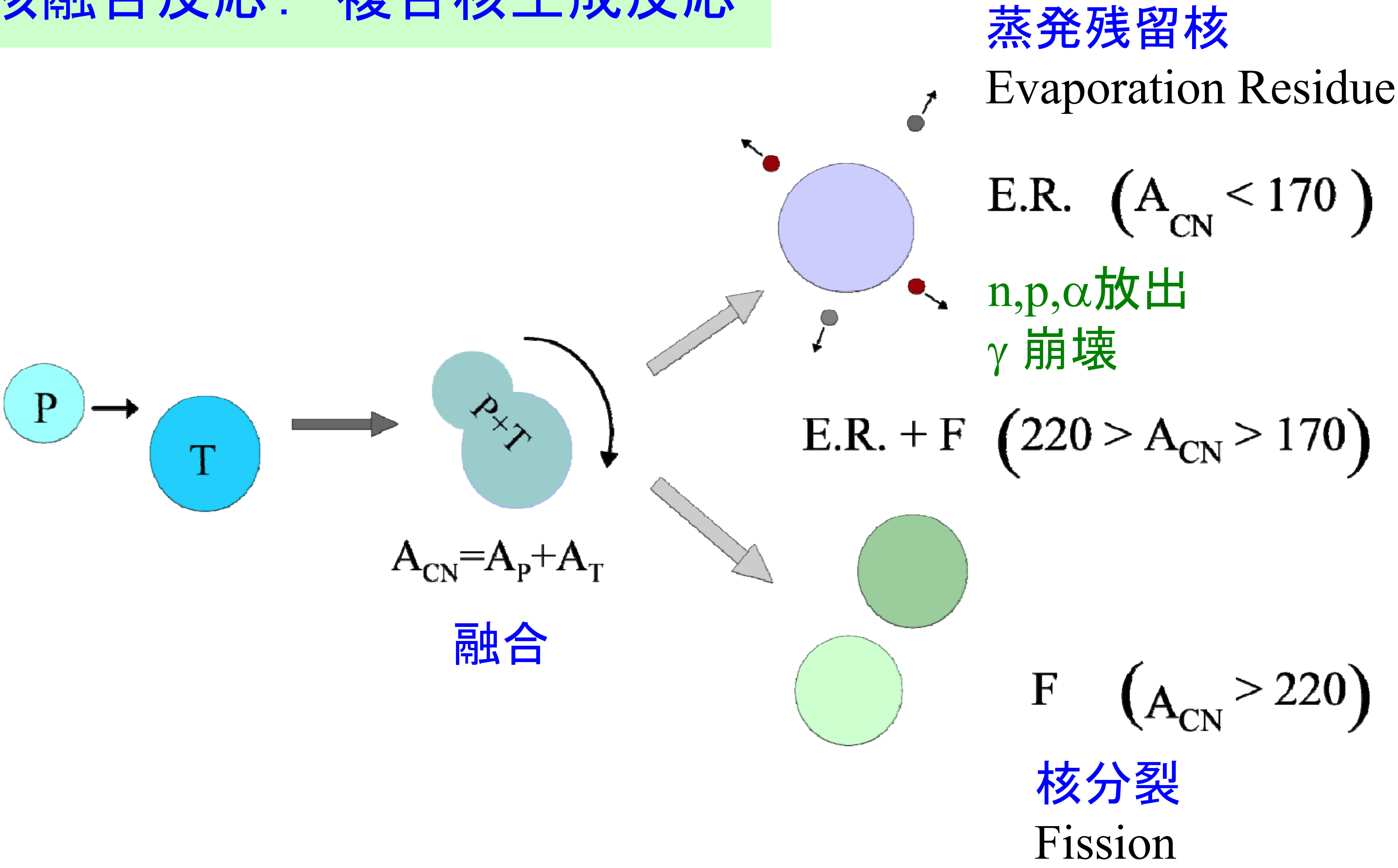
低エネルギー重イオン反応における量子多体ダイナミックス

講義のポイント

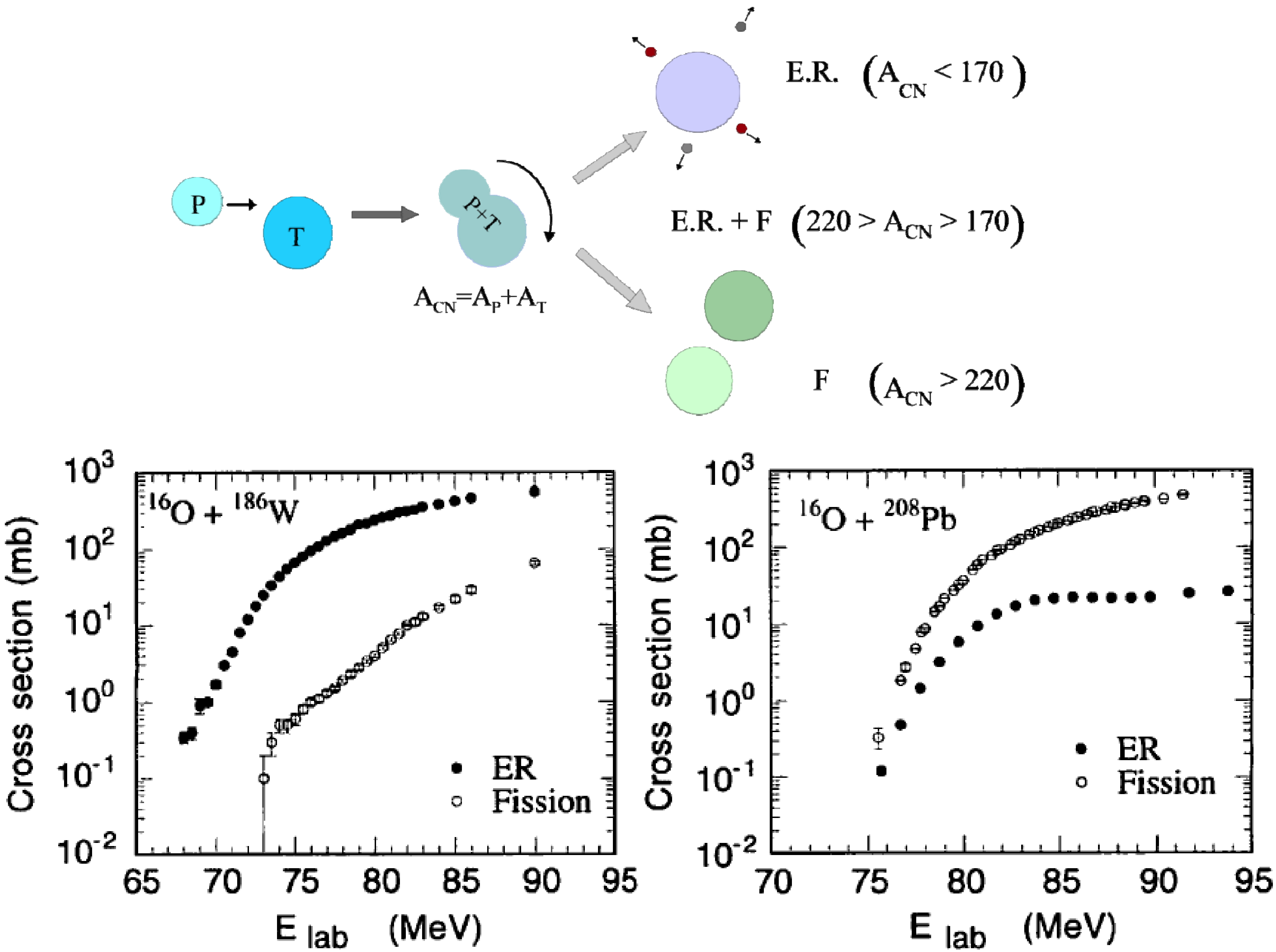
✧重イオン核融合反応と量子トンネル効果
✧**結合チャンネル法の基礎**
✧障壁分布法の考え方
✧重イオン準弾性散乱と量子反射
✧中性子過剰核の核融合反応
✧超重核領域の核融合反応

参考文献
"Subbarrier fusion reactions and many-particle quantum tunneling"
K. Hagino and N. Takigawa,
Prog. Theo. Phys. 128 (2012) 1061.

核融合反応： 複合核生成反応



courtesy: Felipe Canto


P
T
P+T
$A_{CN}=A_P+A_T$
E.R. $(A_{CN} < 170)$
E.R. + F $(220 > A_{CN} > 170)$
F $(A_{CN} > 220)$
$^{16}O + ^{186}W$
$^{16}O + ^{208}Pb$
Cross section (mb)
E_{lab} (MeV)
ER
Fission

＊どのように核融合反応断面積を測定するのか?

✓蒸発残留核からの特性X線の測定

✓蒸発残留核からのガンマ線の測定

効率の良い検出器が必要、バックグラウンドの見積もりが問題

長寿命のアイソマーがあると使えない

✓蒸発残留核からのα崩壊の測定

α放出核にのみ用いることができる

超重核合成反応では標準的な方法

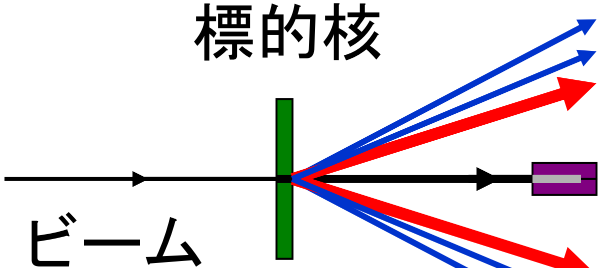
✓核融合生成物の直接測定（蒸発残留核＋核分裂）

最も不定性がない方法

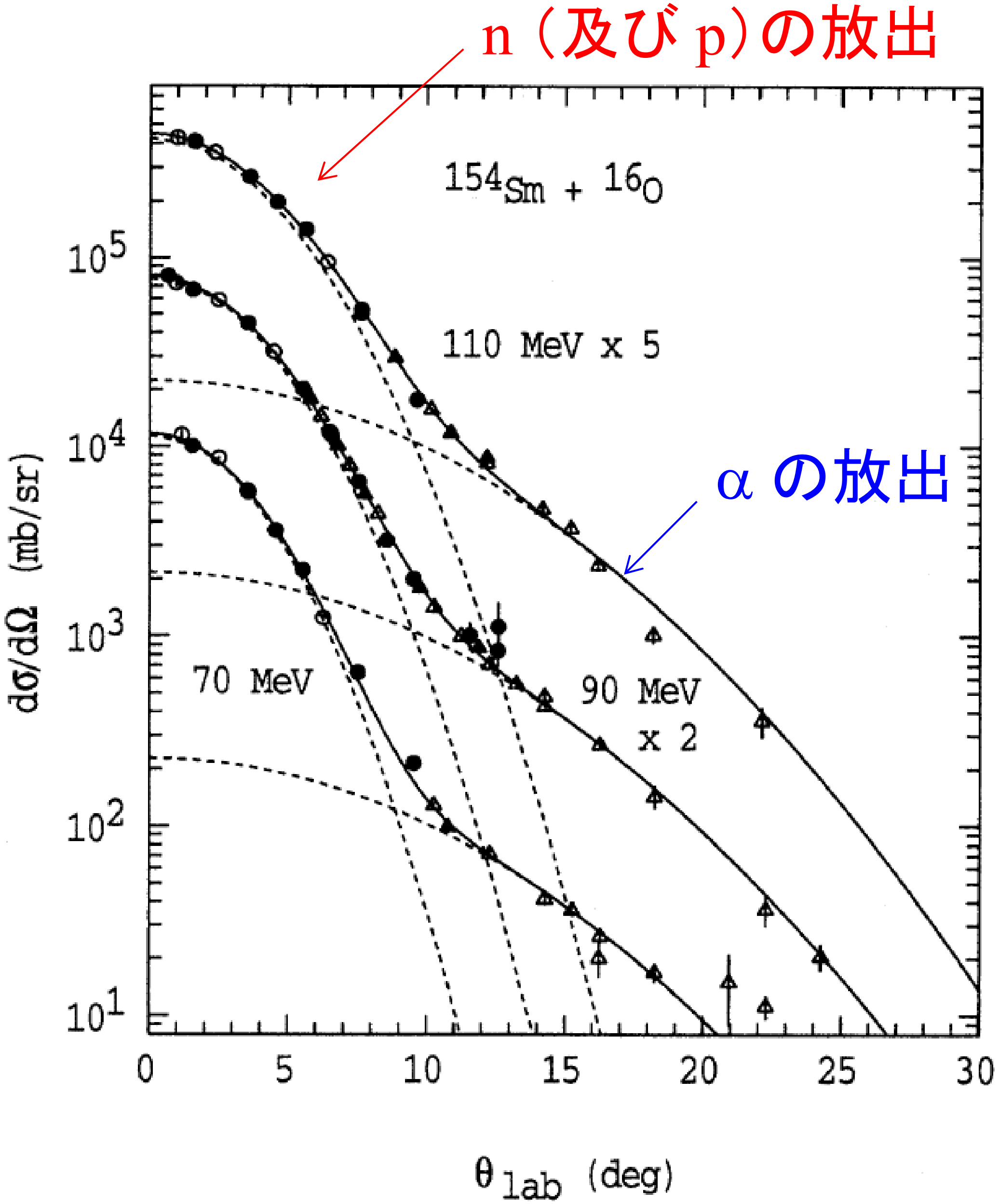
蒸発残留核とビームを分けるのに実験的技術が必要

核分裂片：広い角度をカバーする必要性

蒸発残留核の測定

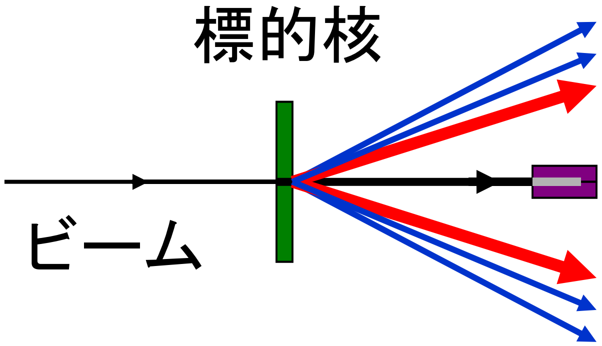


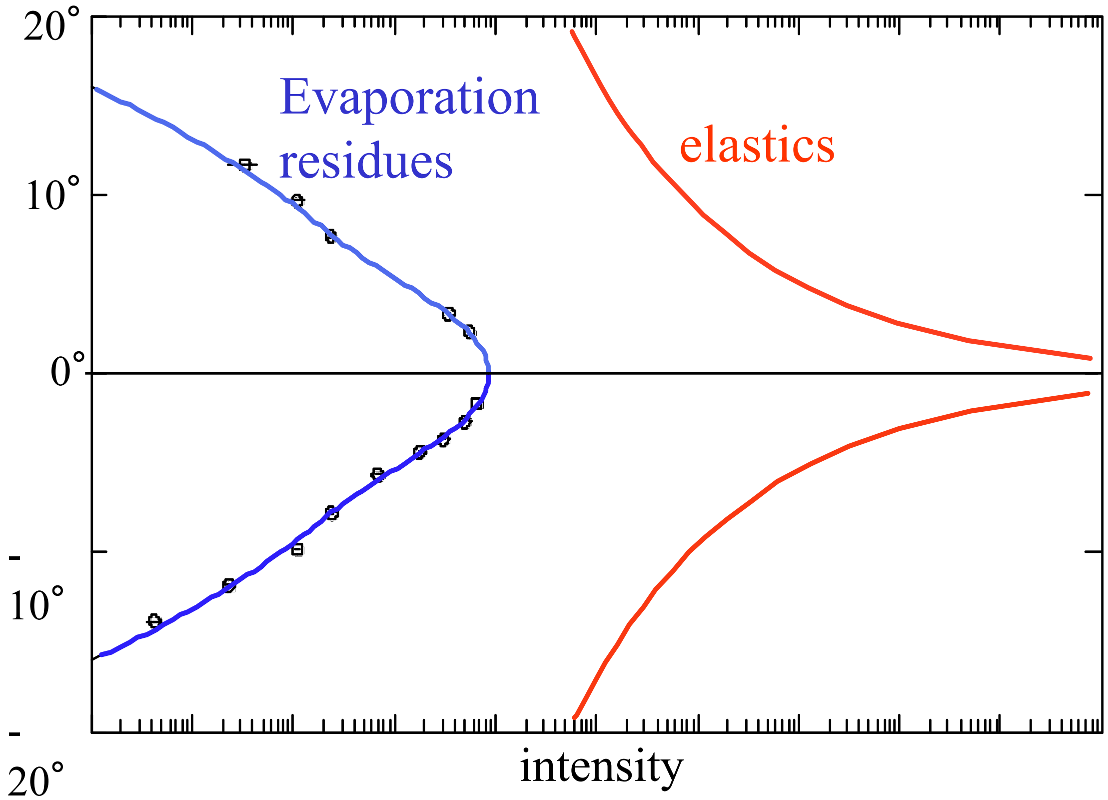
蒸発残留核:
前方角度へ



J.R. Leigh et al., PRC52('95)3151

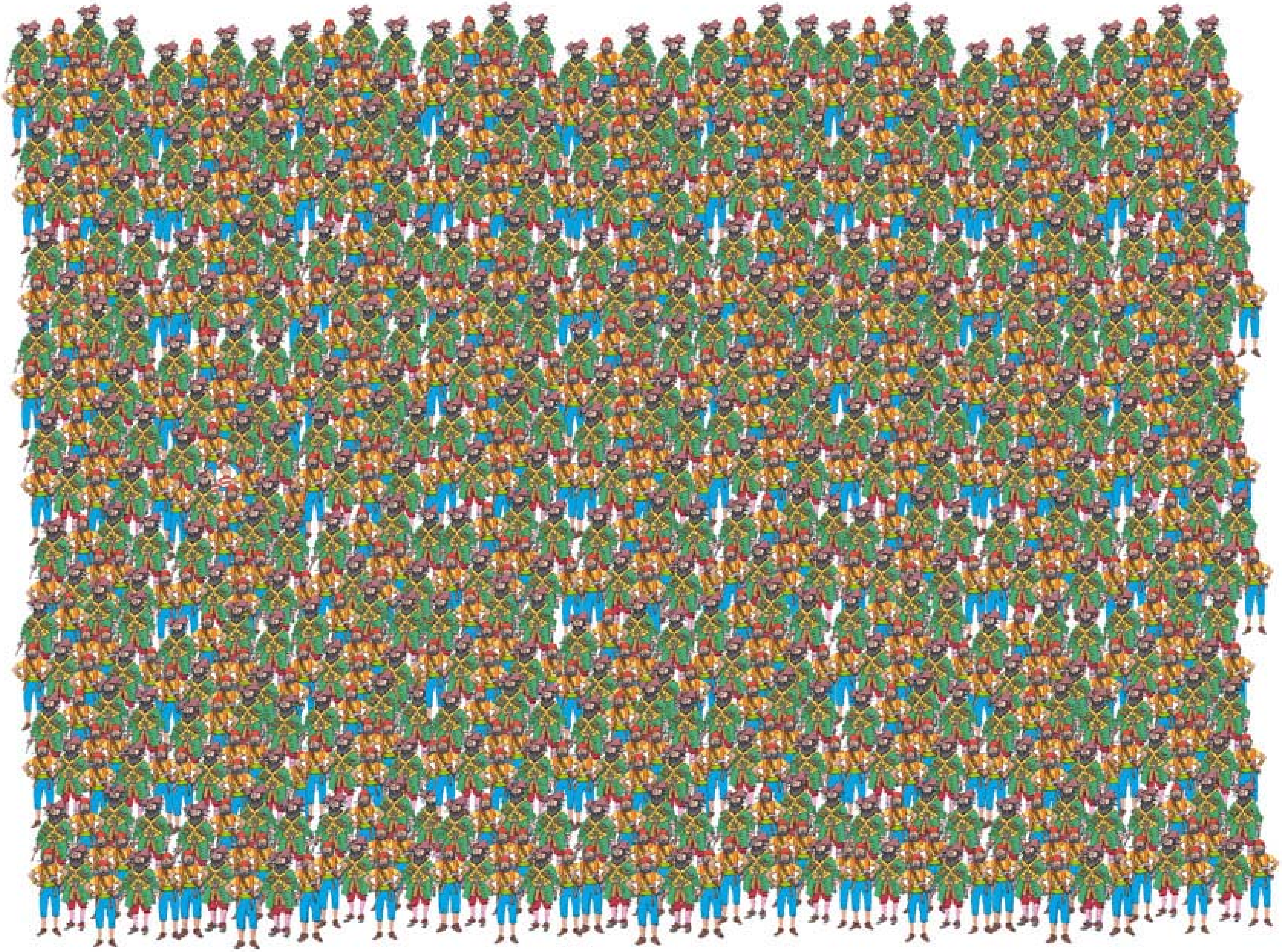
蒸発残留核の測定

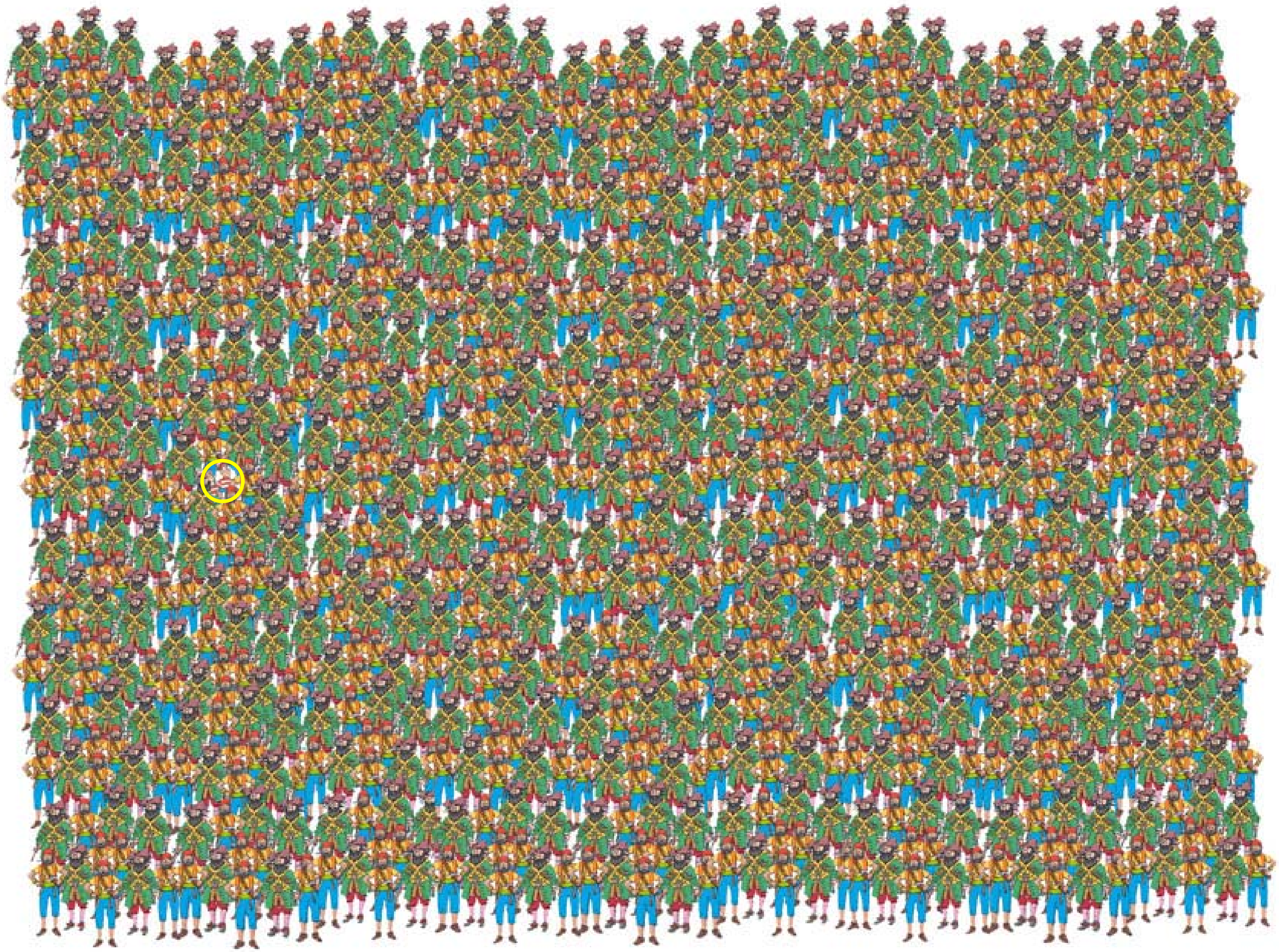




蒸発残留核:
前方角度へ
ビーム粒子も
前方角度へ

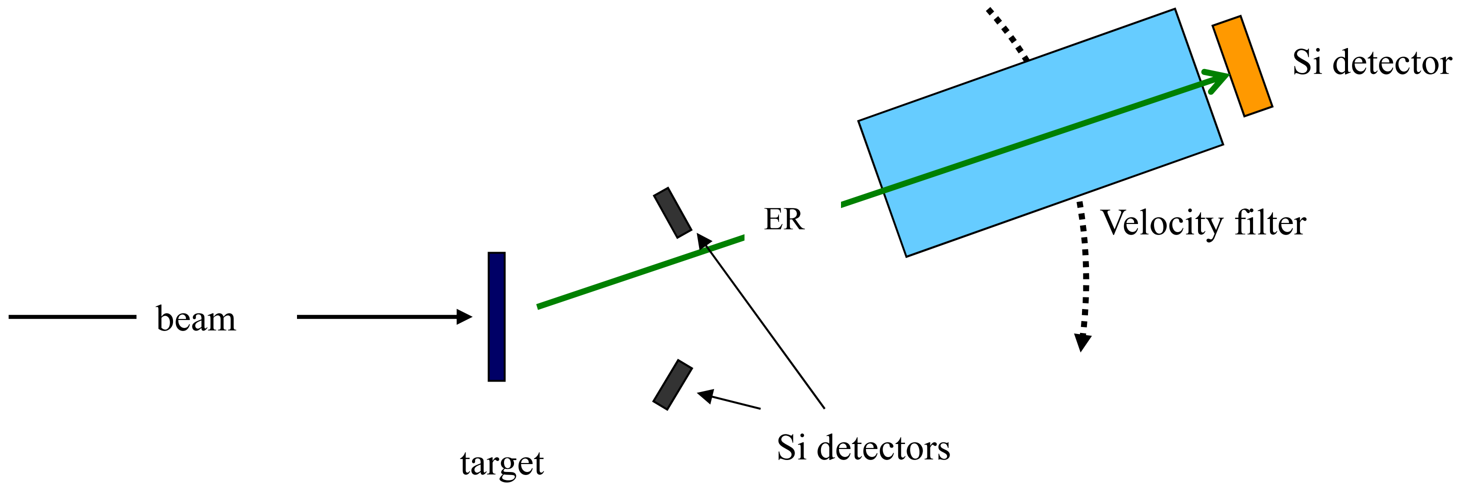
beam-like 粒子:蒸発残留核の 10^4~10^{12} 倍の強度



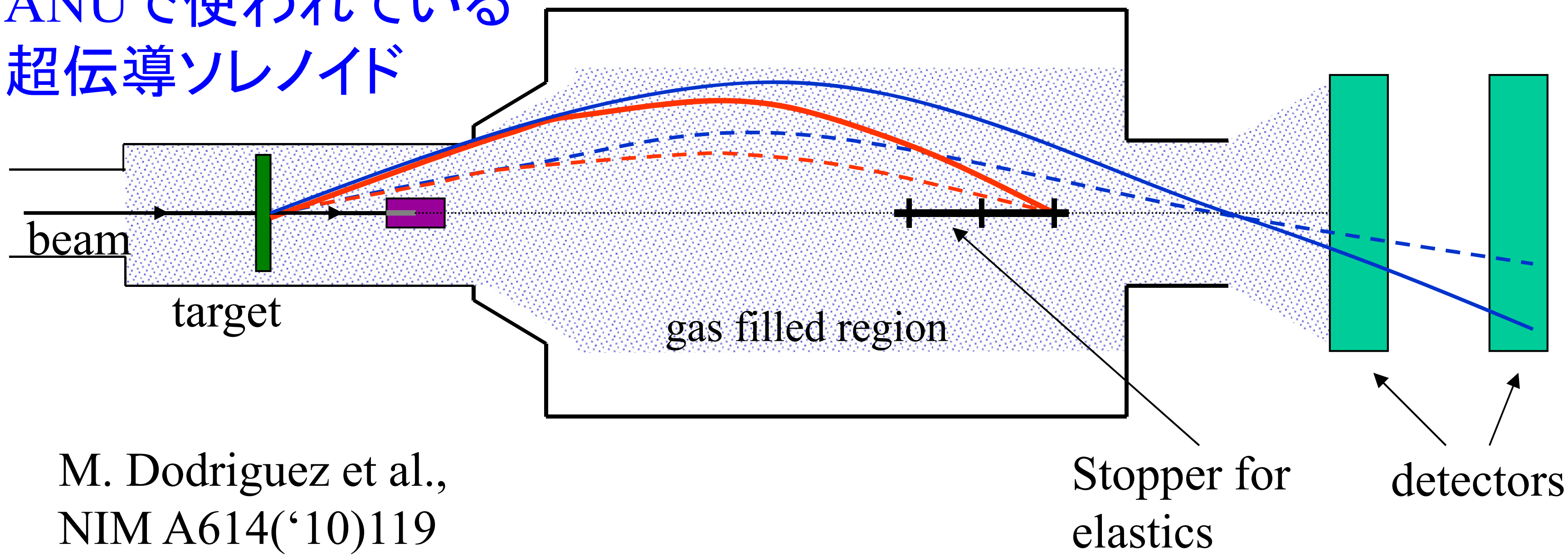


蒸発残留核の測定

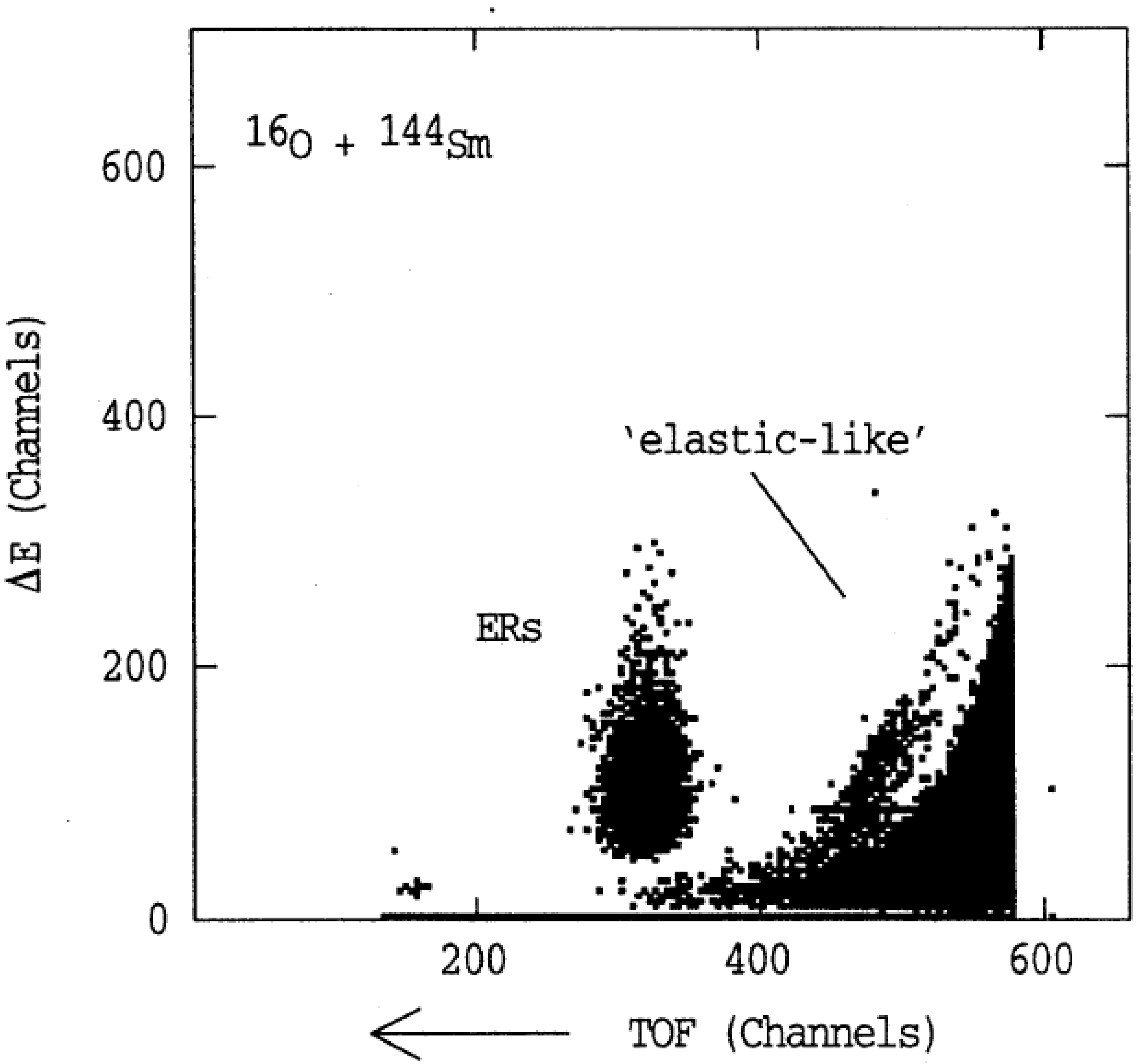
velocity filter 等を用いてうまく蒸発残留核と beam-like 粒子をわける



ANUで使われている
超伝導ソレノイド

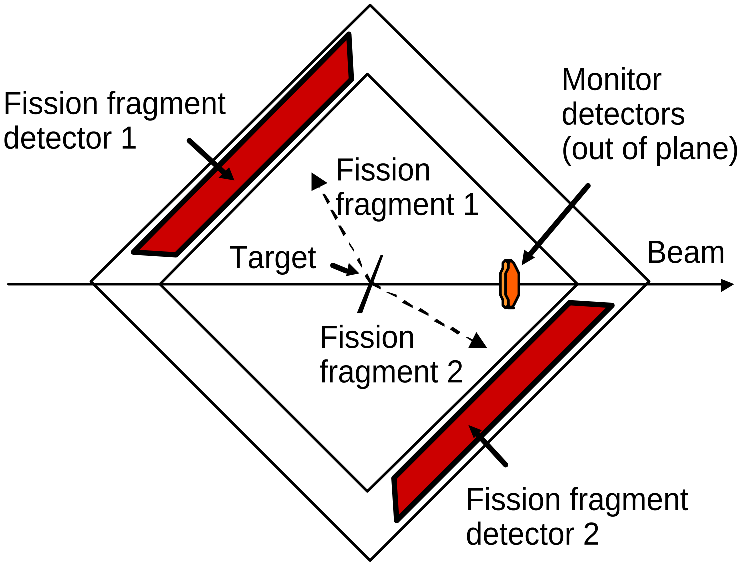


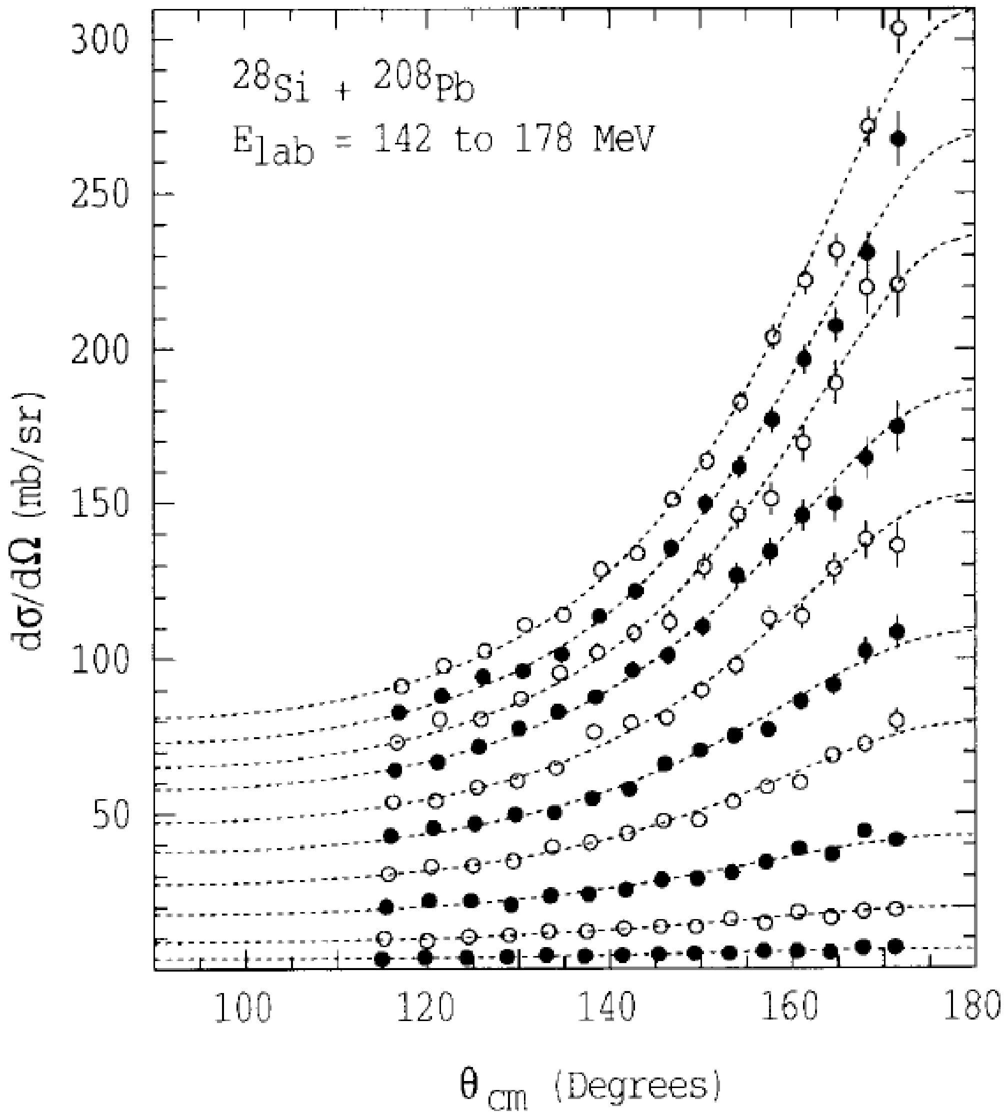
M. Dodriguez et al.,
NIM A614(‘10)119



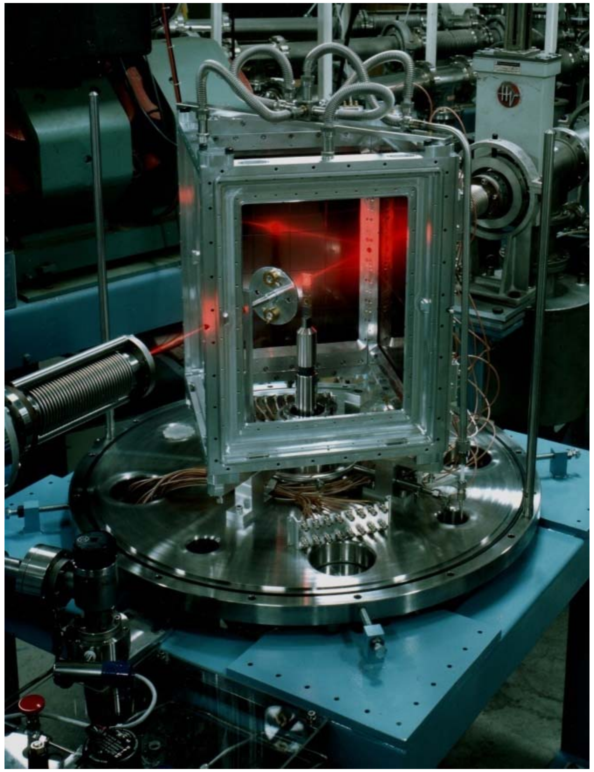
J.R. Leigh et al., PRC52('95)3151

核分裂片の測定



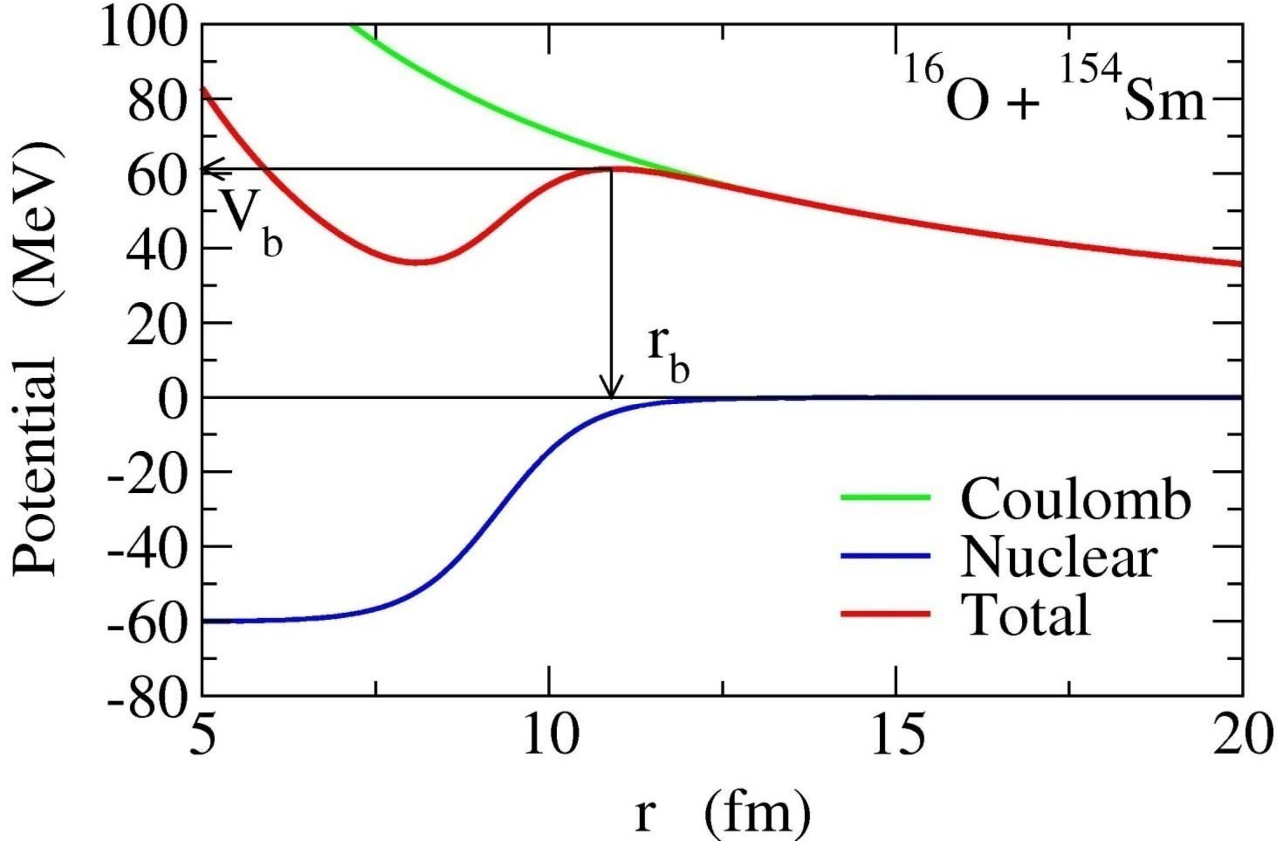


D.J. Hinde et al., NPA592('95)271



← ANUで使われている検出器

重イオン間ポテンシャル



2つの力:

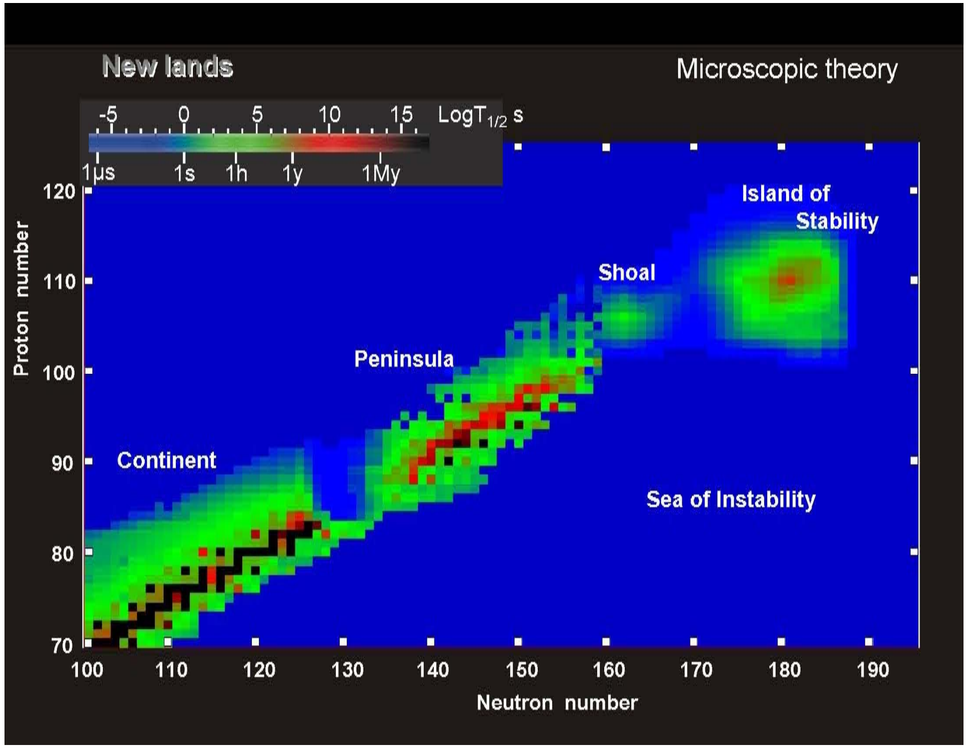
1. クーロン力
   長距離斥力
2. 核力
   短距離引力

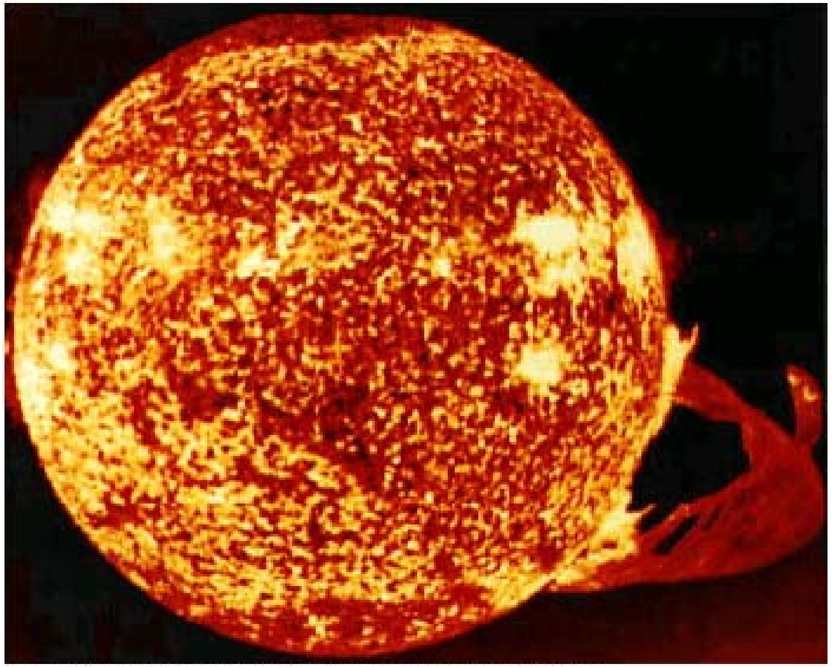
両者の打ち消しあいによりポテンシャル障壁が形成
（クーロン障壁）

- クーロン障壁より高いエネルギー
- クーロン障壁近傍のエネルギー (subbarrier energies)
- 極低エネルギー (deep subbarrier eneriges)

何故、障壁近傍のエネルギーでの核融合に興味があるのか?

2つのわかりやすい理由:





NASA, Skylab space station December 19, 1973, solar flare reaching 588 000 km off solar surface

超重元素の物理
(「冷たい」核融合反応による
新元素の合成)

天体核物理
(星の中での核融合反応)

何故、障壁近傍のエネルギーでの核融合に興味があるのか?

2つのわかりやすい理由:

✓超重元素の物理
✓天体核物理

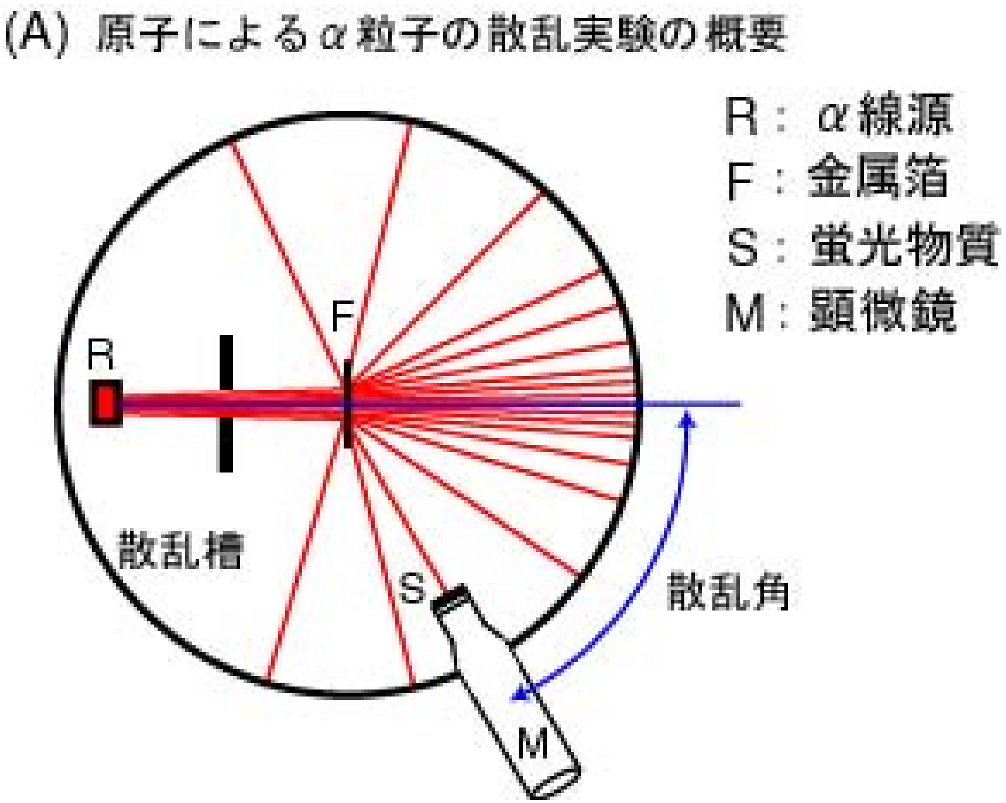
他の理由:

✓反応機構
核反応と核構造の強い結合(結合チャンネル効果)
cf. 高エネルギー反応:反応機構はより単純

✓多粒子系の量子トンネル現象
cf. ・α崩壊:エネルギーが固定されている
・原子衝突におけるトンネル現象
:内部自由度の種類が原子核ほど豊富ではない

核反応論基礎：基本的概念と量子力学の復習

原子核の形や相互作用、励起状態の性質：衝突実験
cf. ラザフォードの実験（α 散乱）



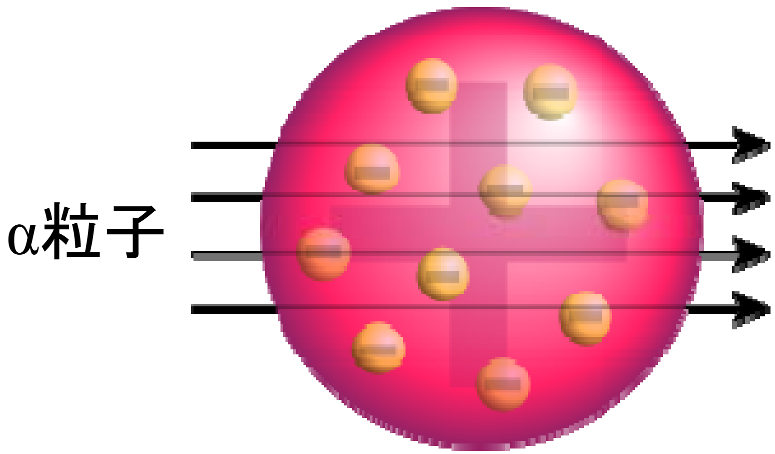
アルファ粒子 (^{4}He 原子核）を金属薄膜に照射し、散乱された角度を測定
（ラザフォード、1911)

大部分はまっすぐ直進するが、ごくたまに90度以上に散乱される場合もある

http://www2.kutl.kyushu-u.ac.jp/seminar/MicroWorld/Part2/P23/alpha_particle.htm

核反応論基礎：基本的概念と量子力学の復習

原子核の形や相互作用、励起状態の性質：衝突実験
cf. ラザフォードの実験（α 散乱）



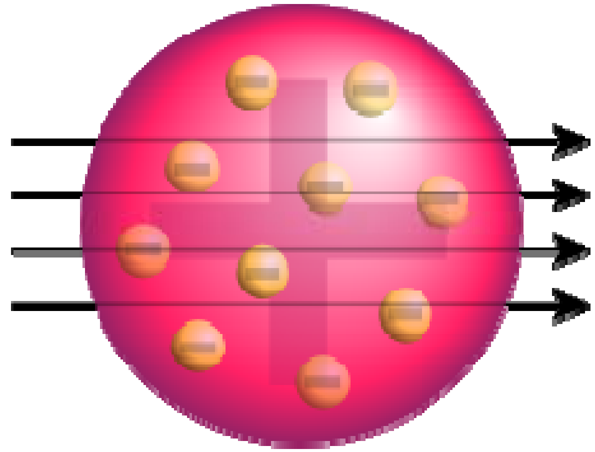
J.J. トムソンのぶどうパン模型

⇩

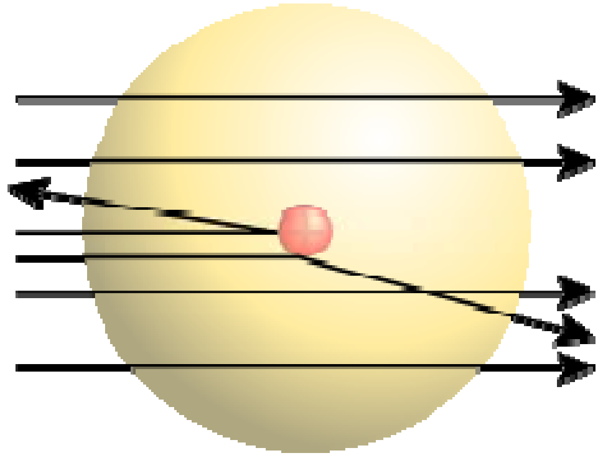
散乱の角度は高々 0.01 度

核反応論基礎：基本的概念と量子力学の復習

原子核の形や相互作用、励起状態の性質：衝突実験
cf. ラザフォードの実験（α 散乱）



J.J. トムソンのぶどうパン模型

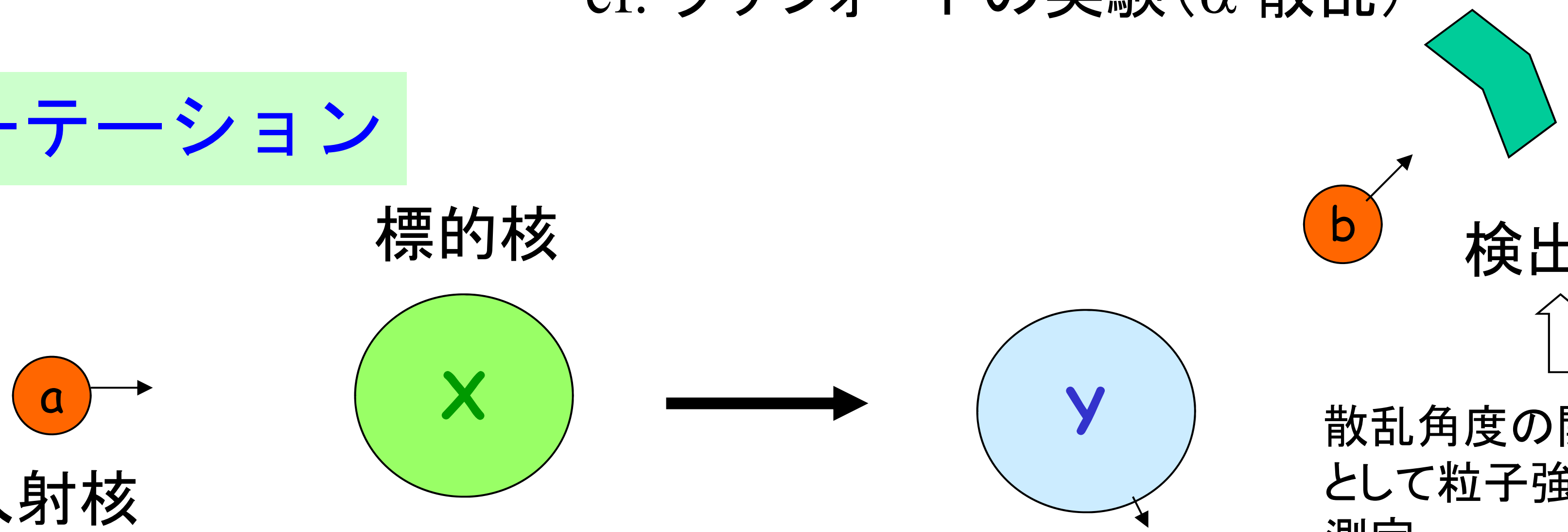


ラザフォードの有核原子模型
（原子核を点状粒子とみなした解析）

核反応論基礎：基本的概念と量子力学の復習

原子核の形や相互作用、励起状態の性質：衝突実験
cf. ラザフォードの実験（α 散乱）

ノーテーション



標的核

入射核
（ビーム）

検出器

散乱角度の関数として粒子強度を測定

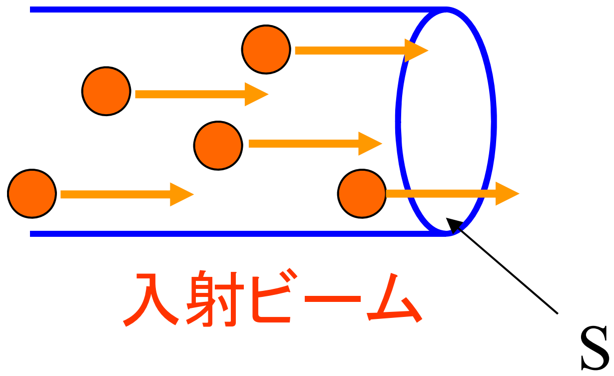
X(a,b)Y

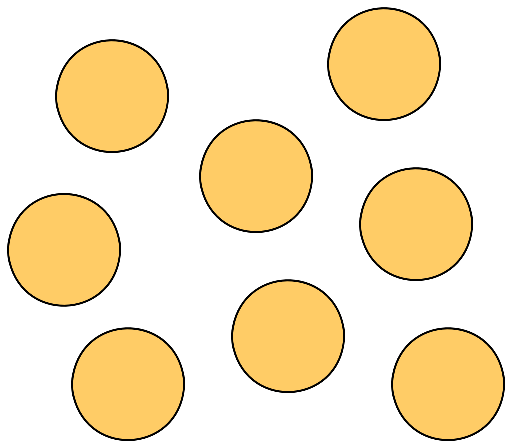
反応チャンネルの例

^{208}Pb(^{16}O,^{16}O)^{208}Pb　　: ^{16}O+^{208}Pb 弾性散乱
^{208}Pb(^{16}O,^{16}O)^{208}Pb*　　: ^{16}O+^{208}Pb 非弾性散乱
^{208}Pb(^{17}O,^{16}O)^{209}Pb　　: 1中性子移行反応

この他に複合核合成反応も

散乱断面積



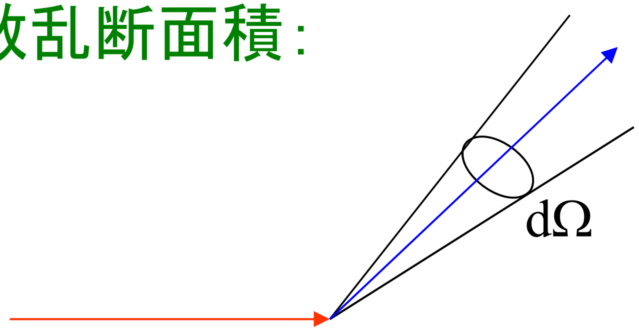


単位時間当たりに標的粒子1個に対する反応の起きる数	=	σ・ 単位時間当たり単位面積を通過する入射粒子の数

σ/S = ビーム中の入射粒子1個が標的1個と衝突した時に散乱の起こる確率

単位: 1 barn = 10^{-24} cm^2 = 100 fm^2　　(1 mb = 10^{-3} b = 0.1 fm^2)

微分散乱断面積:



$$\frac{d\sigma}{d\Omega}$$

散乱振幅

自由粒子の運動: $$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi = \frac{\boldsymbol{k}^2\hbar^2}{2m}\psi$$

$$\psi(\boldsymbol{r}) = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,i^l j_l(kr)P_l(\cos\theta)$$

部分波展開

$$\to \frac{i}{2kr}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l\left[e^{-i(kr-l\pi/2)} - e^{i(kr-l\pi/2)}\right]P_l(\cos\theta)$$

ポテンシャルがある場合: $$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\boldsymbol{r}) - E\right]\psi = 0$$

波動関数の漸近形

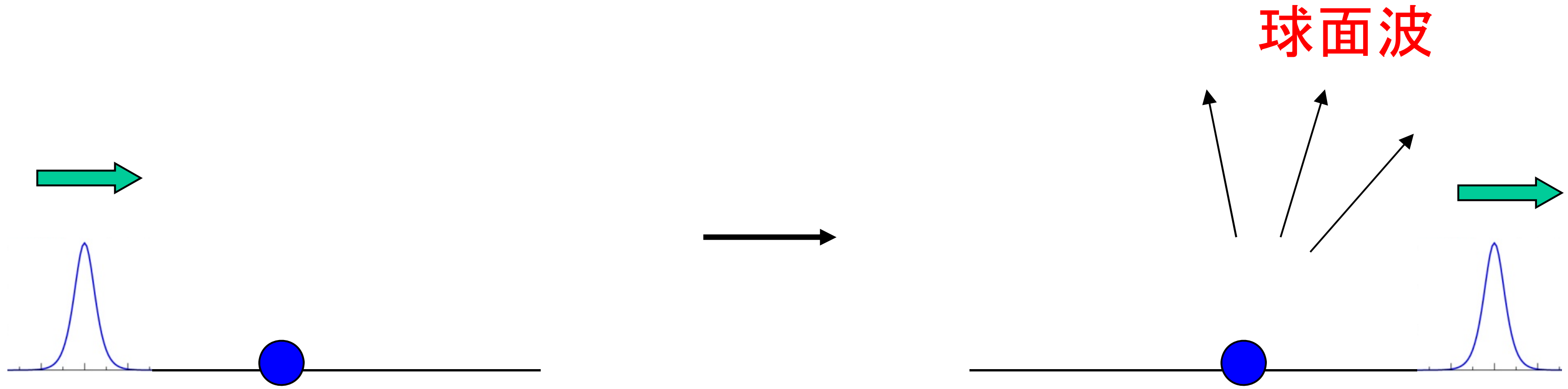
$$\psi(\boldsymbol{r}) \to \frac{i}{2kr}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l\left[e^{-i(kr-l\pi/2)} - \underline{\underline{S_l}}\,e^{i(kr-l\pi/2)}\right]P_l(\cos\theta)$$

$$= e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \underbrace{\left[\sum_l(2l+1)\frac{S_l-1}{2ik}P_l(\cos\theta)\right]}_{f(\theta)}\frac{e^{ikr}}{r}$$

$f(\theta)$ （散乱振幅）

$$
\begin{aligned}
\psi(\boldsymbol{r}) &\to e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \left[\sum_l (2l+1)\frac{S_l - 1}{2ik} P_l(\cos\theta)\right]\frac{e^{ikr}}{r} \\
&= e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}
\end{aligned}
$$

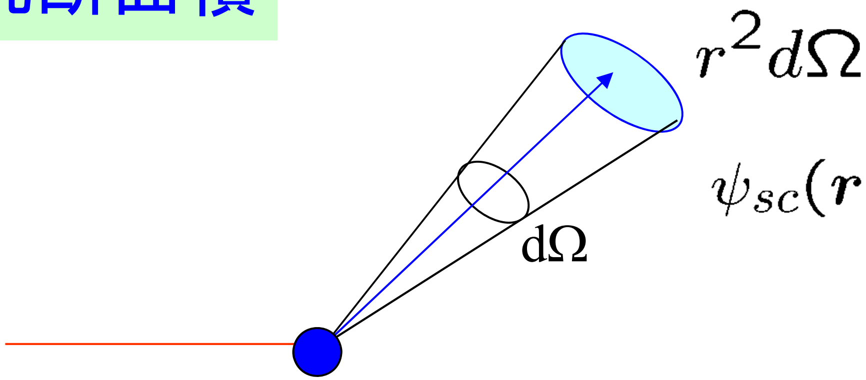
＝（入射波）＋（散乱波）



弾性散乱の微分散乱断面積:

$$
\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2}
$$

微分散乱断面積



$$\psi_{sc}(\boldsymbol{r}) \sim f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}$$

単位時間に立体角 dΩ に散乱される粒子の数:

$$N_{\mathrm{scatt}} = \boldsymbol{j}_{sc} \cdot \boldsymbol{e}_r \, r^2 d\Omega$$

$$\boldsymbol{j}_{sc} = \frac{\hbar}{2im}\left[\psi_{sc}^{*}\boldsymbol{\nabla}\psi_{sc} - c.c.\right] \sim \frac{k\hbar}{m}\frac{|f(\theta)|^2}{r^2}\boldsymbol{e}_r$$

（散乱波に対するフラックス）

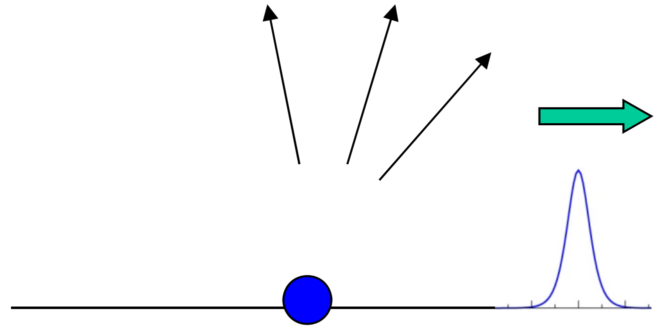
$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2}$$

$$f(\theta) = \sum_l (2l+1)\frac{S_l - 1}{2ik} P_l(\cos\theta)$$

光学ポテンシャルと吸収断面積

反応プロセス

- 弾性散乱
- 非弾性散乱
- 粒子移行
- 複合粒子形成（核融合）



弾性フラックスの減少（吸収）

光学ポテンシャル

$$\boxed{V_{\mathrm{opt}}(\boldsymbol{r}) = V(\boldsymbol{r}) - iW(\boldsymbol{r}) \qquad (W > 0)}$$

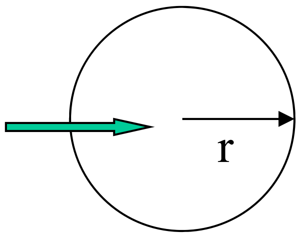
$$\Longrightarrow \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = \cdots = -\frac{2}{\hbar} W |\psi|^2$$

(note) ガウスの定理

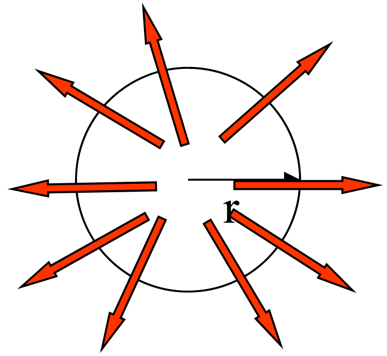
$$\int_S \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j}\, dV$$

$$\psi(\boldsymbol{r}) \to \frac{i}{2k}\sum_l (2l+1)\, i^l \, \frac{1}{r}\left[\underbrace{e^{-i(kr-l\pi/2)}}_{\psi_{\text{in}}} - \underbrace{S_l e^{i(kr-l\pi/2)}}_{\psi_{\text{out}}}\right] P_l(\cos\theta)$$

全内向フラックス:



全外向フラックス:



$$j_{\text{in}}^{\text{net}} = \frac{k\hbar}{m}\cdot\frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)$$

$$j_{\text{out}}^{\text{net}} = \frac{k\hbar}{m}\cdot\frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)|S_l|^2$$

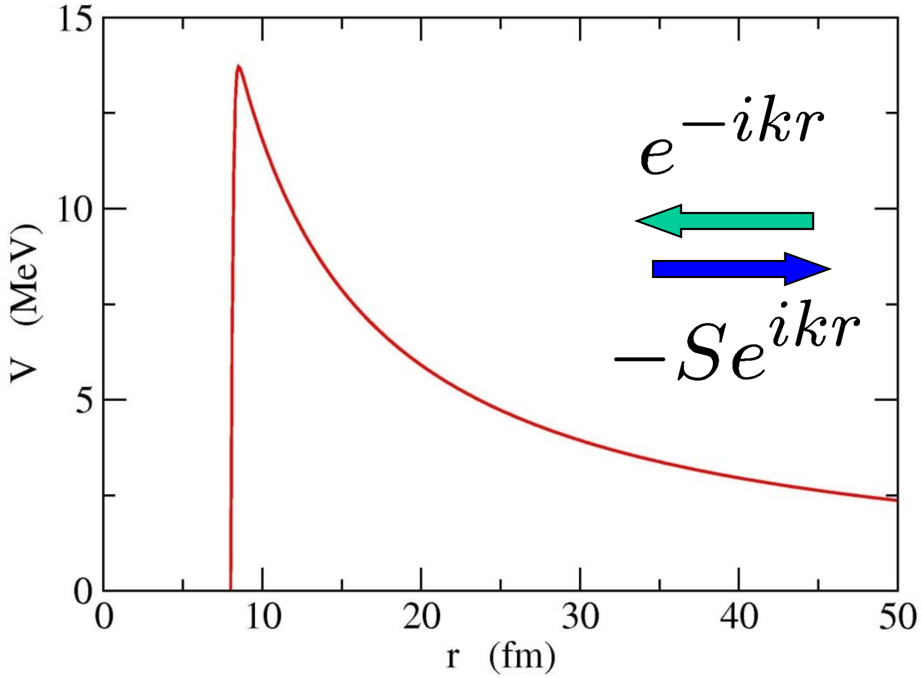
減少したフラックス: $j_{\text{in}}^{\text{net}} - j_{\text{out}}^{\text{net}} = \frac{k\hbar}{m}\cdot\frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)(1-|S_l|^2)$

吸収断面積

$$\boxed{\sigma_{\text{abs}} = \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)(1-|S_l|^2)}$$

3次元球対称ポテンシャルの場合:

$$\psi(\boldsymbol{r}) \to \frac{i}{2k}\sum_l (2l+1)\, i^l\, \frac{1}{r}\left[e^{-i(kr-l\pi/2)} - S_l e^{i(kr-l\pi/2)}\right] P_l(\cos\theta)$$



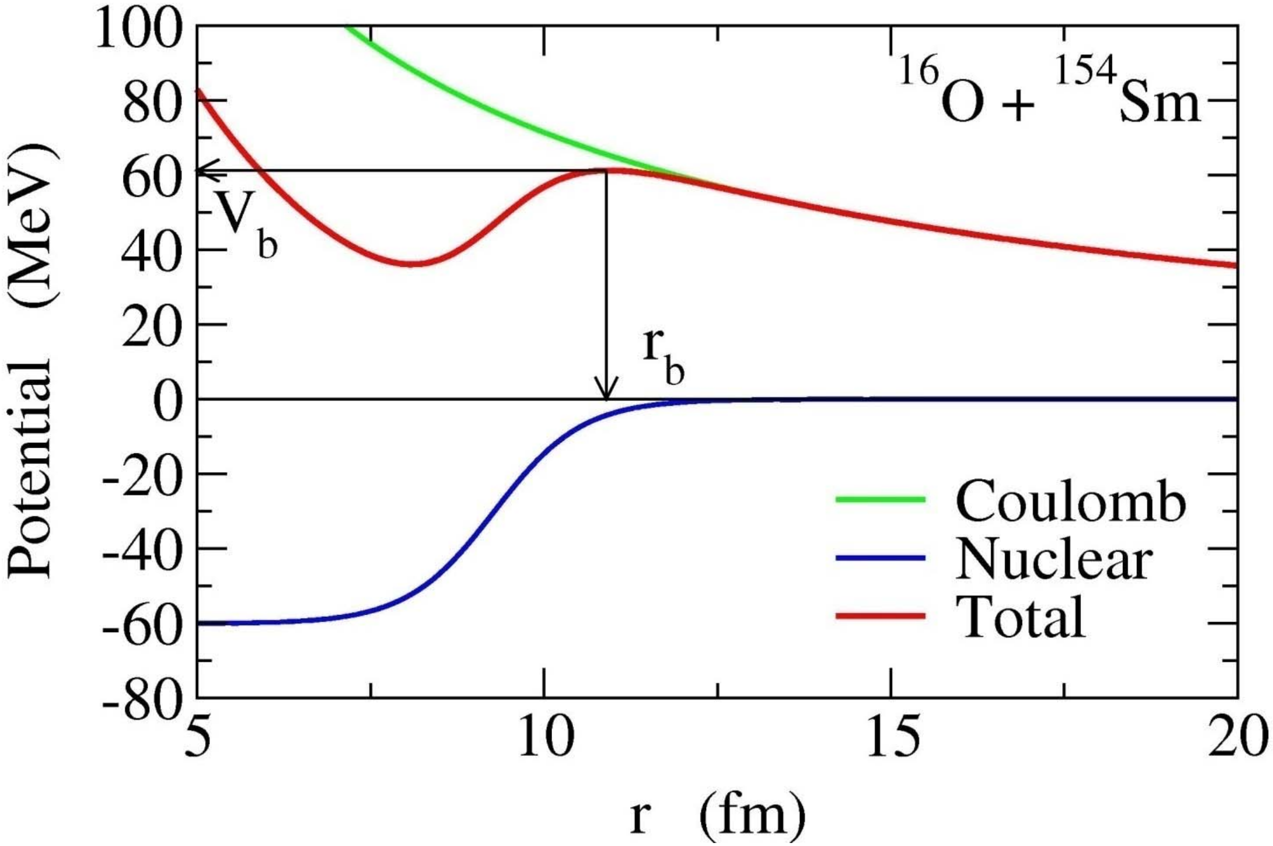
$$-S_l \sim R \text{ (reflection coeff.)} \Longrightarrow P = |T|^2 = 1 - |S_l|^2$$

$$\boxed{\sigma_{\rm abs} = \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)(1-|S_l|^2) = \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1) P_l}$$

重イオン反応の概観

重イオン：^{4}He より重い原子核

重イオン間ポテンシャル

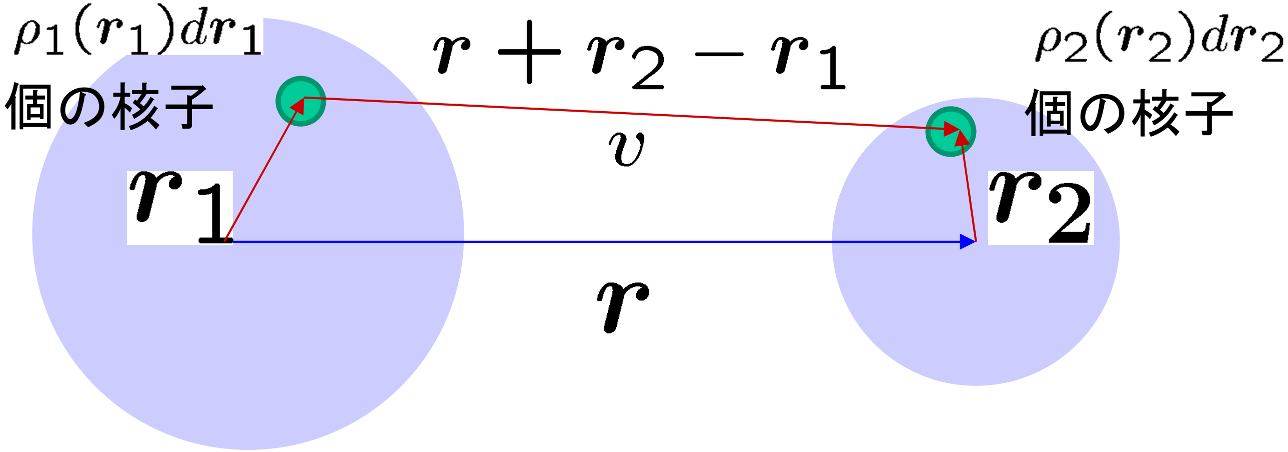


2つの力：

1. クーロン力
   長距離斥力
2. 核力
   短距離引力

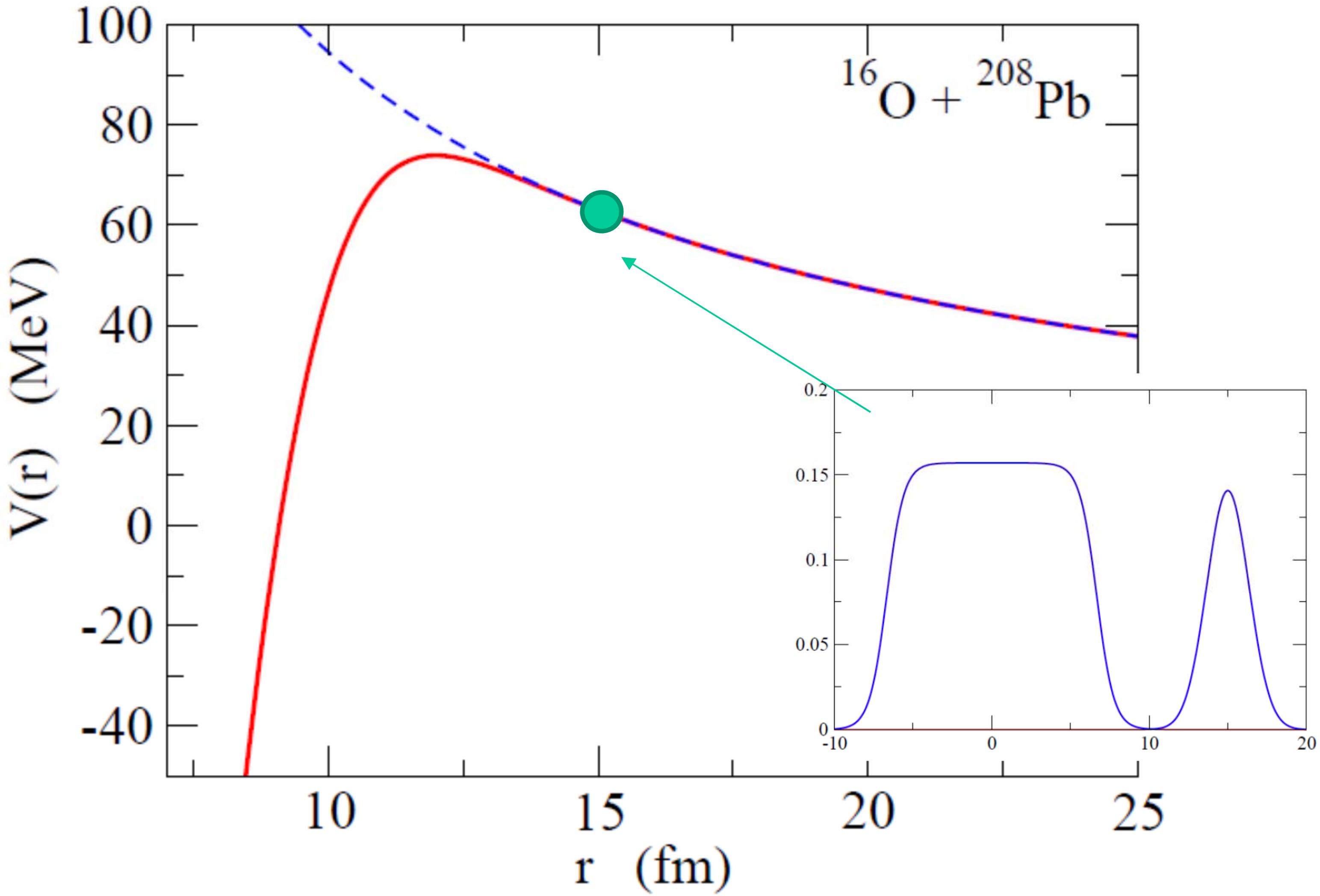
両者の打ち消しあいによりポテンシャル障壁が形成（クーロン障壁）

- 二重畳み込みポテンシャル (Double Folding Potential)

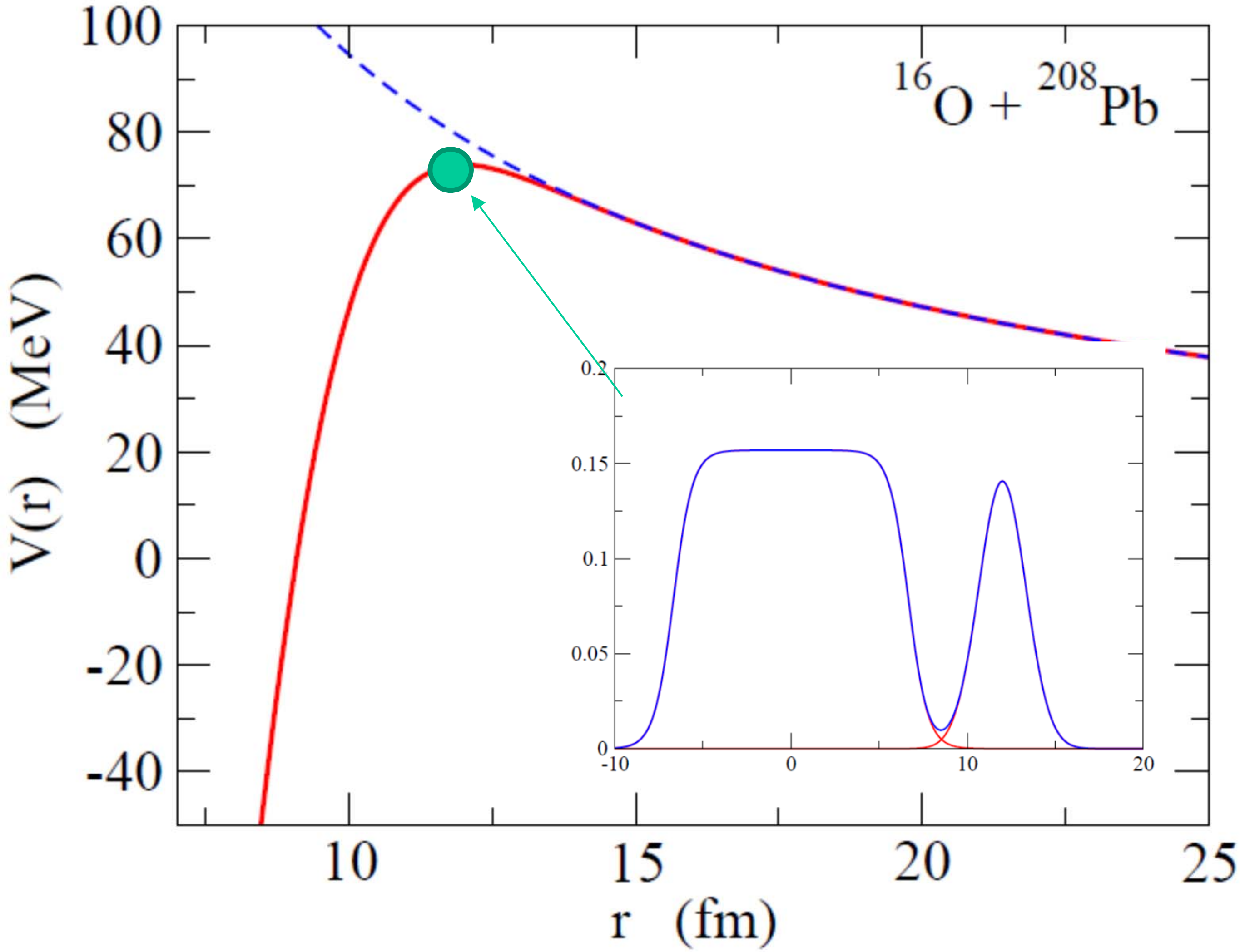


$$\boxed{\begin{aligned} V_{DF}(\boldsymbol{r}) \;\; = \;\; & \int d\boldsymbol{r}_1\, d\boldsymbol{r}_2 \\ & \times \rho_1(\boldsymbol{r}_1)\rho_2(\boldsymbol{r}_2)\, v(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \end{aligned}}$$

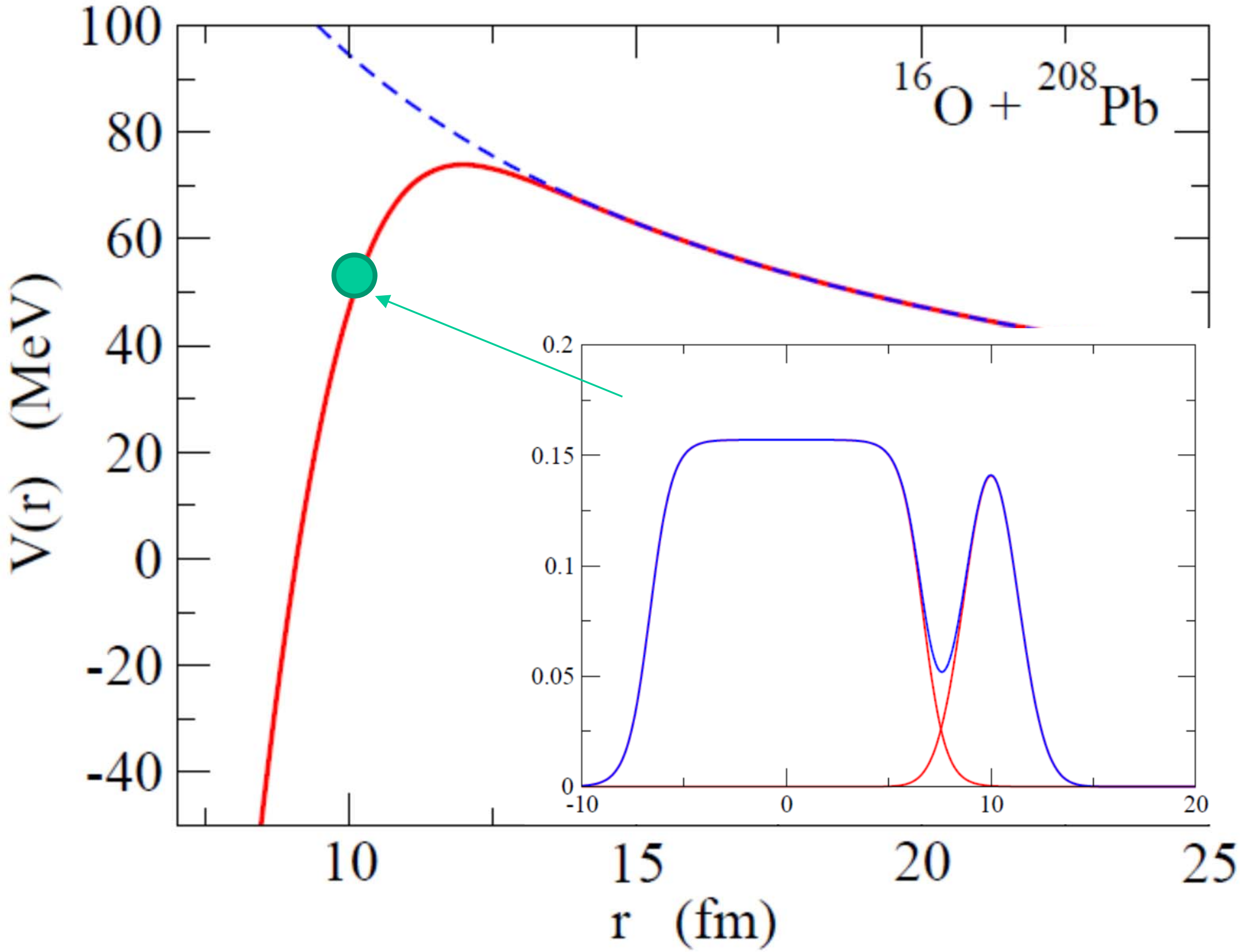
v :核子間相互作用



^{16}O + ^{208}Pb
V(r) (MeV)
r (fm)
100
80
60
40
20
0
-20
-40
10
15
20
25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-10
0
10
20

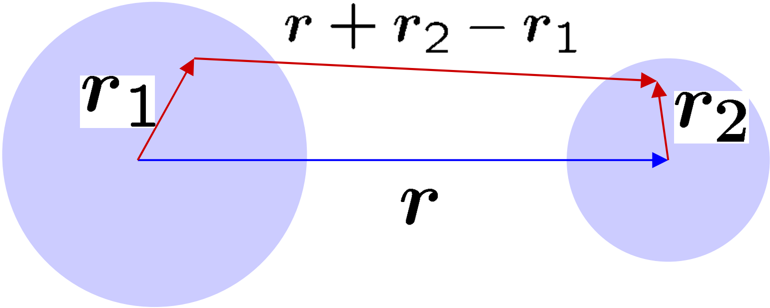


$^{16}O + ^{208}Pb$
V(r) (MeV)
r (fm)
100
80
60
40
20
0
-20
-40
10
15
20
25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-10
0
10
20

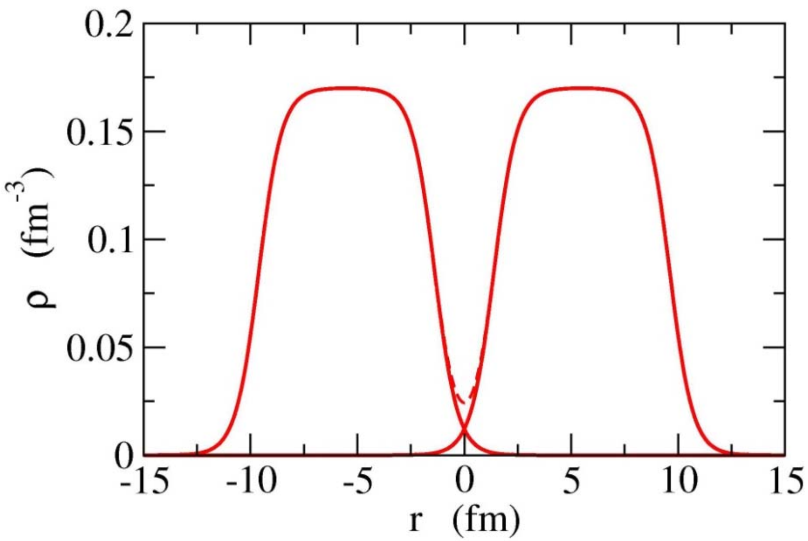


^{16}O + ^{208}Pb
V(r) (MeV)
r (fm)
100
80
60
40
20
0
-20
-40
10
15
20
25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-10
0
10
20

- 二重畳みこみポテンシャル



$$V_{DF}(\boldsymbol{r}) = \int d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2\, \rho_1(\boldsymbol{r}_1)\rho_2(\boldsymbol{r}_2) \times v_{nn}(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$$



（微視的ポテンシャルの直接項に相当）

$$\rho(r) \sim \frac{\rho_0}{1 + \exp[(r - R_d)/a_d]}$$

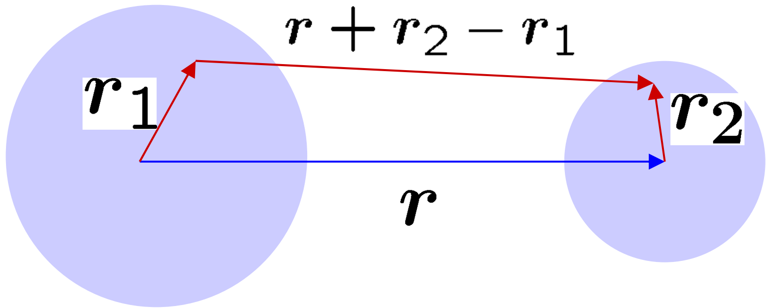
$a_d \sim 0.54$ （fm）

- 現象論的ポテンシャル

$$\boxed{V_{WS}(\boldsymbol{r}) = -\frac{V_0}{1 + \exp[(r - R_0)/a]}}$$

$a \sim 0.63$ （fm）

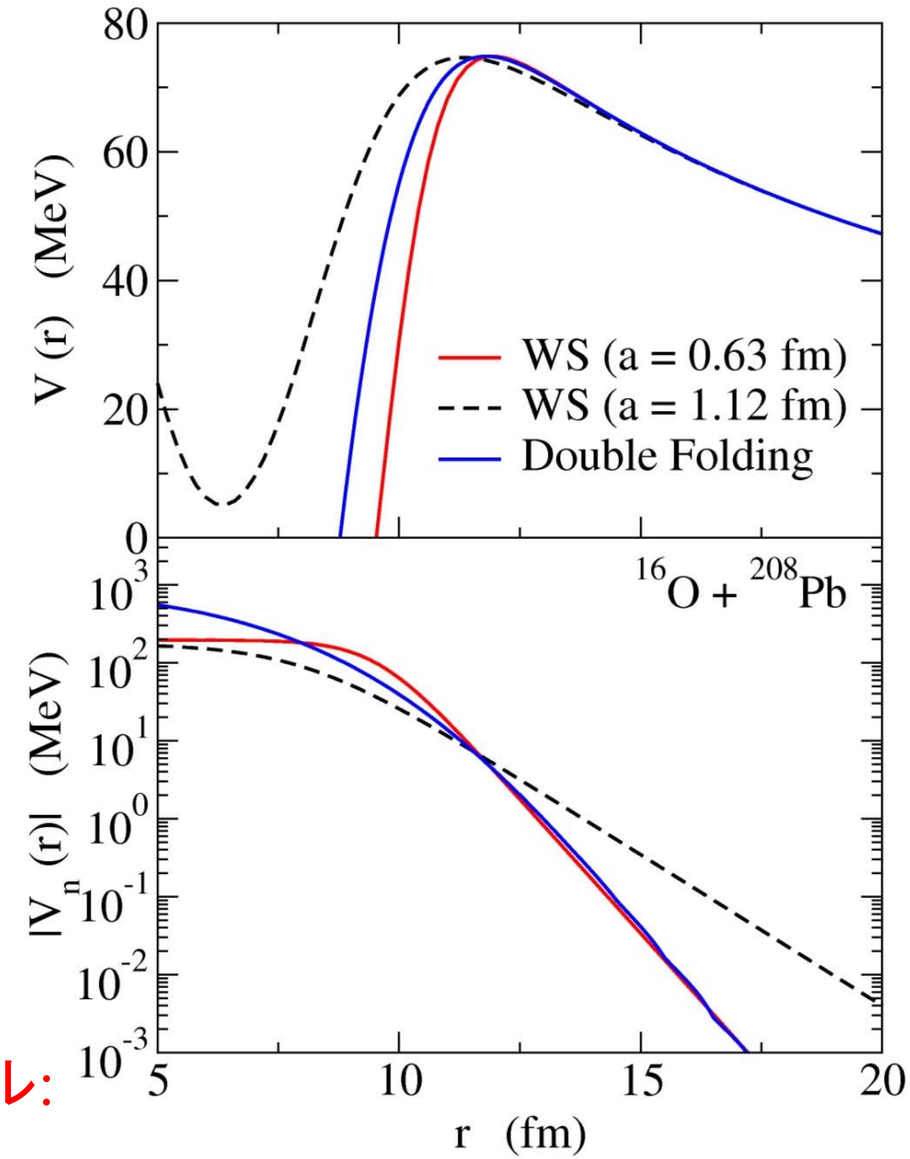
二重畳みこみポテンシャル



$$V_{DF}(\boldsymbol{r}) = \int d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2\, \rho_1(\boldsymbol{r}_1)\rho_2(\boldsymbol{r}_2) \times v(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)$$

cf. Michigan 3 range Yukawa
(M3Y) interaction

$$v_{nn}(r) = 7999\frac{e^{-4r}}{4r} - 2134\frac{e^{-2.5r}}{2.5r} - 276\,\delta(\boldsymbol{r}) \quad \text{(MeV)}$$



現象論的Woods-Saxon ポテンシャル:

$$V_N(r) = -V_0 / [1+\exp((r-R_0)/a)]$$

レポート問題1

^{16}O+^{144}Sm 反応を考える。核力ポテンシャルとして指数関数ポテンシャル

$$V_N(r) = -V_0 \exp[-(r-R_0)/a]$$
$$V_0 = 105 \text{ MeV}$$
$$R_0 = 8.54 \text{ fm}$$
$$a = 0.75 \text{ fm}$$

を用いると、クーロン障壁は $R_b = 10.9$ fm に現れる。

i) s波 ($l = 0$) に対するクーロン障壁の高さを求めよ。
ii) クーロン障壁の位置 ($R_b = 10.9$ fm) が近似的に変化しないとしたとき、$l = 50$ に対する障壁の高さを求めよ。

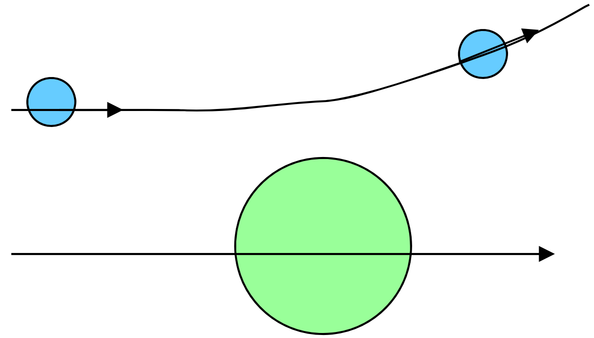
^{16}O と ^{144}Sm 原子核の換算質量を用いなければならないことに注意せよ。ただし、ここで、質量数 A の原子核の質量を $mc^2 = 931.5$ x A (MeV) として計算してよい。

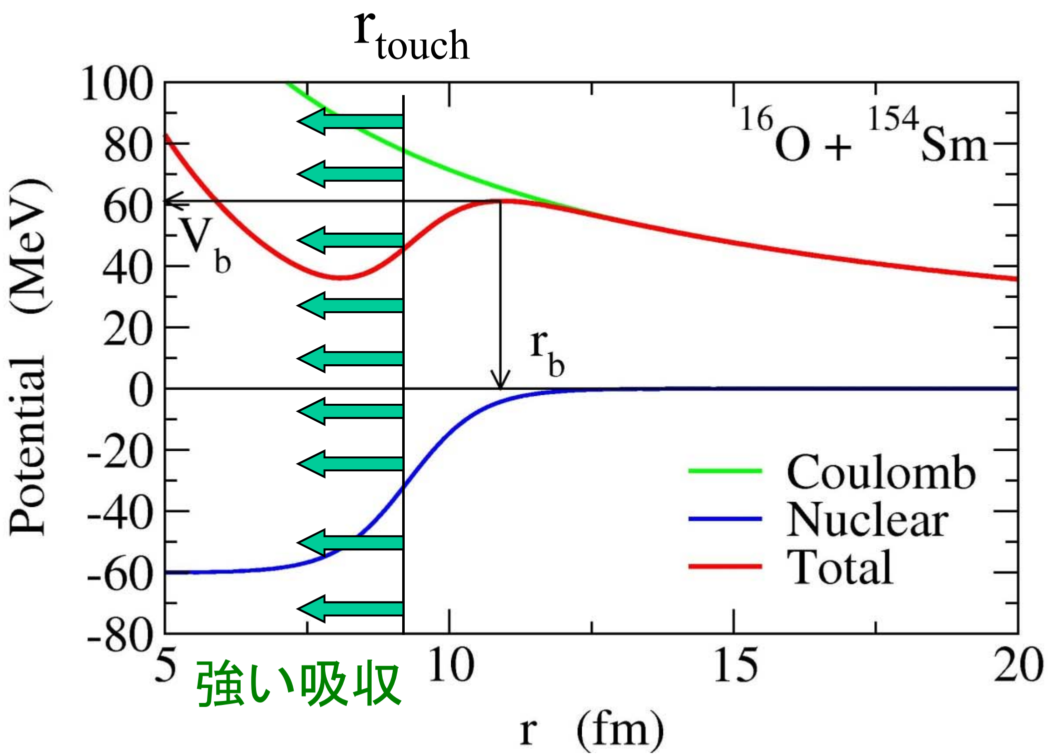
重イオン反応の3つの特徴

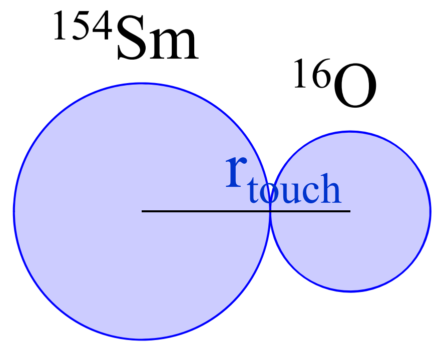
1. クーロン相互作用：重要
2. 換算質量 (reduced mass)：大きい ⟶ (半)古典的な描像
軌道の概念

$$\mu = m_T m_P/(m_T + m_P)$$

3. クーロン障壁内部での強い吸収







一度接触すると自動的に複合核を形成
（強吸収の仮定）

問題：エネルギー100 MeV の^{32}S 核の波長（を 2π で割ったもの）はどのくらいか（非相対論で考えてよい）?

i) 0.1 fm
ii) 10 fm
iii) 100 fm

問題：エネルギー100 MeV の^{32}S 核の波長（を 2π で割ったもの）
はどのくらいか（非相対論で考えてよい）?

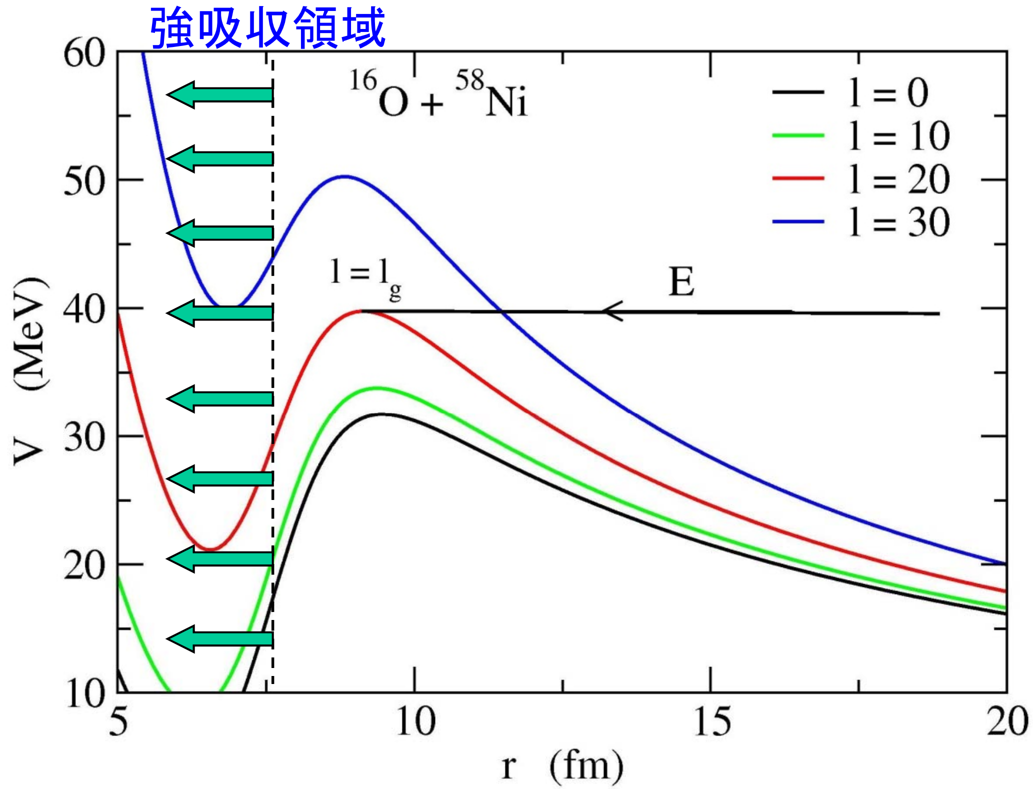
i) 0.1 fm
ii) 10 fm
iii) 100 fm

$$
\begin{aligned}
\lambda\!\!\!^{-} &= \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar c}{\sqrt{2mc^2E}} \\
&\sim \frac{200}{\sqrt{2 \times 32 \times 1000 \times 100}} \\
&\sim \frac{200}{\sqrt{6 \times 10^6}} \sim \frac{200}{\sqrt{6} \times 10^3} \sim 0.1 \ \ \mathrm{fm}
\end{aligned}
$$

* hbar = 197.3 MeV fm, mc^2 = 32 x 931.5 MeV を用いると
lambda_bar = 0.08 fm

擦り角運動量 (grazing angular momentum)

$$V_l(r) = V_0(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}$$



Grazing 角運動量: $V_{l_g}(r_b) = E$

$l < l_g$: 古典的に強吸収領域に到達

$l \geq l_g$: 古典的には強吸収領域に到達できない

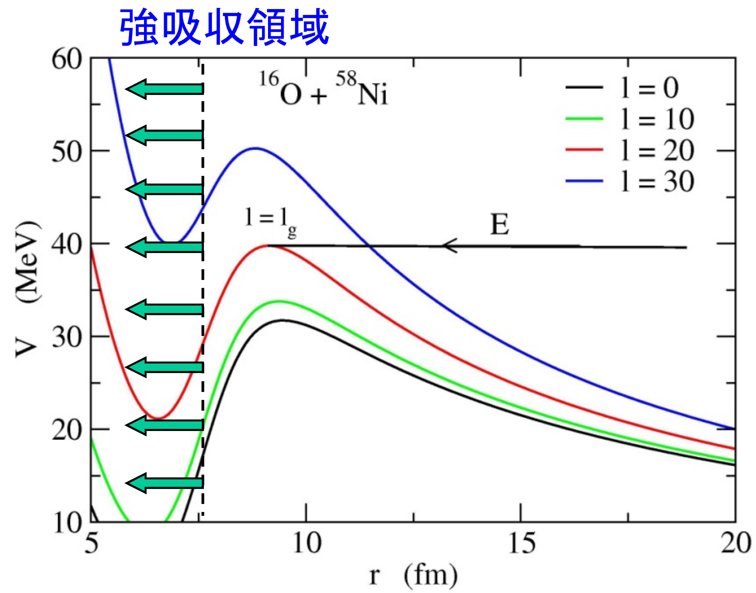
⟹ ある与えられた E に対し、反応は $l=l_g$ を境に急激に変化

i) $l \gg l_g$ or $E \ll V_b$

古典的転回点：非常に遠方

- クーロン力による弾性散乱
  (Rutherford 散乱)
- 散乱核のクーロン場による励起
  (クーロン励起)

低励起集団運動



$l < l_g$：古典的に強吸収領域に到達

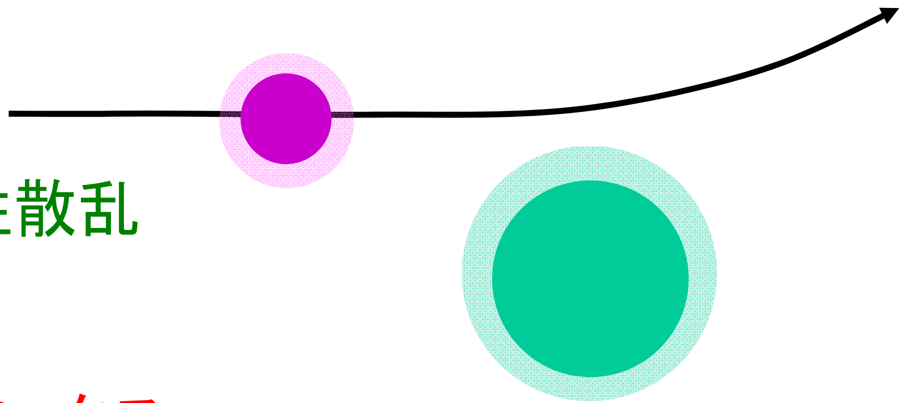
$l \geq l_g$：古典的には強吸収領域に到達できない

ii) $l \gtrsim l_g$

核力の効果が重要になる

直接反応
- 弾性散乱
- 非弾性散乱
- 核子移行反応

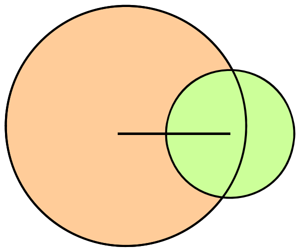
準弾性散乱



多体系としてのダイナミックス

iii) $l < l_g$

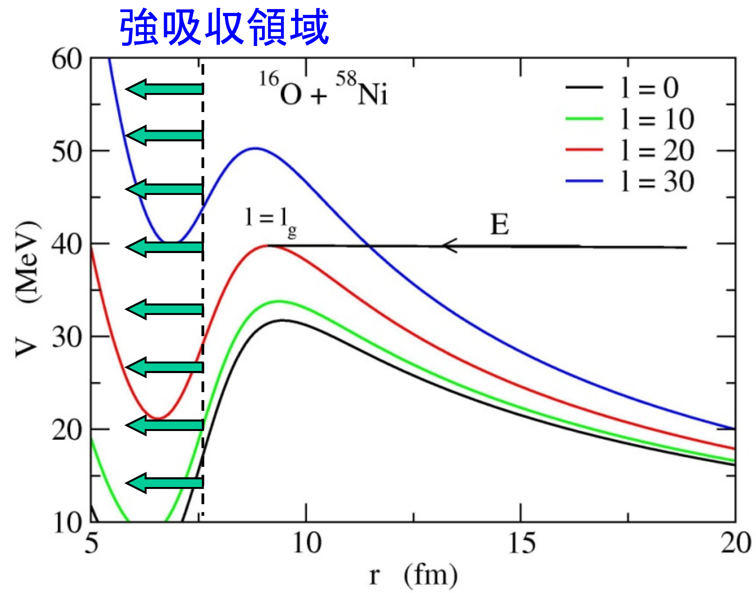
相対距離が小さく、従って密度の重なりが大きい領域に到達



- 高状態密度（複合系）
- 非常に多くの内部自由度

相対運動のエネルギーはすぐに失われ内部エネルギーに転化

熱い複合核の形成（核融合反応）



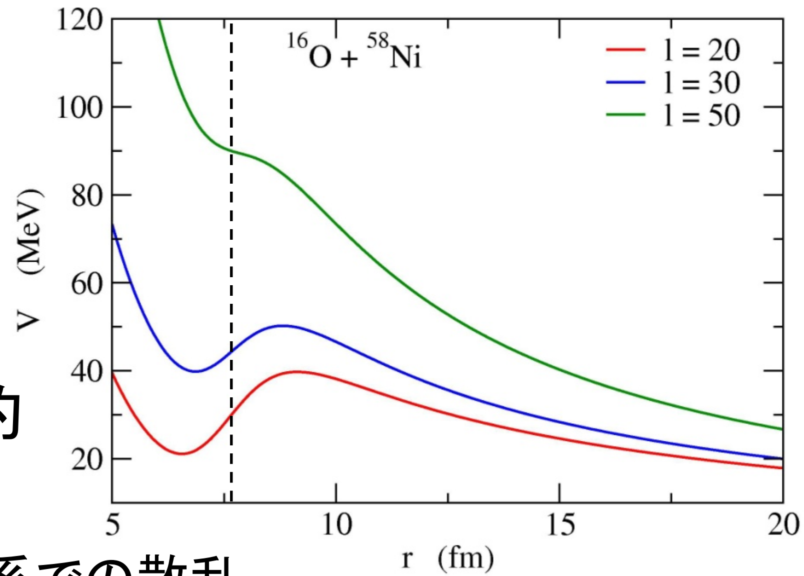
$l < l_g$: 古典的に強吸収領域に到達

$l \geq l_g$: 古典的には強吸収領域に到達できない

iv) $l_c < l_g$ となる場合

$l = l_c$ でクーロン・ポケットが消失

直接反応と核融合反応の中間的な反応 : 深部非弾性散乱 (DIC)



比較的高エネルギーでの散乱や重い系での散乱

Partial decomposition of reaction cross section

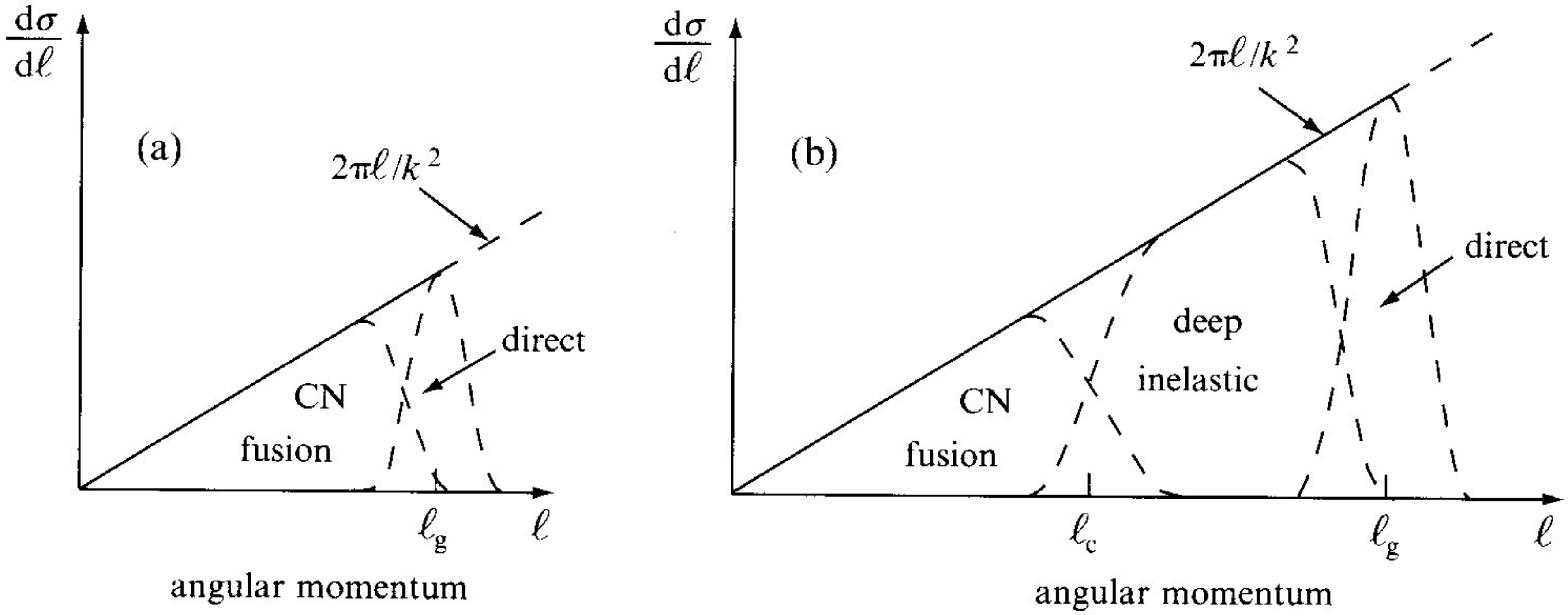
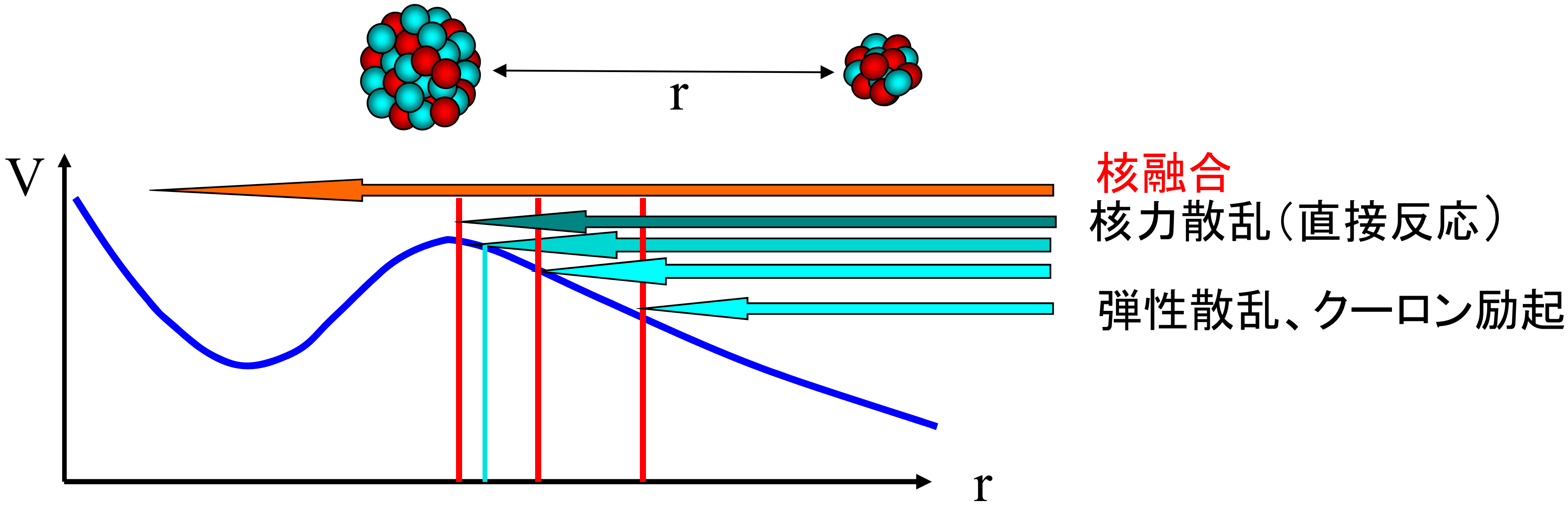


Figure 4.18 Schematic decomposition of the total heavy-ion reaction cross section into contributions from different partial waves when (a) the grazing angular momentum (quantum number ℓ_g) is below the critical angular momentum (quantum number ℓ_c) that can be carried by the compound nucleus, and (b) when ℓ_g exceeds ℓ_c. In both (a) and (b) the straight line is obtained from Equation (4.3) and the dashed areas indicate regions in which different types of heavy-ion nuclear reaction mechanisms predominate.

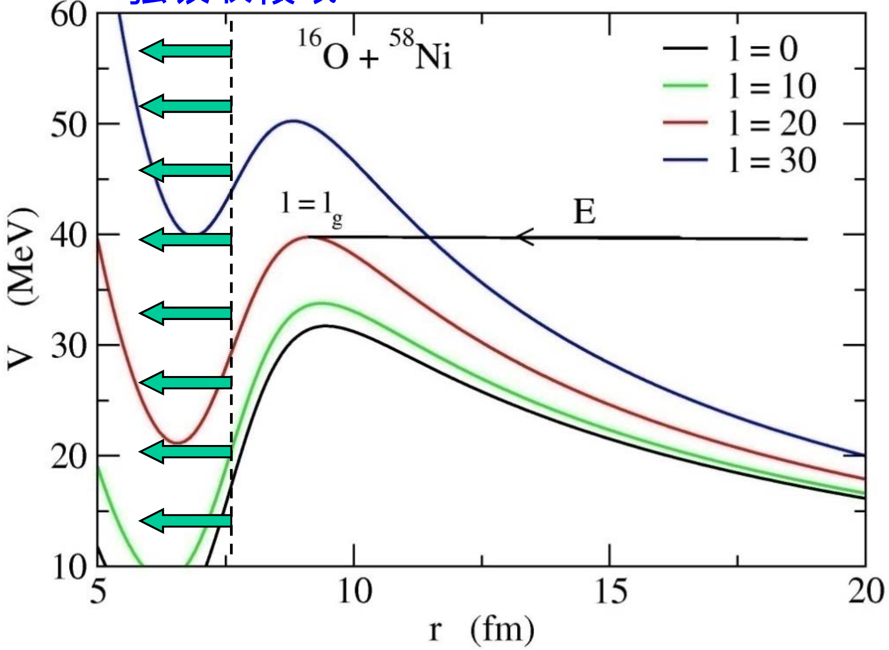
Taken from J.S. Lilley, "Nuclear Physics"

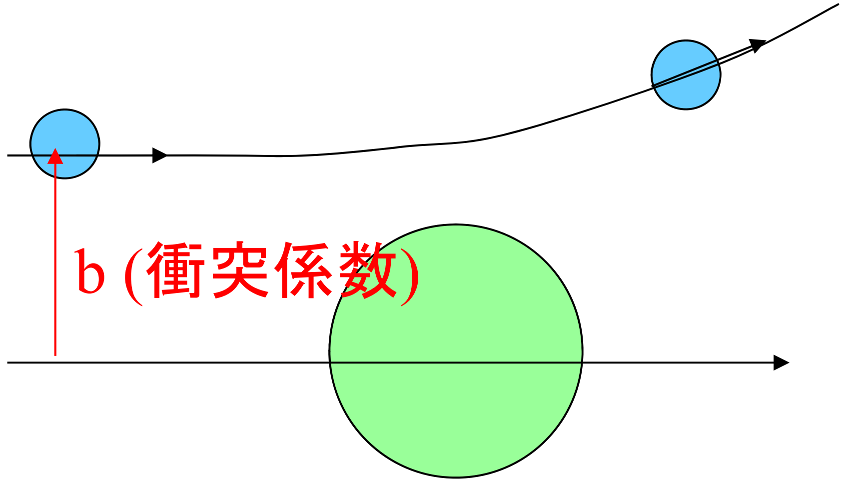
l を固定してエネルギーを変化させた場合:



＊2つの原子核が接触した後のダイナミックスは未解決の問題:
「強吸収」の仮定(black box として取り扱う)

核融合反応に対する古典的な模型





$$l_{cl} = kb \qquad k = \sqrt{2\mu E/\hbar^2}$$

$l < l_g$: 古典的に強吸収領域に到達

$$\Rightarrow \quad b_g = l_g/k$$

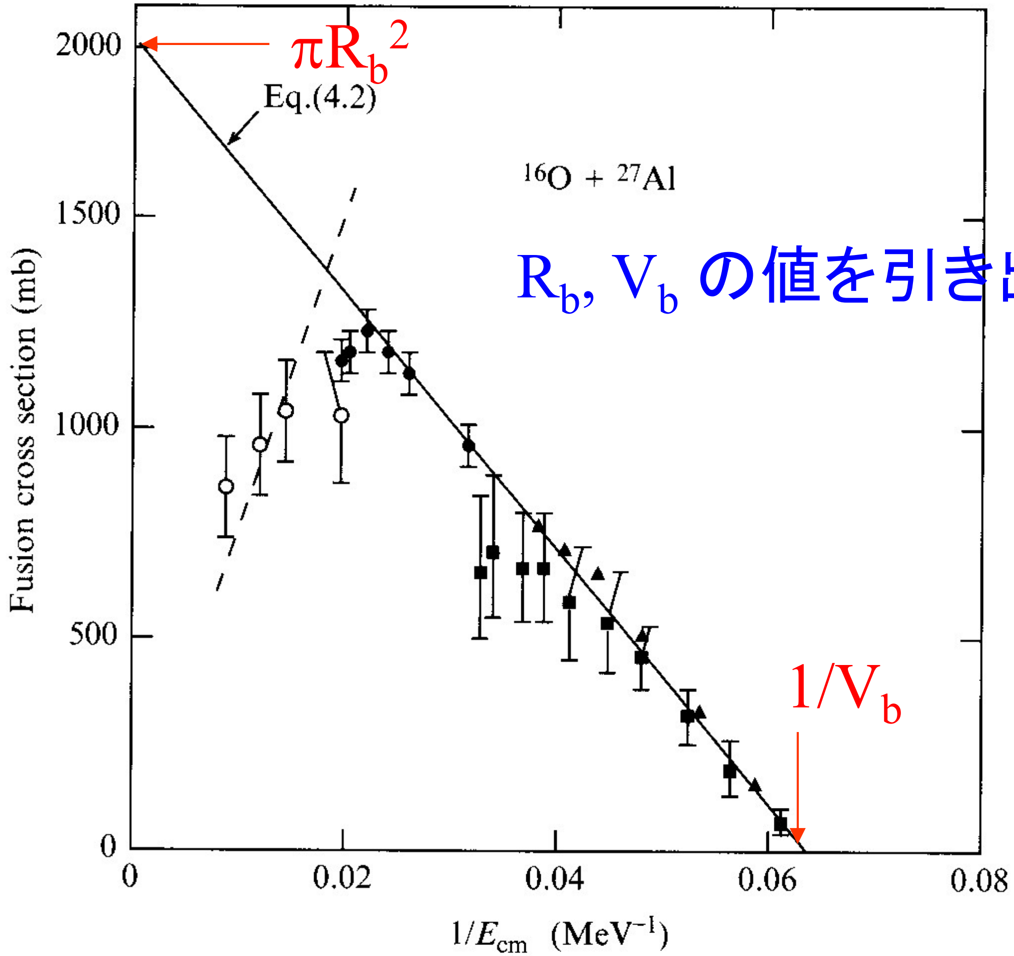
$$\boxed{\sigma^{cl} = 2\pi \int_0^{b_g} b\, db = \pi\, b_g^2}$$

$$V_b + \frac{(kb_g)^2\hbar^2}{2\mu R_b^2} = E$$

$$\boxed{\sigma_{\rm fus}^{cl}(E) = \pi R_b^2 \left(1 - \frac{V_b}{E}\right)}$$

$$\sigma^{cl}_{\mathrm{fus}}(E) = \pi R_b^2 \left(1 - \frac{V_b}{E}\right)$$

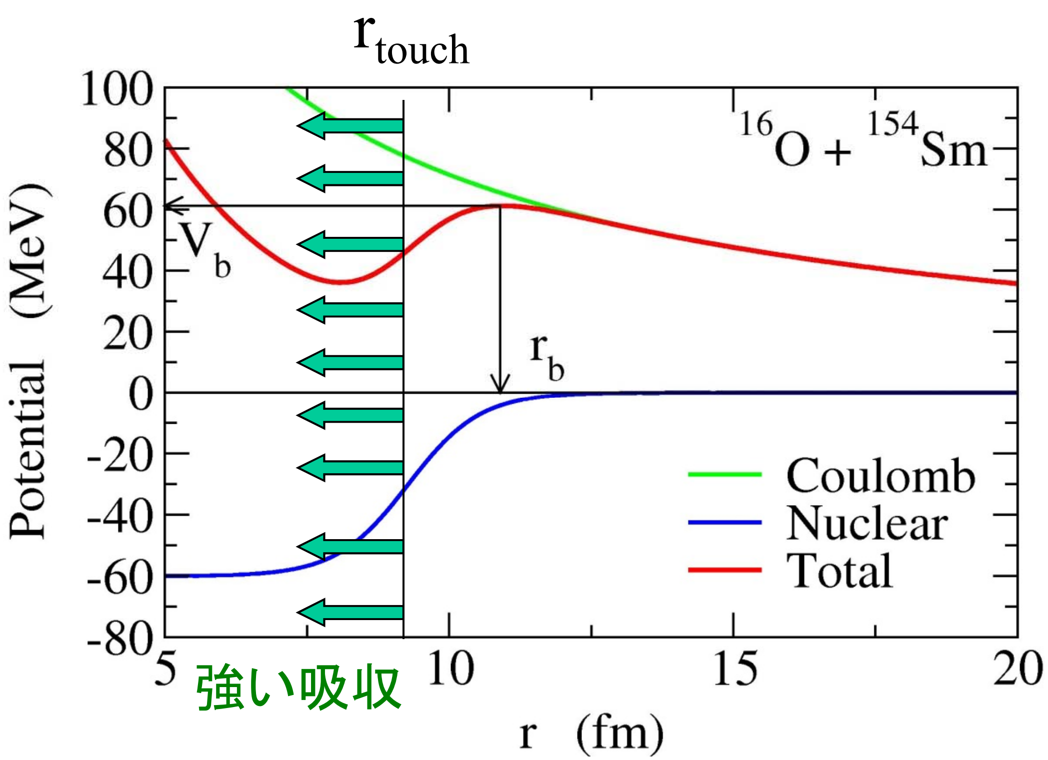
⟹ 古典的な核融合反応断面積は *1/E* に比例する

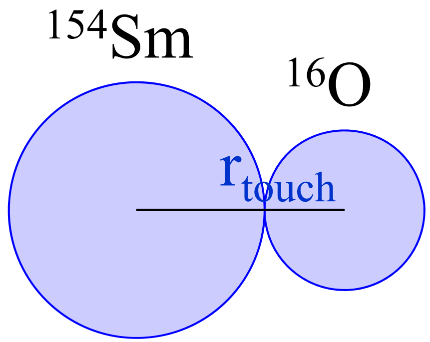


R_b, V_b の値を引き出せる

Taken from J.S. Lilley, "Nuclear Physics"

核融合反応と量子トンネル効果





一度接触すると自動的に複合核を形成（強吸収の仮定）

↓

核融合の確率
＝r_{touch} に到達する確率

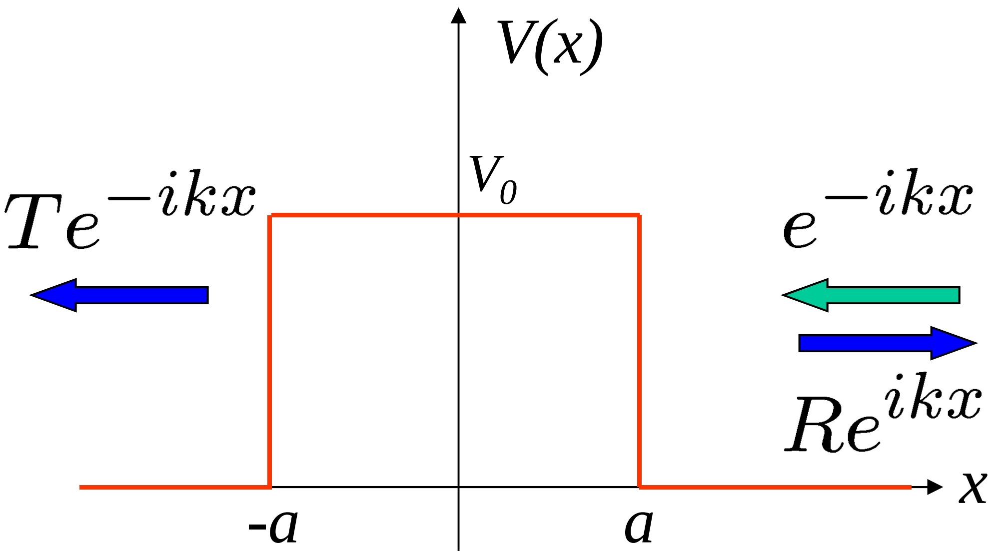
↑

障壁の透過確率

$$\sigma_{\mathrm{fus}}(E) = \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)P_l(E)$$

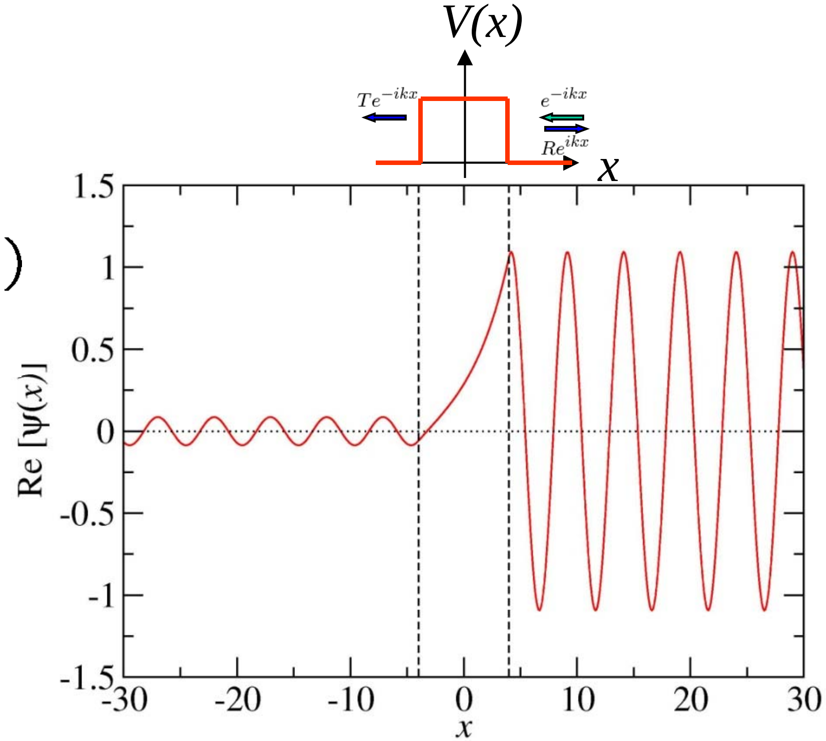
低エネルギーでは核融合反応はトンネル効果で起きる！

量子トンネル現象



$$
\begin{aligned}
\psi(x) &= T\,e^{-ikx} && (x \le -a) \\
&= A\,e^{-\kappa x} + B\,e^{\kappa x} && (-a < x < a) \\
&= e^{-ikx} + R\,e^{ikx} && (x \ge a)
\end{aligned}
$$

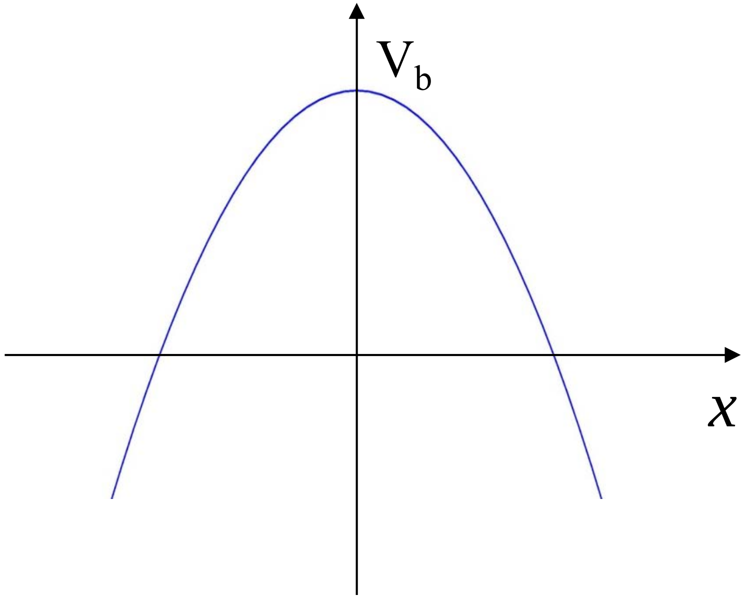
$$
\begin{aligned}
k &= \sqrt{2mE/\hbar^2} \\
\kappa &= \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2}
\end{aligned}
$$



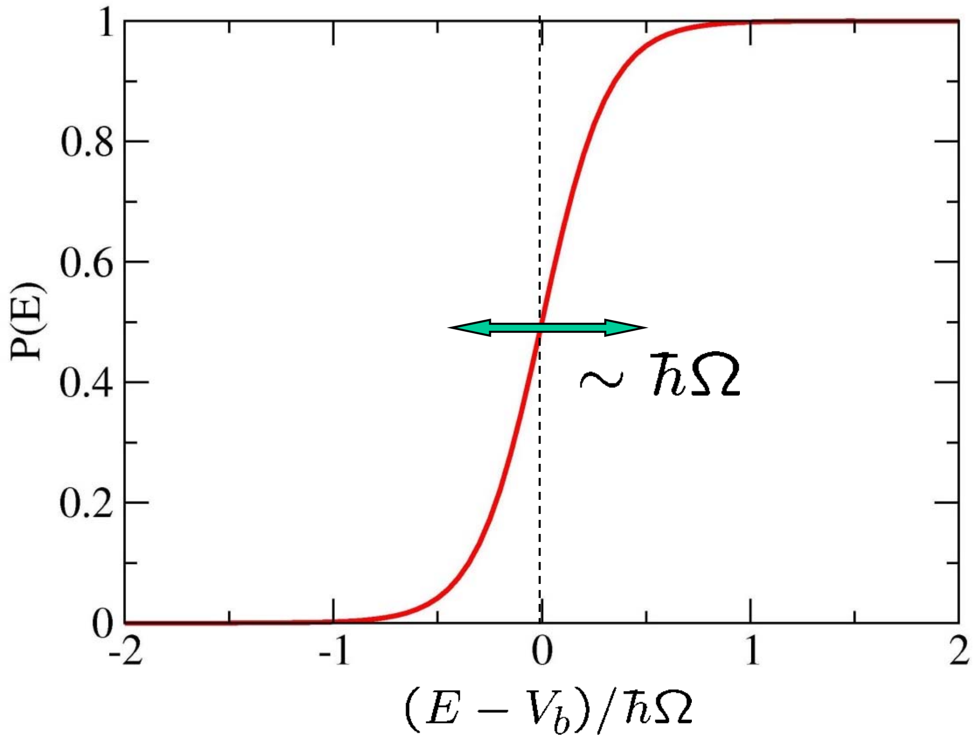
トンネル確率： $P(E) = |T|^2$

放物線障壁だと........

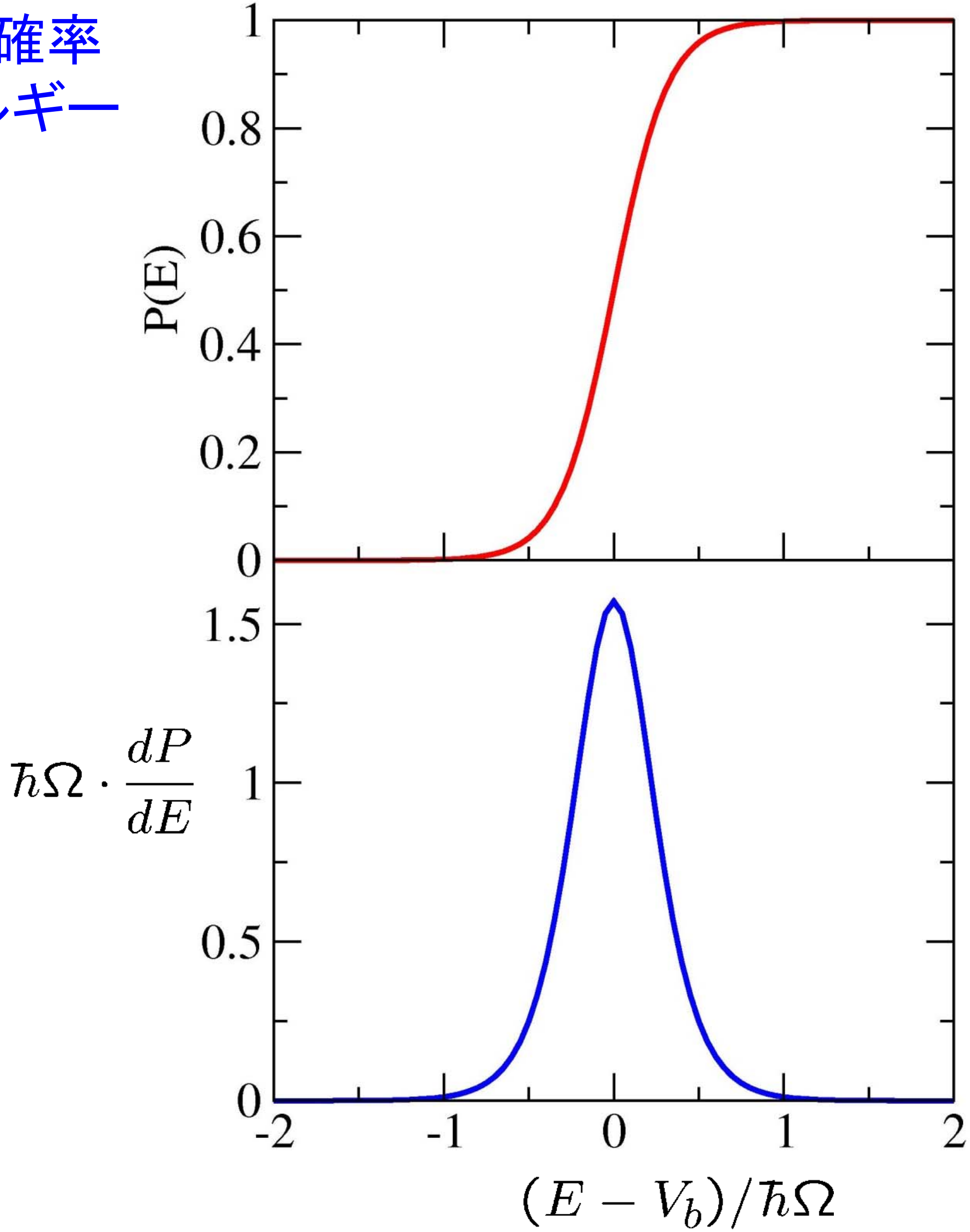
$$V(x) = V_b - \frac{1}{2} m\Omega^2 x^2$$



$$\boxed{P(E) = \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{2\pi}{\hbar\Omega}(V_b - E)\right]}}$$



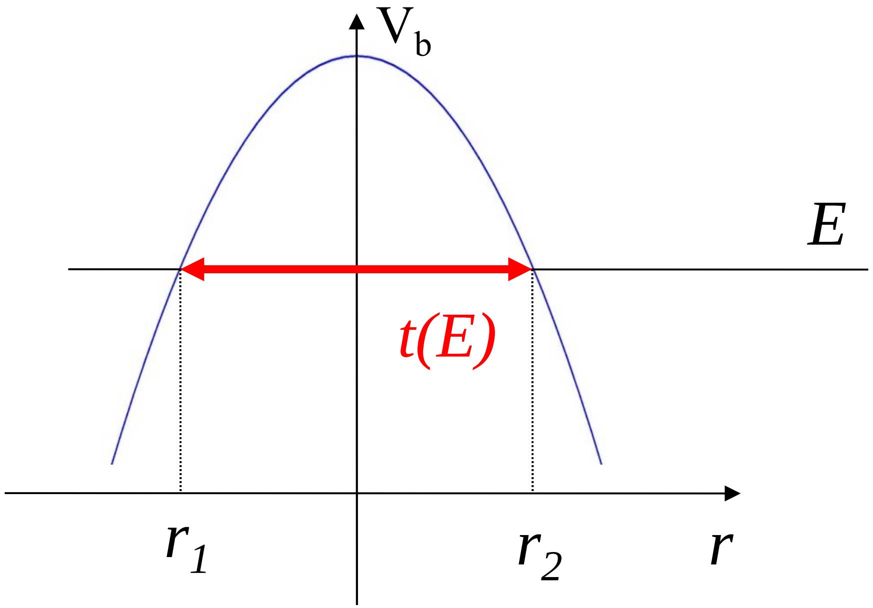
トンネル確率のエネルギー微分



(note) 古典極限

$$
\begin{aligned}
P(E) &= \theta(E - V_b) \\
dP/dE &= \delta(E - V_b)
\end{aligned}
$$

(note) WKB近似によるトンネル確率

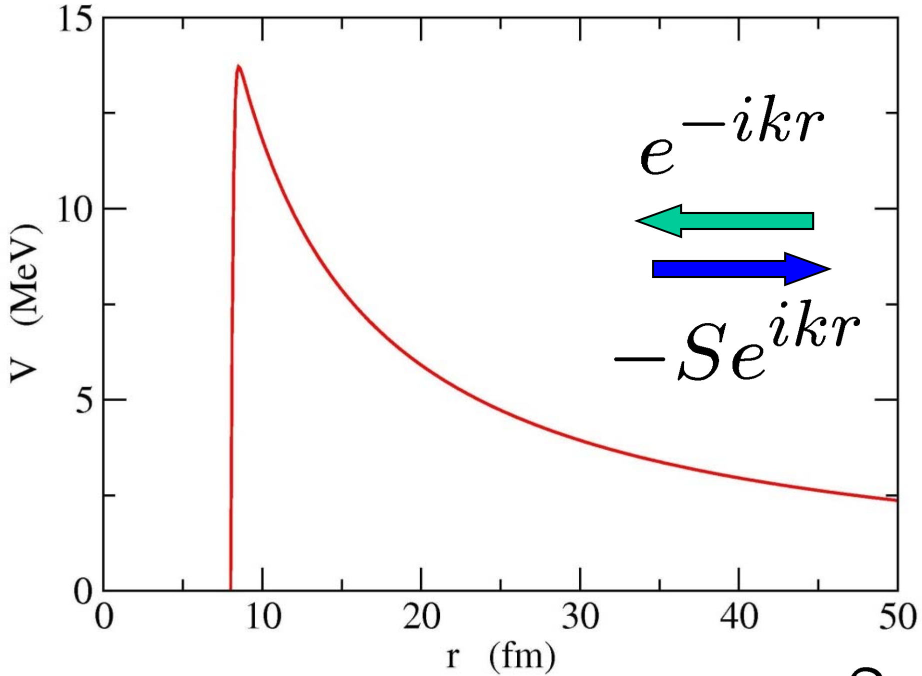


$$\boxed{P_0(E) = \frac{1}{1 + e^{2S_0(E)}}}$$

$$S_0(E) = \int_{r_1}^{r_2} dr \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}(V(r) - E)}$$

球対称３次元ポテンシャルの場合

$$\psi(\boldsymbol{r}) \to \frac{i}{2k}\sum_l (2l+1)\, i^l \,\frac{1}{r}\left[e^{-i(kr-l\pi/2)} - S_l e^{i(kr-l\pi/2)}\right] P_l(\cos\theta)$$



$$-S_l \sim R \text{（反射係数）} \Longrightarrow P = |T|^2 = 1 - |S_l|^2$$

$$\boxed{\sigma_{\mathrm{abs}} = \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)(1-|S_l|^2) = \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)P_l}$$

ポテンシャル模型：成功と失敗

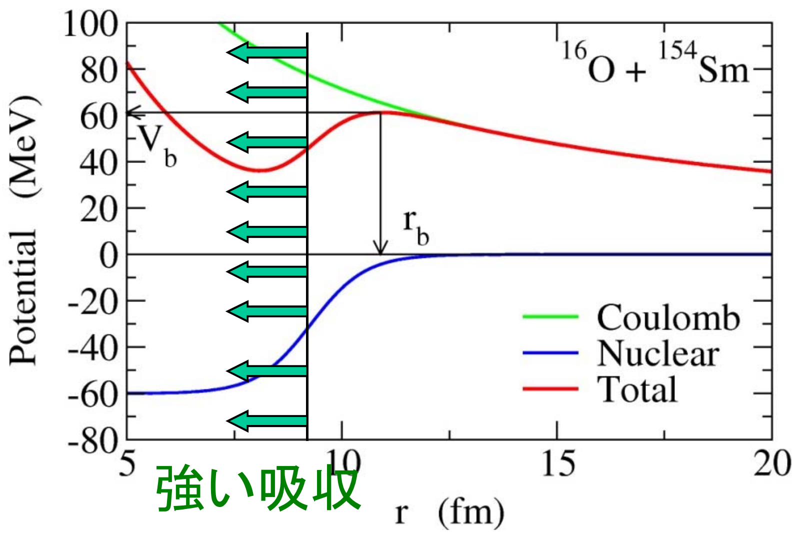
$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2}+V(r)+\frac{l(l+1)^2}{2\mu r^2}-E\right]u_l(r)=0$$

遠方での境界条件: $u_l(r) \to H_l^{(-)}(kr) - S_l\, H_l^{(+)}(kr)$

核融合反応断面積: $\sigma_{\rm fus} = \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)P_l$

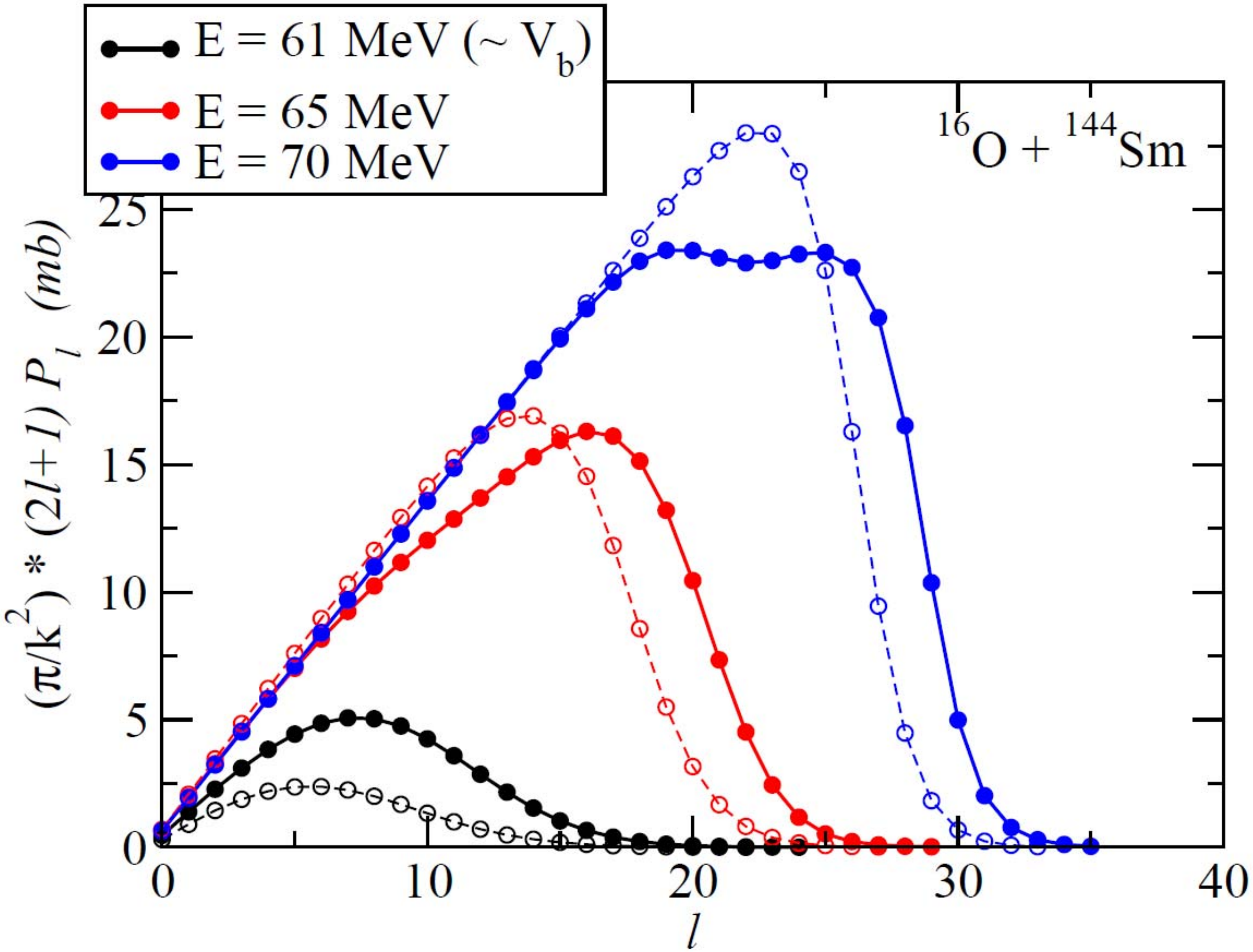
複合核の平均角運動量: $\langle l \rangle = \frac{\sum_l l(2l+1)P_l}{\sum_l (2l+1)P_l}$

$$P_l = 1-|S_l|^2$$



Fusion cross section: $$\sigma_{\text{fus}} = \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)P_l$$

Mean angular mom. of CN: $$\langle l \rangle = \frac{\sum_l l(2l+1)P_l}{\sum_l (2l+1)P_l}$$



Wong の公式

C.Y. Wong, Phys. Rev. Lett. 31 ('73)766

$$\sigma_{\mathrm{fus}}(E) = \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)P_l(E)$$

i) クーロン障壁を放物線で近似　$V(r) \sim V_b - \frac{1}{2}\mu\Omega^2 r^2$

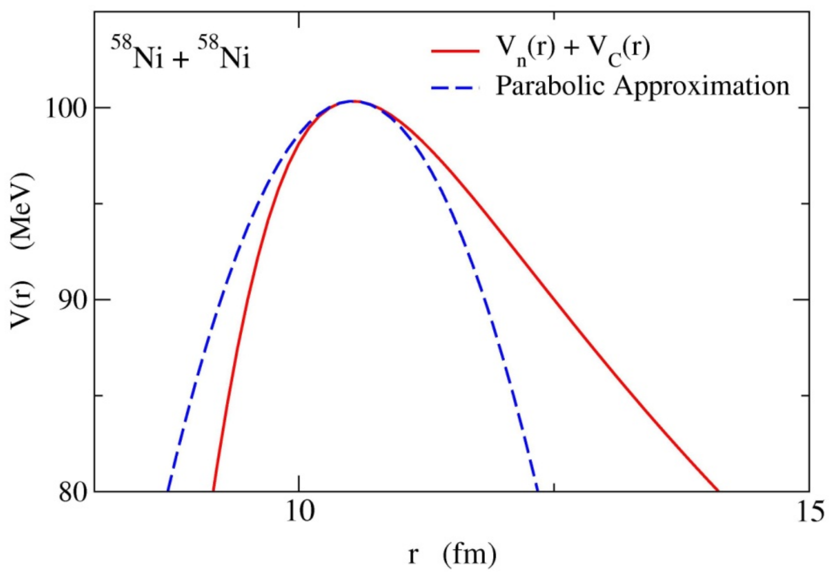
$$\Rightarrow P_0(E) = 1\Big/\left(1+\exp\left[\frac{2\pi}{\hbar\Omega}(V_b - E)\right]\right)$$

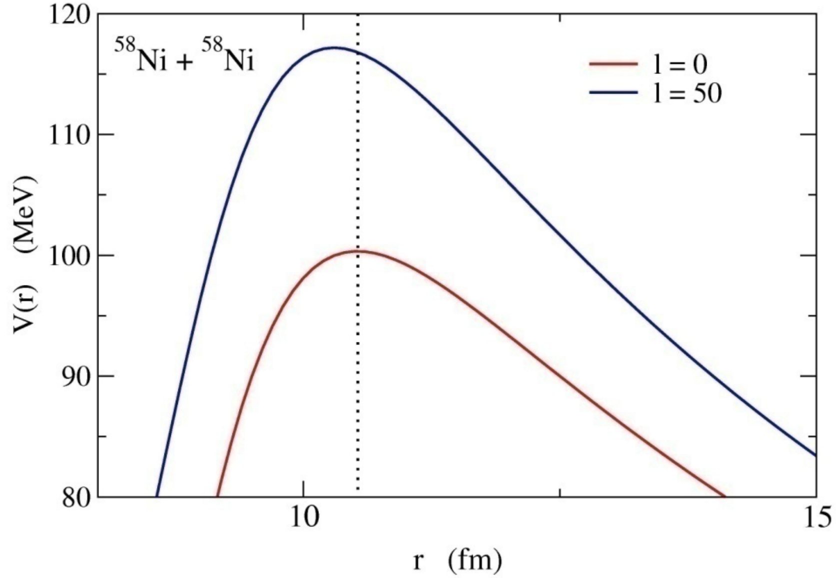
ii) 角運動量 *l* の透過確率を角運動量 *l*=0 の透過確率を用いて近似

$$P_l(E) \sim P_0\left(E - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu R_b^2}\right)$$

（曲率及び障壁の位置が
角運動量 *l* に依らないと仮定）

iii) *l* の和を積分に置き換える





$$\sigma_{\text{fus}}(E) = \frac{\hbar\Omega}{2E} R_b^2 \log\left[1 + \exp\left(\frac{2\pi}{\hbar\Omega}(E - V_b)\right)\right]$$

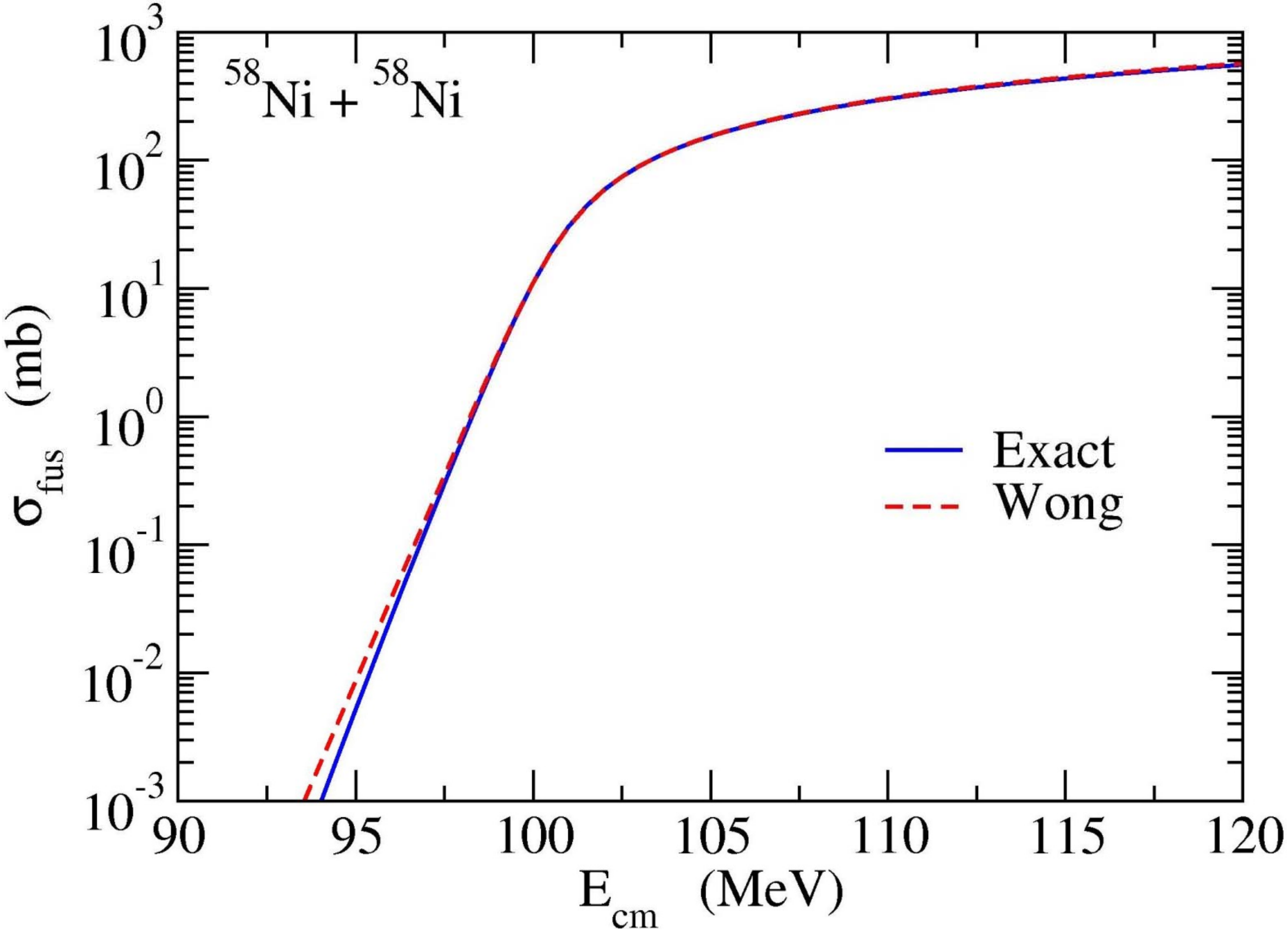
(note) $E \gg V_b$ の時 $1 \ll \exp\left(\frac{2\pi}{\hbar\Omega}(E - V_b)\right)$

$$\Longrightarrow \sigma_{\text{fus}}(E) \sim \pi R_b^2 \left(1 - \frac{V_b}{E}\right) = \sigma_{\text{fus}}^{cl}(E)$$

(note)

$$\frac{d(E\sigma_{\text{fus}})}{dE} = \frac{\pi R_b^2}{1 + \exp\left[\frac{2\pi}{\hbar\Omega}(V_b - E)\right]} = \pi R_b^2 \cdot P_{l=0}(E)$$

$$\boxed{\sigma_{\mathsf{fus}}(E) = \frac{\hbar\Omega}{2E}\, R_b^2\, \log\left[1 + \exp\left(\frac{2\pi}{\hbar\Omega}(E - V_b)\right)\right]}$$



レポート問題2

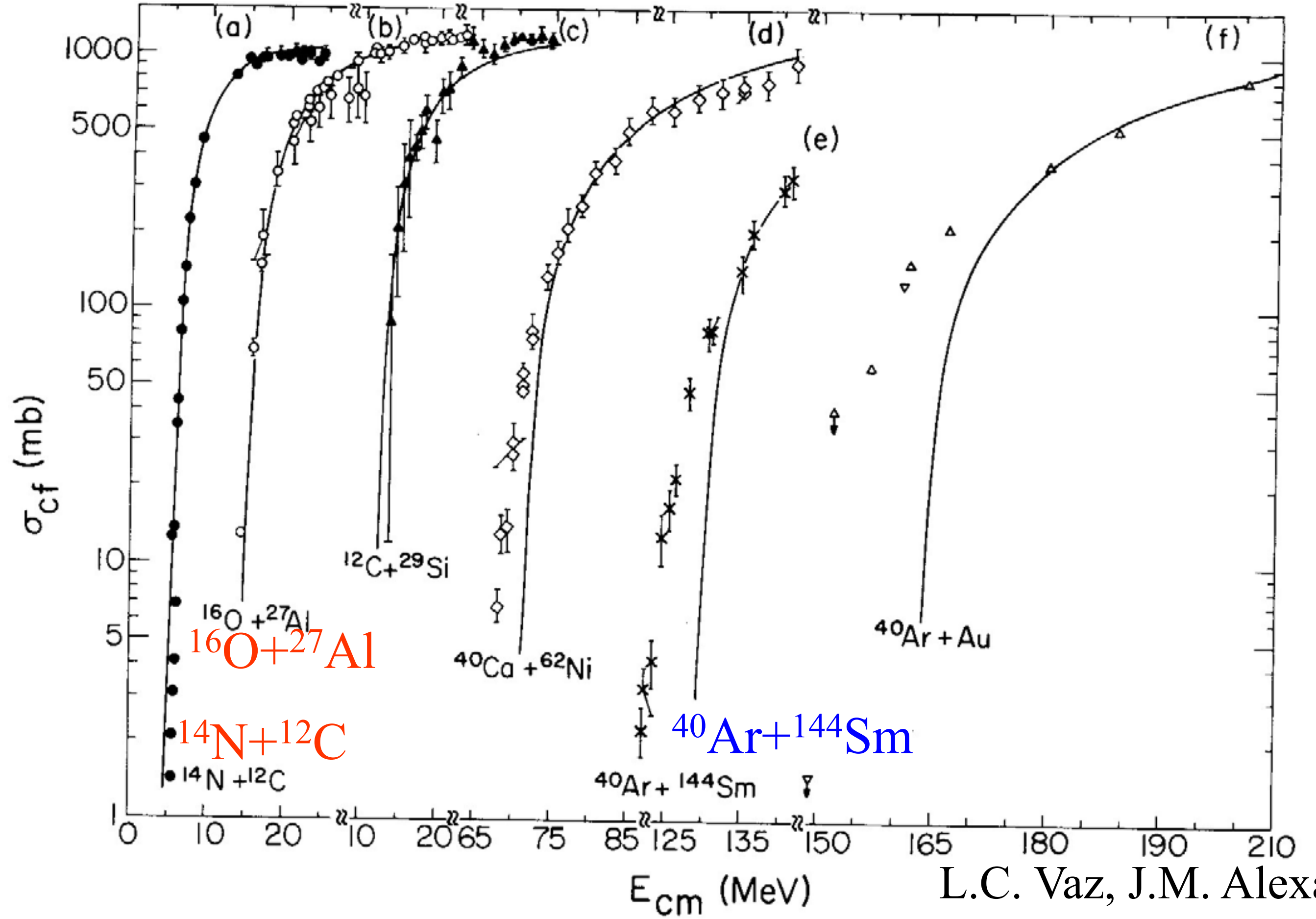
レポート問題1と同様に$^{16}O+^{144}Sm$ 反応を考える。レポート問題1と同じ核力ポテンシャルを用いると、クーロン障壁の曲率 $\hbar\Omega$ は 4.46 MeV となる。

Wongの公式を用いて、E_{cm} = 60 MeV 及び 75 MeV における核融合反応断面積を求めよ (mb の単位で答えよ)。

$$\sigma_{\mathrm{fus}}(E) = \frac{\hbar\Omega}{2E} R_b^2 \log\left[1 + \exp\left(\frac{2\pi}{\hbar\Omega}(E - V_b)\right)\right]$$

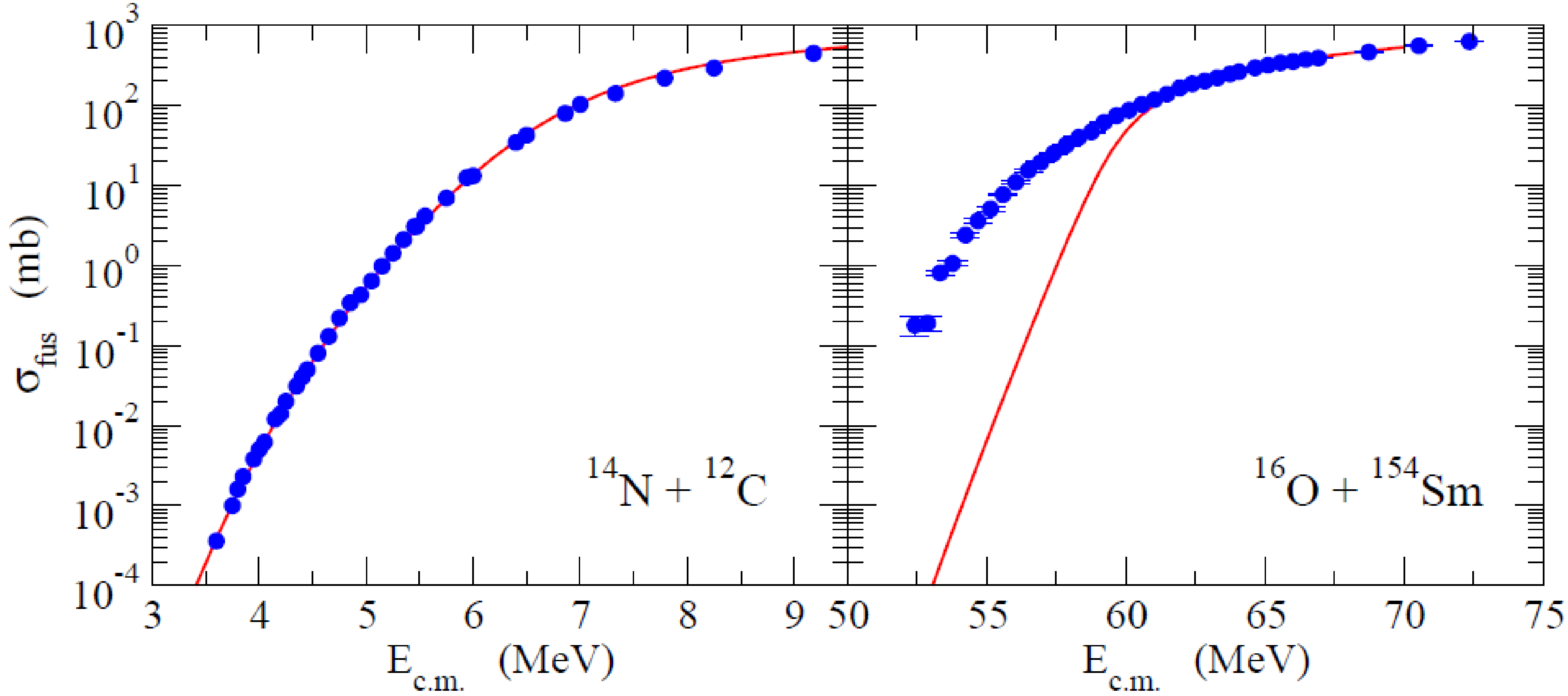
ポテンシャル模型と実験データの比較

エネルギーに依存しない静的なポテンシャルによる核融合反応断面積



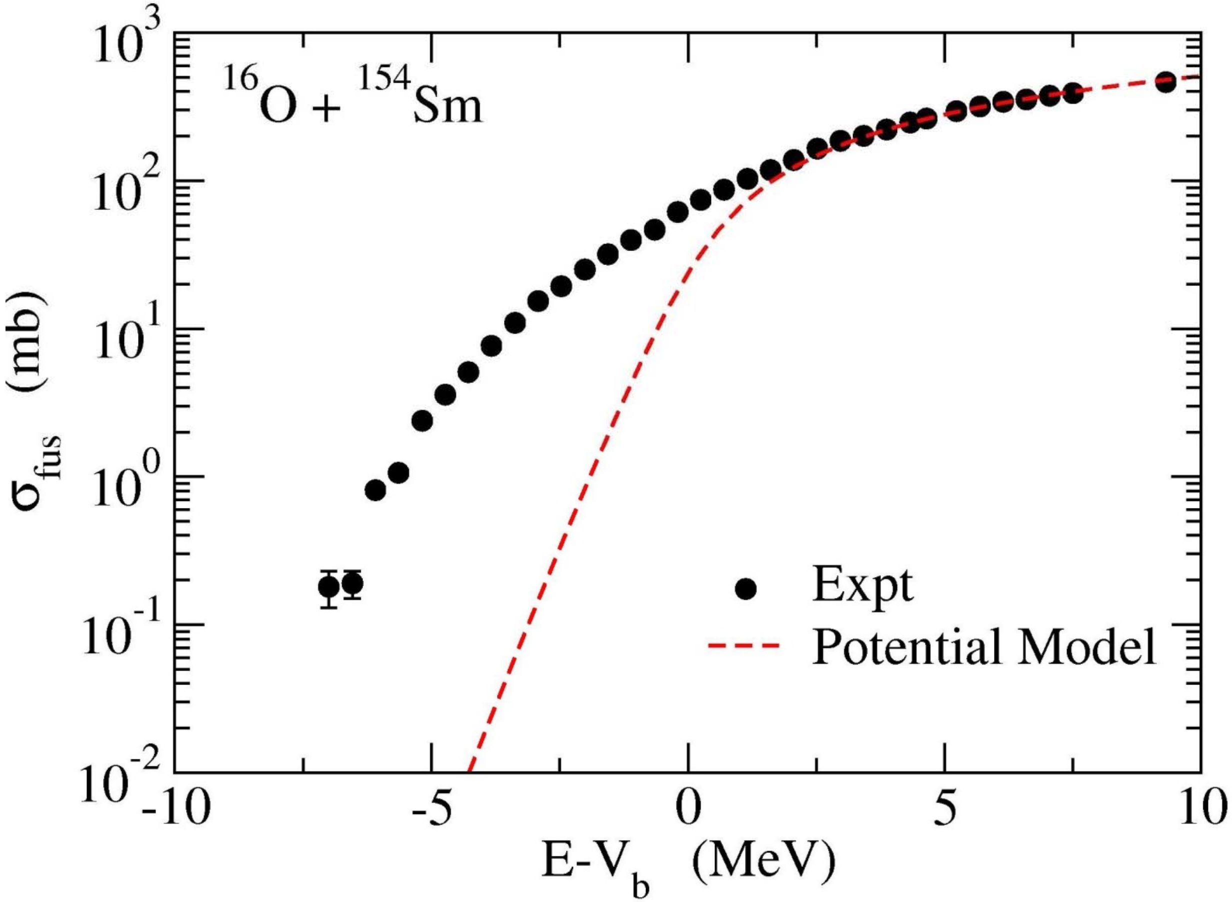
L.C. Vaz, J.M. Alexander, and G.R. Satchler, Phys. Rep. 69('81)373

➢比較的軽い系では実験データを再現
➢系が重くなると過小評価（低エネルギー）



単純なポテンシャル模型:

- 比較的軽い系では実験データを再現
- 系が重くなると過小評価（低エネルギー）



ポテンシャル模型:

$E > V_b$ では大体データを再現

$E < V_b$ では核融合断面積を過小に評価

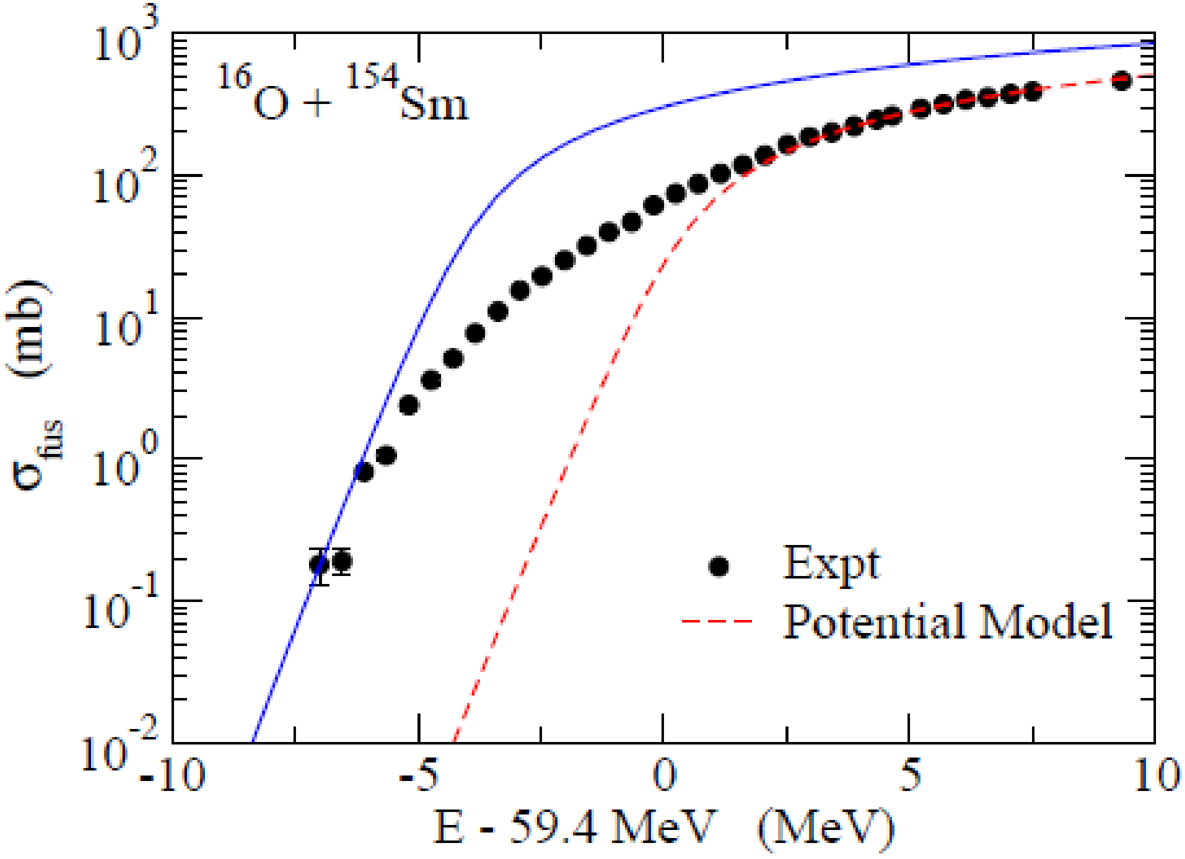
何が原因？

ポテンシャルが不十分？
他の要因？

Data: J.R. Leigh et al., PRC52('95)3151

cf. seminal work:
R.G. Stokstad et al., PRL41('78)465
PRC21('80)2427

（ポテンシャル模型の範囲で）クーロン障壁を低くすると。。。



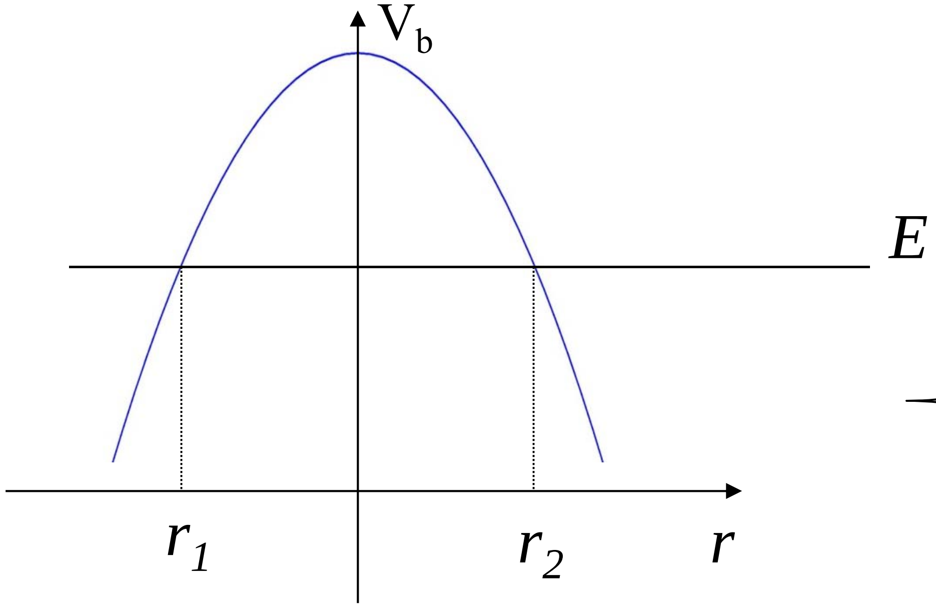
ポテンシャル・インバージョン

$$P_0(E) = \frac{1}{\pi R_b^2}\frac{d(E\sigma_{\rm fus})}{dE}$$

(note)

$$P_0(E) = 1/[1+e^{2S_0(E)}], \quad S_0(E) = \int_{r_1}^{r_2} dr\,\sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}(V(r)-E)}$$

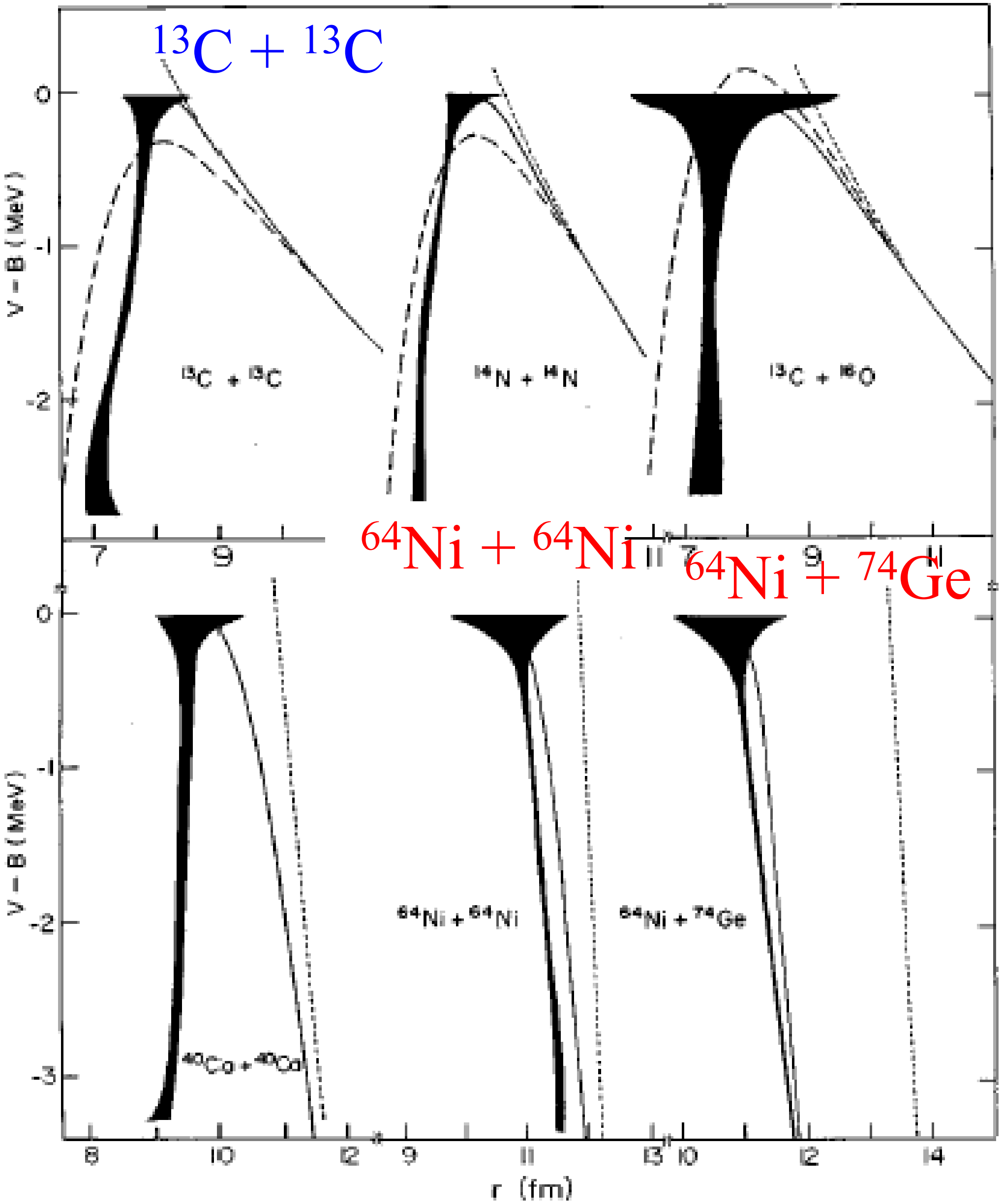
$$\boxed{t(E) \equiv r_2 - r_1 = -\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\hbar^2}{2\mu}}\int_E^{V_b}\frac{\frac{dS_0(E')}{dE'}}{\sqrt{E'-E}}\,dE'}$$



$\sigma_{\rm fus} \longrightarrow V(r)$

半古典近似

- エネルギー依存性なし
- 局所ポテンシャル
- シングル・チャンネル



$$P_0(E) = \frac{1}{\pi R_b^2} \frac{d(E\sigma_{\text{fus}})}{dE}$$

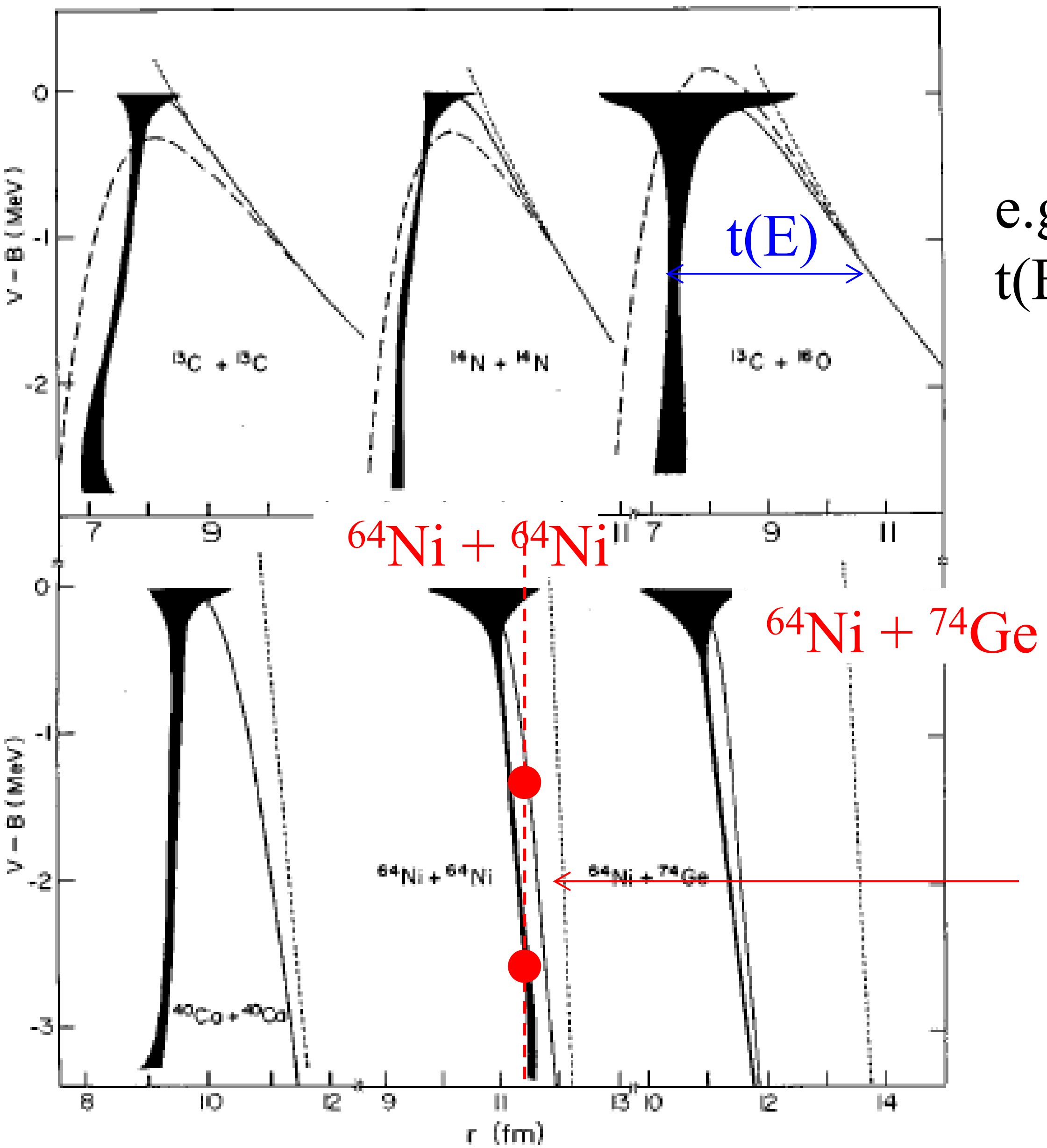
Balantekin et al. ('83):
E-indep, local, single-ch.
ポテンシャル模型を仮定

↓

非物理的なポテンシャル

A.B. Balantekin, S.E. Koonin, and J.W. Negele, PRC28('83)1565

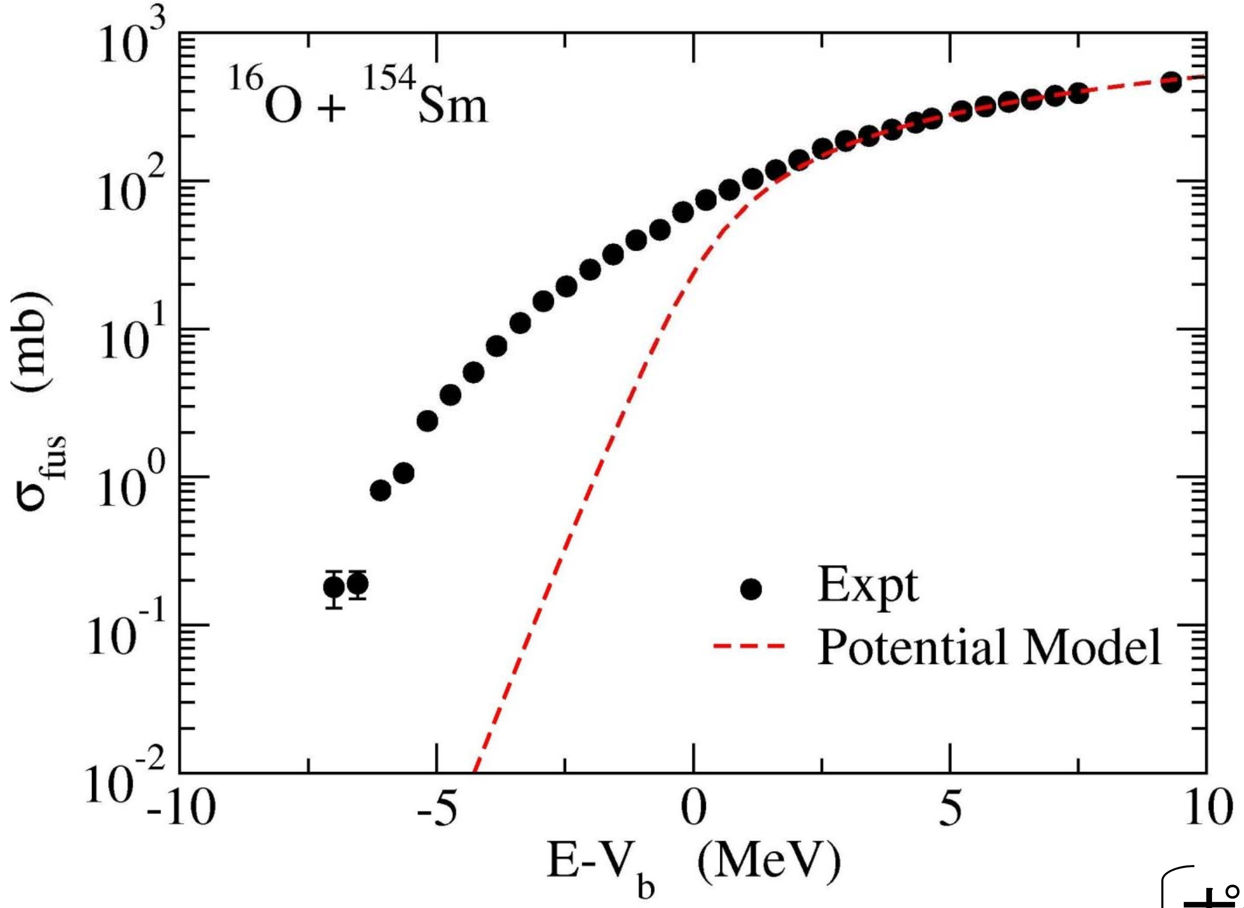
● ポテンシャル・インバージョン



e.g.,
t(E) = 3 +/- 0.2 fm

2価関数のポテンシャル
(非物理的 !!)

エネルギーに依存しない静的なポテンシャルによる核融合反応断面積



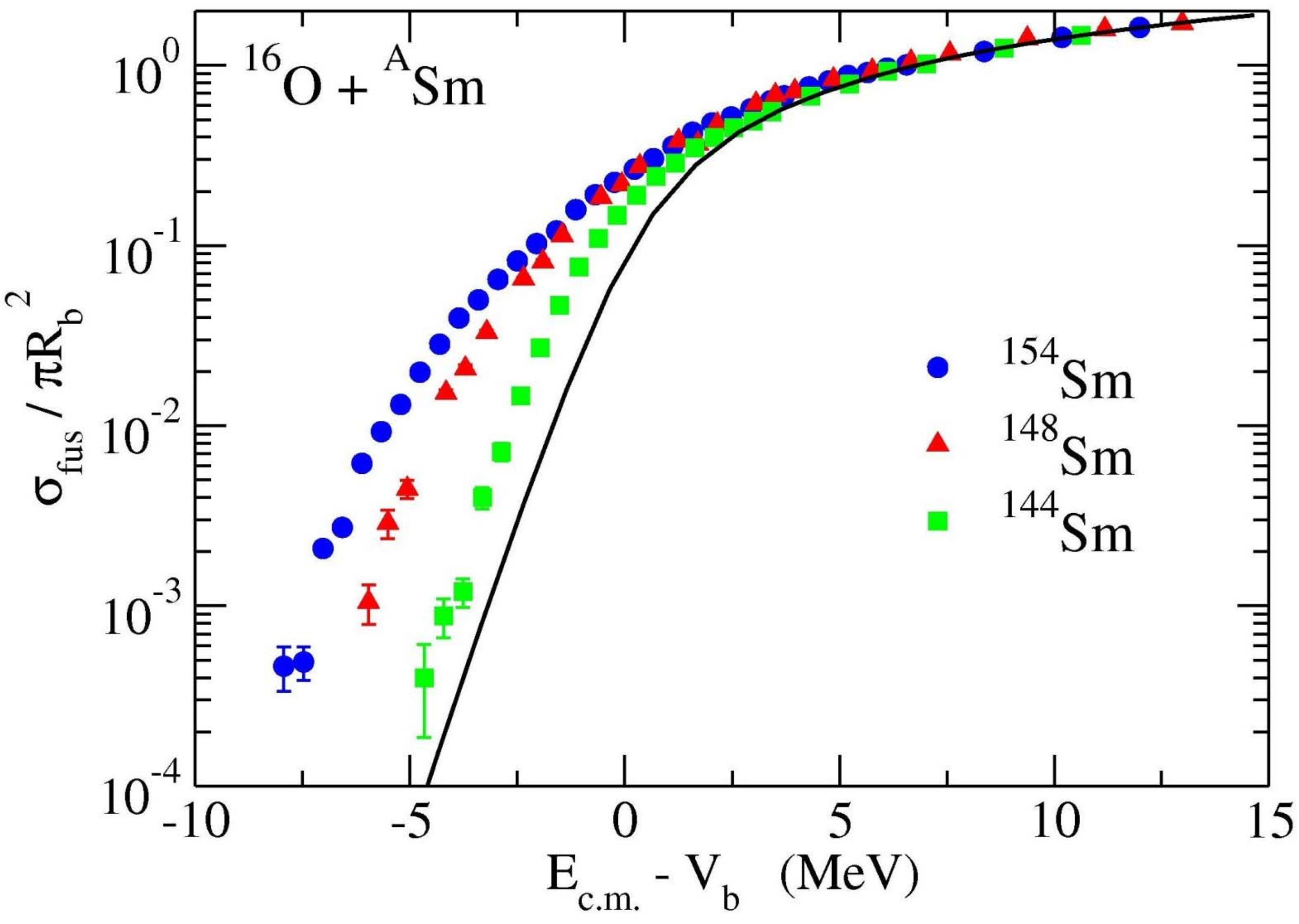
$E > V_b$ では大体データを再現

$E < V_b$ では核融合断面積を過小に評価

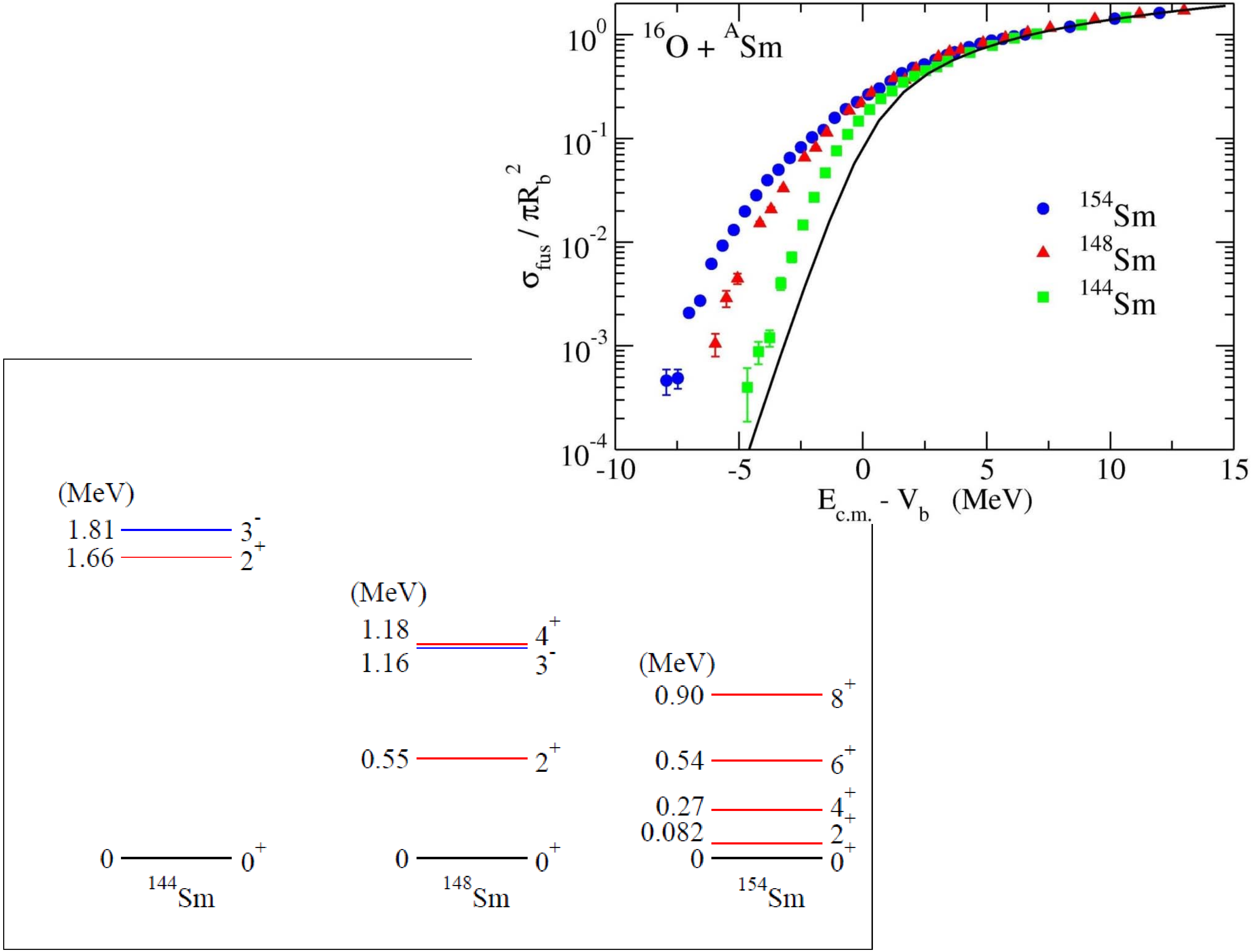
何が原因？

~~ポテンシャルが不十分？~~
他の要因？

核融合断面積の標的核依存性



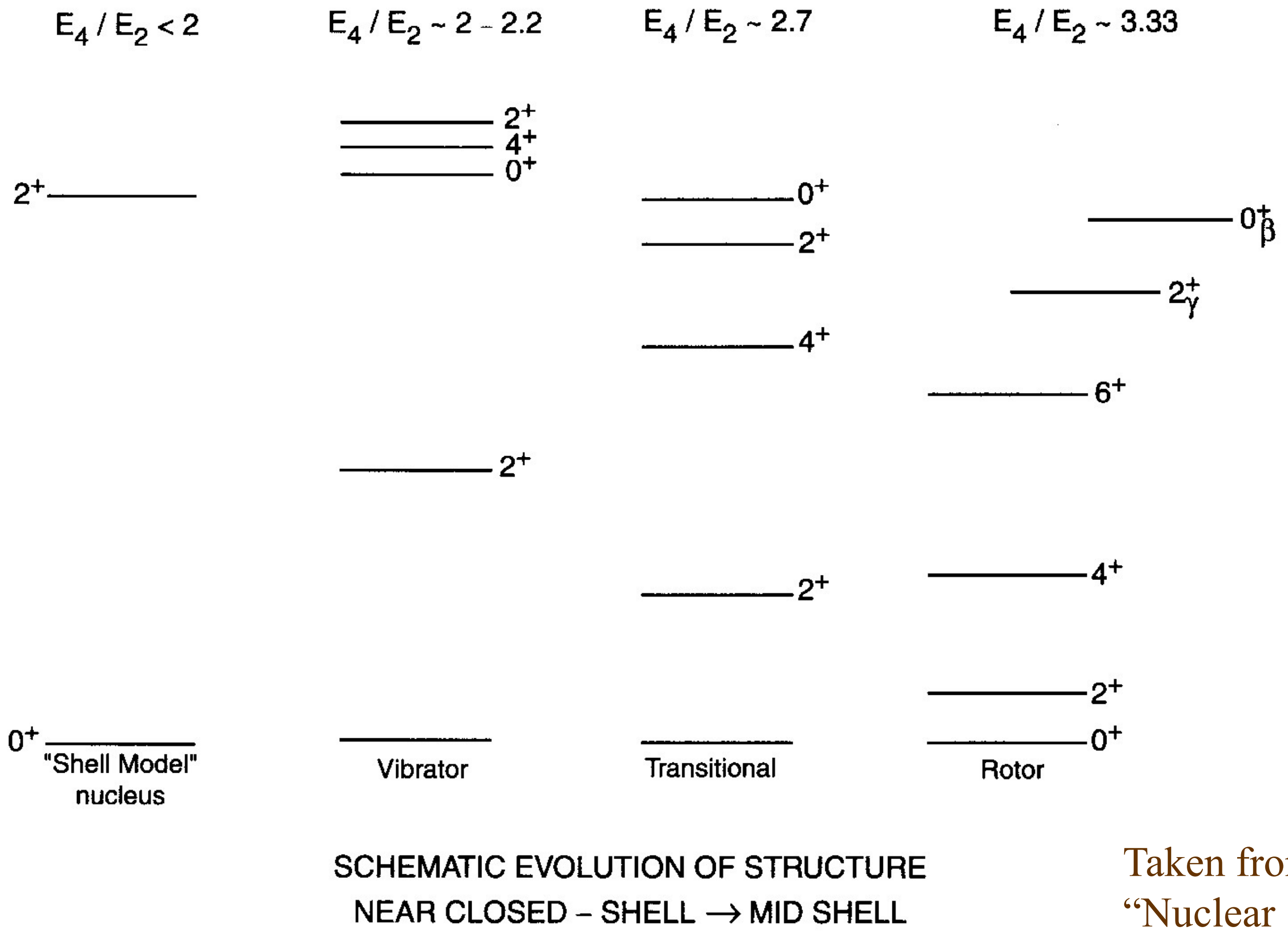
$E < V_b$ において強い標的核依存性



$^{16}O + {}^{A}Sm$
$\sigma_{fus} / \pi R_b^2$
$E_{c.m.} - V_b$ (MeV)
10^0
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
-10
-5
0
5
10
15
^{154}Sm
^{148}Sm
^{144}Sm
(MeV)
1.81 3^-
1.66 2^+
0 0^+
^{144}Sm
(MeV)
1.18 4^+
1.16 3^-
0.55 2^+
0 0^+
^{148}Sm
(MeV)
0.90 8^+
0.54 6^+
0.27 4^+
0.082 2^+
0 0^+
^{154}Sm

原子核の低励起集団運動

偶々核の低エネルギーに現れる励起状態は集団励起状態であり、
対相関と殻構造を強く反映する。



Taken from R.F. Casten, "Nuclear Structure from a Simple Perspective"

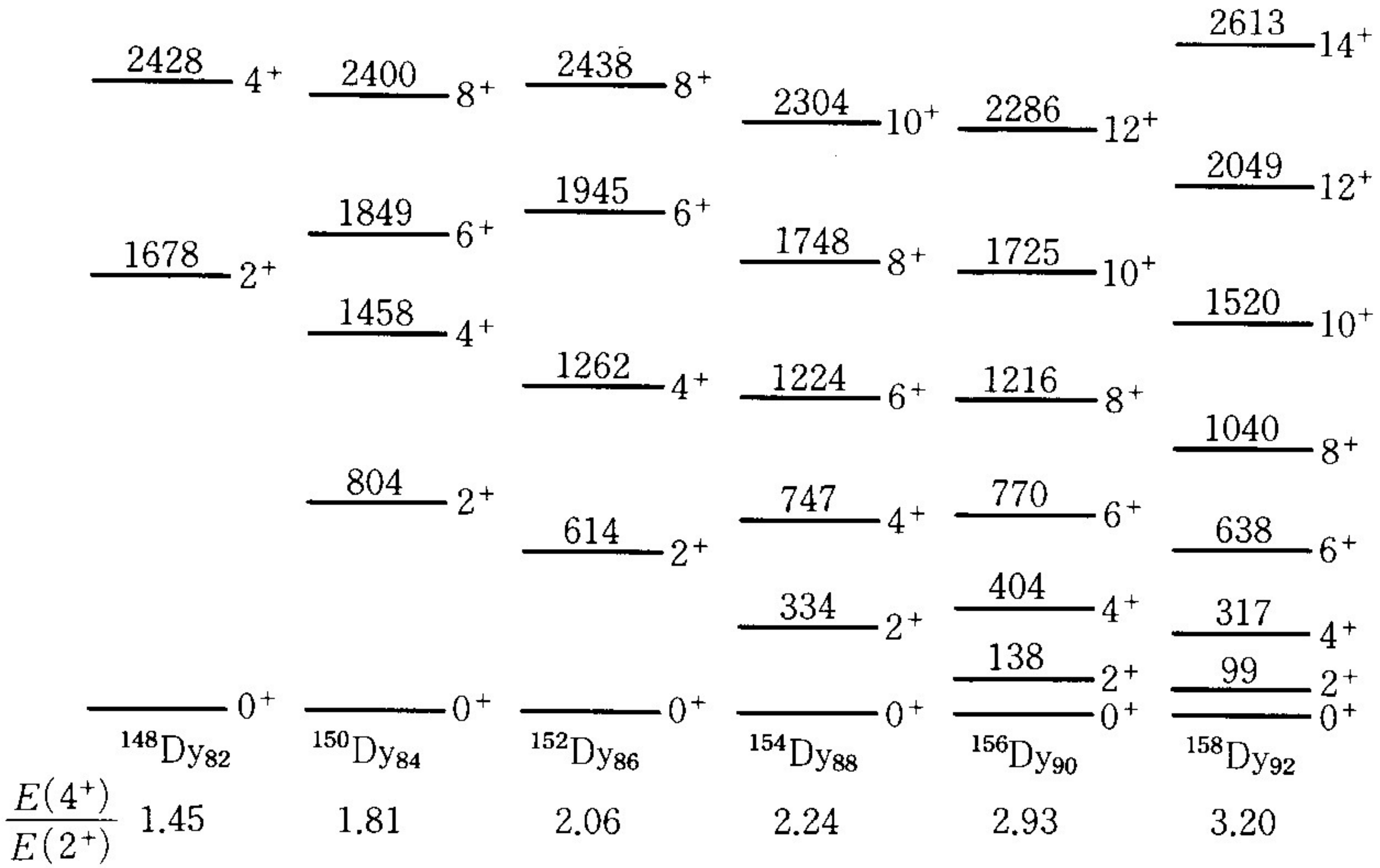
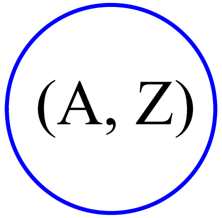


図 3-4 Dy アイソトープの低励起スペクトル．励起エネルギーの単位は keV.

市村、坂田、松柳
「原子核の理論」より

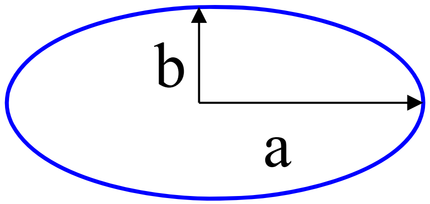
振動励起状態

Bethe-Weizacker 公式: 液滴模型に基づく質量公式



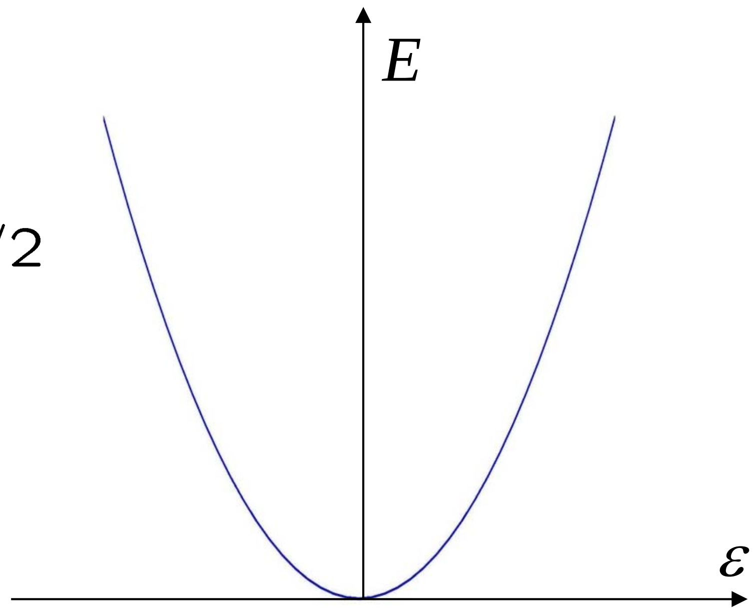
$$B(N,Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\mathrm{sym}} \frac{(N-Z)^2}{A}$$

変形すると



$$\begin{aligned} a &= R \cdot (1+\epsilon) \\ b &= R \cdot (1+\epsilon)^{-1/2} \end{aligned}$$

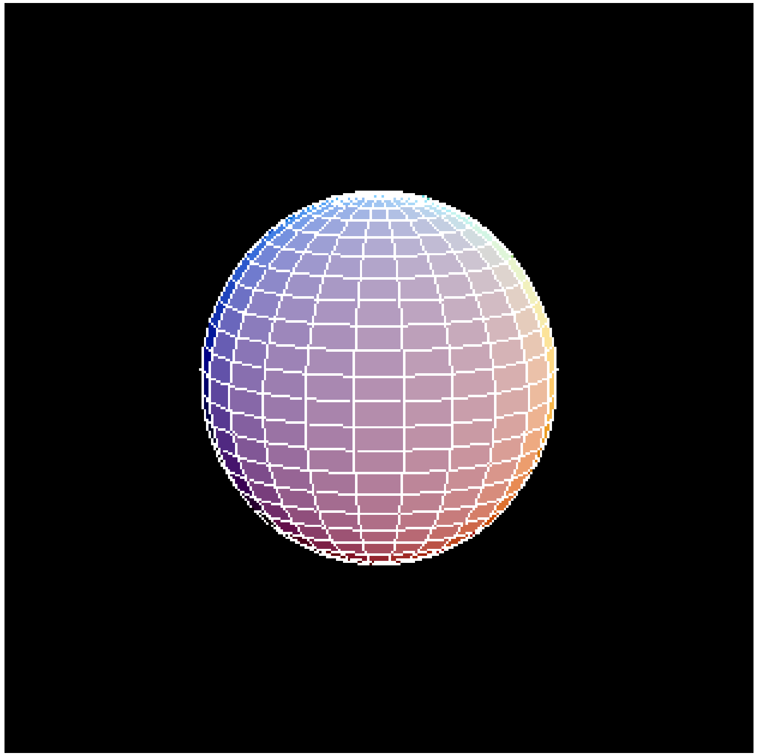
$$\begin{aligned} E_{\mathrm{surf}} &= E_{\mathrm{surf}}^{(0)} (1 + 2\epsilon^2/5 + \cdots) \\ E_C &= E_C^{(0)} (1 - \epsilon^2/5 + \cdots) \end{aligned}$$

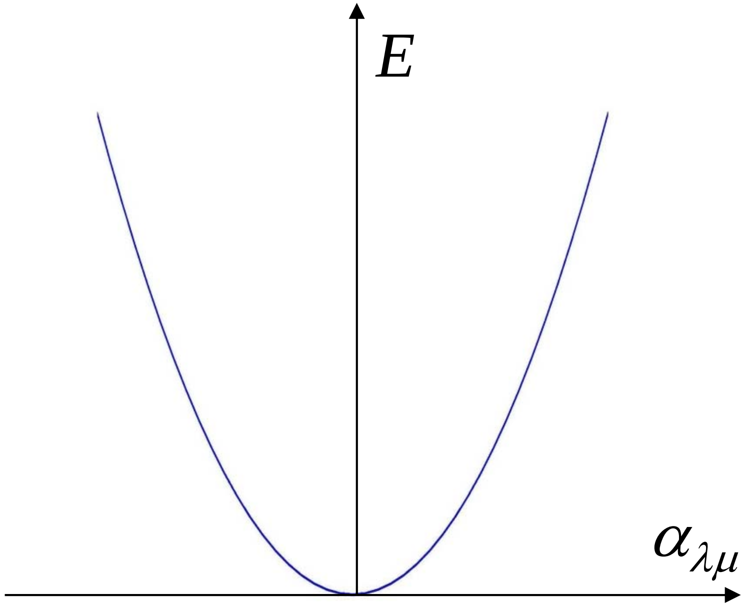


一般に　$R(\theta,\phi)=R_0\left(1+\sum_{\lambda,\mu}\alpha_{\lambda\mu}Y^*_{\lambda\mu}\right)$

$$V=\frac{1}{2}\sum_{\lambda,\mu}C_\lambda\left|\alpha_{\lambda\mu}\right|^2$$

調和振動子型の運動





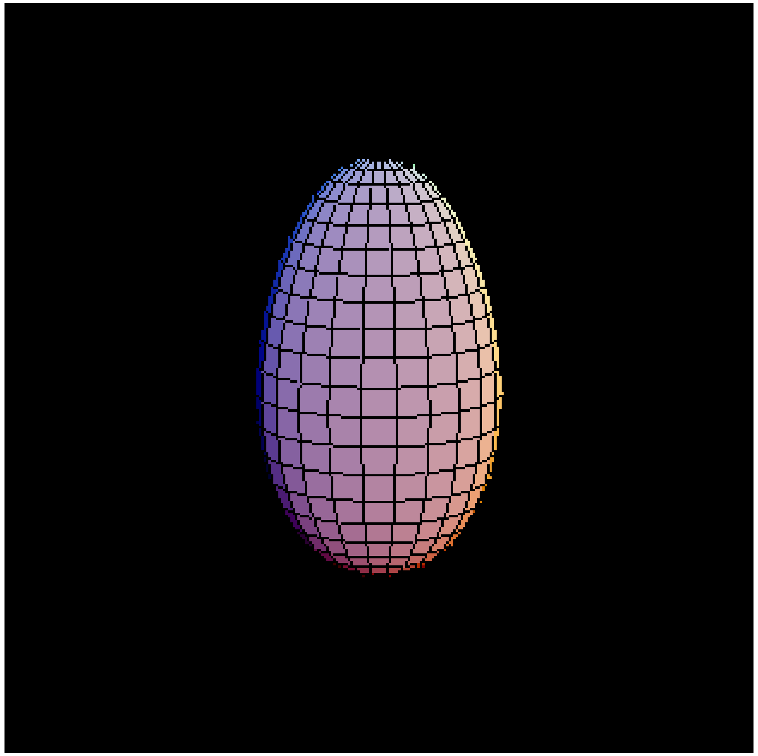
λ=2: 四重極振動

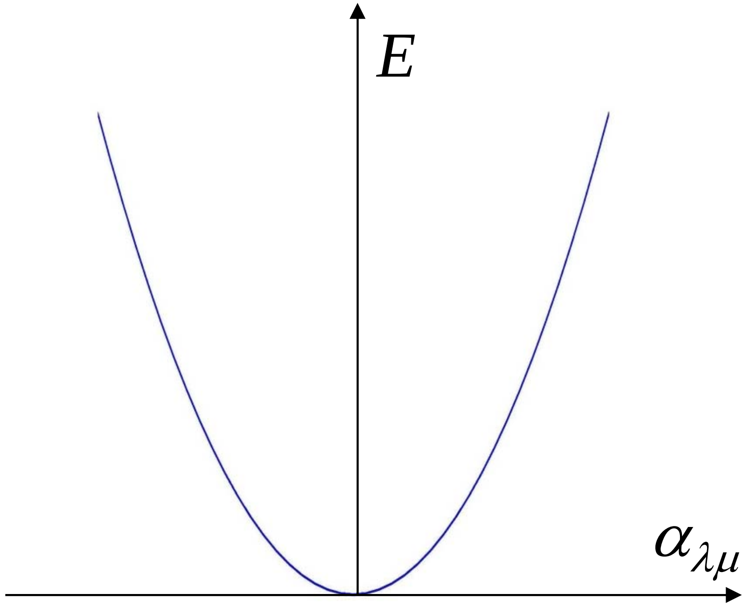
ムービー: 在田謙一郎氏（名工大）
http://www.phys.nitech.ac.jp/~arita/

一般に $$R(\theta,\phi) = R_0\left(1+\sum_{\lambda,\mu}\alpha_{\lambda\mu}Y^*_{\lambda\mu}\right)$$

$$V = \frac{1}{2}\sum_{\lambda,\mu} C_\lambda \left|\alpha_{\lambda\mu}\right|^2$$

調和振動子型の運動





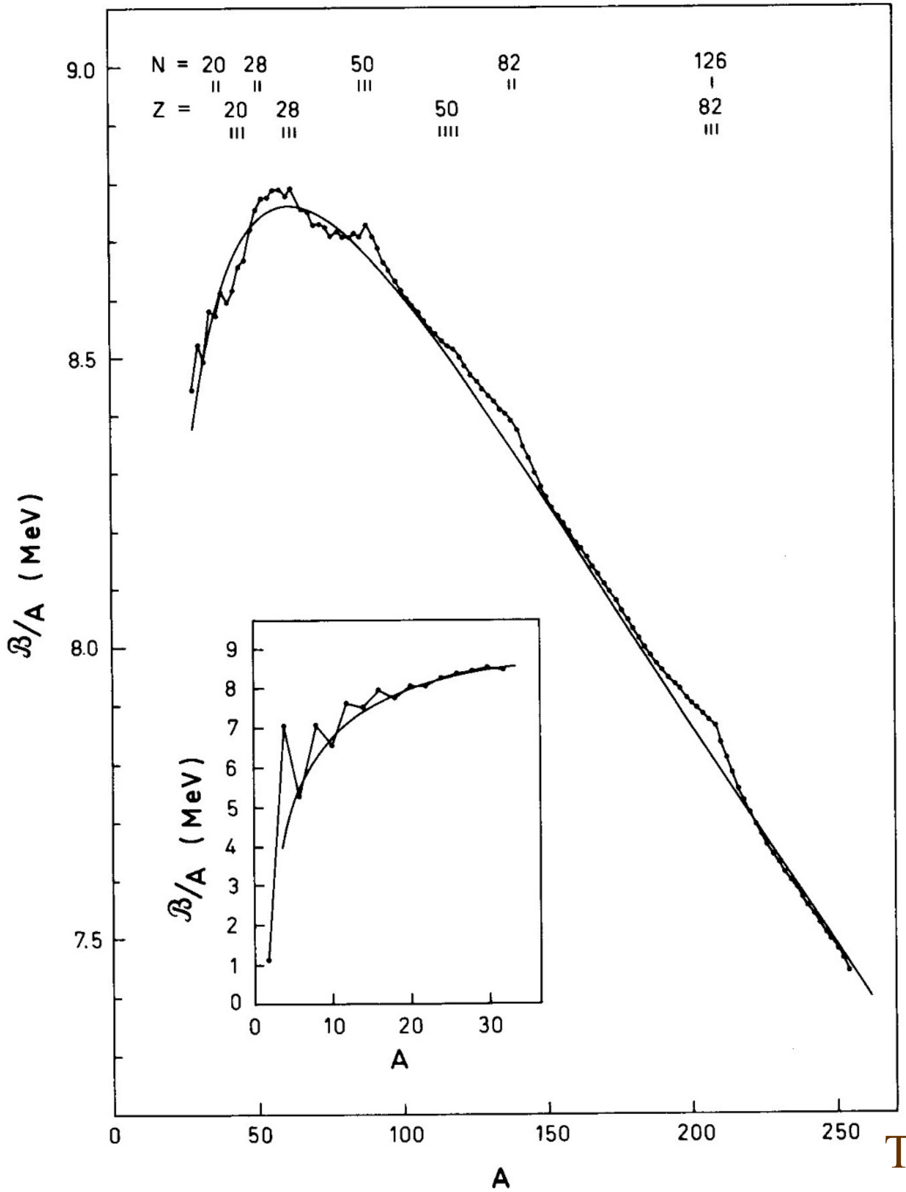
λ=3: 八重極振動

ムービー: 在田謙一郎氏（名工大）
http://www.phys.nitech.ac.jp/~arita/

回転励起状態

●殻エネルギー

$$B(N,Z) = B_{\text{macro}}(N,Z) + B_{\text{micro}}(N,Z)$$



Taken from Bohr-Mottelson

●なめらかな部分

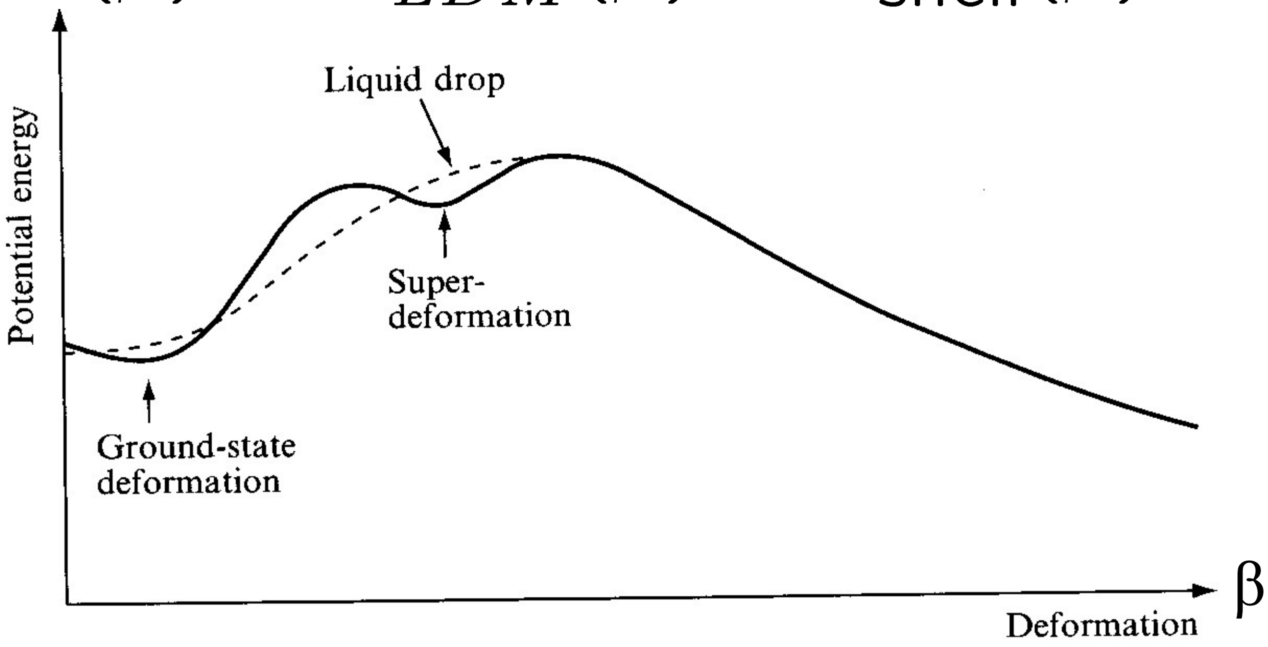
$$B_{\text{macro}}(N,Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N-Z)^2}{A}$$

●ゆらぎの部分

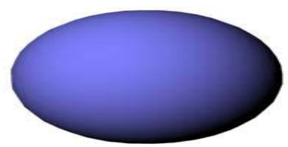
$$B_{\text{micro}} = B_{\text{pair}} + B_{\text{shell}}$$

原子核の変形にともなうエネルギーの変化

$$E(\beta) = E_{LDM}(\beta) + E_{\mathsf{shell}}(\beta)$$



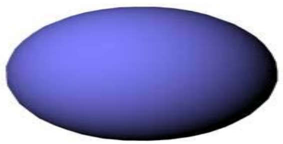
Taken from J.S. Lilley, "Nuclear Physics"



液滴模型 ⟹ 必ず球形

殻補正 ⟹ 変形状態が基底状態になる場合あり

* 対称性の自発的破れ



^{154}Sm の励起スペクトル

0.903 (MeV)	———	8^+
0.544	———	6^+
0.267	———	4^+
0.082	———	2^+
0	———	0^+

^{154}Sm

$$\boxed{E_I \sim \frac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathcal{J}}}$$

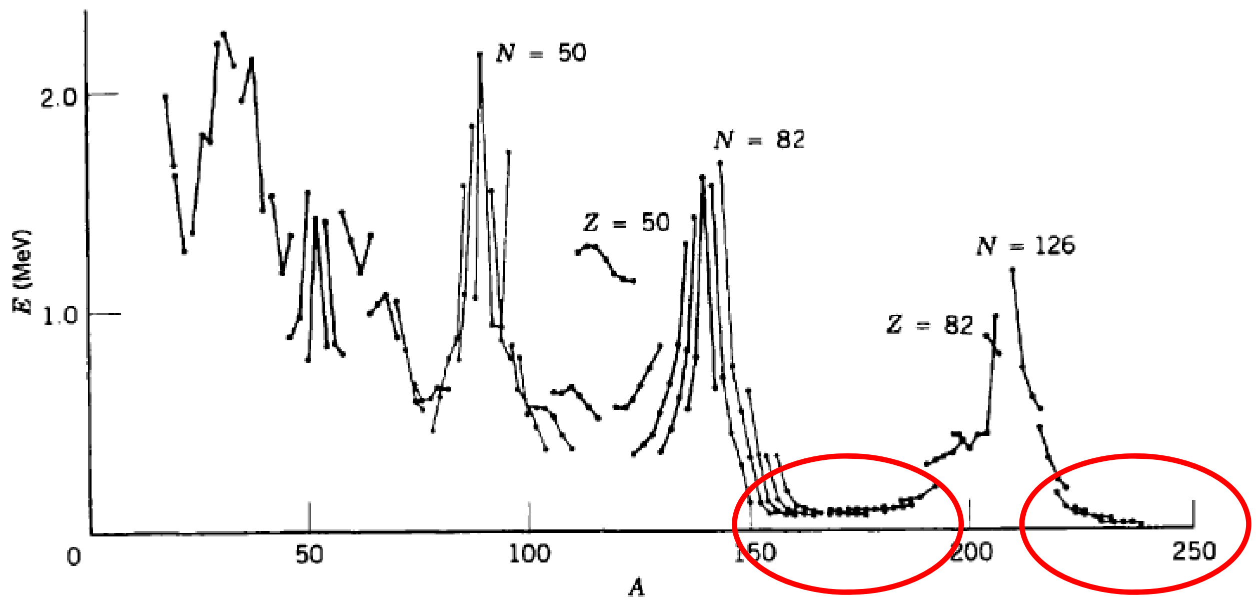
Cf. 剛体の回転エネルギー（古典力学）

$$E = \frac{1}{2}\mathcal{J}\omega^2 = \frac{I^2}{2\mathcal{J}}$$

$$(I = \mathcal{J}\omega,\ \ \omega = \dot{\theta})$$

^{154}Sm は変形している

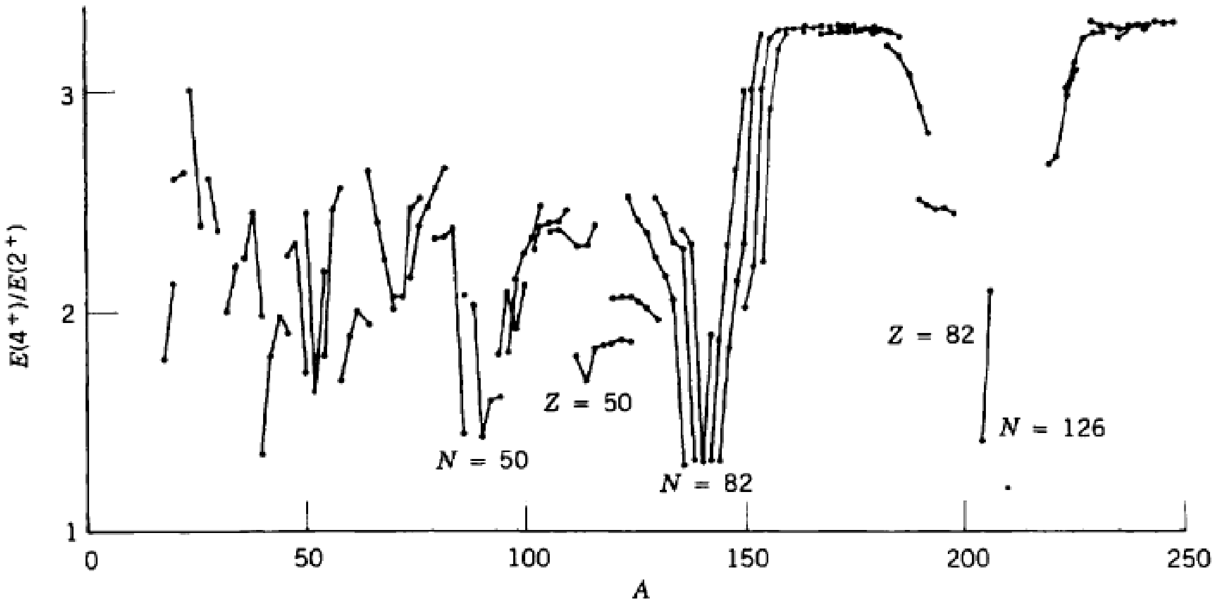
偶偶核の 2$^+$ 状態のエネルギー



変形核

K.S. Krane, “Introductory Nuclear Physics”

偶偶核における E(4⁺)/E(2⁺)



変形核なら

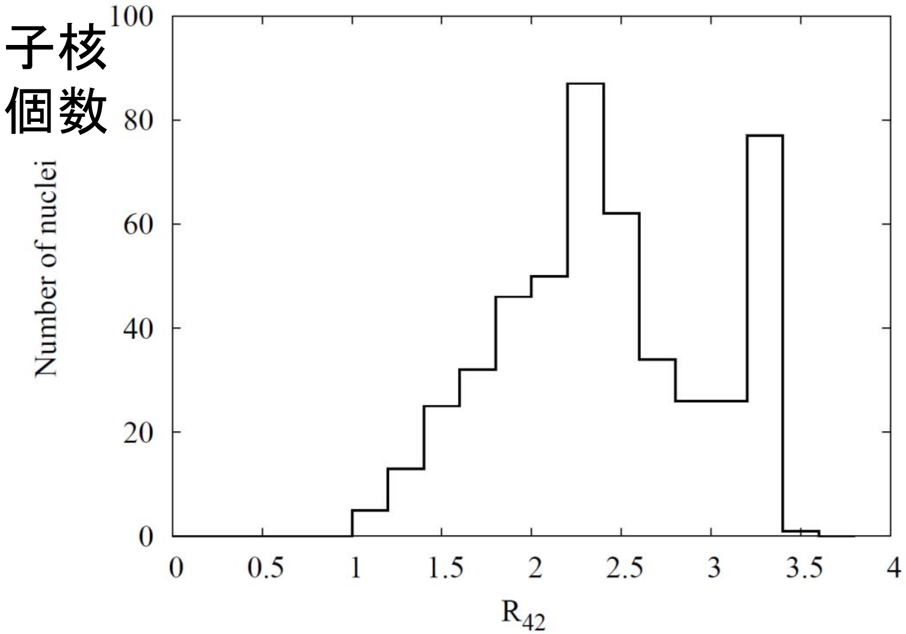
$E(4^+)/E(2^+) \sim 3.3$

球形核なら

$E(4^+)/E(2^+) \sim 2$

K.S. Krane, “Introductory Nuclear Physics”

原子核の個数



E(4⁺)/E(2⁺)

G.F. Bertsch, arXiv:1203.5529

原子核が変形している証拠

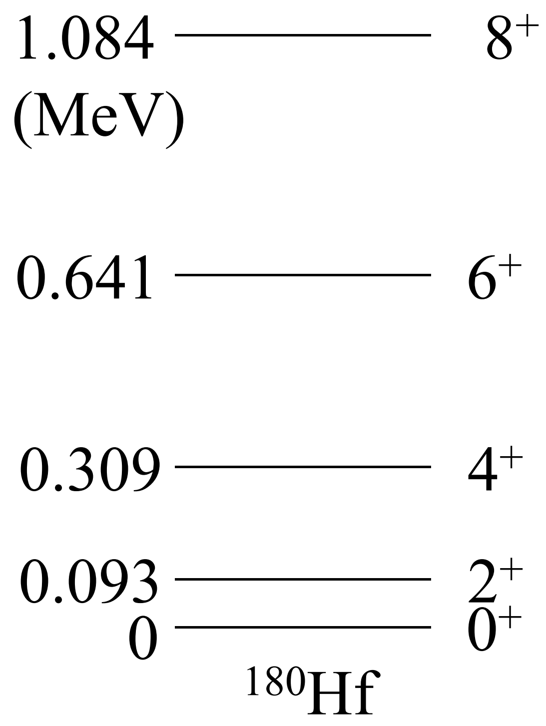
- 回転バンドの存在

$$E_I = \frac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathcal{J}}$$

- 非常に大きな四重極モーメント
(奇数個の核子を持つ原子核や励起状態)

$$Q = e\sqrt{\frac{16\pi}{5}}\langle \Psi_{II} | r^2 Y_{20} | \Psi_{II} \rangle$$

- 四重極遷移確率の増大



偶偶核の 2^+ 状態の四重極モーメント

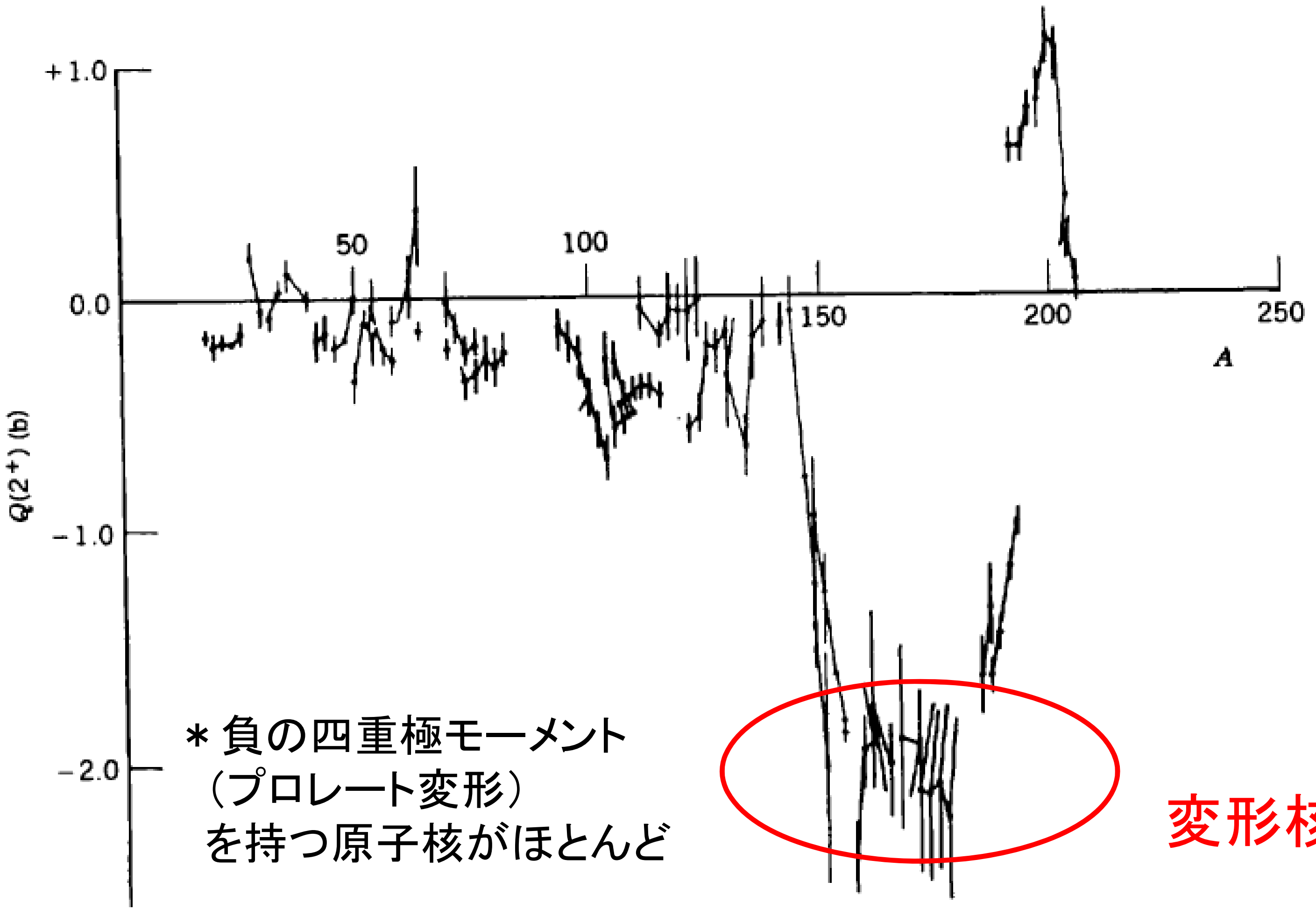


Figure 5.16*b* Electric quadrupole moments of lowest 2^+ states of even-Z, even-N nuclei. The lines connect sequences of isotopes.

K.S. Krane, "Introductory Nuclear Physics"

原子核が変形している証拠

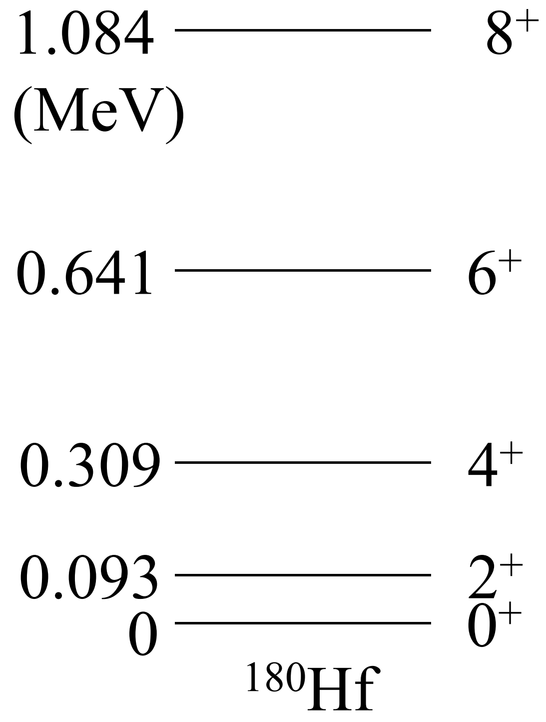
- 回転バンドの存在

$$E_I = \frac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathcal{J}}$$

- 非常に大きな四重極モーメント
(奇数個の核子を持つ原子核や励起状態)

$$Q = e\sqrt{\frac{16\pi}{5}}\langle\Psi_{II}|r^2Y_{20}|\Psi_{II}\rangle$$

- 四重極遷移確率の増大
- 一粒子スペクトル



変形核の一粒子準位
（ニルソン・レベル）

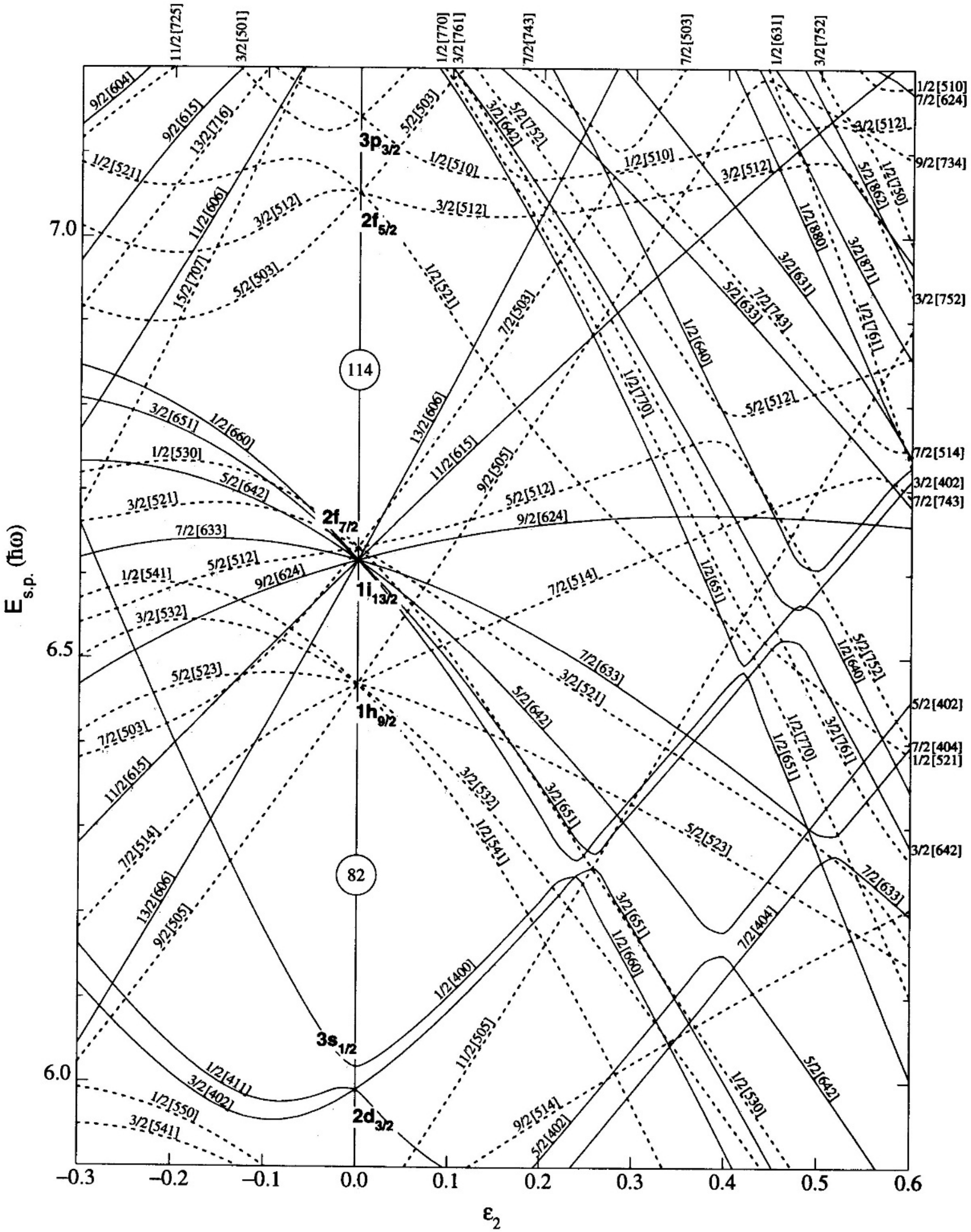
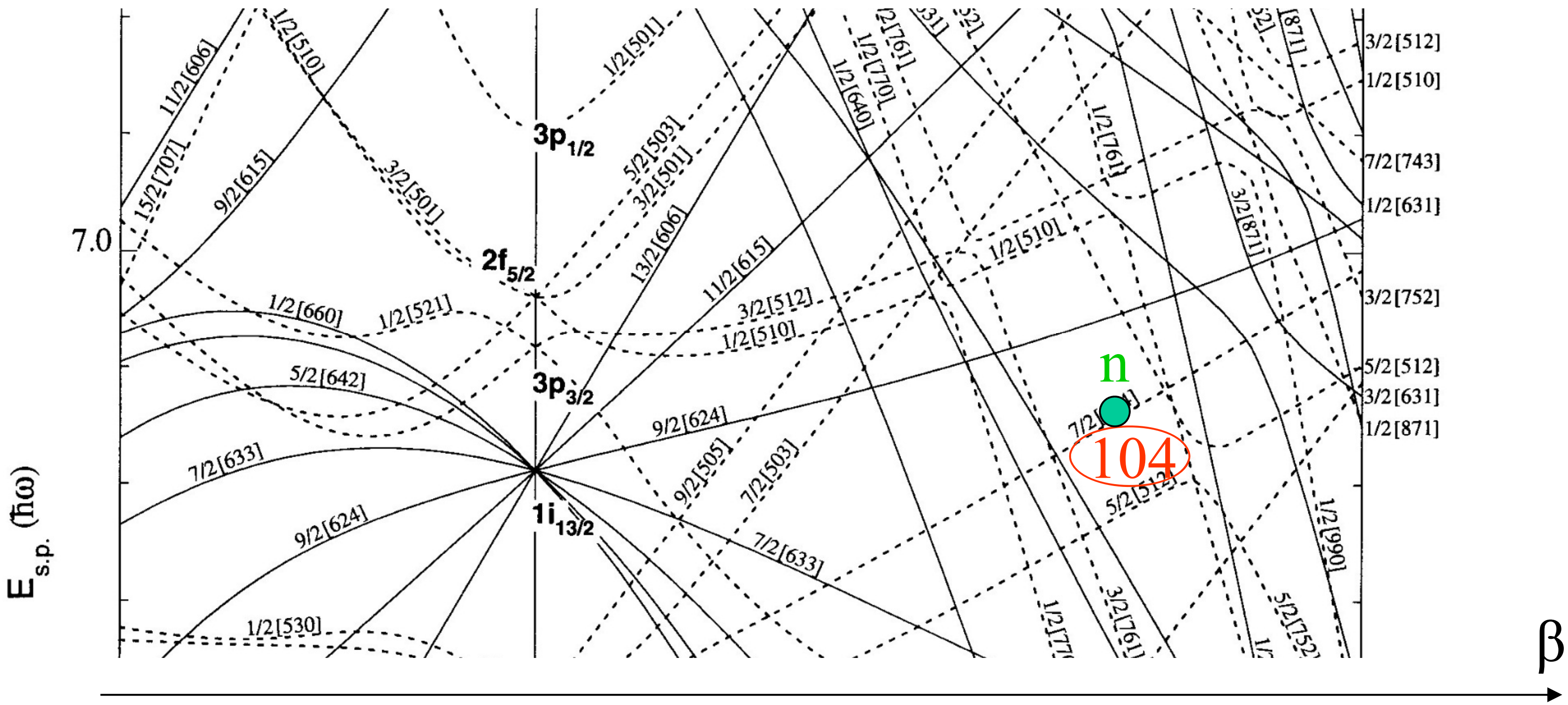


Figure 13. Nilsson diagram for protons, Z ≥ 82 ($\varepsilon_4 = \varepsilon_2^2/6$).

変形核の一粒子準位



$5/2^-$ 0.508

$9/2^+$ 0.321 $\,^{177}_{72}Hf_{105}$

$7/2^-$

核融合反応に対する集団励起の影響: 回転の場合

エネルギー・スケールの比較

$$V(r) \sim V_b - \frac{1}{2}\mu\Omega^2 r^2$$

$$\begin{cases} \text{トンネル運動:} & E_{\rm tun} \sim \hbar\Omega \sim 3.5\ \text{MeV (クーロン障壁の曲率)} \\ \text{回転運動:} & E_{\rm rot} \sim E_{2+} \sim 0.08\text{MeV} \end{cases}$$

$$E_{\rm tun} \gg E_{\rm rot} = I(I+1)\hbar^2/2\mathcal{J} \to 0$$

$$\Longleftrightarrow \mathcal{J} \to \infty$$

^{154}Sm の方向は反応中にほとんど変化しない

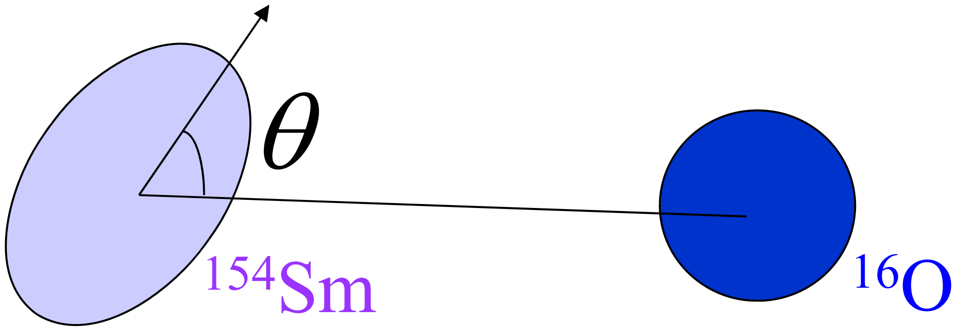
(note)

反応の初期は基底状態

(0^+ 状態)

⇒

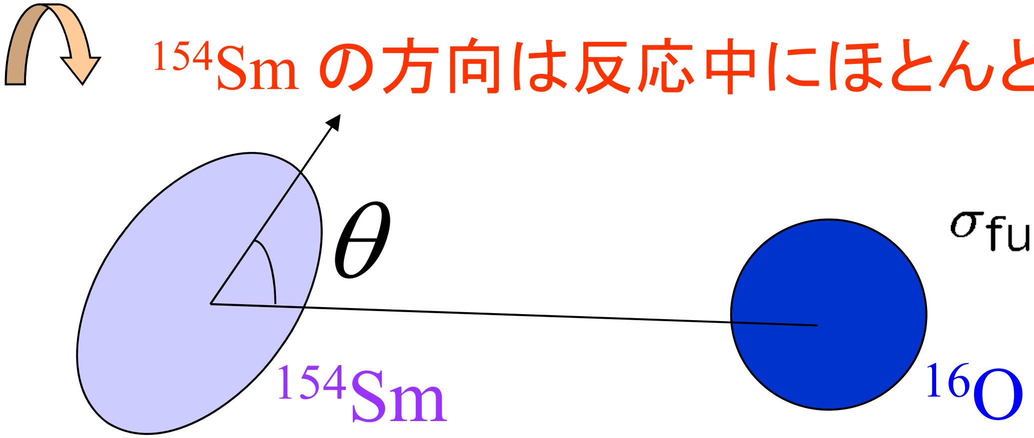
あらゆる方向が等確率で混ざっている



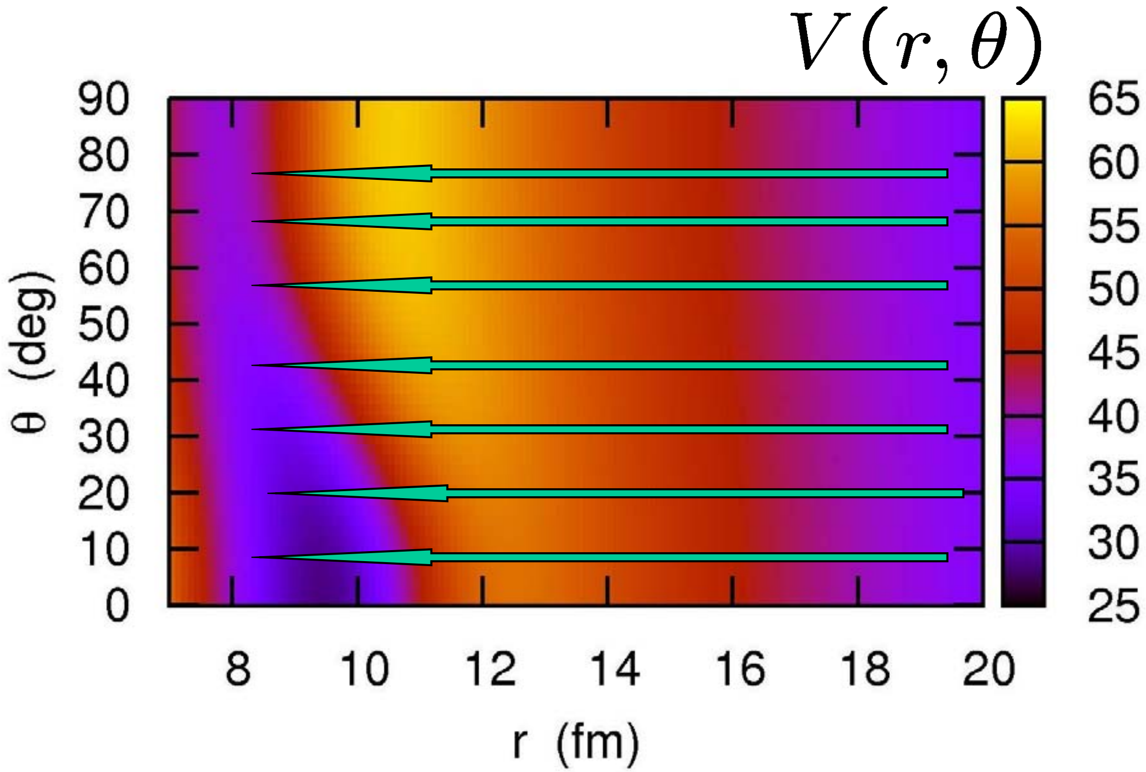
$$\boxed{\sigma_{\rm fus}(E) = \int_0^1 d(\cos\theta)\,\sigma_{\rm fus}(E;\theta)}$$

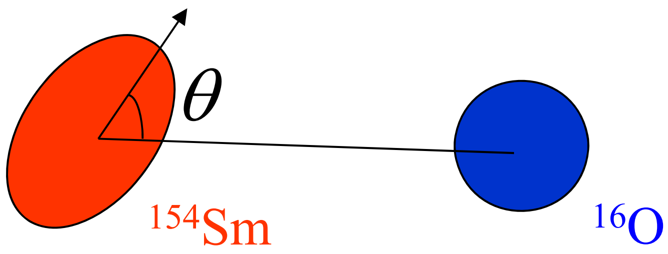
核融合反応に対する集団励起の影響: 回転の場合

^{154}Sm の方向は反応中にほとんど変化しない

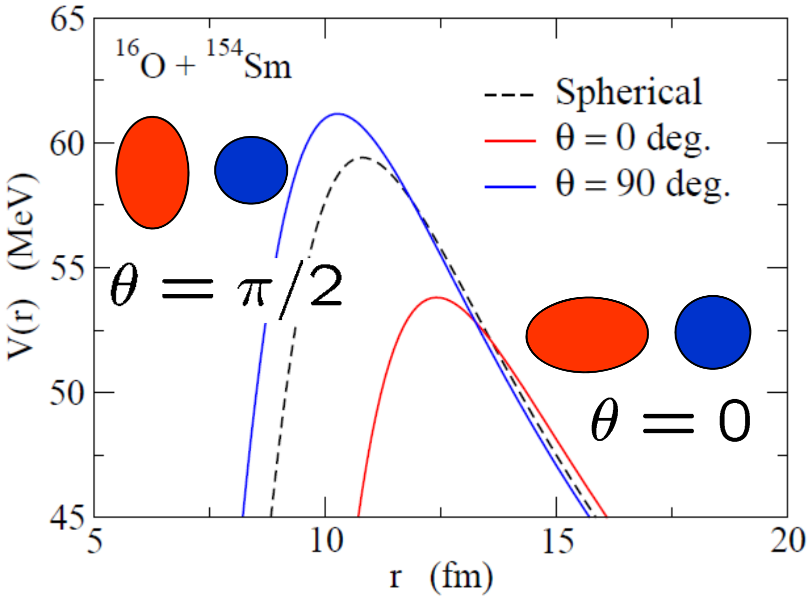


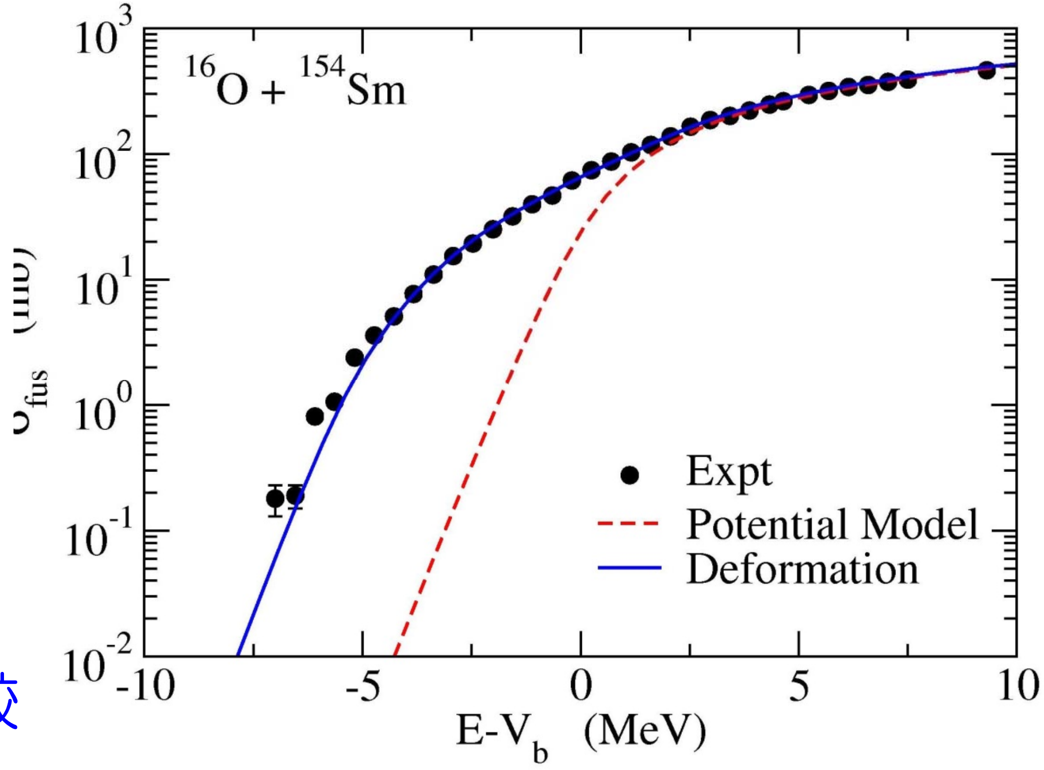
$$\sigma_{\rm fus}(E) = \int_0^1 d(\cos\theta)\sigma_{\rm fus}(E;\theta)$$





$$\sigma_{\text{fus}}(E) = \int_0^1 d(\cos\theta)\sigma_{\text{fus}}(E;\theta)$$





$\theta = 0$ では引力の核力が比較的遠方から働くため障壁が下がる。

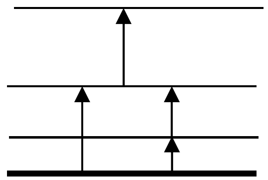
$\theta = \pi/2$ はその逆。近づかないと引力が働かないため障壁は上がる。

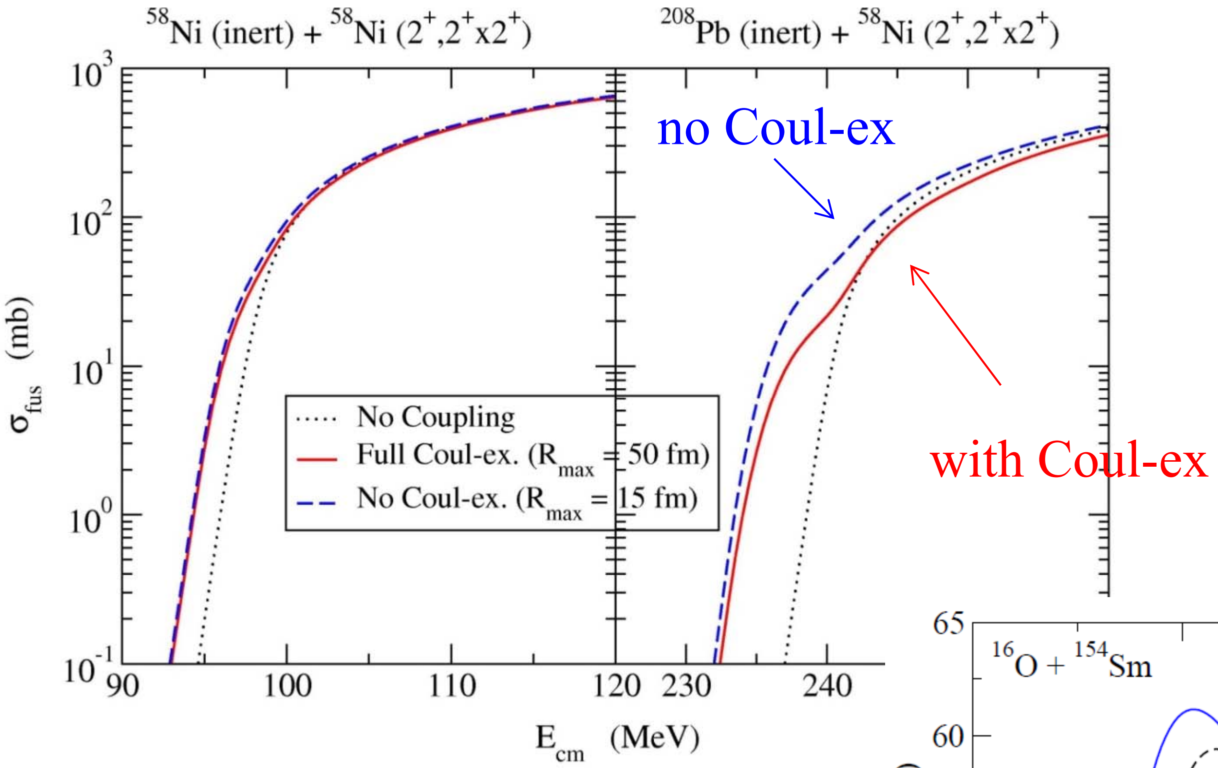
変形の効果: 核融合断面積が 10~100 倍増大

⟹ 核融合反応: 核構造に対する興味深いプローブ

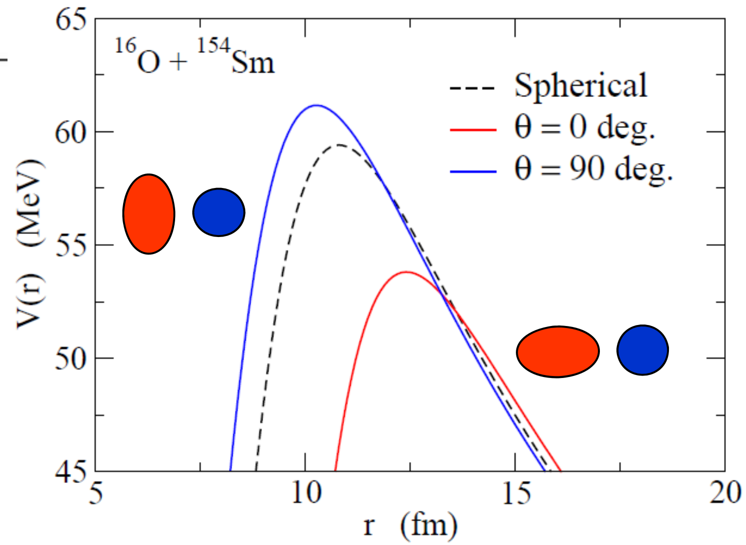
チャンネル結合の2つの効果

✓非弾性励起による相対エネルギーの減少





✓クーロン障壁の動的変化

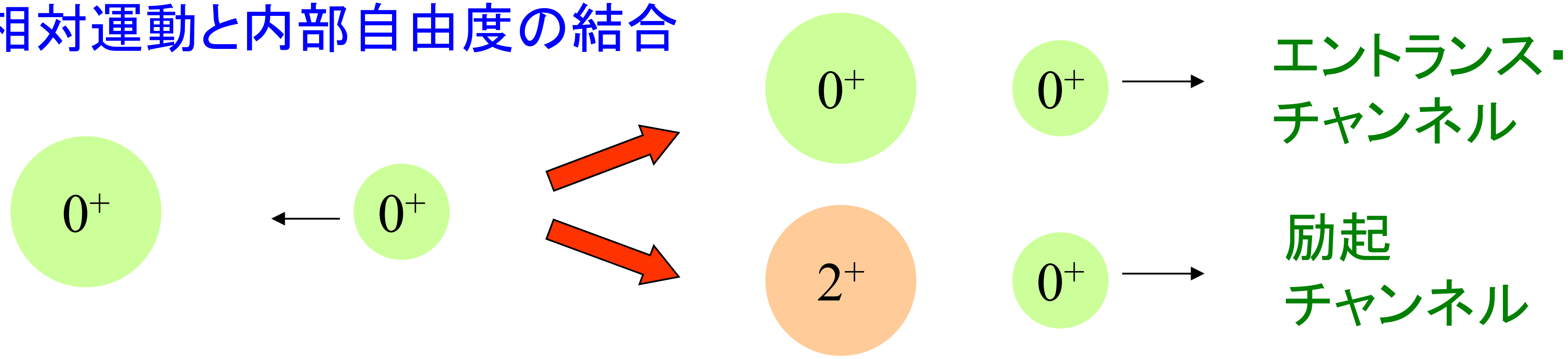


→ 核融合断面積の大きな増幅現象

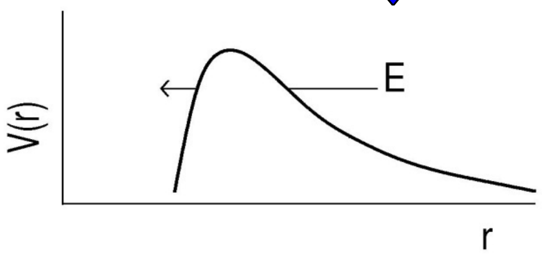
cf. 2-level model: Dasso, Landowne, and Winther, NPA405('83)381

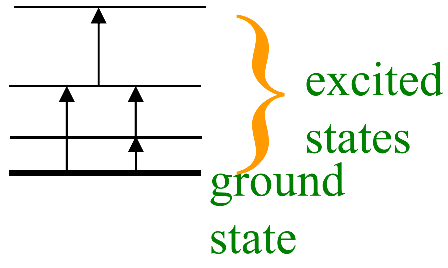
より量子的な取り扱い：結合チャンネル法

相対運動と内部自由度の結合



$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r) + H_0(\xi) + V_{\rm coup}(\boldsymbol{r},\xi)$$





$$H_0(\xi)\phi_k(\xi) = \epsilon_k\,\phi_k(\xi)$$

$$\boxed{\Psi(\boldsymbol{r},\xi) = \sum_k \psi_k(\boldsymbol{r})\phi_k(\xi)}$$

$$\begin{cases} H = -\dfrac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r) + H_0(\xi) + V_{\rm coup}(\boldsymbol{r},\xi) \\ \Psi(\boldsymbol{r},\xi) = \sum_k \psi_k(\boldsymbol{r})\phi_k(\xi) \end{cases}$$

$$H_0(\xi)\phi_k(\xi) = \epsilon_k\,\phi_k(\xi)$$

シュレーディンガー方程式: $(H-E)\Psi(\boldsymbol{r},\xi) = 0$

$\langle\phi_k|$ ⟶

$$\langle\phi_k|H-E|\Psi\rangle = 0$$

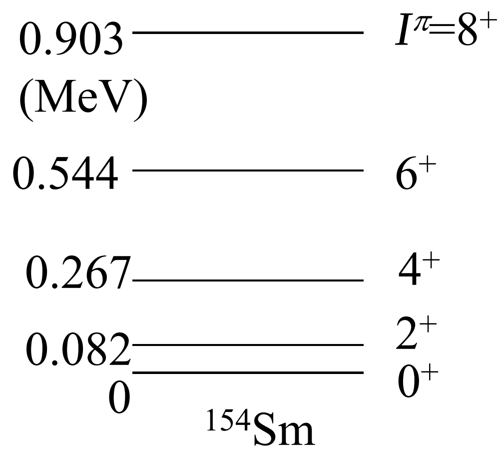
or

$$\boxed{\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r) + \epsilon_k - E\right]\psi_k(\boldsymbol{r}) + \sum_{k'}\langle\phi_k|V_{\rm coup}|\phi_{k'}\rangle\psi_{k'}(\boldsymbol{r}) = 0}$$

結合チャンネル方程式

角運動量結合

$$H_0(\xi)\phi_{nIm_I}(\xi) = \epsilon_{nI}\,\phi_{nIm_I}(\xi)$$



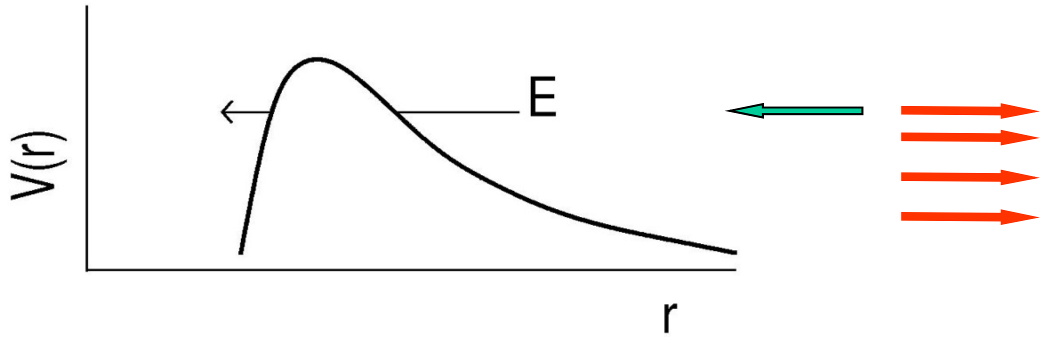
全角運動量: $\boldsymbol{I} + \boldsymbol{l} = \boldsymbol{J}$

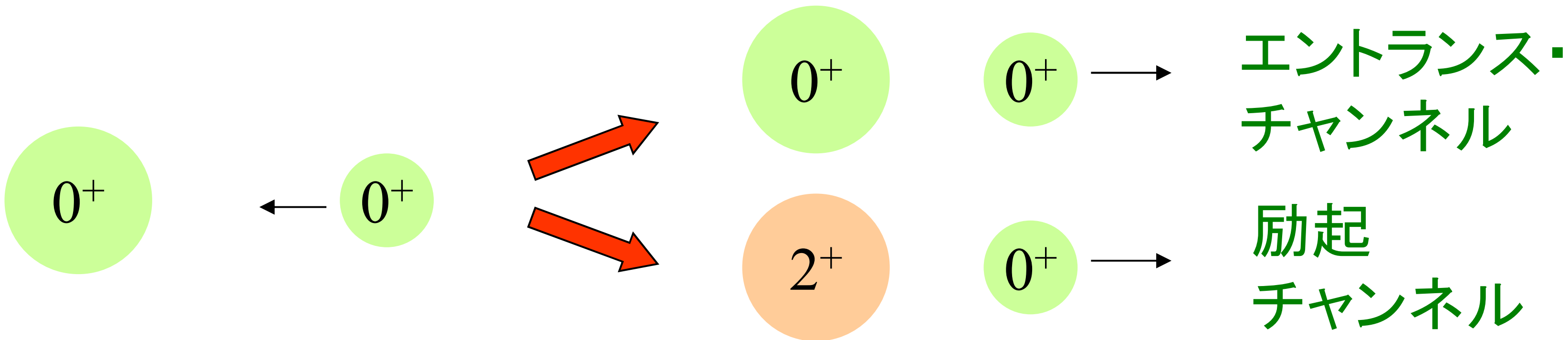
$$\Psi(\boldsymbol{r},\xi) = \sum_k \psi_k(\boldsymbol{r})\phi_k(\xi) = \sum_{n,l,I} \frac{u_{nlI}(r)}{r}[Y_l(\hat{\boldsymbol{r}})\phi_{nI}(\xi)]^{(JM)}$$

$$\langle [Y_l\phi_{nI}]^{(JM)}|H - E|\Psi\rangle = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V_0(r) - E + \epsilon_{nI}\right]u_{nlI}(r)\\ &\qquad + \sum_{n'l'I'}\langle [Y_l\phi_{nI}]^{(JM)}|V_{\rm coup}(r)|[Y_{l'}\phi_{n'I'}]^{(JM)}\rangle\, u_{n'l'I'}(r) = 0\end{aligned}}$$

境界条件





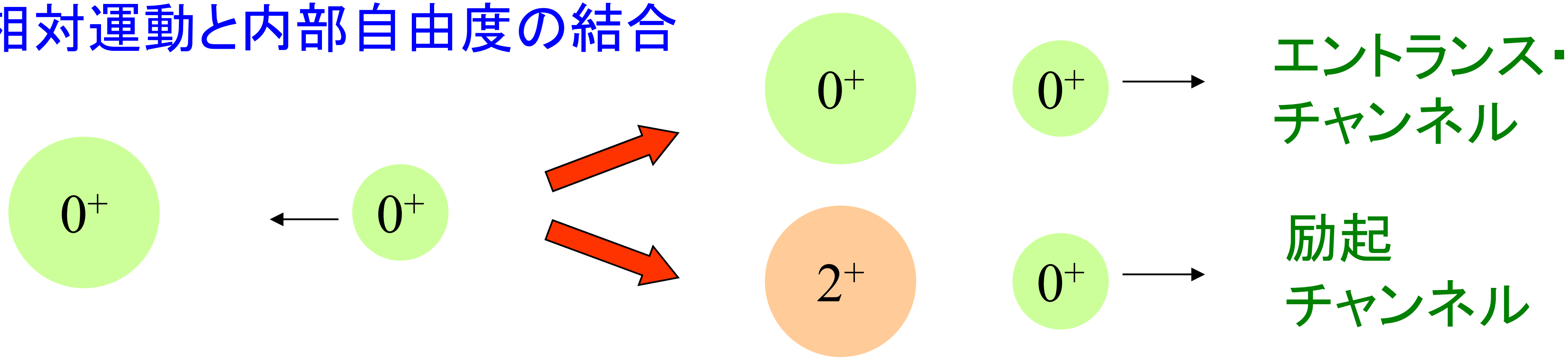
$$\Psi(\boldsymbol{r},\xi) = \sum_{n,l,I} \frac{u_{nlI}(r)}{r}[Y_l(\hat{\boldsymbol{r}})\phi_{nI}(\xi)]^{(JM)}$$

$$\boxed{u_{nlI}(r) \to H_l^{(-)}(k_{nI}r)\delta_{n,n_i}\delta_{l,l_i}\delta_{I,I_i} - \sqrt{\frac{k_0}{k_{nI}}}\, S_{nlI}\, H_l^{(+)}(k_{nI}r)}$$

$$P_l(E) = 1 - \sum_{nI} |S_{nlI}|^2 \qquad \sigma_{\rm fus}(E) = \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)P_l(E)$$

結合チャンネル法のまとめ:

相対運動と内部自由度の結合



結合チャンネル方程式

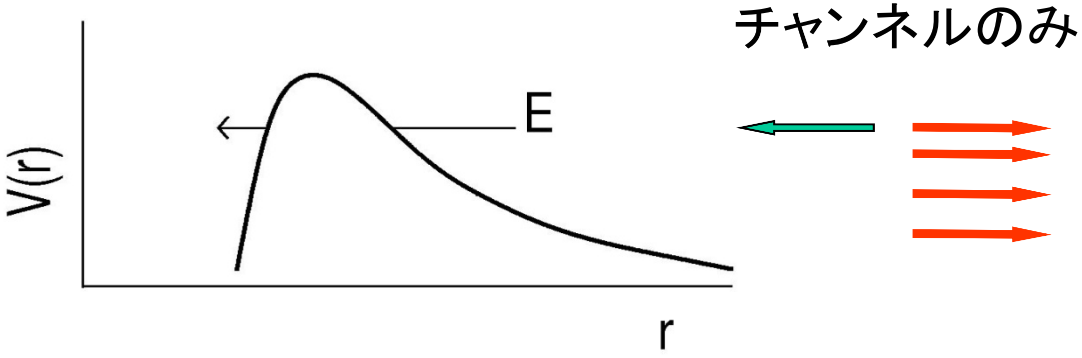
$$\boxed{\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r) + \epsilon_k - E\right]\psi_k(\boldsymbol{r}) + \sum_{k'}\langle\phi_k|V_{\rm coup}|\phi_{k'}\rangle\psi_{k'}(\boldsymbol{r}) = 0}$$

励起エネルギー　　　励起オペレーター

結合チャンネル方程式

$$\underbrace{\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r) + \epsilon_k - E\right]\psi_k(\boldsymbol{r})}_{\psi_k \text{ に対する方程式}} + \sum_{k'}\underbrace{\langle\phi_k|V_{\rm coup}|\phi_{k'}\rangle}_{\phi_\kappa \text{ から } \phi_{k'} \text{ への励起}}\psi_{k'}(\boldsymbol{r}) = 0$$

境界条件:



入射波はエントランス・チャンネルのみ

外向波はすべてのチャンネル

$$\boxed{\begin{array}{llr} \psi_n(r) \;\to & e^{-ik_0r} - S_0\, e^{ik_0r} & (n=0) \\ & -S_n\, e^{ik_nr} & (n\neq 0) \end{array}}$$

$$P(E) = 1 - \sum_n |S_n|^2 \qquad\qquad k_n = \sqrt{2\mu(E-\epsilon_n)/\hbar^2}$$

結合チャンネル方程式の2通りの解き方

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r) + H_0(\xi) + V_{\rm coup}(\boldsymbol{r},\xi)$$

$$H_0(\xi)\phi_k(\xi) = \epsilon_k\,\phi_k(\xi)$$

1) 連立（2階）微分方程式を解く

$$\Psi(\boldsymbol{r},\xi) = \sum_k \psi_k(\boldsymbol{r})\phi_k(\xi)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r) + \epsilon_k - E\right]\psi_k(\boldsymbol{r}) + \sum_{k'}\langle\phi_k|V_{\rm coup}|\phi_{k'}\rangle\psi_{k'}(\boldsymbol{r}) = 0$$

2) 時間発展方程式を解く（連立微分方程式の半古典近似）

$H_r = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r)$ を用いて $r(t)$ の軌道を決定

$$\Rightarrow\quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = [H_0(\xi) + V_{\rm coup}(r(t),\xi)]|\Psi(t)\rangle$$

を $|\Psi(t)\rangle = \sum_k a_k(t)|\phi_k(\xi)\rangle$ と展開して解く

結合チャンネル方程式の2通りの解き方

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r) + H_0(\xi) + V_{\rm coup}(\boldsymbol{r},\xi)$$

2) 時間発展方程式を解く(連立微分方程式の半古典近似)

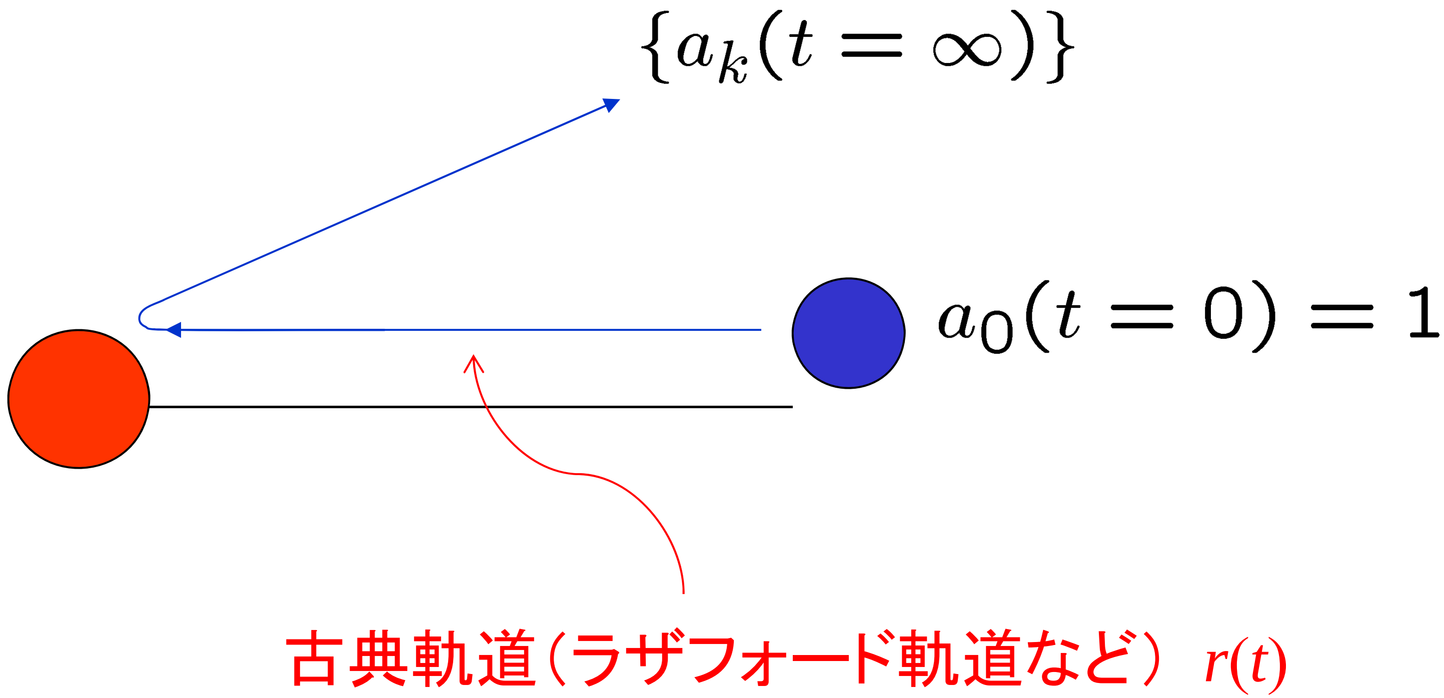
$$H_r = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r)$$ を用いて $r(t)$ の軌道を決定

$$\Rightarrow \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = [H_0(\xi) + V_{\rm coup}(r(t),\xi)]|\Psi(t)\rangle$$

を $|\Psi(t)\rangle = \sum_k a_k(t)|\phi_k(\xi)\rangle$ と展開して解く

$$\boxed{i\hbar\,\dot{a}_k(t) = \epsilon_k a_k(t) + \sum_{k'} a_{k'}(t)\langle\phi_k|V_{\rm coup}(t)|\phi_{k'}\rangle}$$

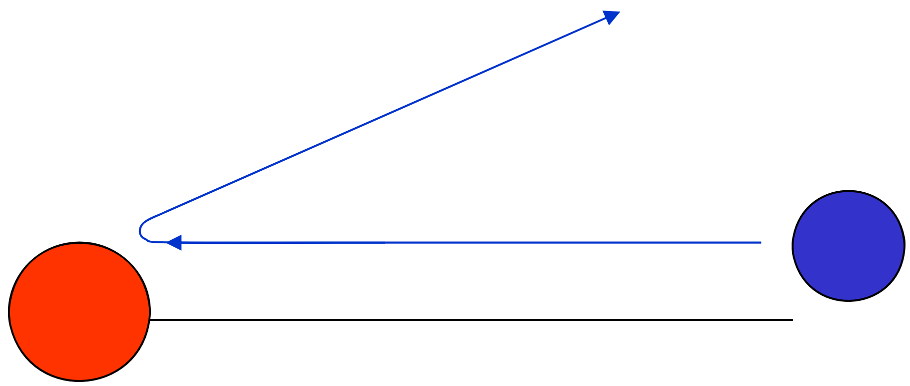
- 1階の微分方程式なので、計算が楽(より多くのチャンネルを入れることができる)。 $\longrightarrow$ クーロン励起への応用多数
- わかりやすい
- ただし、トンネルが関係する計算は不得手。



反応が終わった後、k 状態にある確率：

$$P_k = |a_k(t=\infty)|^2$$

原子核の励起状態の性質



原子核同士を衝突させて標的核を励起させる

入射核との相互作用に
標的核がどのように応答するか？

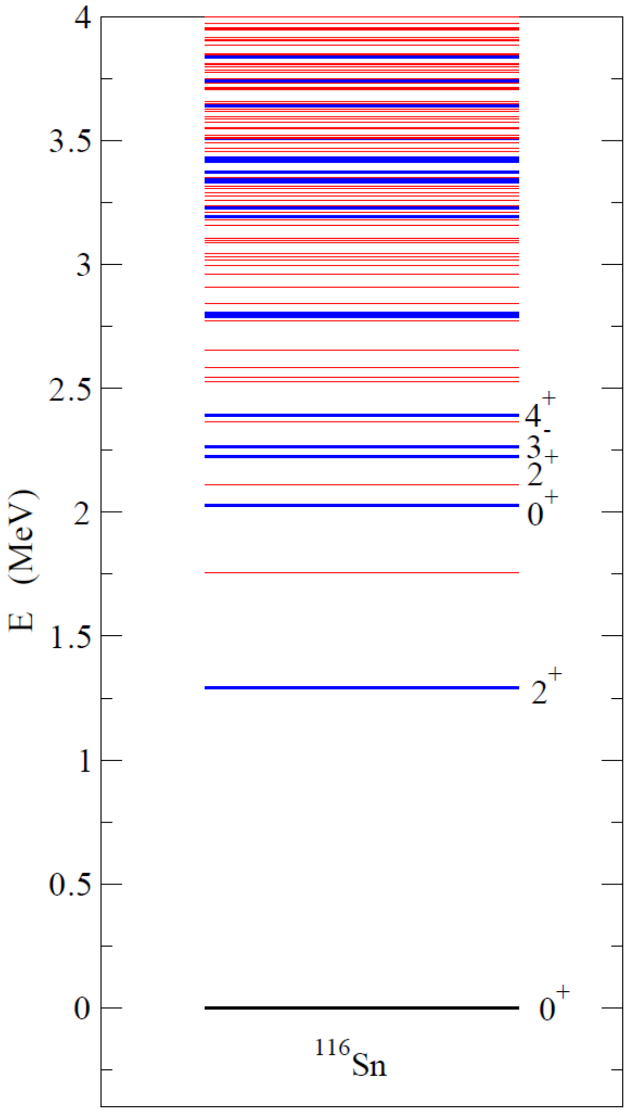
標準的なアプローチ:結合チャンネル法を用いた解析

- 非弾性散乱の断面積
- 弾性散乱の断面積
- 核融合反応断面積

S 行列　S_{nlI}

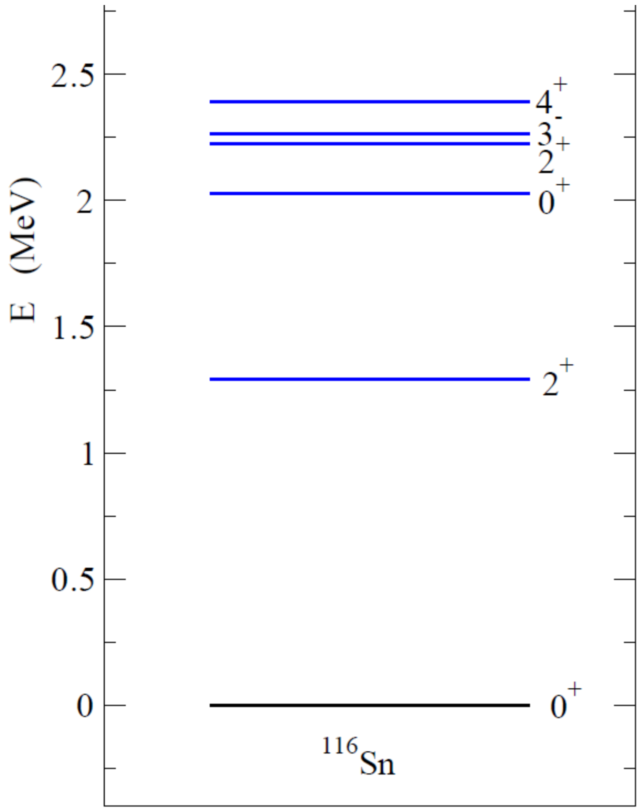
どのように結合チャンネル法で解析をするのか?

1. モデル化 : 取り入れる励起状態を選択



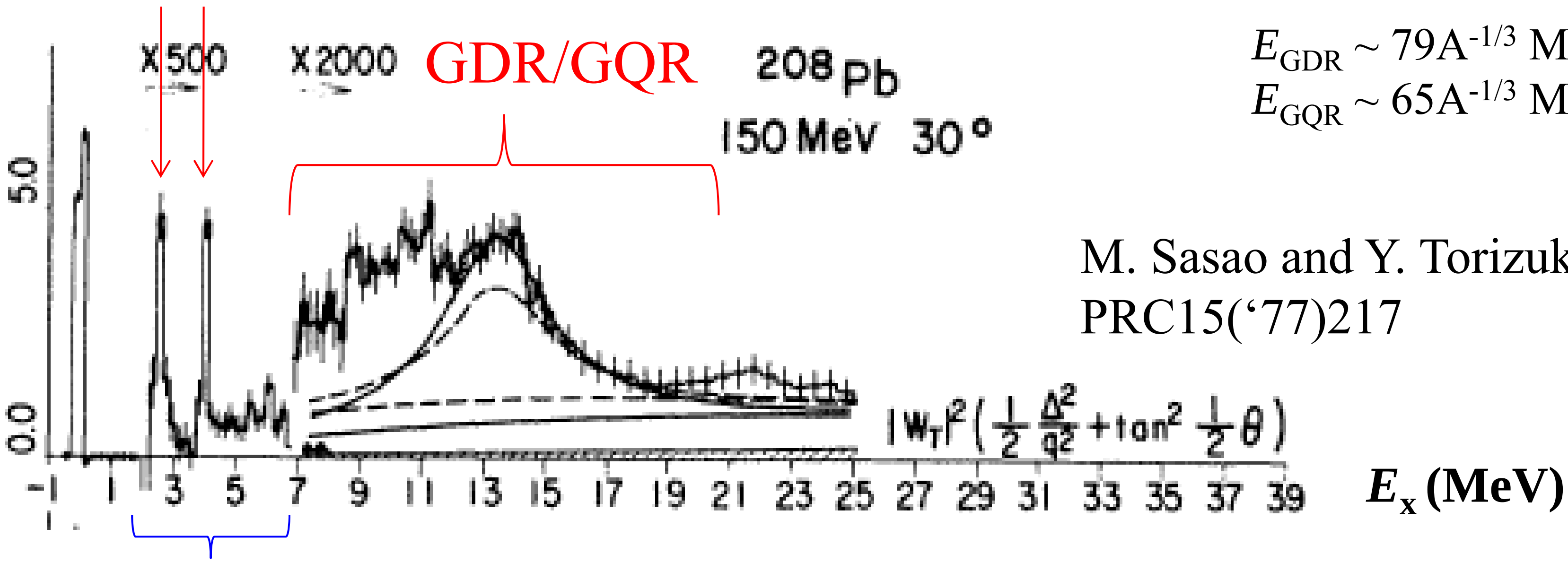
S. Raman et al., PRC43('91)521

低励起集団励起状態のみ



典型的な励起スペクトル: 電子散乱のデータ

低励起集団励起



低励起非集団励起

$E_{GDR} \sim 79A^{-1/3}$ MeV
$E_{GQR} \sim 65A^{-1/3}$ MeV

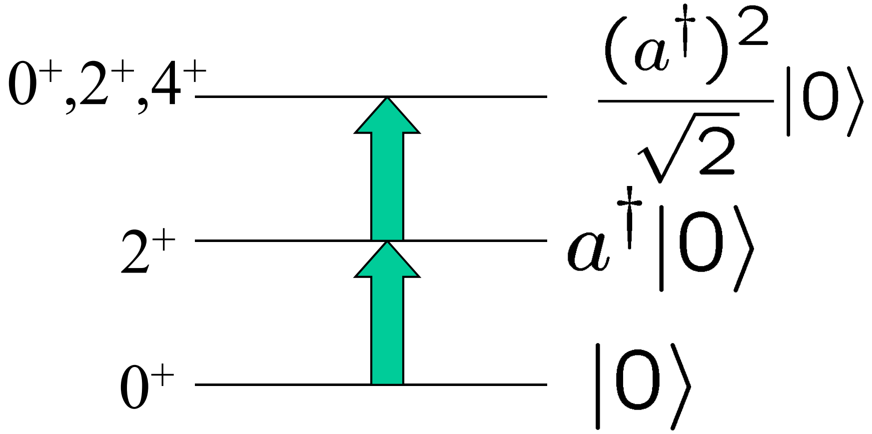
M. Sasao and Y. Torizuka, PRC15('77)217

- 巨大共鳴: E_x 大, なめらかな質量数依存性 ⟶ 核間ポテンシャルに繰り込む
- 低励起集団励起: 障壁分布、強い原子核依存性
- 非集団励起: 完全に無視、または、光学ポテンシャルの虚部として考慮

2. 集団励起の性質: 振動? or 回転?

a) 振動励起

励起オペレーター: $\hat{O} = \frac{\beta}{\sqrt{4\pi}}(a + a^\dagger)$



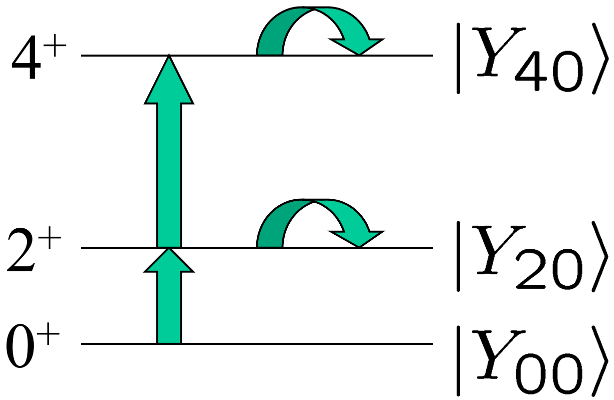
$$
\begin{aligned}
|n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle \\
\epsilon_n &= (n + 1/2)\hbar\omega
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle n|O|n'\rangle &= \frac{\beta}{\sqrt{4\pi}}\left(\sqrt{n'}\,\delta_{n,n'-1} + \sqrt{n'+1}\,\delta_{n,n'+1}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & F & 0 \\ F & \epsilon & \sqrt{2}F \\ 0 & \sqrt{2}F & 2\epsilon \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

2. 集団励起の性質: 振動? or 回転?

b) 回転励起

励起オペレーター: $\hat{O} = \beta Y_{20}(\theta)(+\beta_4 Y_{40}(\theta) + \cdots)$

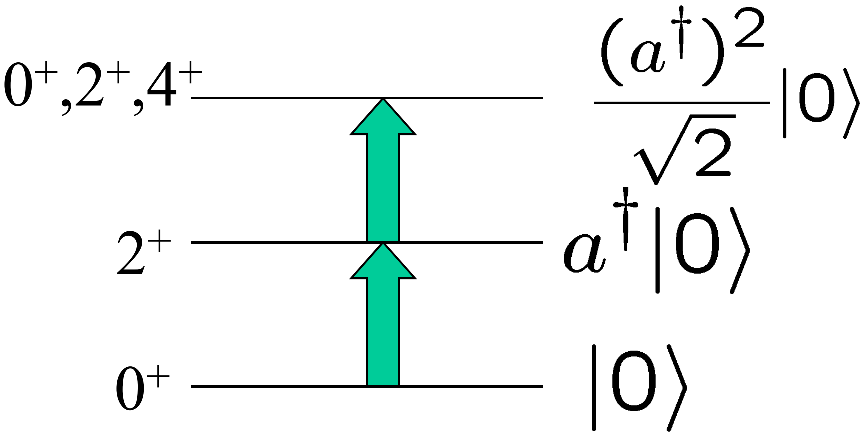


$$
\begin{aligned}
|I\rangle &= |Y_{I0}\rangle \\
\epsilon_I &= \frac{I(I+1)}{6} \cdot E_{I=2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle I|O|I'\rangle &= \sqrt{\frac{5\cdot(2I+1)(2I'+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} I & 2 & I' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \\
&= \begin{pmatrix} 0 & F & 0 \\ F & \epsilon + \frac{2\sqrt{5}}{7}F & \frac{6}{7}F \\ 0 & \frac{6}{7}F & \frac{10\epsilon}{3} + \frac{20\sqrt{5}}{77}F \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Vibrational coupling

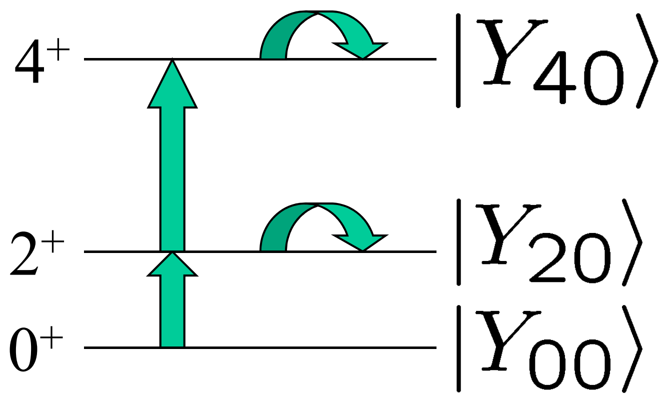
$$\hat{O} = \frac{\beta}{\sqrt{4\pi}}(a + a^\dagger)$$



$$\begin{pmatrix} 0 & F & 0 \\ F & \epsilon & \sqrt{2}F \\ 0 & \sqrt{2}F & 2\epsilon \end{pmatrix}$$

Rotational coupling

$$\hat{O} = \beta Y_{20}(\theta)$$



$$\begin{pmatrix} 0 & F & 0 \\ F & \epsilon + \frac{2\sqrt{5}}{7}F & \frac{6}{7}F \\ 0 & \frac{6}{7}F & \frac{10\epsilon}{3} + \frac{20\sqrt{5}}{77}F \end{pmatrix}$$

$$F = \frac{\beta}{\sqrt{4\pi}}$$

cf. reorientation term

3. 結合の強さ及び結合ポテンシャル

変形Woods-Saxon ポテンシャル:

$$
\begin{aligned}
V_{WS}(r) &= -\frac{V_0}{1+\exp[(r-R_0)/a]} \\
&= -\frac{V_0}{1+\exp[(r-R_P-R_T)/a]}
\end{aligned}
$$

$$
R_T \to R_T\left(1+\sum_\mu \alpha_{\lambda\mu} Y^*_{\lambda\mu}(\theta,\phi)\right)
$$

励起オペレーター

$$
\boxed{V_{WS}(\boldsymbol{r}) = -\frac{V_0}{1+\exp[(r-R_0-R_T\,\alpha_\lambda\cdot Y_\lambda(\hat{\boldsymbol{r}}))/a]}}
$$

Coupling Potential: Collective Model

$$R(\theta,\phi) = R_T\left(1 + \sum_\mu \alpha_{\lambda\mu} Y^*_{\lambda\mu}(\theta,\phi)\right)$$

(note) rotating frame への座標変換($\hat{\boldsymbol{r}} = 0$):

$$\sum_\mu \alpha_{\lambda\mu} Y^*_{\lambda\mu}(\theta,\phi) \to \sqrt{\frac{2\lambda+1}{4\pi}}\,\alpha_{\lambda 0}$$

➢振動励起の場合

$$\begin{cases} \alpha_{\lambda\mu} = \dfrac{\beta_\lambda}{\sqrt{2\lambda+1}}(a^\dagger_{\lambda\mu} + (-)^\mu a_{\lambda\mu}) \\ H_0 = \hbar\omega_\lambda \sum_\mu a^\dagger_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} \end{cases}$$

➢回転励起の場合

Body-fixed 系への座標変換:

$$\begin{cases} \alpha_{\lambda\mu} = \sqrt{\dfrac{4\pi}{2\lambda+1}}\,\beta_\lambda Y_{\lambda\mu}(\theta_d,\phi_d) \\ H_0 = \dfrac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathcal{J}} \end{cases}$$

(軸対称変形の場合)

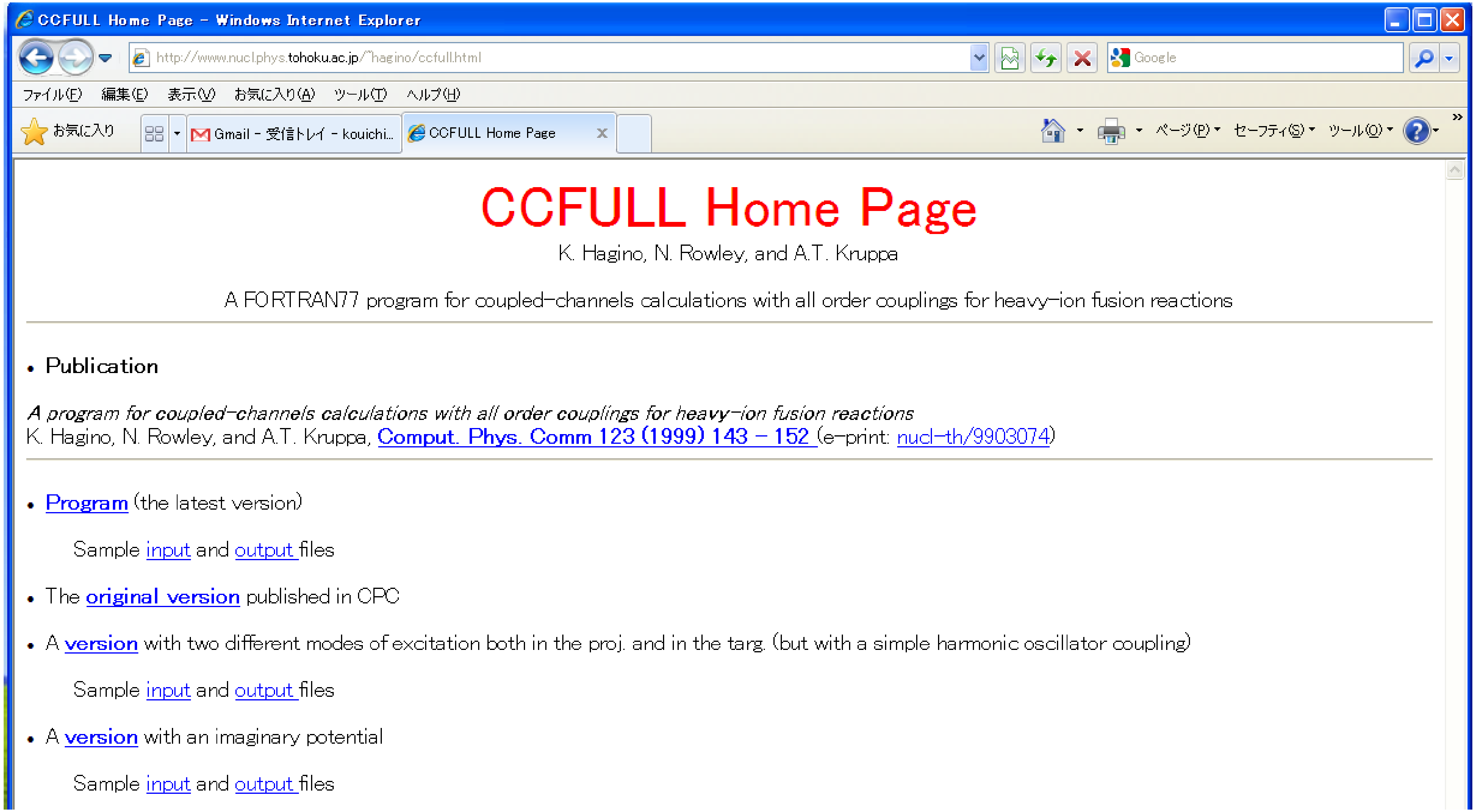
いずれの場合も

$$\boxed{\beta_\lambda = \frac{4\pi}{3 Z_T R_T^\lambda}\sqrt{\frac{B(E\lambda)\uparrow}{e^2}}}$$

Deformed Woods-Saxon model (collective model)

CCFULL

K.H., N. Rowley, and A.T. Kruppa, Comp. Phys. Comm. 123('99)143



http://www.nucl.phys.tohoku.ac.jp/~hagino/ccfull.html

CCFULL

K.H., N. Rowley, and A.T. Kruppa, Comp. Phys. Comm. 123('99)143

i) all order couplings

$$V_{\rm coup}(r,\hat{O}) = V^{(N)}_{\rm coup}(r,\hat{O}) + V^{(C)}_{\rm coup}(r,\hat{O})$$

Nuclear coupling:

$$V^{(N)}_{\rm coup}(r,\hat{O}) = -\frac{V_0}{1+\exp[(r-R_0-R_T\hat{O})/a]}$$

Coulomb coupling:

$$V^{(C)}_{\rm coup}(r,\hat{O}) = \frac{3}{2\lambda+1}\, Z_P Z_T e^2\, \frac{R_T^\lambda}{r^{\lambda+1}}\, \hat{O}$$

CCFULL

K.H., N. Rowley, and A.T. Kruppa,
Comp. Phys. Comm. 123('99)143

i) all order couplings

$$V_{\rm coup}^{(N)}(r,\hat{O}) = -\frac{V_0}{1+\exp[(r-R_0-R_T\hat{O})/a]}$$

$$\sim V_N(r) - R_T\hat{O}\,\frac{dV_N(r)}{dr}$$

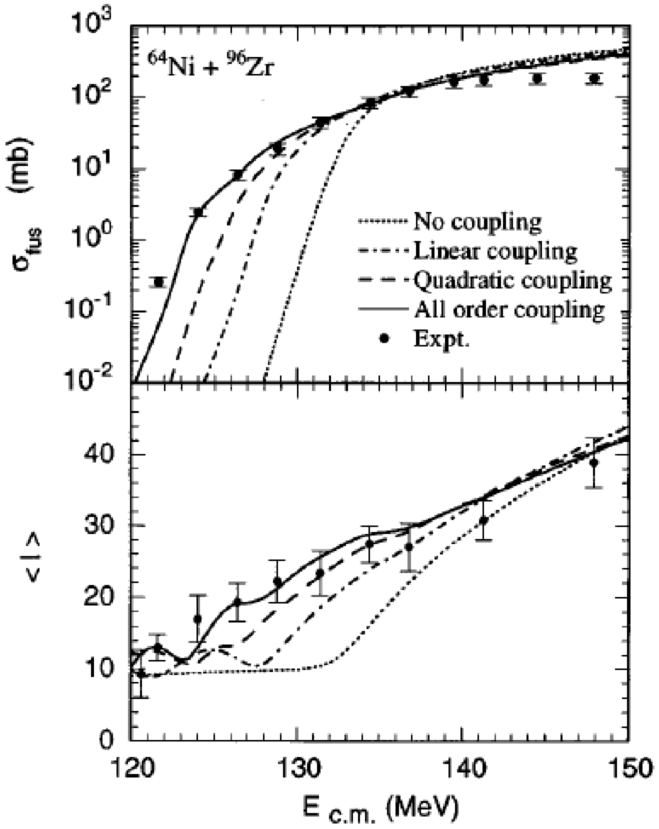
CCFULL

K.H., N. Rowley, and A.T. Kruppa, Comp. Phys. Comm. 123('99)143

i) all order couplings

$$V^{(N)}_{\rm coup}(r,\hat{O}) = -\frac{V_0}{1+\exp[(r-R_0-R_T\hat{O})/a]}$$

$$\sim \cancel{V_N(r) - R_T\hat{O}\frac{dV_N(r)}{dr}}$$

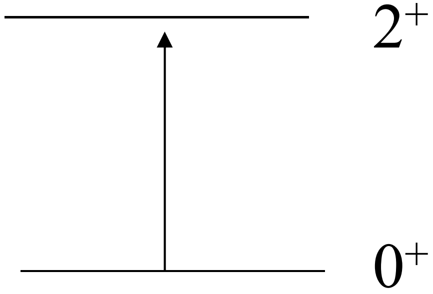


K.H., N. Takigawa, M. Dasgupta, D.J. Hinde, and J.R. Leigh, PRC55('97)276

CCFULL

K.H., N. Rowley, and A.T. Kruppa,
Comp. Phys. Comm. 123('99)143

ii) isocentrifugal approximation

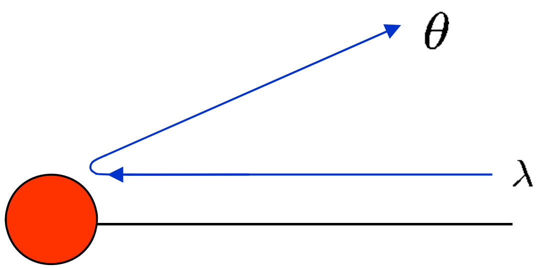


$l = J-2,\ J,\ J+2$

$l = J$

$J = l + I$

Truncation	Dimension
2^+	$4 \longrightarrow 2$
4^+	$9 \longrightarrow 3$
6^+	$16 \longrightarrow 4$
8^+	$25 \longrightarrow 5$



Iso-centrifugal approximation:

λ: independent of excitations

$$\boxed{\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \to \frac{J(J+1)\hbar^2}{2\mu r^2}}$$

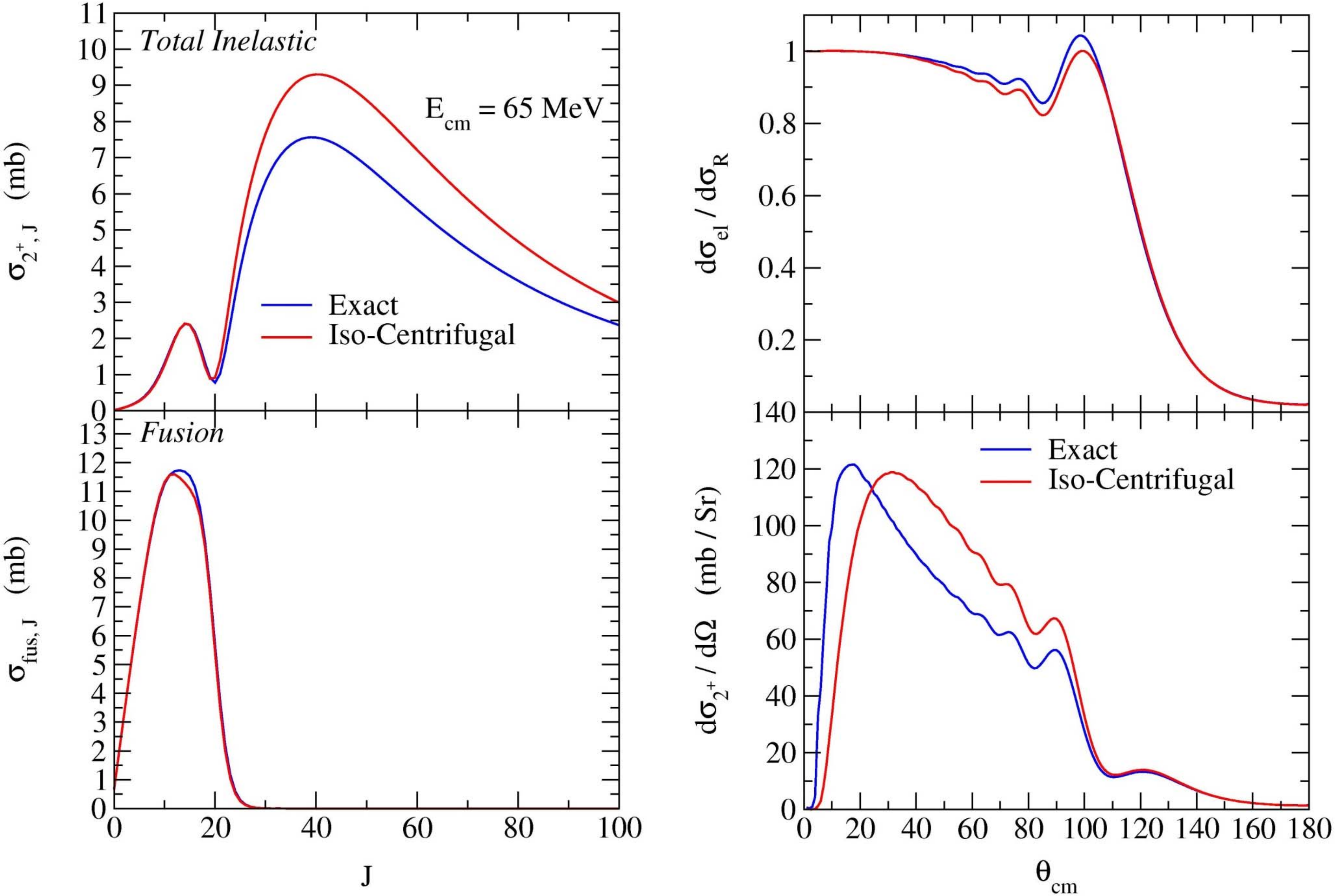
$$V_{\rm coup}(\boldsymbol{r},\xi) = f(r)Y_\lambda(\hat{\boldsymbol{r}})\cdot T_\lambda(\xi)$$

transform to
the rotating frame

$$\to \sqrt{\frac{2\lambda+1}{4\pi}}f(r)T_{\lambda 0}(\xi)$$

"Spin-less system"

$^{16}O + ^{144}Sm\ (2^+)$



K.H. and N. Rowley, PRC69('04)054610

CCFULL

K.H., N. Rowley, and A.T. Kruppa,
Comp. Phys. Comm. 123('99)143

iii) incoming wave boundary condition (IWBC)

$$\boxed{\sigma_{\rm fus} = \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)P_l \qquad (P_l = 1 - |S_l|^2)}$$

(1) Complex potential

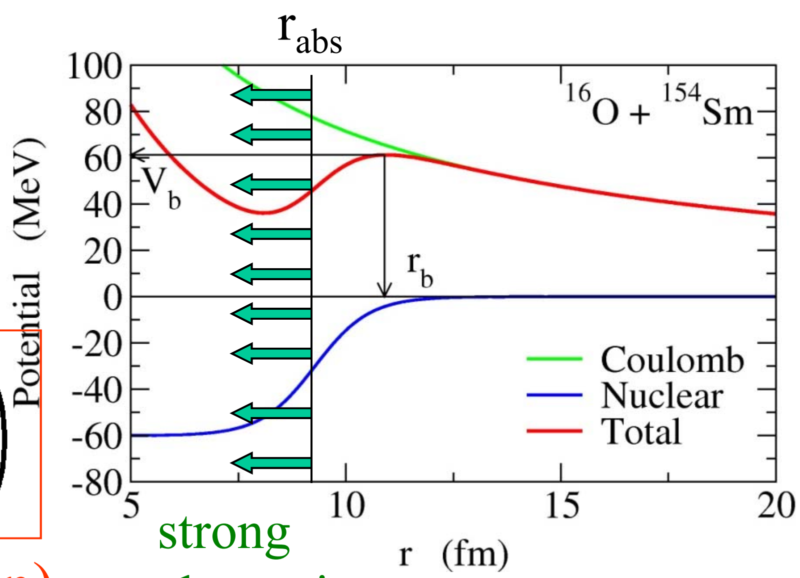
$$V(r) = V_R(r) - iW(r)$$

(2) IWBC

limit of large W (strong absorption)

$$\boxed{u_l(r) = T_l \exp\left(-i\int_{r_{abs}}^{r} k_l(r')dr'\right)}$$

(Incoming Wave Boundary Condition)



strong absorption

$$k_l(r) = \sqrt{2\mu/\hbar^2[E - V_R(r) - l(l+1)\hbar^2/2\mu r^2]}$$

- Only Real part of Potential
- More efficient at low energies $\quad P_l = |T_l|^2$

cf. $|S_l| \sim 1$ at low E

結合チャンネル方程式：DWBA

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2}+\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}+V_0(r)-E+\epsilon_{nI}\right]u_{nlI}(r)$$
$$+\sum_{n'l'I'}\langle[Y_l\phi_{nI}]^{(JM)}|V_{\mathrm{coup}}(r)|[Y_{l'}\phi_{n'I'}]^{(JM)}\rangle\, u_{n'l'I'}(r)=0$$

$$u_{nlI}(r)\to H_l^{(-)}(k_{nI}r)\delta_{n,n_i}\delta_{l,l_i}\delta_{I,I_i}-\sqrt{\frac{k_0}{k_{nI}}}\,S_{nlI}\,H_l^{(+)}(k_{nI}r)$$

$$P_l(E)=1-\sum_{nI}|S_{nlI}|^2 \qquad \sigma_{\mathrm{fus}}(E)=\frac{\pi}{k^2}\sum_l(2l+1)P_l(E)$$

数値的に結合チャンネル方程式を解いてS行列や核融合反応断面積を計算

⇩

結合が弱ければ摂動論が使える(DWBA)が、
クーロン障壁近傍のエネルギーでは結合の効果が強い

結合チャンネル方程式：２つの極限

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2}+\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}+V_0(r)-E+\epsilon_{nI}\right]u_{nlI}(r)$$
$$+\sum_{n'l'I'}\langle[Y_l\phi_{nI}]^{(JM)}|V_{\rm coup}(r)|[Y_{l'}\phi_{n'I'}]^{(JM)}\rangle\,u_{n'l'I'}(r)=0$$

$$u_{nlI}(r)\to H_l^{(-)}(k_{nI}r)\delta_{n,n_i}\delta_{l,l_i}\delta_{I,I_i}-\sqrt{\frac{k_0}{k_{nI}}}\,S_{nlI}\,H_l^{(+)}(k_{nI}r)$$

$$P_l(E)=1-\sum_{nI}|S_{nlI}|^2 \qquad \sigma_{\rm fus}(E)=\frac{\pi}{k^2}\sum_l(2l+1)P_l(E)$$

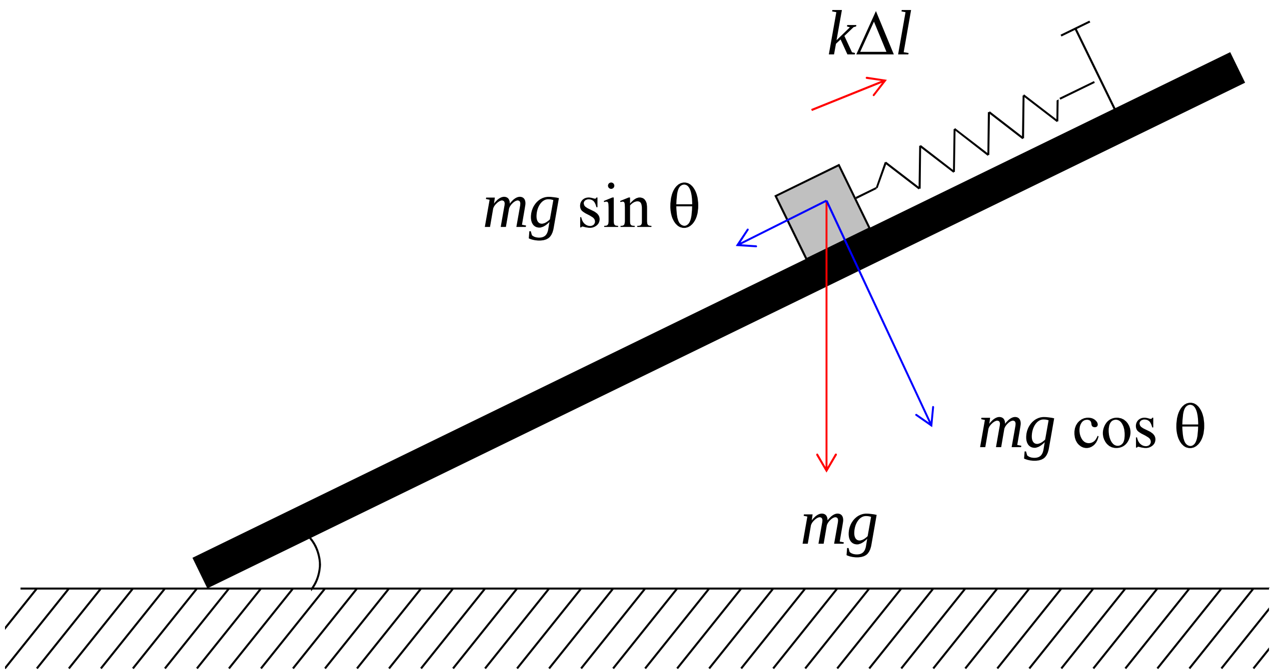
数値的に結合チャンネル方程式を解いて核融合反応断面積を計算

結果を解釈（理解）するために2つの極限を考えてみよう

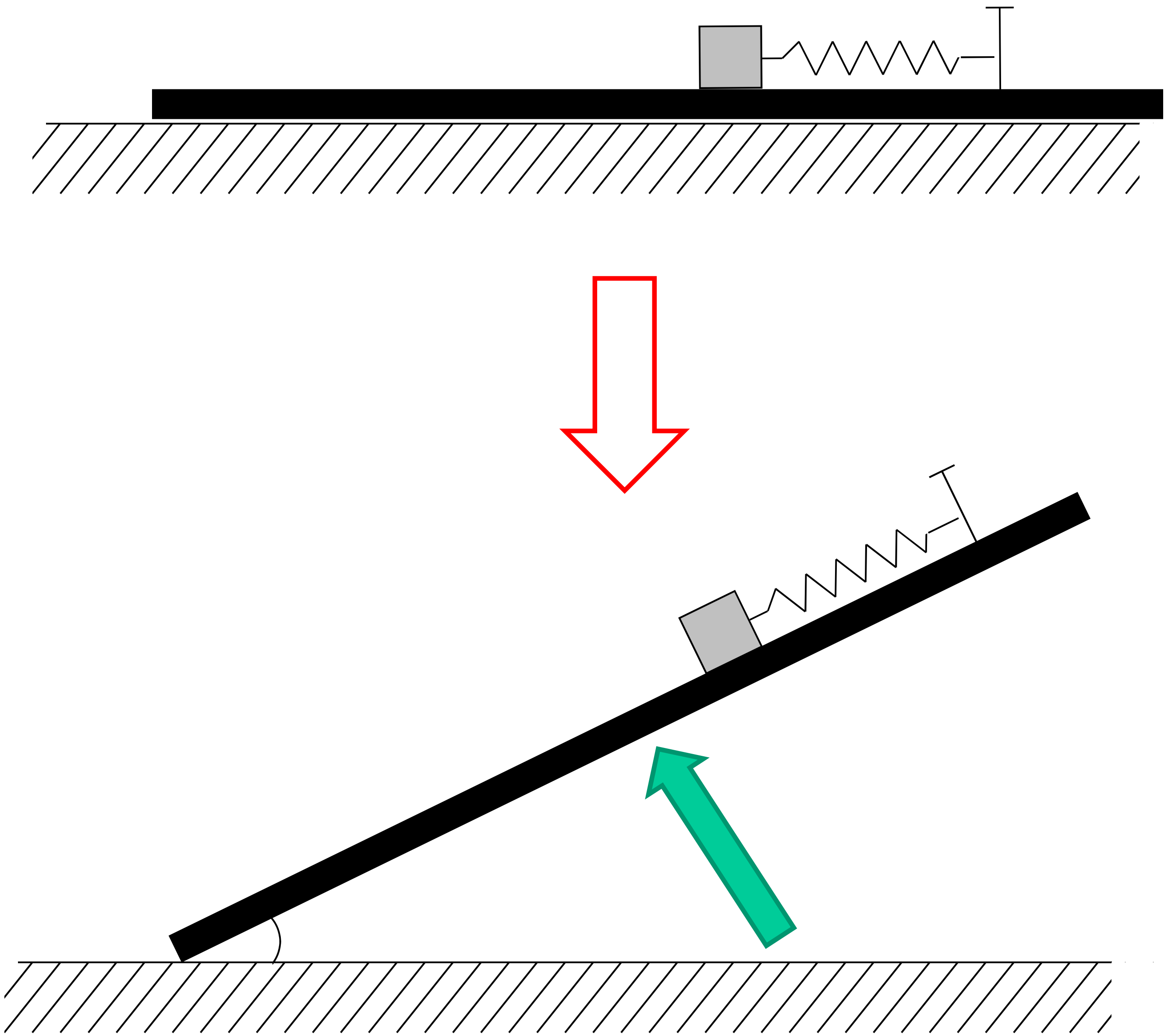
- $\varepsilon_{\rm nI}$: 非常に大きい場合（断熱極限）　*Adiabatic limit*
- $\varepsilon_{\rm nI}$: ゼロの極限（瞬間極限）　*Sudden limit*

２つの時間スケールの比較

斜面上に置かれたバネの問題



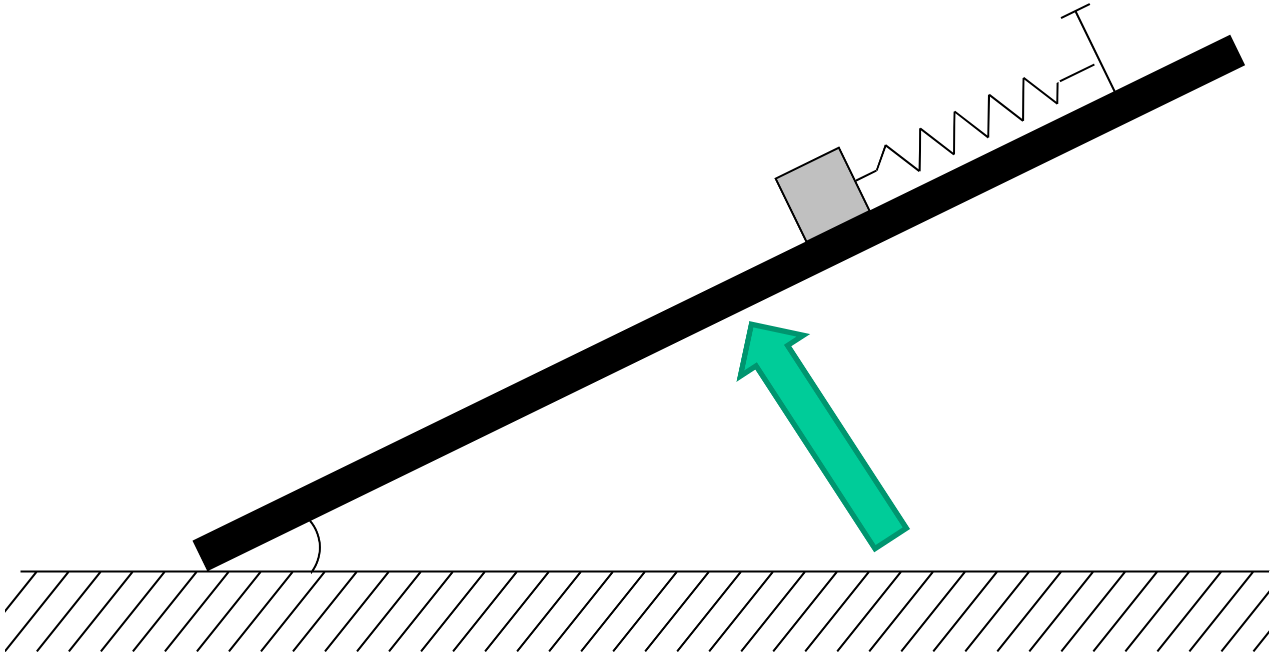
平衡の位置: $mg \sin \theta = k\Delta l$ → $\Delta l = mg \sin \theta / k$



i) ゆっくりと動かすと?　ii) 瞬間的に動かすと?

2つの時間スケールの比較

類似の関連した問題：斜面上のバネ

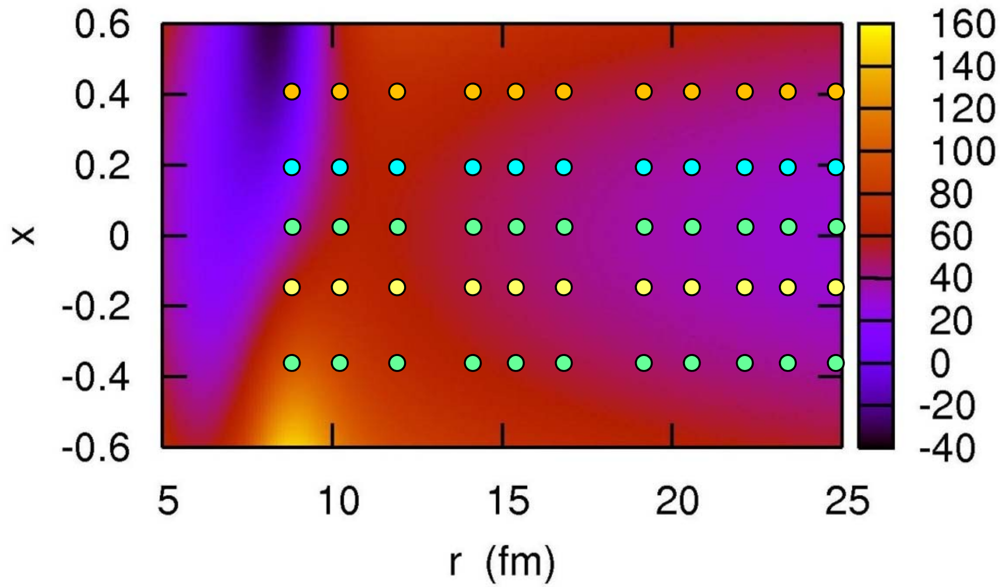


i) ゆっくりと動かすと?　ii) 瞬間的に動かすと?

初期の長さを保つ (Δl =0) "瞬間極限"

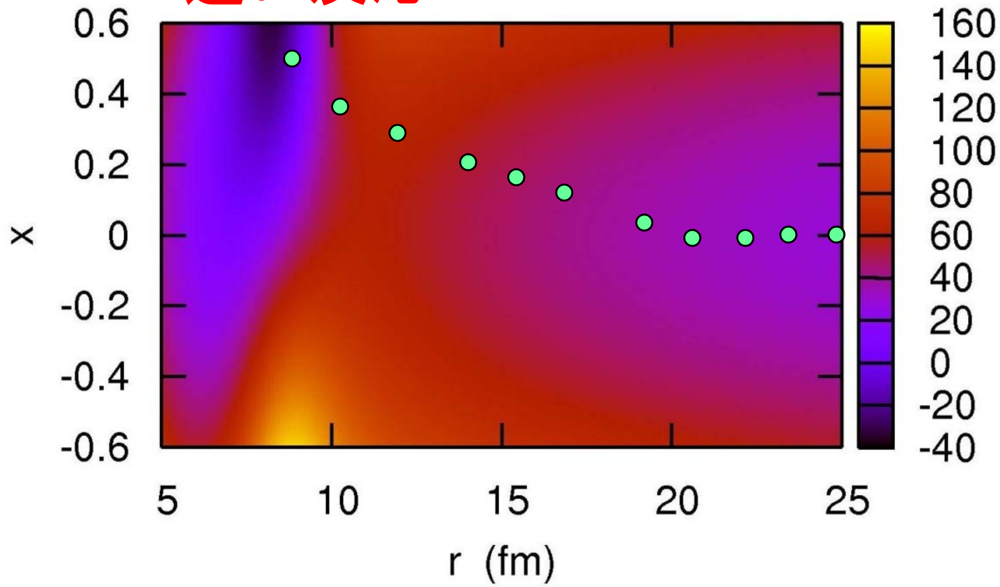
常に各瞬間における平衡点 ($\Delta l = mg \sin\theta / k$) "断熱極限"

速い反応



大きなゆらぎ

遅い反応



断熱経路
+ 小さなゆらぎ

相対距離

２つの極限: (i) 断熱極限

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r) + H_0(\xi) + V_{\rm coup}(\boldsymbol{r},\xi)$$

相対運動が内部運動に比べて非常にゆっくりしている場合

相対運動の典型的なエネルギー･スケールが内部運動の
エネルギー･スケールにくらべて非常に小さい場合

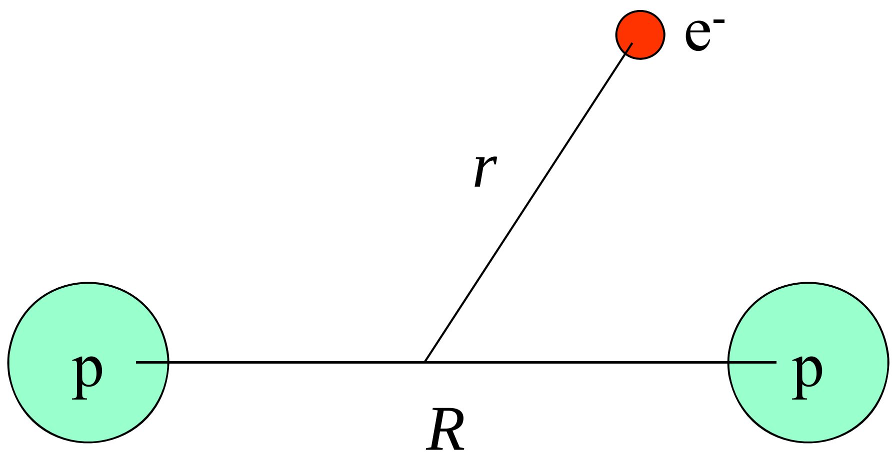
$$\hbar\Omega \ll \epsilon$$

（障壁の曲率 v.s. 内部自由度の励起エネルギー）

$$[H_0(\xi) + V_{\rm coup}(\boldsymbol{r},\xi)]\varphi_0(\xi;\boldsymbol{r}) = \epsilon_0(r)\,\varphi_0(\xi;\boldsymbol{r})$$

$$\boxed{H_0(\xi) + V_{\rm coup}(\boldsymbol{r},\xi) \to \epsilon_0(r)}$$

c.f. 水素分子に対する Born-Oppenheimer 近似



$$[T_R + T_r + V(r,R)]\Psi(r,R) = E\Psi(r,R)$$

1. まず陽子が止まっているとして電子の運動を考える

$$[T_r + V(r,R)]u_n(r;R) = \epsilon_n(R)u_n(r;R)$$

2. $\varepsilon_n(R)$ を R に関して最小化する

Or 2'. ポテンシャル $\varepsilon_n(R)$ 中の陽子間の運動を考える

$$[T_R + \epsilon_n(R)]\phi_n(R) = E\phi_n(R)$$

断熱的ポテンシャル繰り込み

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r) + H_0(\xi) + V_{\rm coup}(\boldsymbol{r},\xi)$$

励起エネルギー ε が大きい場合,

$$\boxed{H_0(\xi) + V_{\rm coup}(\boldsymbol{r},\xi) \to \epsilon_0(r)}$$

$$[H_0(\xi) + V_{\rm coup}(\boldsymbol{r},\xi)]\varphi_0(\xi;\boldsymbol{r}) = \epsilon_0(r)\,\varphi_0(\xi;\boldsymbol{r})$$

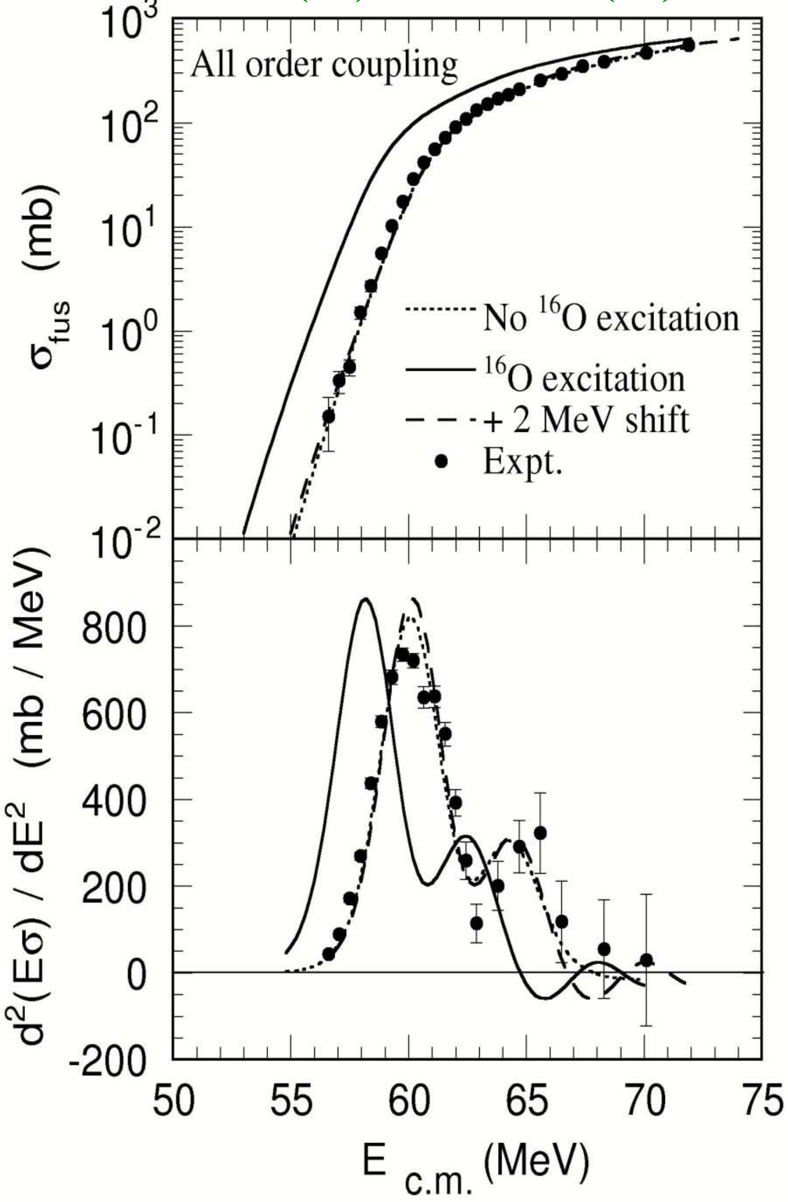
速い内部運動

→ 断熱的ポテンシャル繰り込み

$$V_{\rm ad}(r) = V_0(r) + \epsilon_0(r)$$

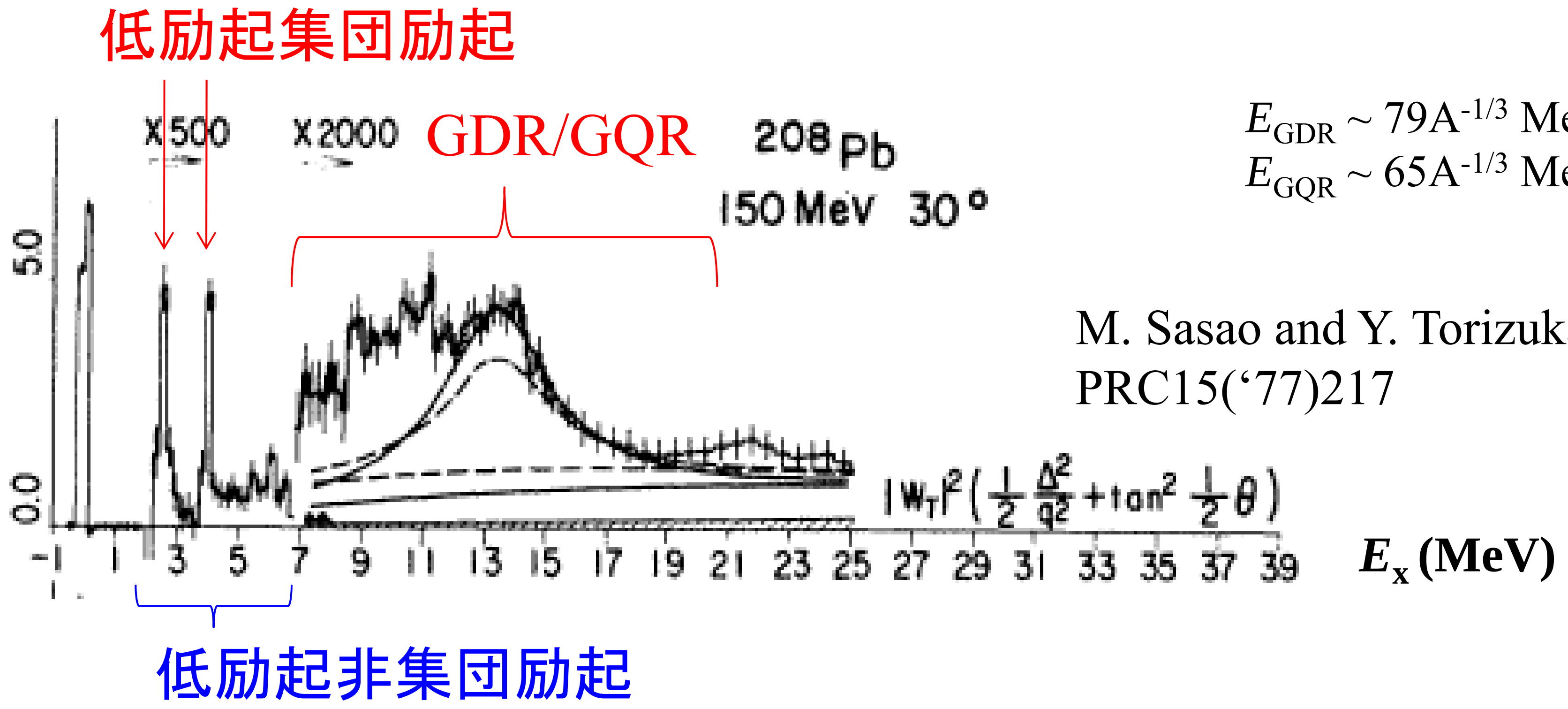
巨大共鳴や ^{16}O(3$^-$) [6.31 MeV] など

^{16}O(3$^-$) + ^{144}Sm(3$^-$)



K.H., N. Takigawa, M. Dasgupta, D.J. Hinde, J.R. Leigh, PRL79('99)2014

典型的な励起スペクトル: 電子散乱のデータ



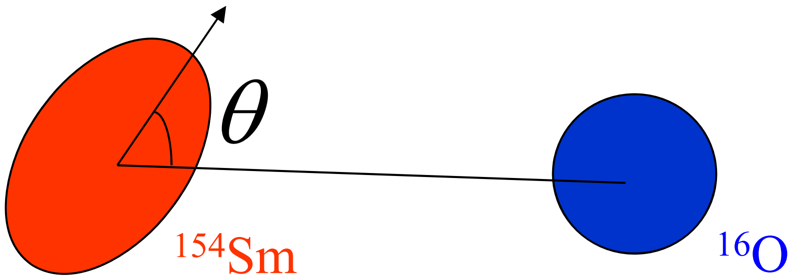
$E_{GDR} \sim 79A^{-1/3}$ MeV
$E_{GQR} \sim 65A^{-1/3}$ MeV

M. Sasao and Y. Torizuka,
PRC15('77)217

- 巨大共鳴: E_x 大, なめらかな質量数依存性 ⟶ 核間ポテンシャルに繰り込む
- 低励起集団励起: 障壁分布、強い原子核依存性
- 非集団励起: 完全に無視、または、光学ポテンシャルの虚部として考慮

２つの極限: (ii) 瞬間極限

$$\epsilon \longrightarrow 0$$



$$\epsilon_I = I(I+1)\hbar^2/2\mathcal{J}$$

$$\mathcal{J} \to \infty$$

$$\sigma_{\rm fus}(E) = \int_0^1 d(\cos\theta)\sigma_{\rm fus}(E;\theta)$$

結合チャンネル方程式:

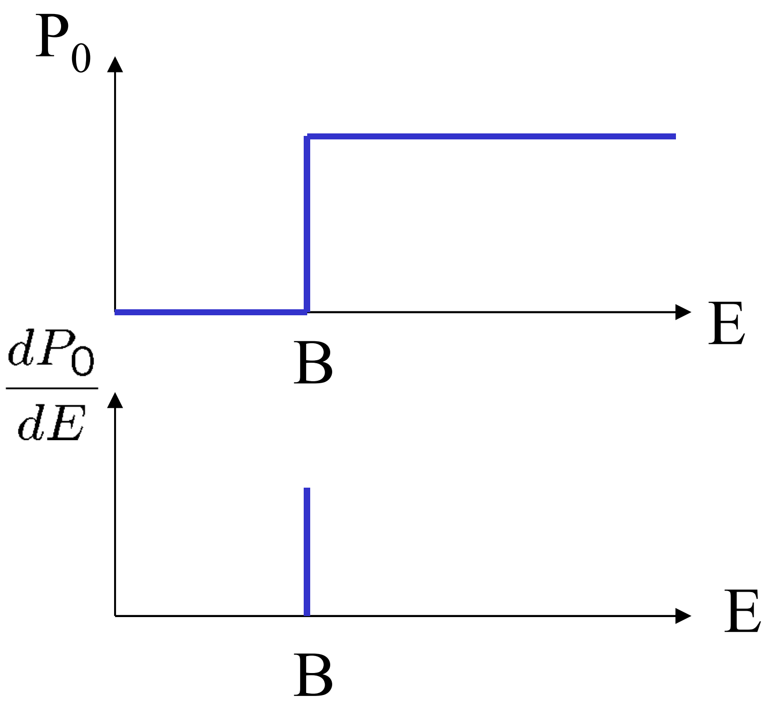
$$\begin{pmatrix} 0 & f(r) & 0 \\ f(r) & \frac{2\sqrt{5}}{7}f(r) & \frac{6}{7}f(r) \\ 0 & \frac{6}{7}f(r) & \frac{20\sqrt{5}}{77}f(r) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{対角化}} \begin{pmatrix} \lambda_1(r) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(r) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(r) \end{pmatrix}$$

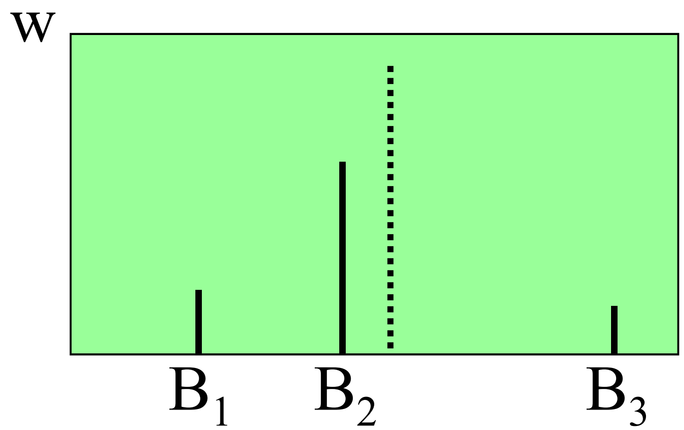
$$\Longrightarrow \quad P(E) = \sum_i w_i\, P(E; V_0(r) + \lambda_i(r))$$

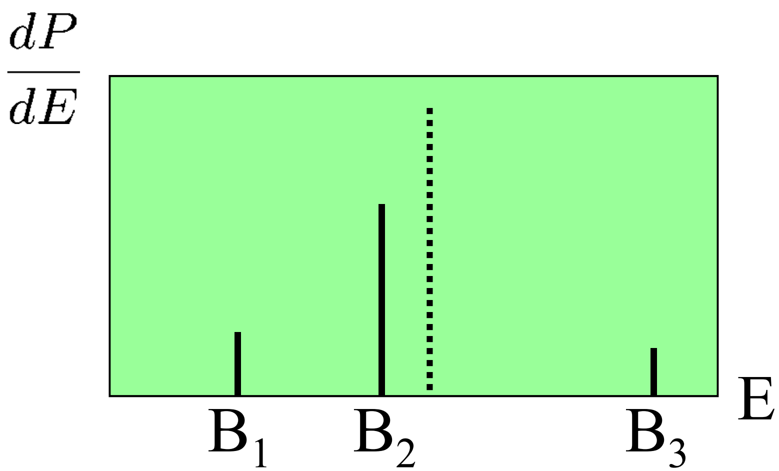
遅い内部運動
$\longrightarrow$ 障壁の分布

障壁分布

$$P(E) = \sum_i w_i \, P(E; V_0(r) + \lambda_i(r))$$







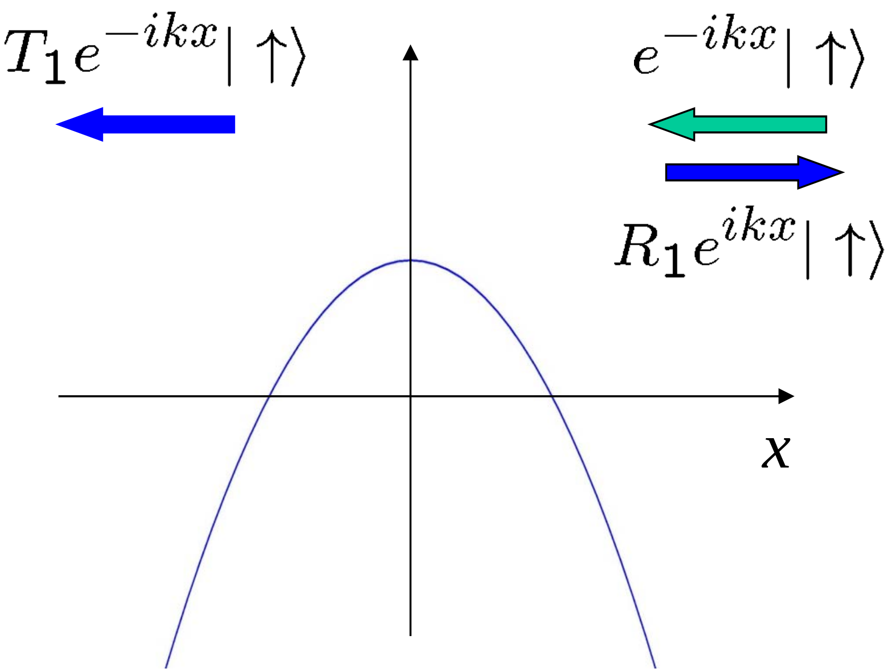
障壁分布：スピン・ハミルトニアンを用いて概念を理解する

ハミルトニアン（例1）： $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) + \hat{\sigma}_z \cdot V_s(x)$

自明な例

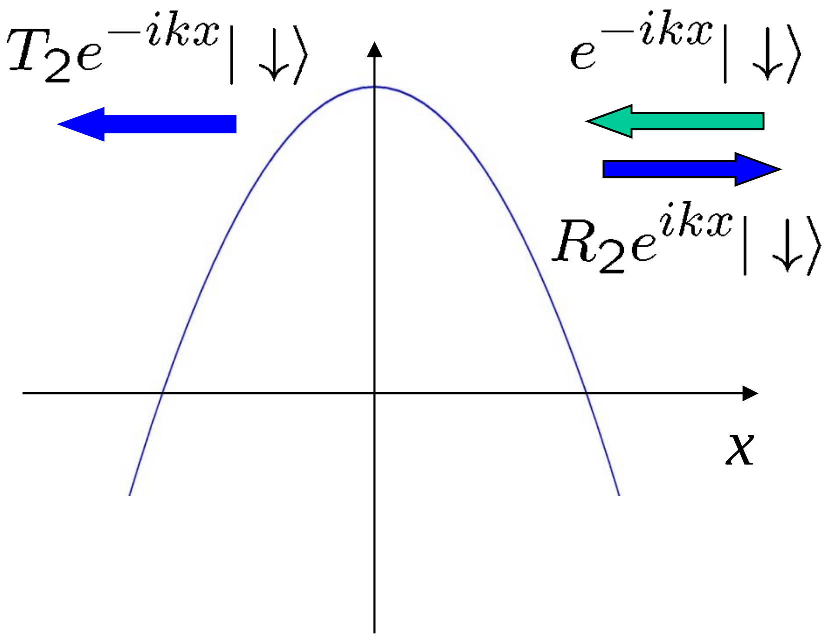
$$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Spin-up の場合



$$V_1(x) = V_0(x) + V_s(x)$$

Spin-down の場合



$$V_2(x) = V_0(x) - V_s(x)$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) + \hat{\sigma}_z \cdot V_1(x)$$

波動関数
(一般形)

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \psi_1(x)\,|\uparrow\rangle + \psi_2(x)\,|\downarrow\rangle \\ &= \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

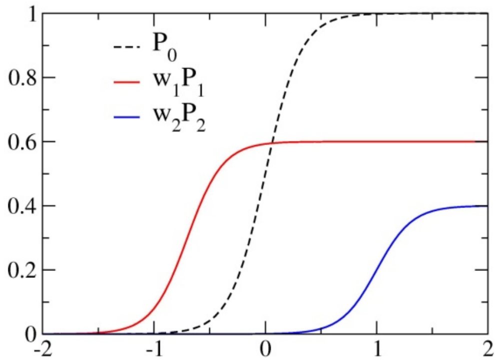
トンネルの間、スピンは変わらない:

$$\boxed{P(E) = w_\uparrow P_1(E) + w_\downarrow P_2(E)}$$

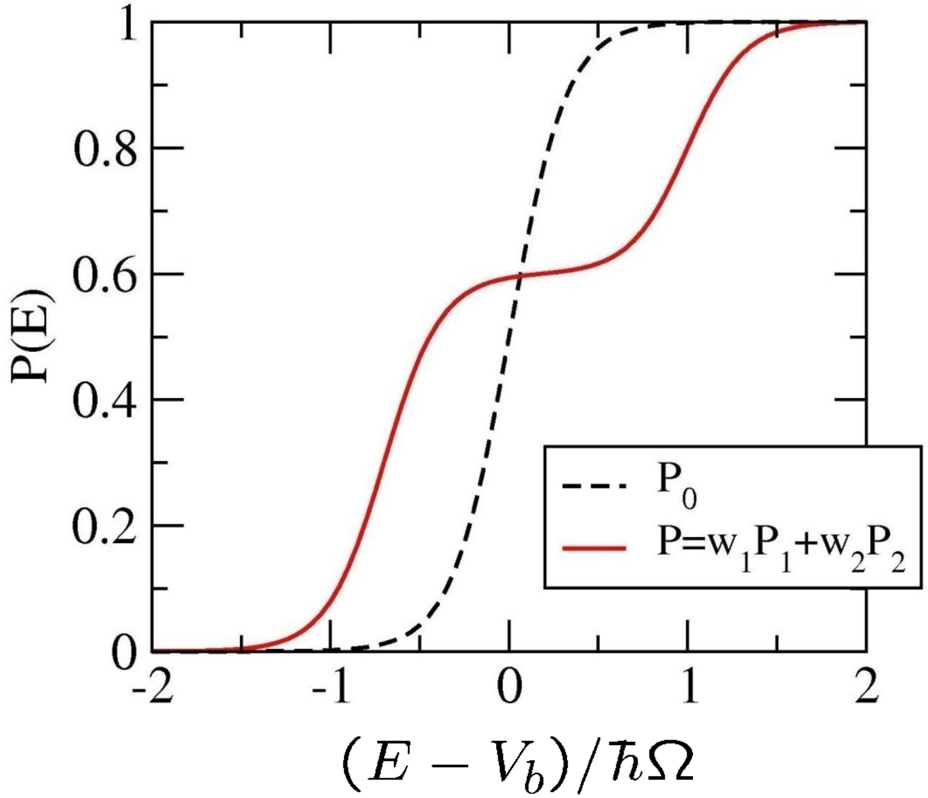
$$w_\uparrow + w_\downarrow = 1$$

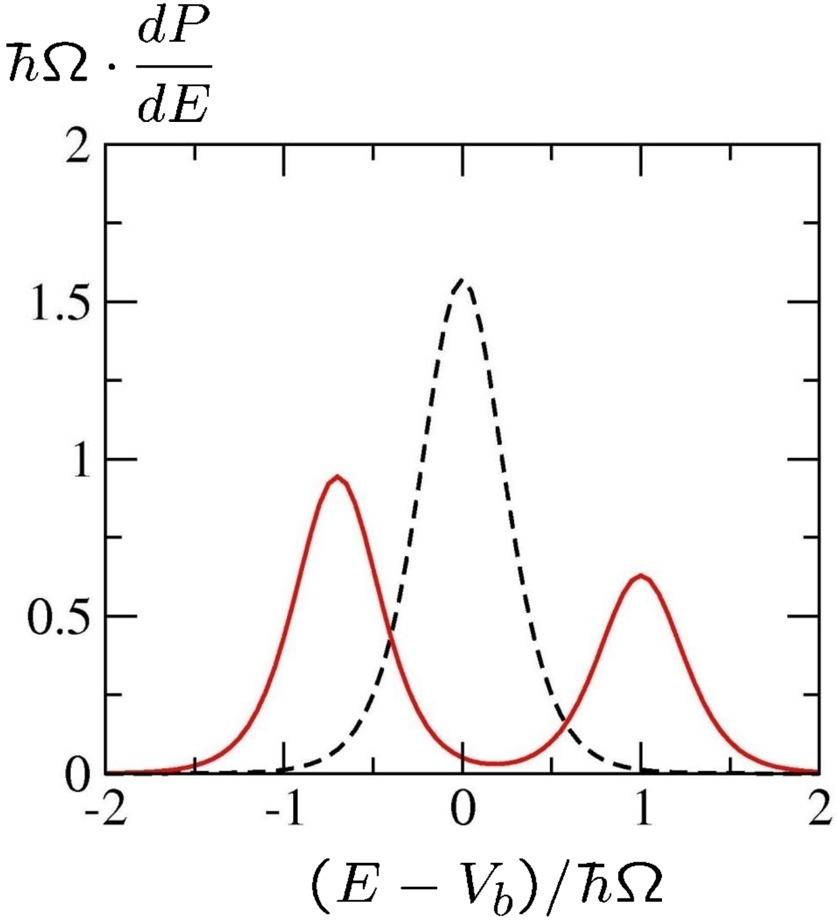
$$P(E) = w_1 P_1(E) + w_2 P_2(E)$$

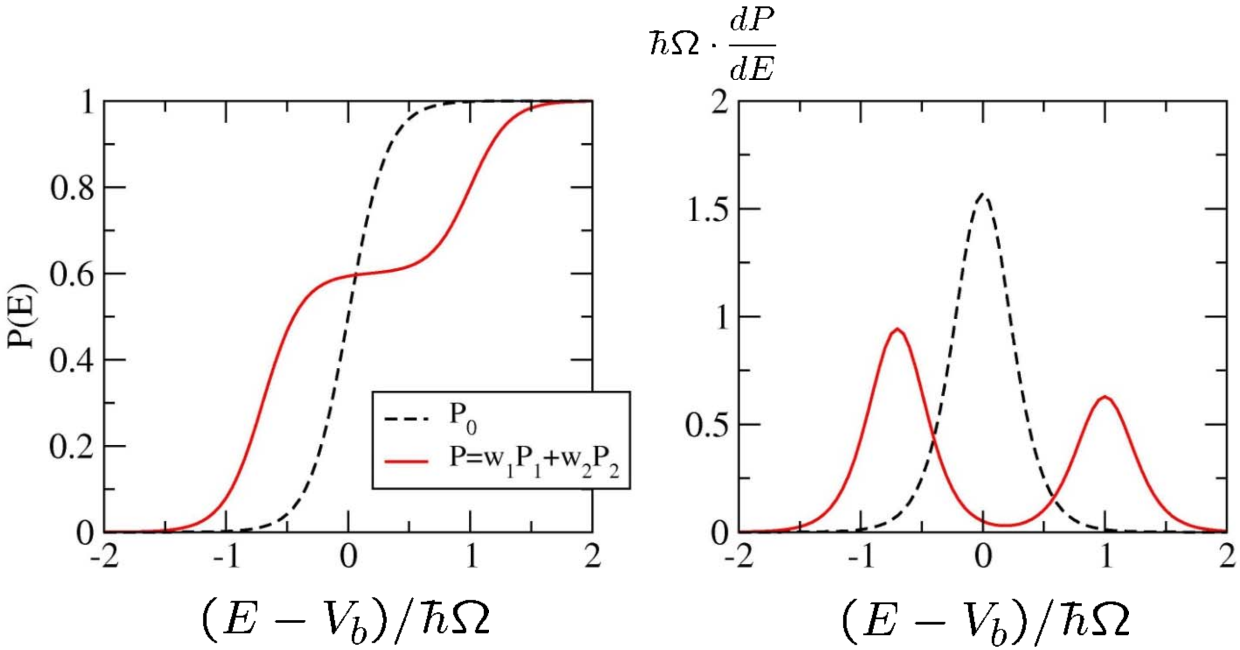
→ トンネル確率は2つの障壁のトンネル確率の加重平均になる



$$\begin{cases} V_1(x) = V_0(x) + V_s(x) & \Longleftarrow \quad |\uparrow\rangle \\ V_2(x) = V_0(x) - V_s(x) & \Longleftarrow \quad |\downarrow\rangle \end{cases}$$







- トンネル確率は $E < V_b$ で増大、$E > V_b$ で減少
- dP/dE は一山が二山に分かれる → 「障壁が分布する」
- dP/dE のピークの位置は各障壁の高さに対応
- ピークの値は重み因子に比例する

$$\begin{aligned} P(E) &= w_1 P_1(E) + w_2 P_2(E) \\ \frac{dP}{dE} &= w_1 \frac{dP_1}{dE} + w_2 \frac{dP_2}{dE} \end{aligned}$$

単純な2準位系 (Dasso, Landowne, and Winther, NPA405('83)381)

constant coupling　近似

entrance channel

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2}+V_l(r)+\begin{pmatrix}0 & F\\ F & \epsilon\end{pmatrix}-E\right]\begin{pmatrix}u_0(r)\\ u_1(r)\end{pmatrix}=0$$

excited channel

対角化

$$\underbrace{U\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2}+V_l(r)+\begin{pmatrix}0 & F\\ F & \epsilon\end{pmatrix}-E\right]U^{-1}}_{=\,-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2}+V_l(r)-E+U\begin{pmatrix}0 & F\\ F & \epsilon\end{pmatrix}U^{-1}}\;\underbrace{U\begin{pmatrix}u_0(r)\\ u_1(r)\end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix}\phi_+(r)\\ \phi_-(r)\end{pmatrix}}=0$$

単純な2準位系 (Dasso, Landowne, and Winther, NPA405('83)381)

constant coupling　近似

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2}+V_l(r)+\begin{pmatrix}0 & F\\ F & \epsilon\end{pmatrix}-E\right]\begin{pmatrix}u_0(r)\\ u_1(r)\end{pmatrix}=0$$

対角化

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2}+V_l(r)+\begin{pmatrix}\lambda_+ & 0\\ 0 & \lambda_-\end{pmatrix}-E\right]\begin{pmatrix}\phi_+(r)\\ \phi_-(r)\end{pmatrix}=0$$

$$U\begin{pmatrix}0 & F\\ F & \epsilon\end{pmatrix}U^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_+ & 0\\ 0 & \lambda_-\end{pmatrix}$$

$$\phi_\pm(r) \;=\; \alpha_\pm\cdot u_0(r)+\beta_\pm\cdot u_1(r)$$

となるような U をとる。

$$\boxed{\sigma_{\rm fus}(E)=|\alpha_+|^2\sigma_{\rm fus}(E;V+\lambda_+)+|\alpha_-|^2\sigma_{\rm fus}(E;V+\lambda_-)}$$

単純な2準位系 (Dasso, Landowne, and Winther, NPA405('83)381)

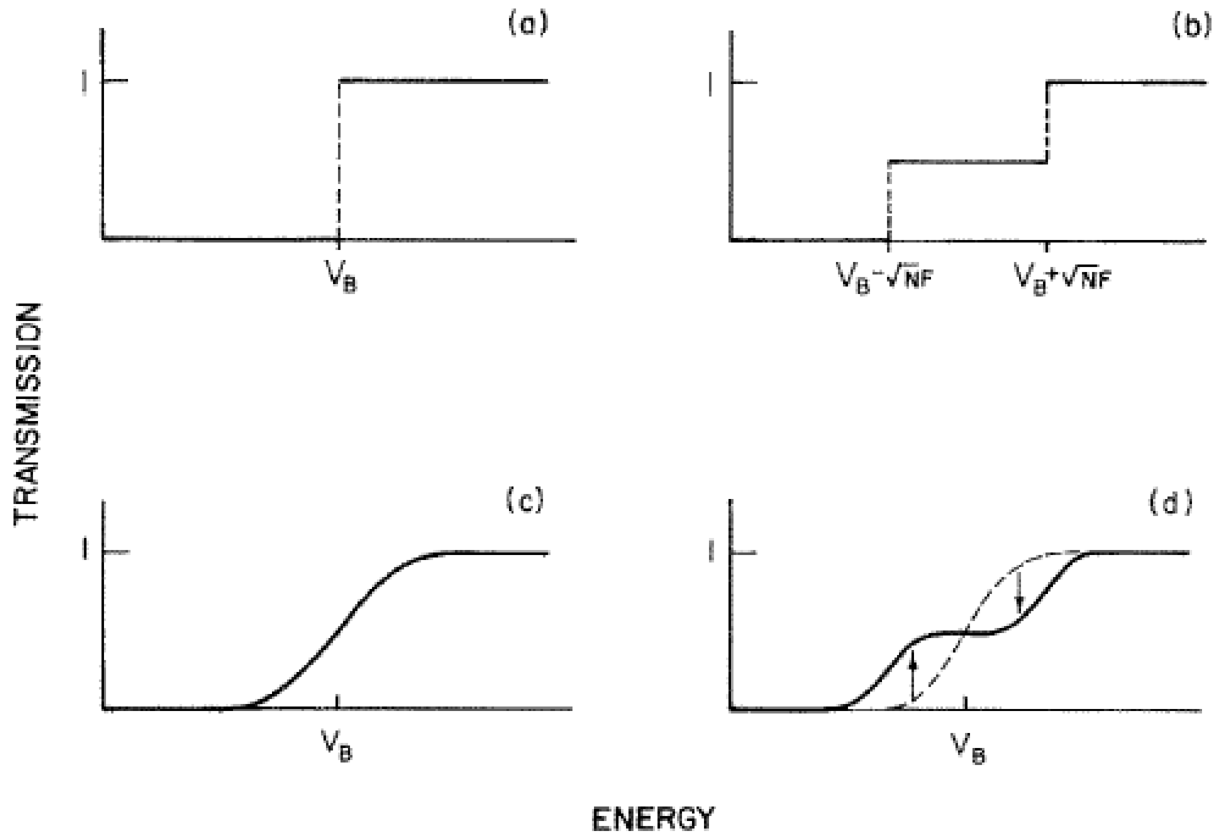


Fig. 1. Illustration of how channel coupling increases transmission at energies below the barrier and decreases it above. Parts (a) and (b) indicate the classical limits for no coupling and coupling, respectively, while parts (c) and (d) indicate how quantum mechanical effects modify the corresponding curves.

レポート問題3

レポート問題1、2と同様に^{16}O+^{144}Sm 反応を考える。レポート問題1、2と同じ核力ポテンシャルを用いる。また、^{144}Sm の 3$^-$ 状態の励起をDasso et al. の2準位模型で取り入れる。ε = 1.8 MeV, F = 3 MeV とする。問題2と同様、Wongの公式を用いて、E_{cm} = 60 MeV 及び 75 MeV における核融合反応断面積を求めよ。問題2の場合の核融合反応断面積と比べてどのように変化したか述べよ。

(note) $\begin{pmatrix} 0 & F \\ F & \epsilon \end{pmatrix}$ を対角化すると、固有値、固有関数は

$$\lambda_\pm = \frac{\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 + 4F^2}}{2} \qquad \begin{pmatrix} \alpha_\pm \\ \beta_\pm \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{F^2 + \lambda_\pm^2}} \cdot \begin{pmatrix} F \\ \lambda_\pm \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \sigma_{\rm fus}(E) = |\alpha_+|^2 \sigma_{\rm fus}(E; V + \lambda_+) + |\alpha_-|^2 \sigma_{\rm fus}(E; V + \lambda_-)$$

Sub-barrier Fusion と障壁分布法

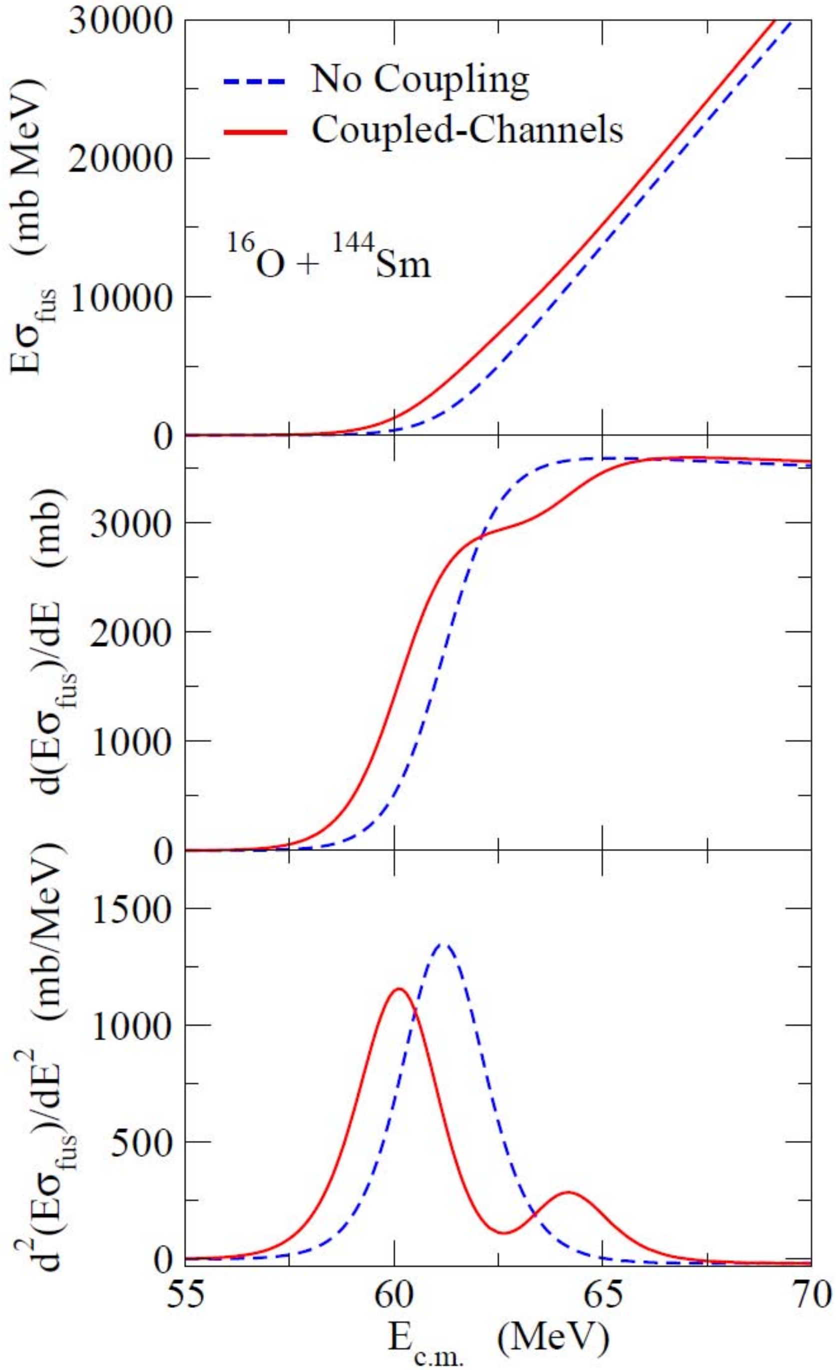
$$\sigma_{\rm fus}(E) = \frac{\hbar\Omega}{2E} R_b^2 \log\left[1 + \exp\left(\frac{2\pi}{\hbar\Omega}(E - V_b)\right)\right]$$

$$\frac{d(E\sigma_{\rm fus})}{dE} = \frac{\pi R_b^2}{1 + \exp\left[\frac{2\pi}{\hbar\Omega}(V_b - E)\right]} = \pi R_b^2 \cdot P_{l=0}(E)$$

$$D_{\rm fus}(E) \equiv \frac{d^2(E\sigma_{\rm fus})}{dE^2} \simeq \pi R_b^2 \frac{dP_{l=0}}{dE}$$

(障壁分布)

N. Rowley, G.R. Satchler,
P.H. Stelson, PLB254('91)25



N. Rowley, G.R. Satchler,
P.H. Stelson, PLB254('91)25

$$\frac{d}{dE}[E\sigma_{\mathsf{fus}}(E)] \;\propto\; P(E)$$

$$\frac{d^2}{dE^2}[E\sigma_{\mathsf{fus}}(E)] \;\propto\; \frac{dP}{dE}$$

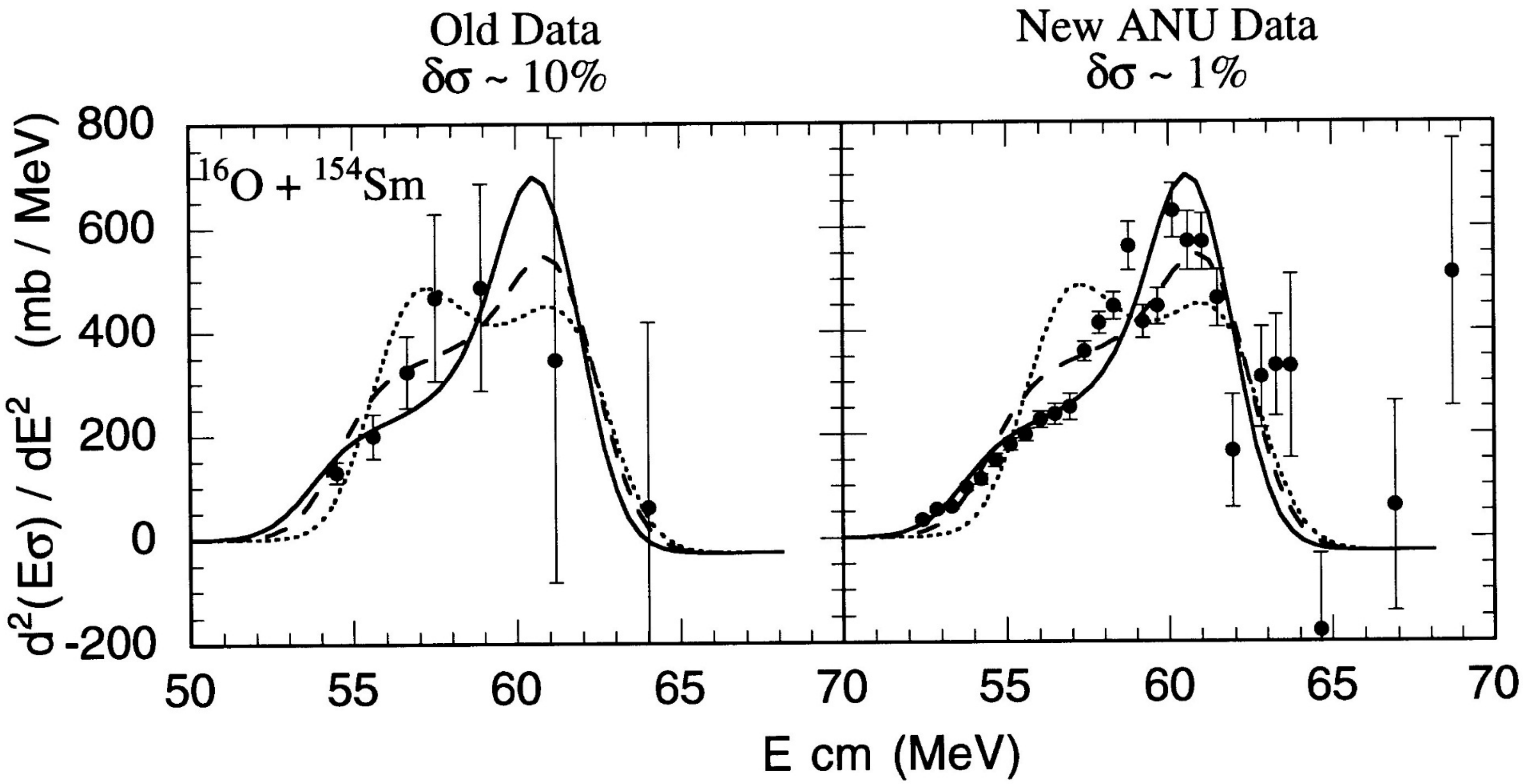
$E = V_b$ にピーク

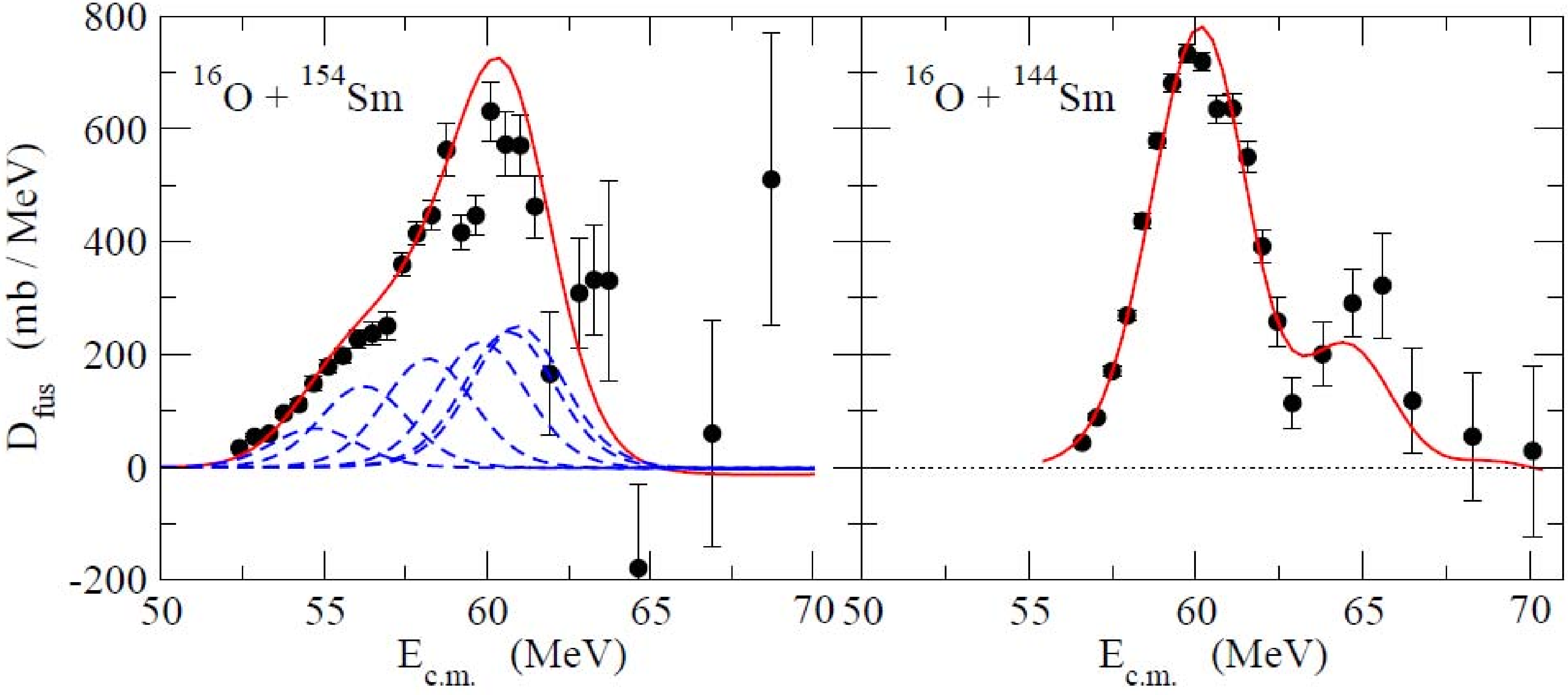
障壁分布測定

核融合障壁分布 $D_{\rm fus}(E) = \dfrac{d^2(E\sigma)}{dE^2}$

2階微分をとるために非常に高精度の実験データが必要

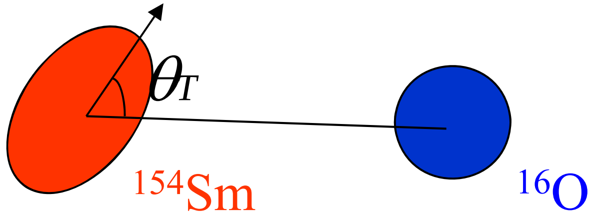
（90年代初頭）



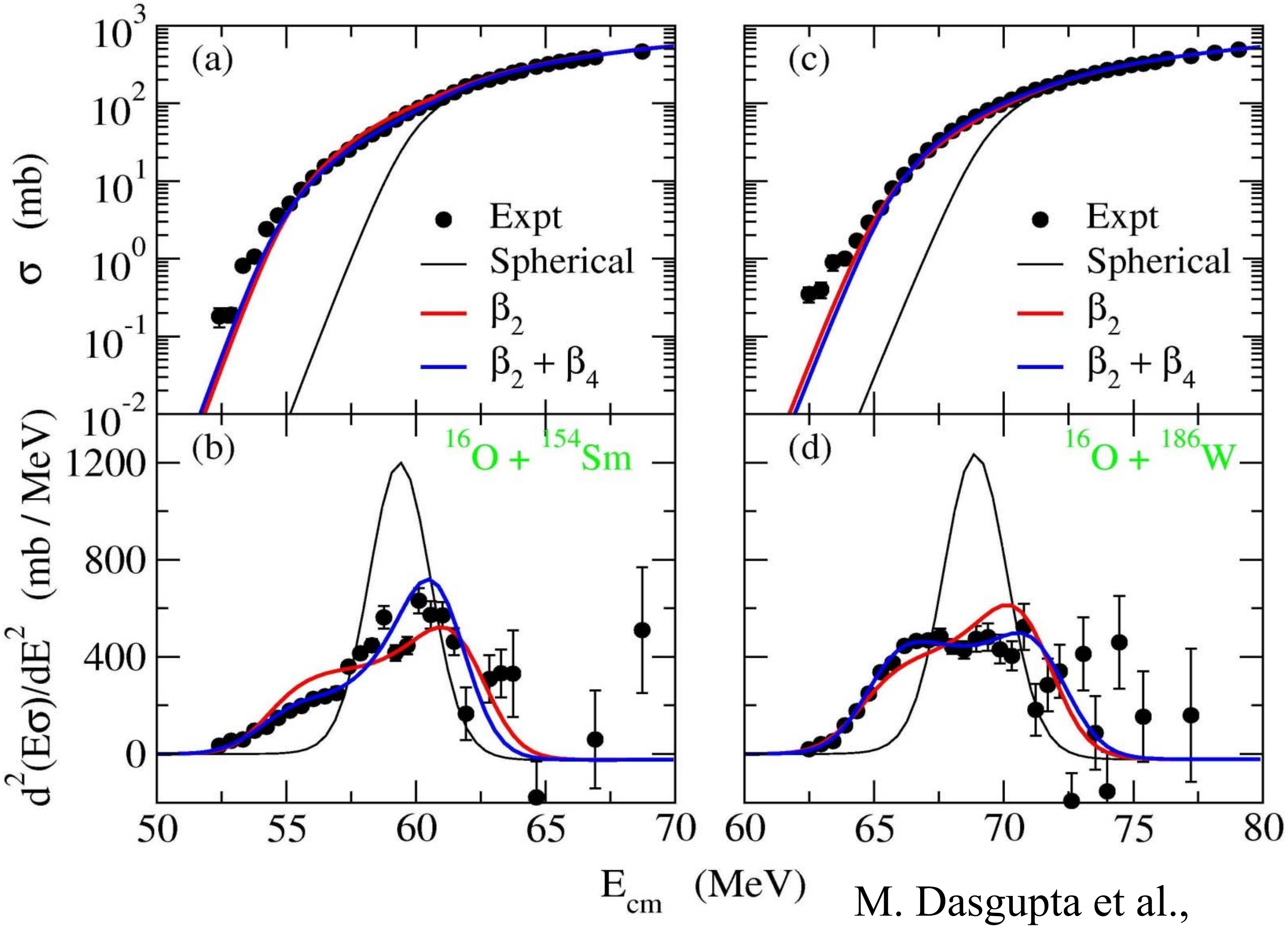


$^{16}O + ^{154}Sm$
$^{16}O + ^{144}Sm$
D_{fus} (mb / MeV)
$E_{c.m.}$ (MeV)
800
600
400
200
0
-200
50
55
60
65
70

高精度実験データから得られた障壁分布

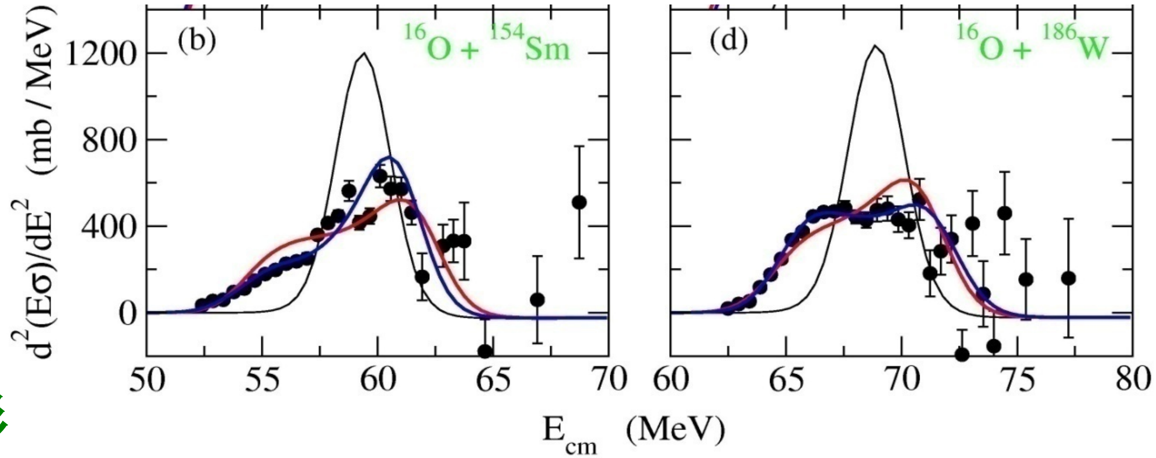


$$\sigma_{\rm fus}(E) = \int_0^1 d(\cos\theta_T)\sigma_{\rm fus}(E;\theta_T)$$



M. Dasgupta et al.,
Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 48('98)401

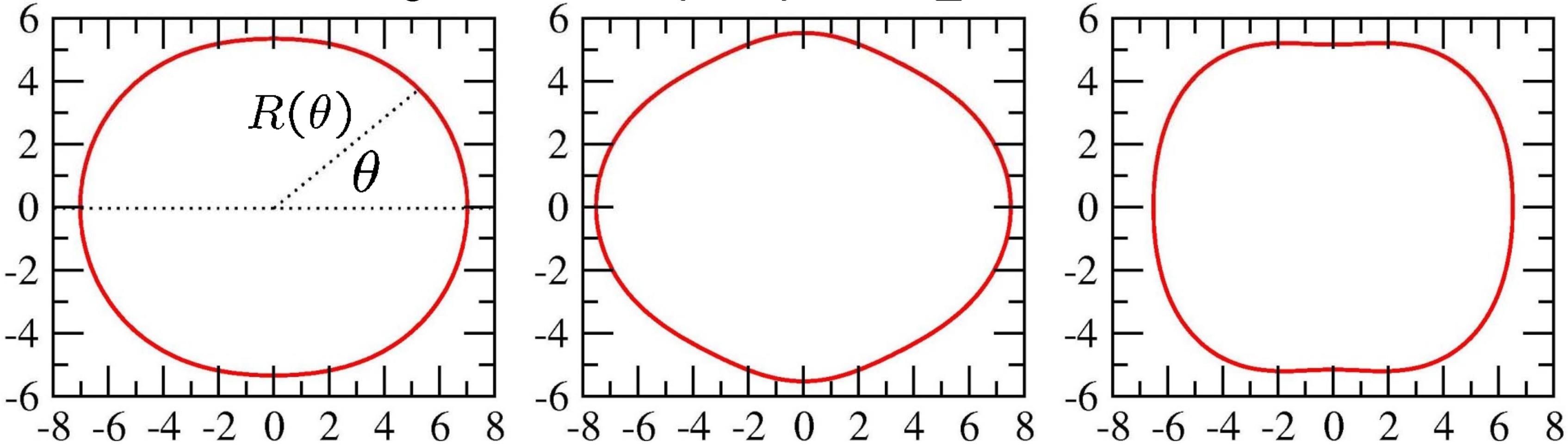
障壁分布を通じて原子核の形を視る



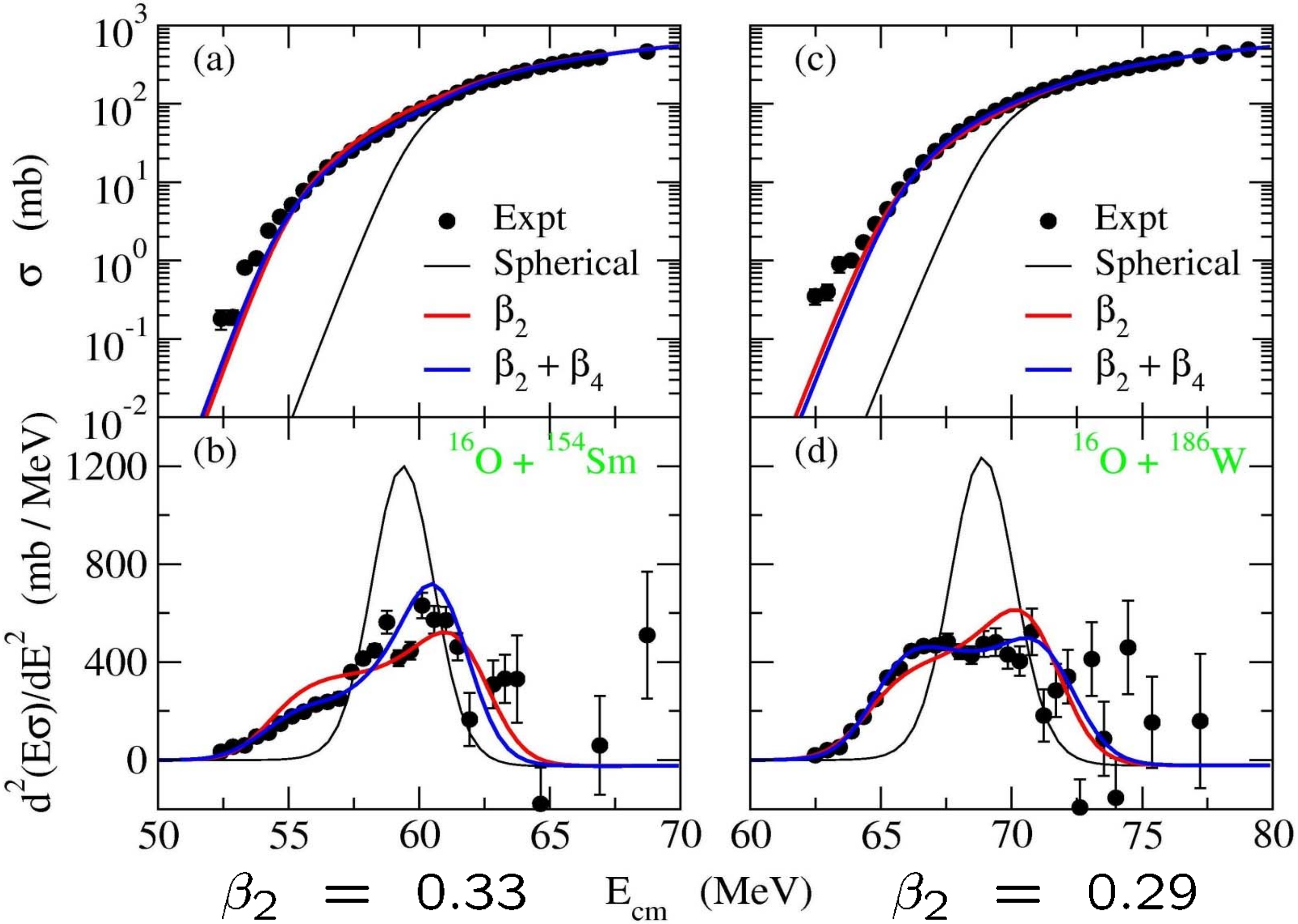
原子核の形

$$R(\theta) = R_0(1 + \beta_2 Y_{20}(\theta) + \beta_4 Y_{40}(\theta) + \cdots)$$

$$R_0 = 5.9 \text{ (fm)}, \quad \beta_2 = 0.3$$



$\beta_4 = 0$ $\qquad$ $\beta_4 = 0.1$ $\qquad$ $\beta_4 = -0.1$



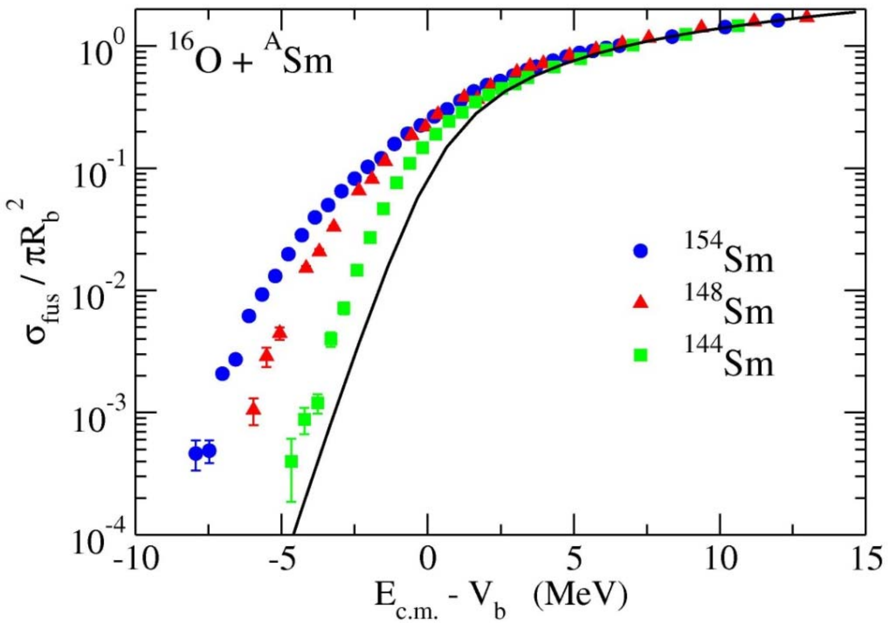
$\beta_2 = 0.33$ $\beta_2 = 0.29$

$\beta_4 = +0.05$ $\beta_4 = -0.03$

障壁分布をとることによって、β_4による違いがかなりはっきりと目に見える！

→ 原子核に対する量子トンネル顕微鏡としての核融合反応

障壁分布法の意義



核融合反応断面積

非常に強い指数関数的エネルギー依存性

→ 核構造の詳細による違いが見えずらい

断面積を別の方法でプロットする:核融合障壁分布

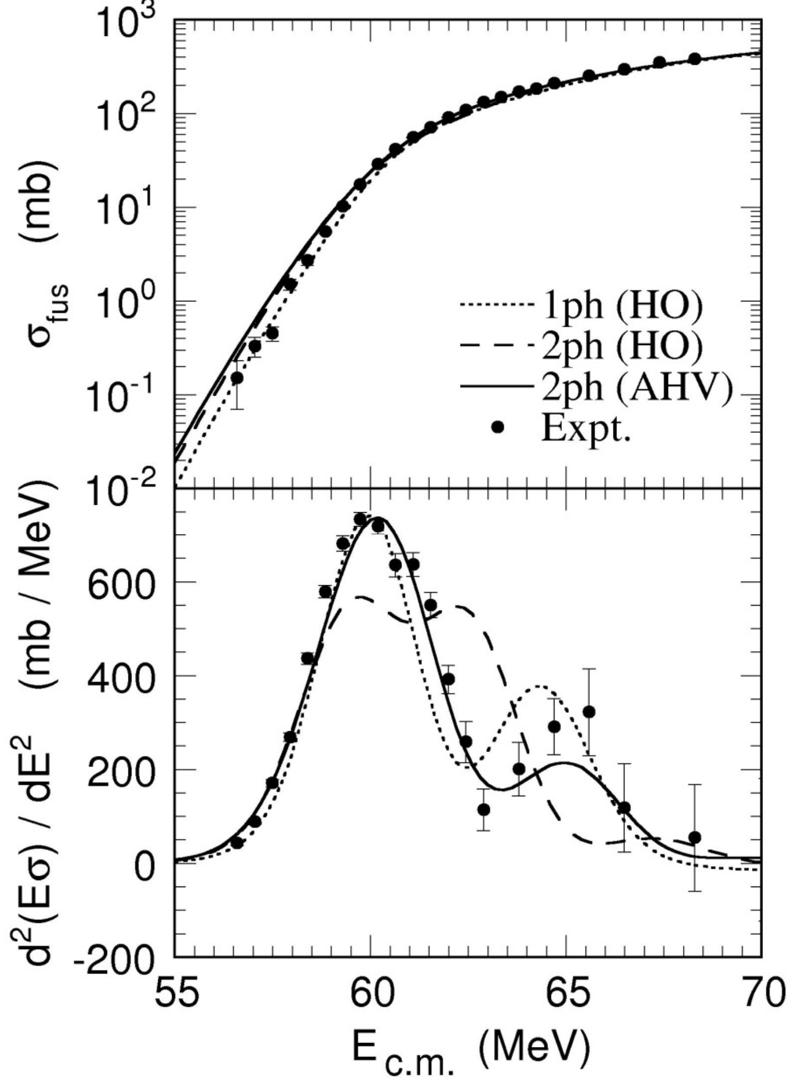
$$\boxed{D_{\rm fus}(E) = \frac{d^2(E\sigma)}{dE^2}}$$

N. Rowley, G.R. Satchler, P.H. Stelson, PLB254('91)25

→ 核構造の詳細に敏感な関数
（ダイナミックスを正しく理解できているのか検証できる）

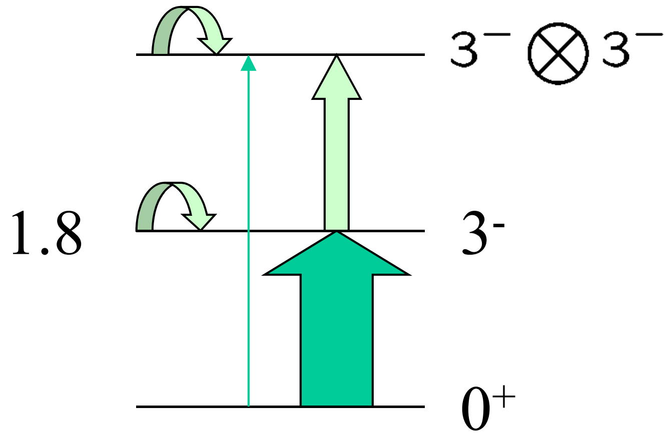
球形振動核の例

$^{16}O + ^{144}Sm$



K.Hagino, N. Takigawa, and S. Kuyucak, PRL79('97)2943

Octupole 振動の非調和性



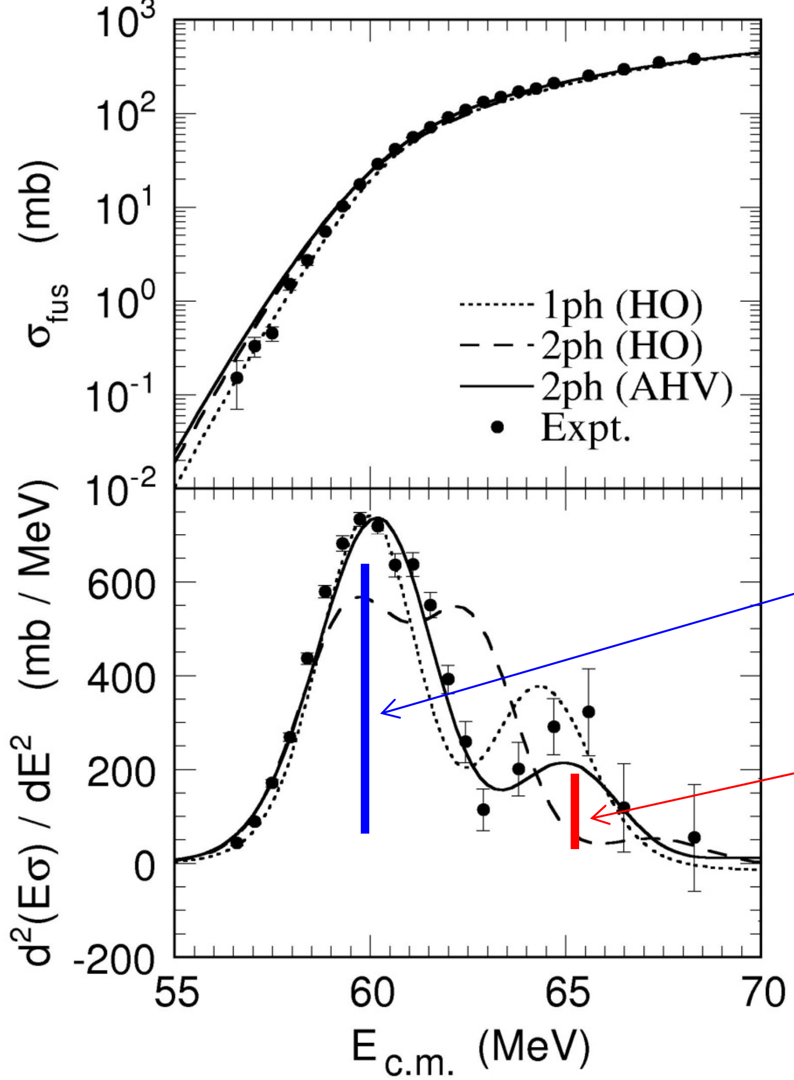
^{144}Sm

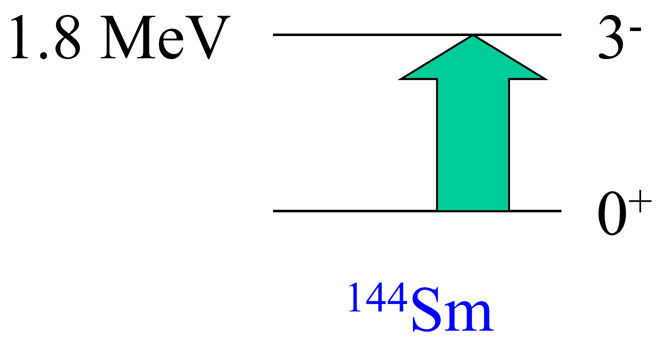
Quadrupole moment:

$$Q(3^-) = -0.70 \pm 0.02\mathrm{b}$$

障壁分布

$^{16}O + ^{144}Sm$





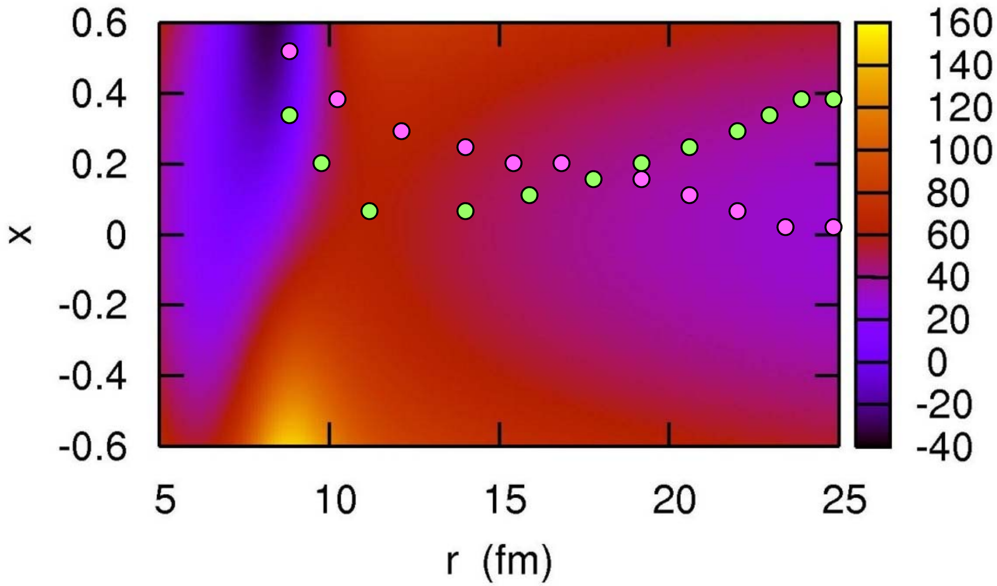
$$\alpha|0^+\rangle + \beta|3^-\rangle$$

$$\beta|0^+\rangle - \alpha|3^-\rangle$$

K.Hagino, N. Takigawa, and S. Kuyucak, PRL79('97)2943

励起状態との結合 $\longrightarrow$ ポテンシャル障壁の分布

多次元ポテンシャル面

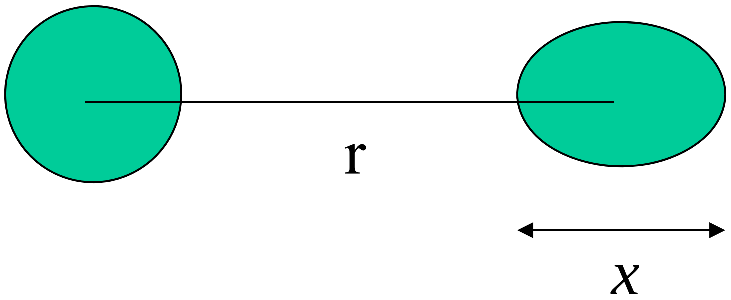


相対距離

障壁1つ

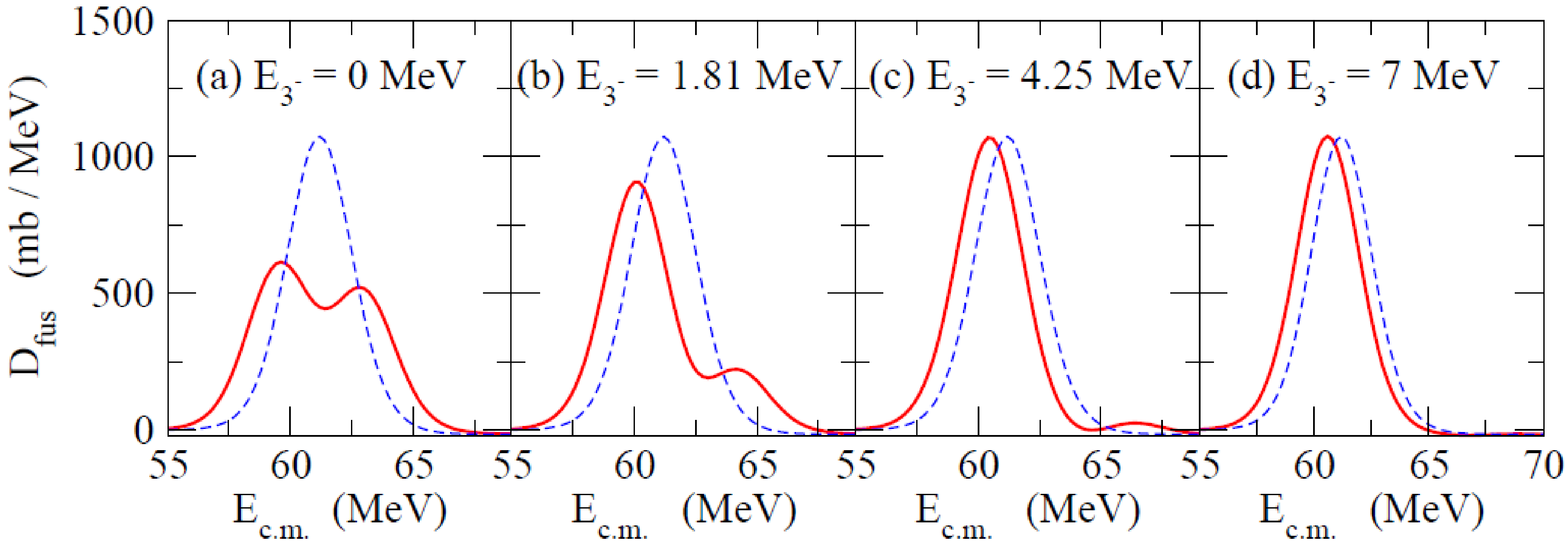
$\longrightarrow$ 多くの障壁の集合

$$P(E) = P[E, V(r)]$$
$$\rightarrow P(E) = \sum_\alpha w_\alpha \, P[E, V_\alpha(r)]$$



(内部自由度)

障壁分布の励起エネルギー依存性



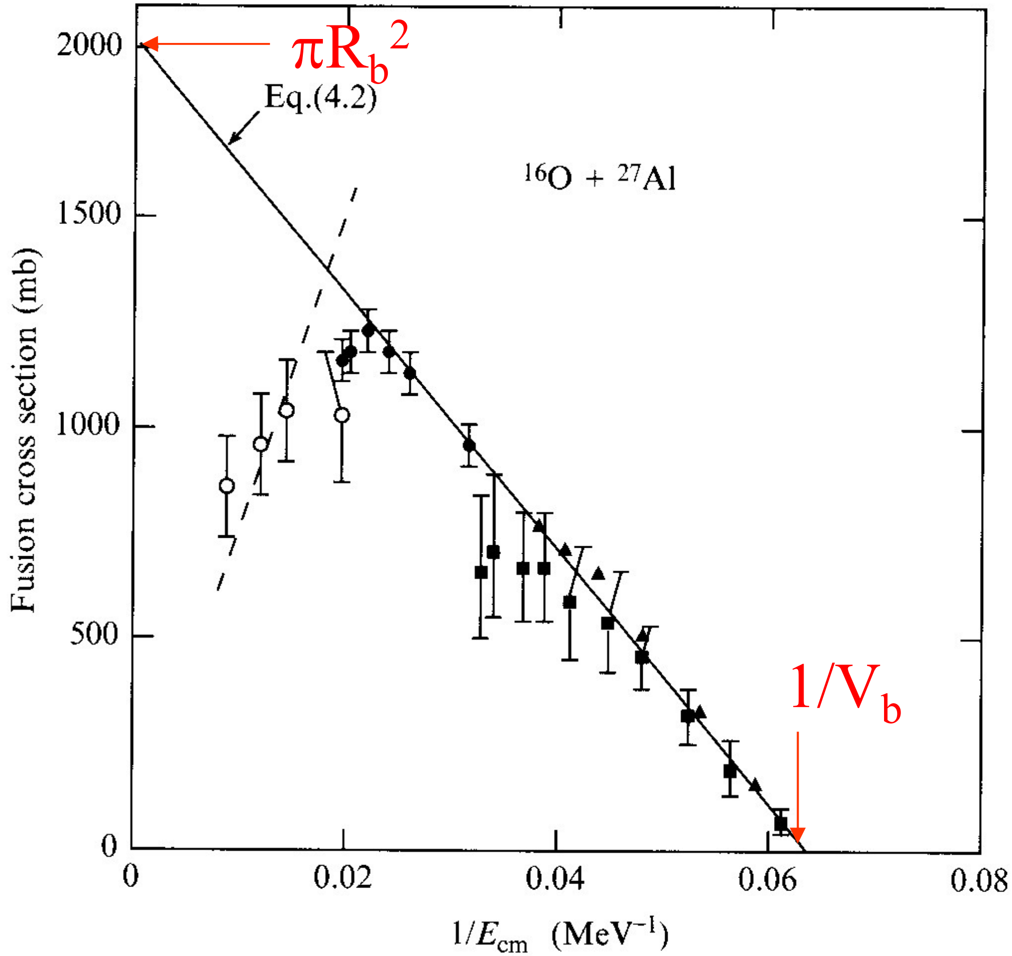
瞬間極限 ⟶ 断熱極限

核融合断面積のプロットの仕方

i) σ_{fus} vs 1/E (~70's)

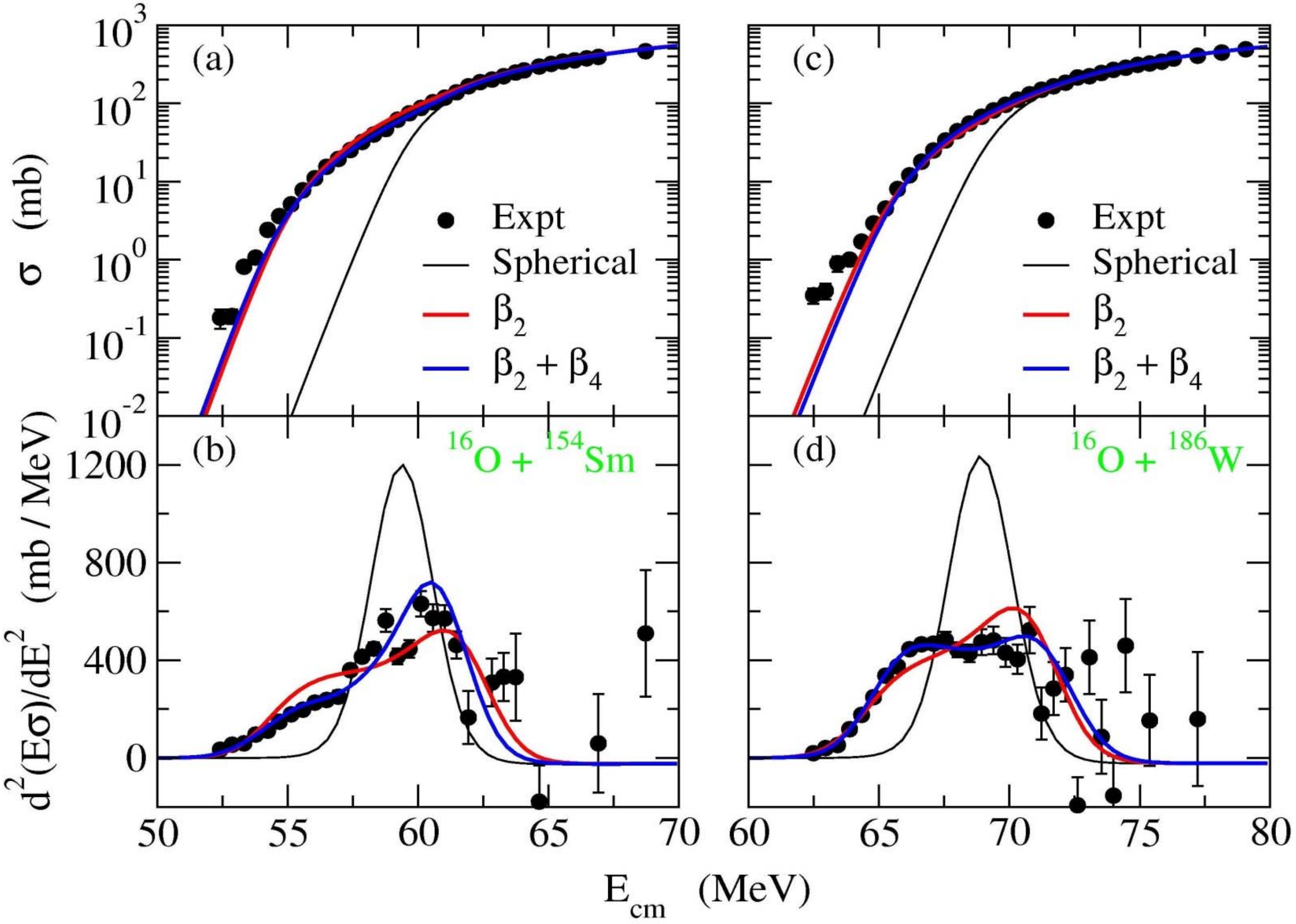
古典的な核融合断面積: $1/E$ に比例

$$\sigma_{\rm fus}^{cl}(E) = \pi R_b^2 \left(1 - \frac{V_b}{E}\right)$$



Taken from J.S. Lilley, "Nuclear Physics"

ii) 障壁分布 (~90's)



M. Dasgupta et al.,
Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 48('98)401

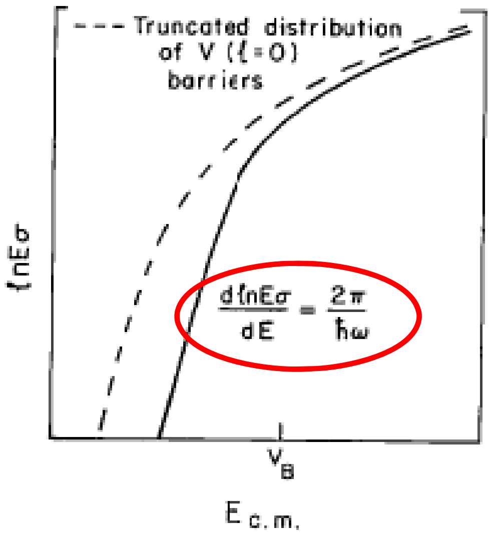
iii) 対数微分 (~00's)

$$\sigma_{\text{fus}}(E) = \frac{\hbar\Omega}{2E} R_b^2 \log\left[1 + \exp\left(\frac{2\pi}{\hbar\Omega}(E - V_b)\right)\right]$$

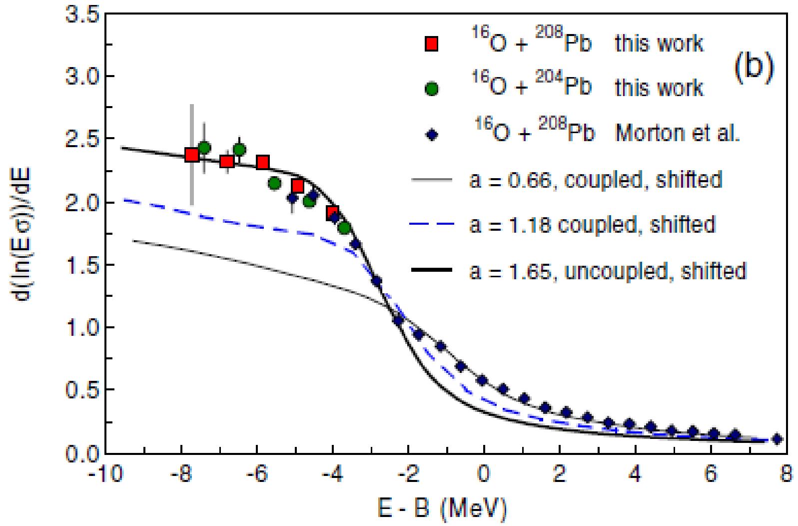
$$\sim \frac{\hbar\Omega}{2E} R_b^2 \exp\left(\frac{2\pi}{\hbar\Omega}(E - V_b)\right) \qquad (E \ll V_b)$$

$$\boxed{\frac{d}{dE}\log(E\sigma) = \frac{(E\sigma)'}{E\sigma} = \frac{2\pi}{\hbar\Omega}}$$

cf. $D_{\text{fus}} = (E\sigma)''$

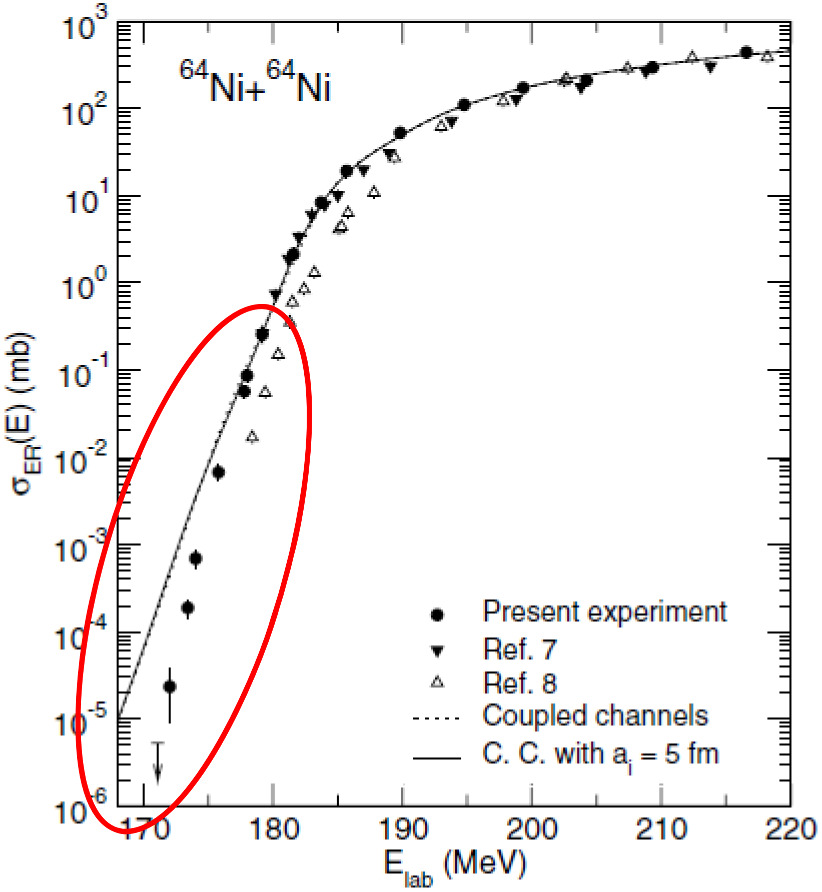


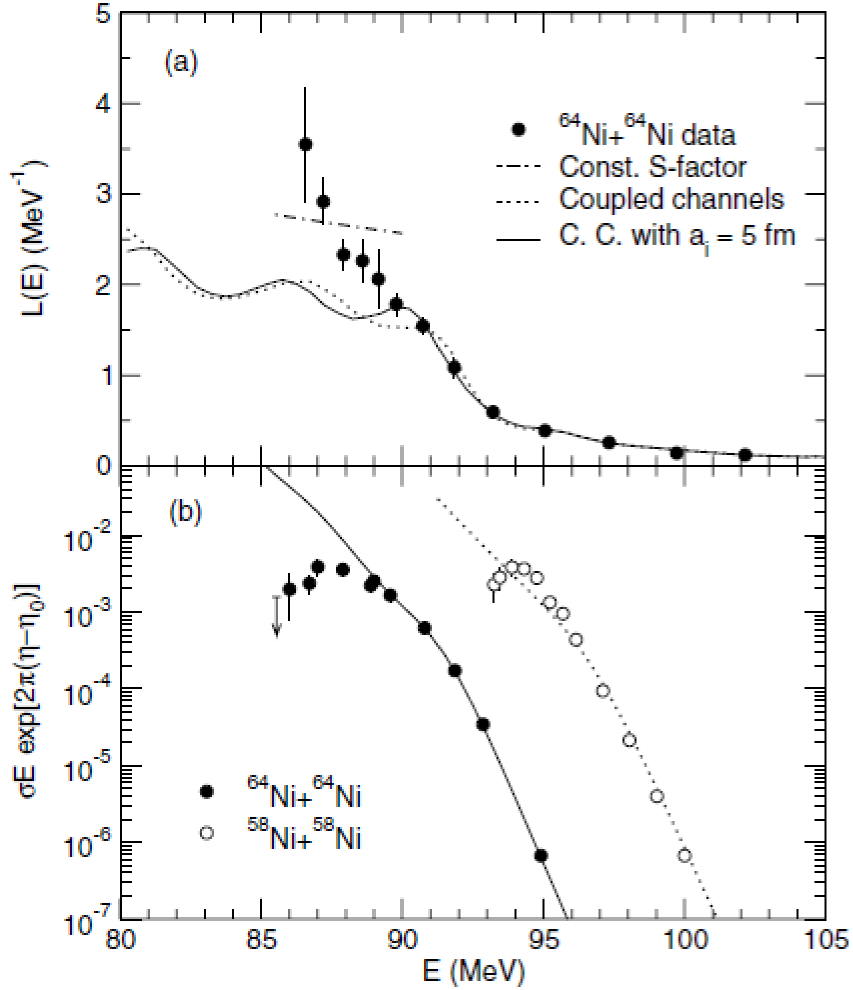
R. Vandenbosch,
Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 42('92)447



M. Dasgupta et al., PRL99('07) 192701

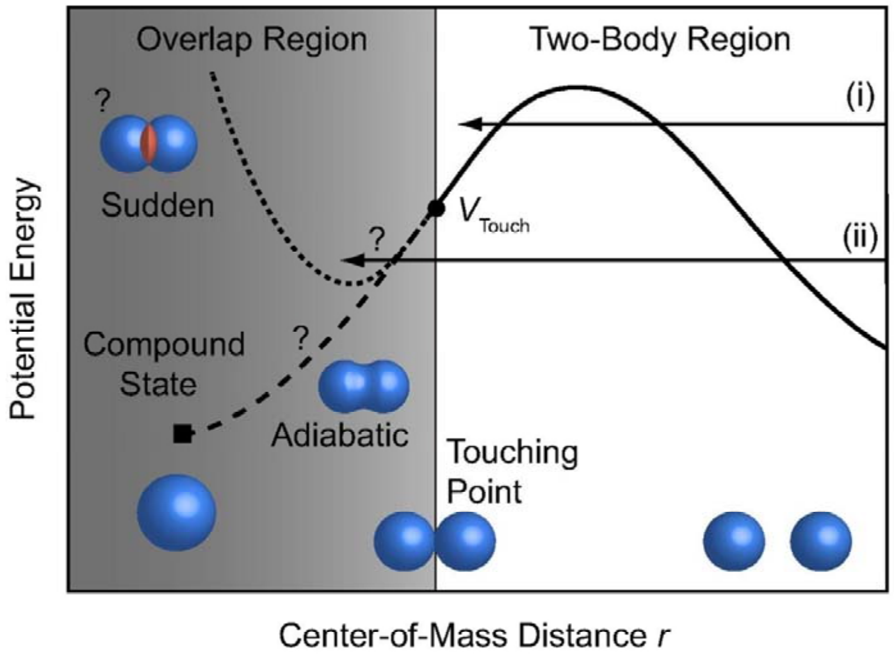
deep subbarrier 領域における核融合反応断面積の抑制現象

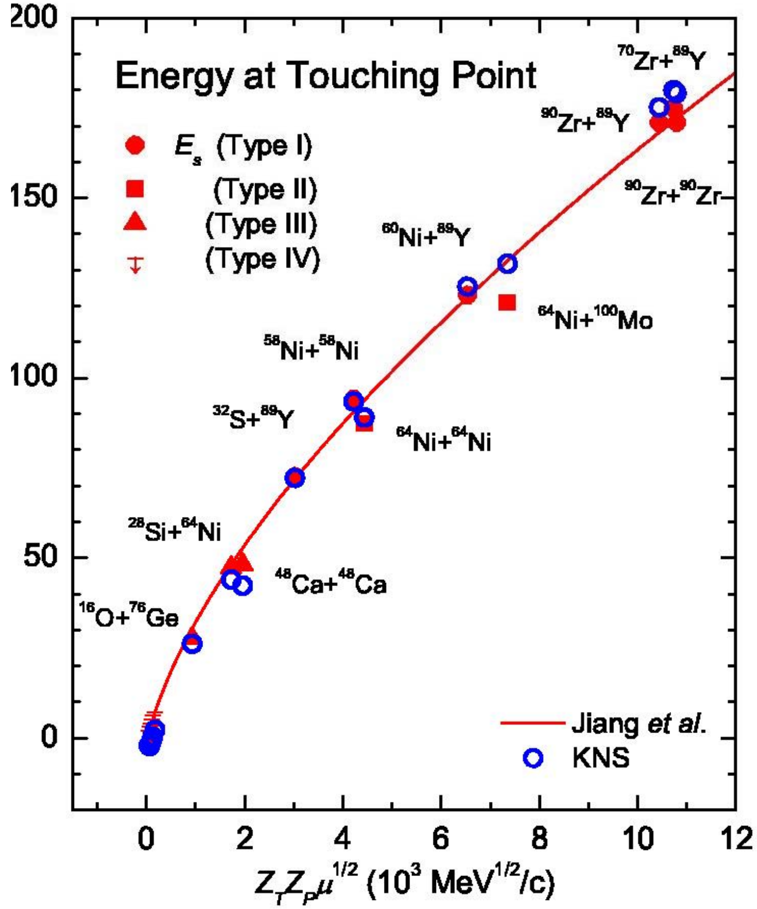




C.L. Jiang et al., PRL89('02)052701; PRL93('04)012701

接触点でのエネルギーと deep subbarrier hindrance の系統性



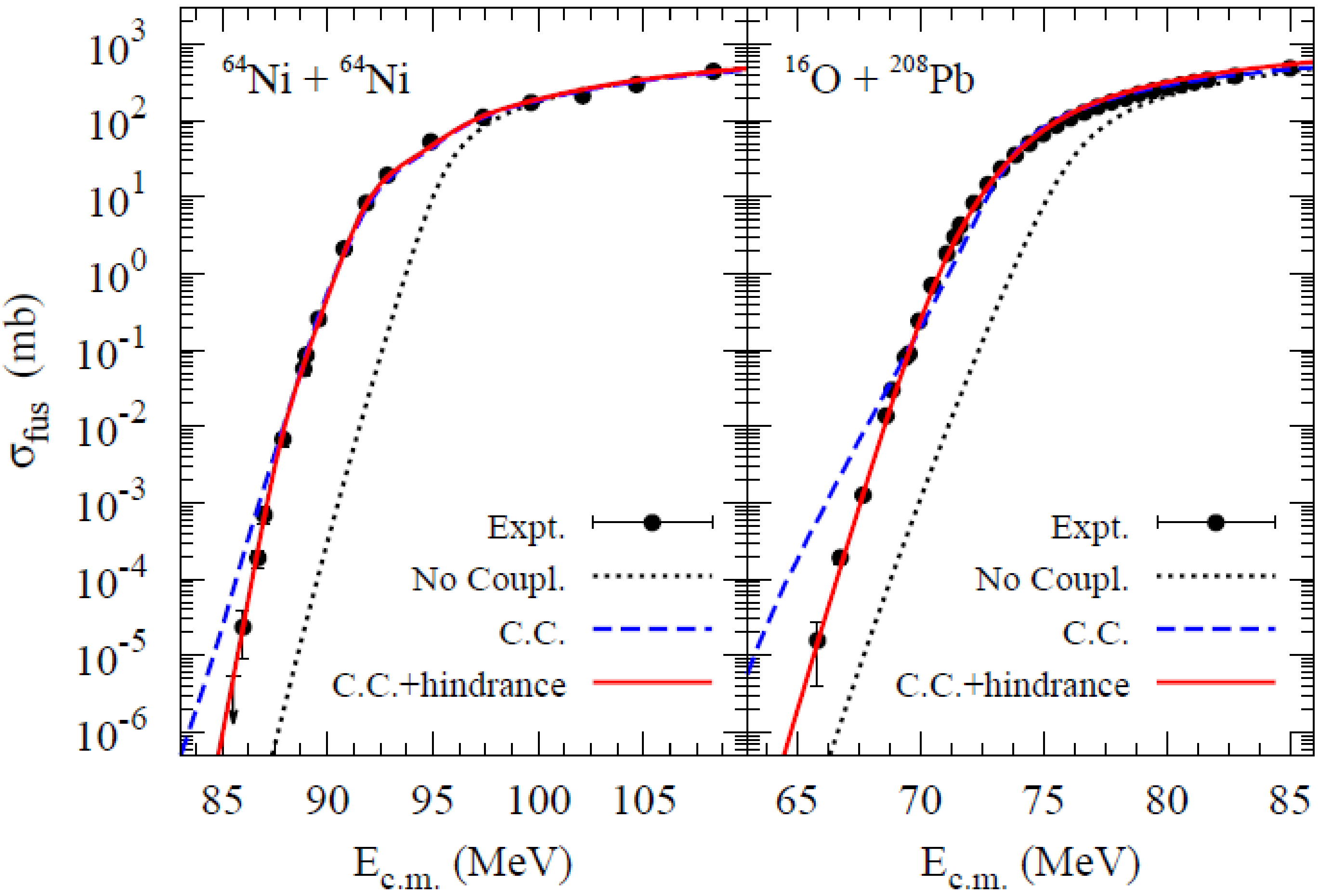


deep subbarrier hindrance
のメカニズム:
まだ解明されていない

T. Ichikawa, K.H., A. Iwamoto,
PRC75('07) 064612 & 057603

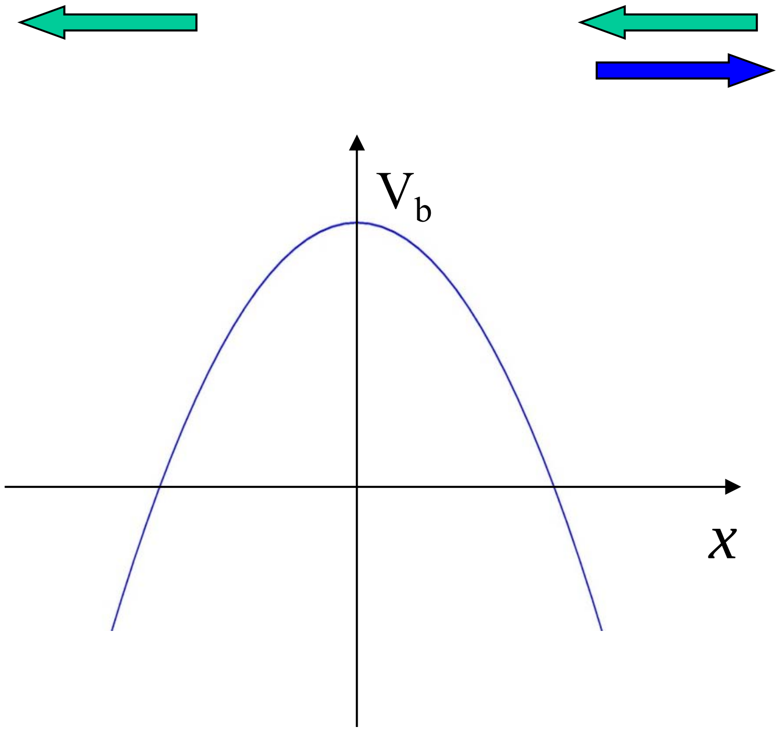
接触してからの反応機構をどのように
記述するか? ⟶ 超重核の物理とも密接に関連

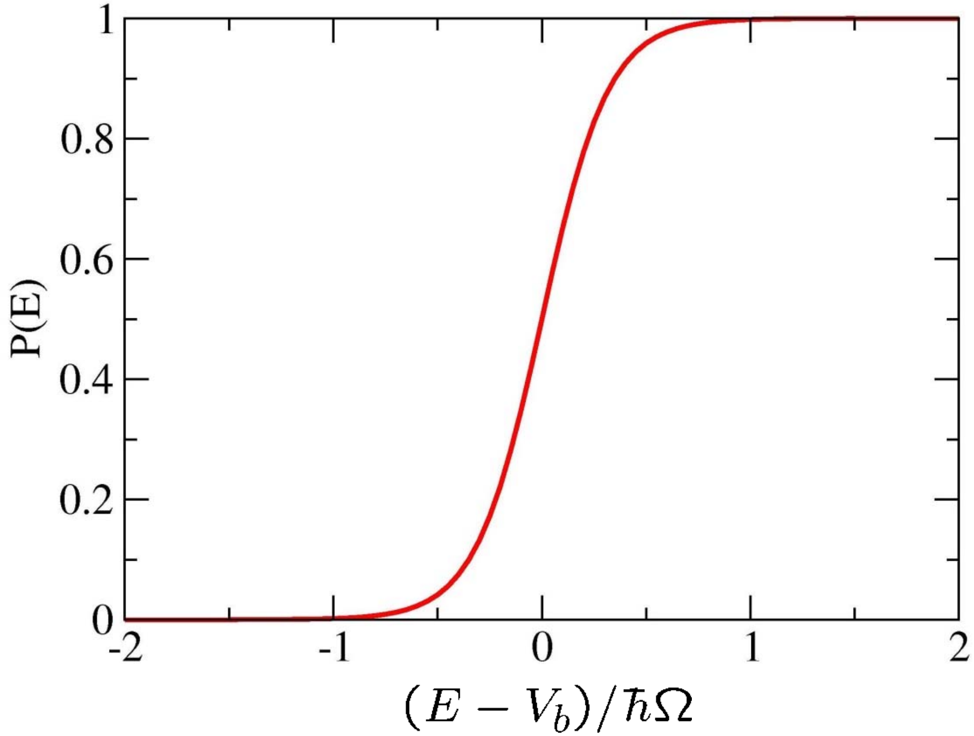
接触後、現象論的にチャンネル結合効果を弱めると:



T. Ichikawa, K.H., A. Iwamoto,
PRL103('09) 202701

量子反射と重イオン準弾性散乱



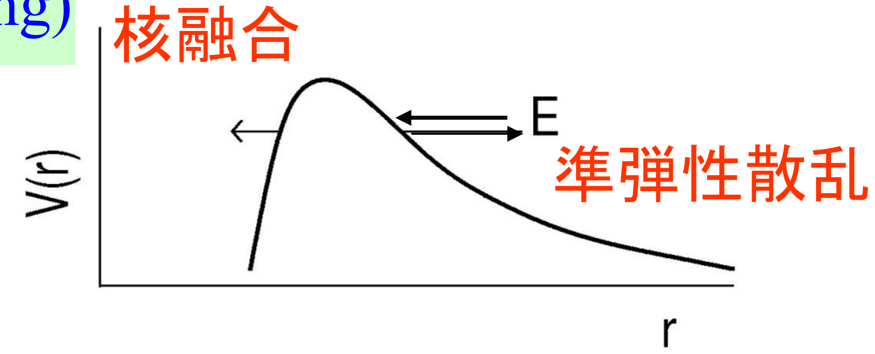


量子力学では $E > V_b$ でも反射が起こる → 量子反射

$$P(E) + R(E) = 1$$

反射確率は透過確率と同じ情報を持ち、反射確率を用いて障壁分布を定義することも可能

準弾性散乱 (Quasi-Elastic Scattering)



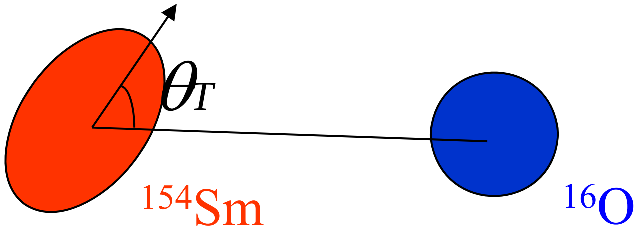
核融合反応を除く全てのプロセスの和(弾性散乱＋非弾性散乱＋核子移行反応＋.......)

クーロン障壁で跳ね返り検出器に入ってきた粒子を全てつかまえる

反射確率に関係する

核融合反応と相補的

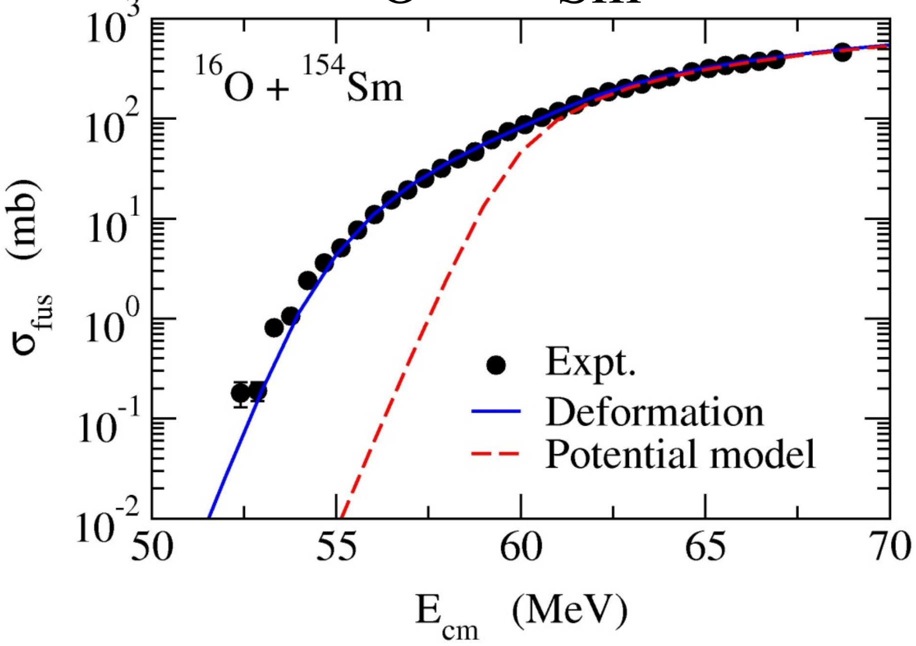
変形核では......



$$
\begin{cases}
\sigma_{\text{fus}}(E) = \int_0^1 d(\cos\theta_T)\,\sigma_{\text{fus}}(E;\theta_T) \\
\sigma_{\text{qel}}(E,\theta) = \sum_I \sigma(E,\theta) = \int_0^1 d(\cos\theta_T)\,\sigma_{\text{el}}(E,\theta;\theta_T)
\end{cases}
$$

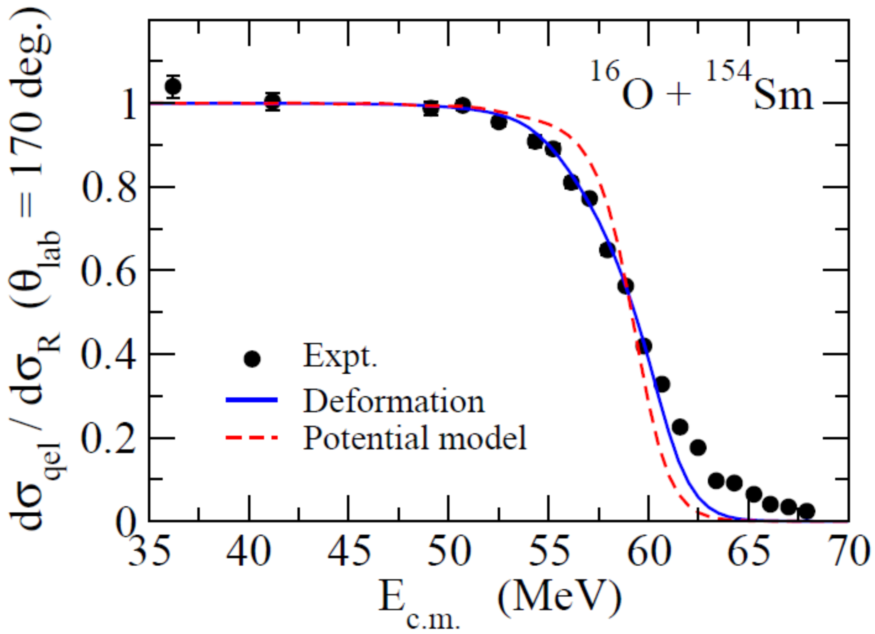
Subbarrier enhancement of fusion cross sections

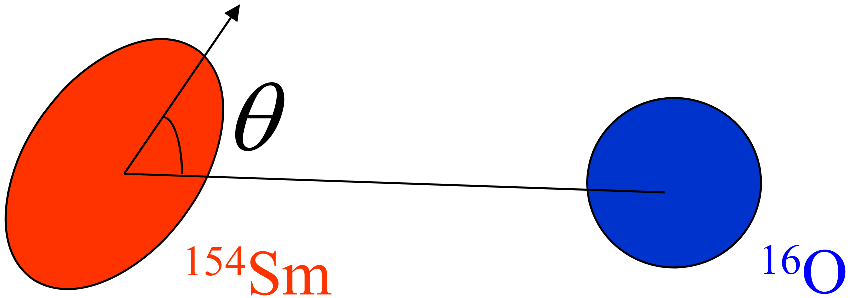
^{16}O + ^{154}Sm



Quasi-elastic scattering (elastic + inelastic)

^{16}O + ^{154}Sm





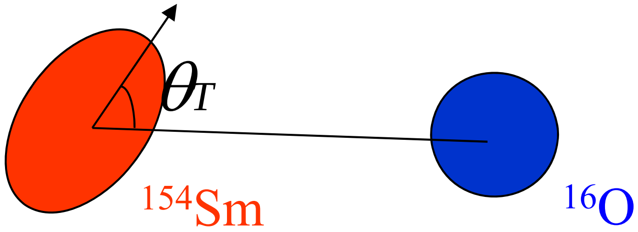
$$\sigma_{\text{fus}}(E) = \int_0^1 d(\cos\theta)\sigma_{\text{fus}}(E;\theta)$$

$$\sigma_{\text{qel}}(E,\theta) = \int_0^1 d(\cos\theta_T)\sigma_{\text{el}}(E,\theta;\theta_T)$$

準弾性散乱障壁分布

$$\sigma_{\rm fus}(E) = \int_0^1 d(\cos\theta_T)\sigma_{\rm fus}(E;\theta_T)$$

$$D_{\rm fus}(E) = \frac{d^2(E\sigma_{\rm fus})}{dE^2}$$



$$\sigma_{\rm qel}(E,\theta) = \sum_I \sigma(E,\theta) = \int_0^1 d(\cos\theta_T)\sigma_{\rm el}(E,\theta;\theta_T)$$

準弾性散乱障壁分布:

$$\boxed{D_{\rm qel}(E) = -\frac{d}{dE}\left(\frac{\sigma_{\rm qel}(E,\pi)}{\sigma_R(E,\pi)}\right)}$$

H. Timmers et al.,
NPA584('95)190

(note) クーロン力が強い場合の古典的弾性散乱の断面積:

$$\sigma_{\rm el}^{cl}(E,\pi) = \sigma_R(E,\pi)\theta(V_b - E)$$

$$\frac{\sigma_{\rm el}^{cl}(E,\pi)}{\sigma_R(E,\pi)} = \theta(V_b - E) = R(E)$$

Quasi-elastic test function

弾性散乱の古典的な断面積(クーロンの効果が大きい場合):

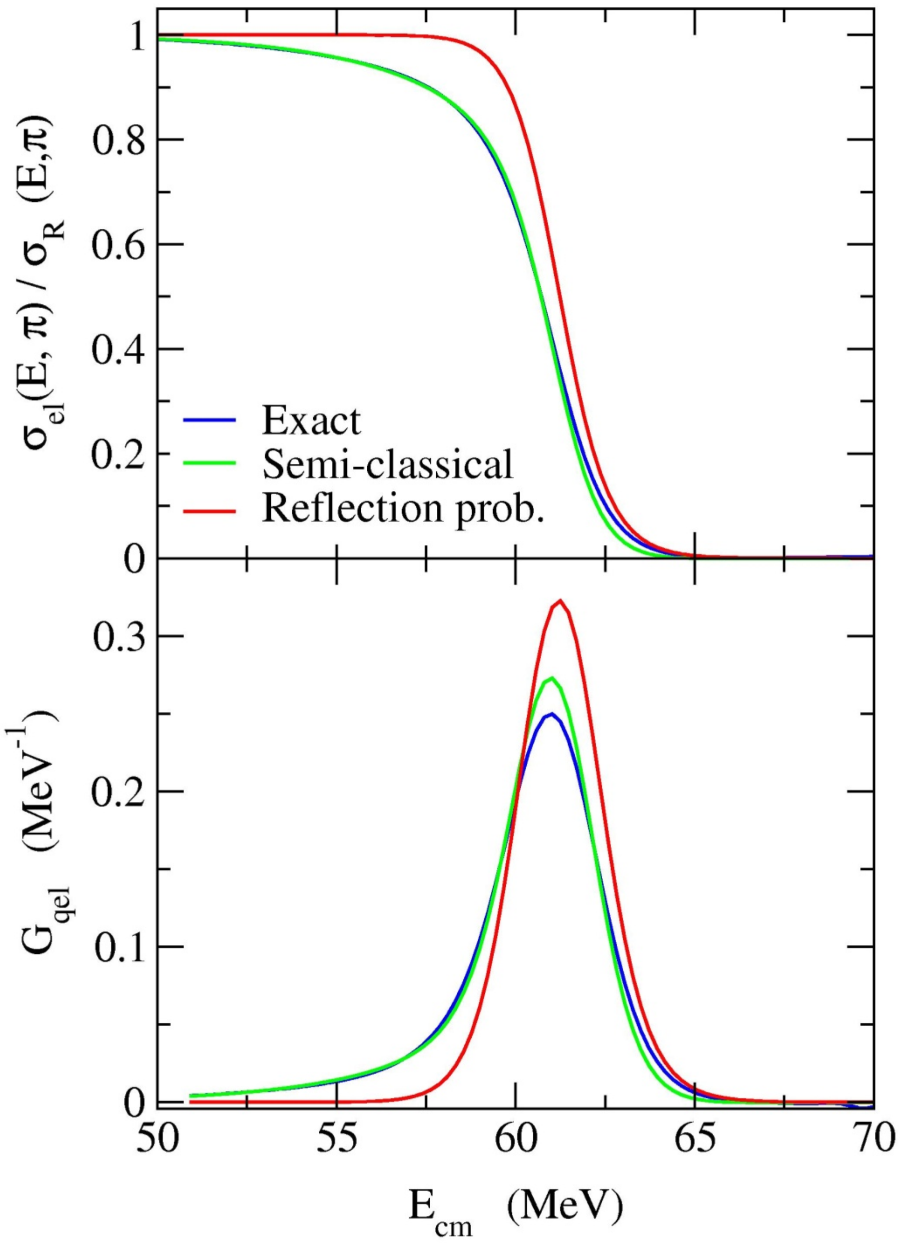
$$\sigma^{cl}_{\mathrm{el}}(E,\pi) = \sigma_R(E,\pi)\theta(V_b - E)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\sigma^{cl}_{\mathrm{el}}(E,\pi)}{\sigma_R(E,\pi)} &= \theta(V_b - E) = R(E) \\ -\frac{d}{dE}\left(\frac{\sigma^{cl}_{\mathrm{el}}(E,\pi)}{\sigma_R(E,\pi)}\right) &= \delta(E - V_b) \end{aligned}}$$

核力効果 ← 半古典的摂動論

$$\boxed{\frac{\sigma_{\mathrm{el}}(E,\pi)}{\sigma_R(E,\pi)} \sim \left(1 + \frac{V_N(r_c)}{ka}\frac{\sqrt{2a\pi k\eta}}{E}\right)\cdot R(E)}$$

S. Landowne and H.H. Wolter, NPA351('81)171
K.H. and N. Rowley, PRC69('04)054610

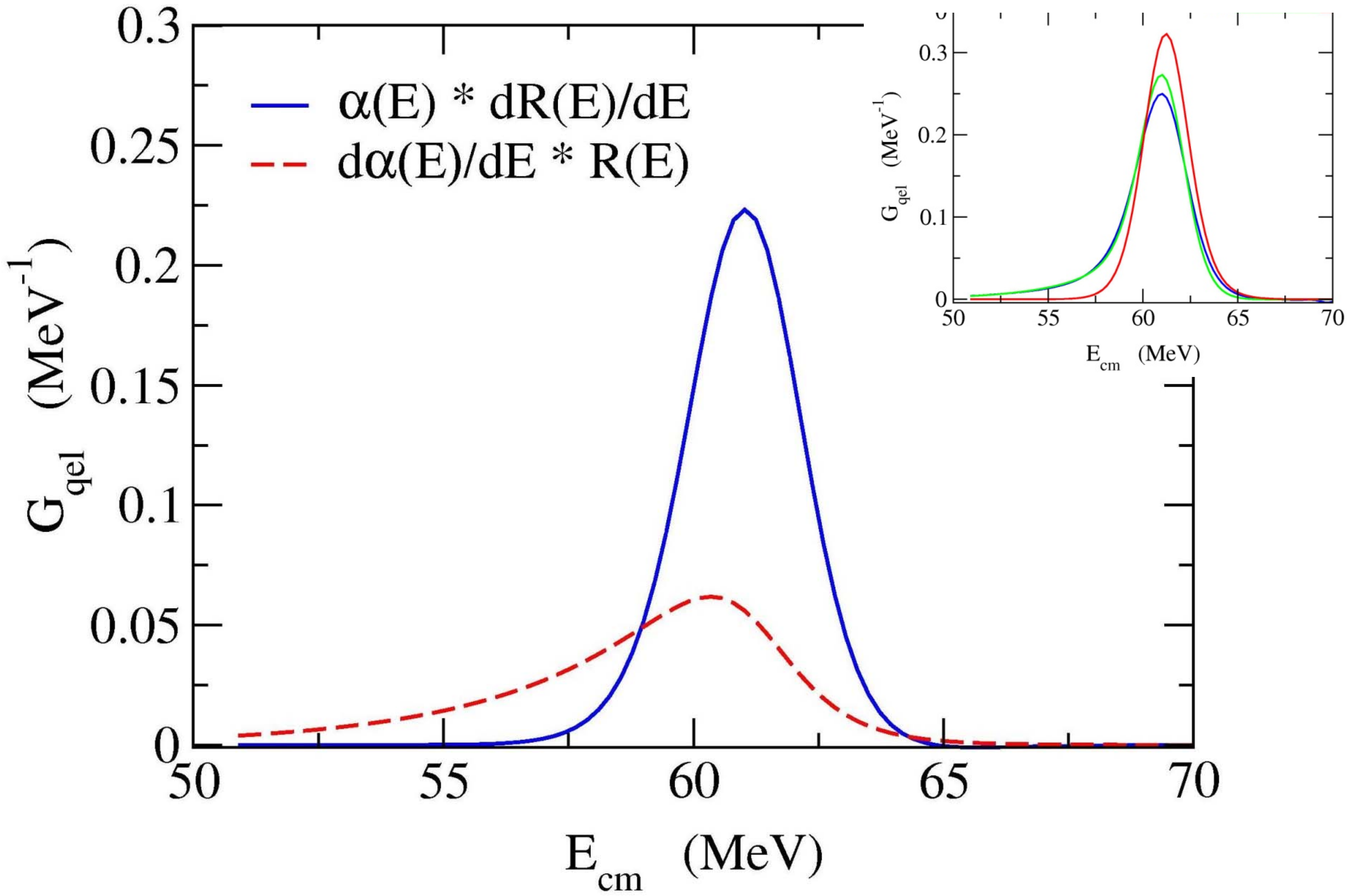


準弾性散乱テスト関数

$$\boxed{G_{\text{qel}}(E) \equiv -\frac{d}{dE}\left(\frac{\sigma_{\text{el}}(E,\pi)}{\sigma_R(E,\pi)}\right)}$$

- ほぼ V_b のエネルギーにピーク（少しずれる）
- 低エネルギーのテール
- E で積分すると1になる
- 比較的狭い幅

→ 核融合障壁分布と同じ振る舞い



α(E) * dR(E)/dE
dα(E)/dE * R(E)
G_{qel} (MeV^{-1})
E_{cm} (MeV)
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
50
55
60
65
70

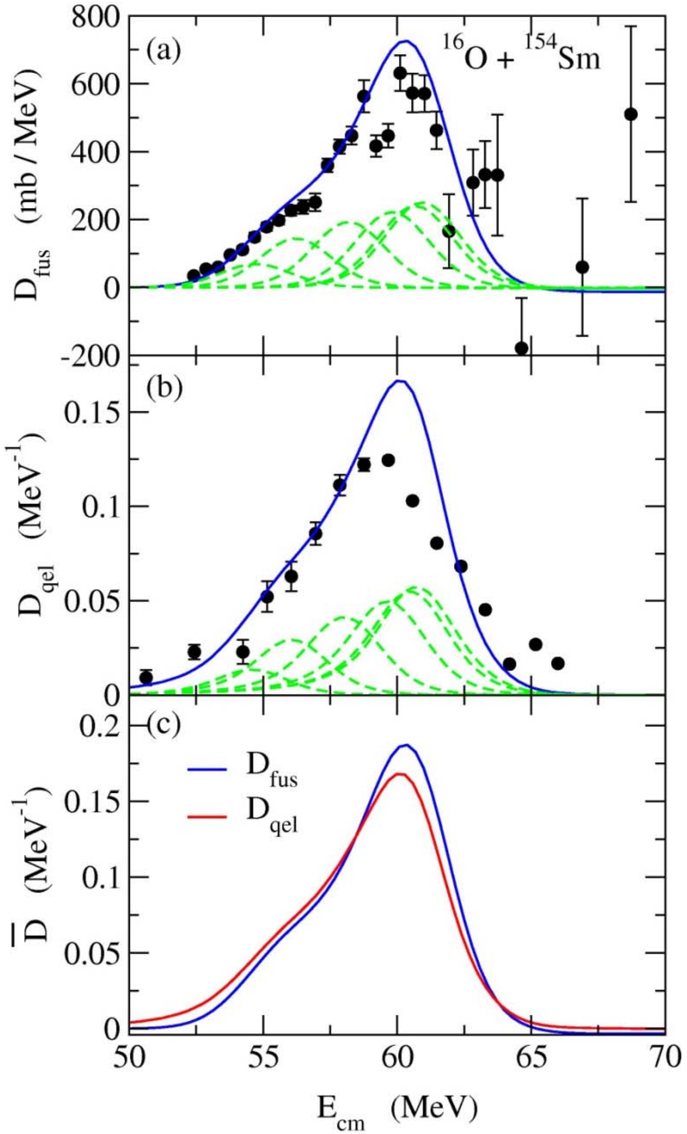
D_{fus} と D_{qel} の比較

核融合障壁分布

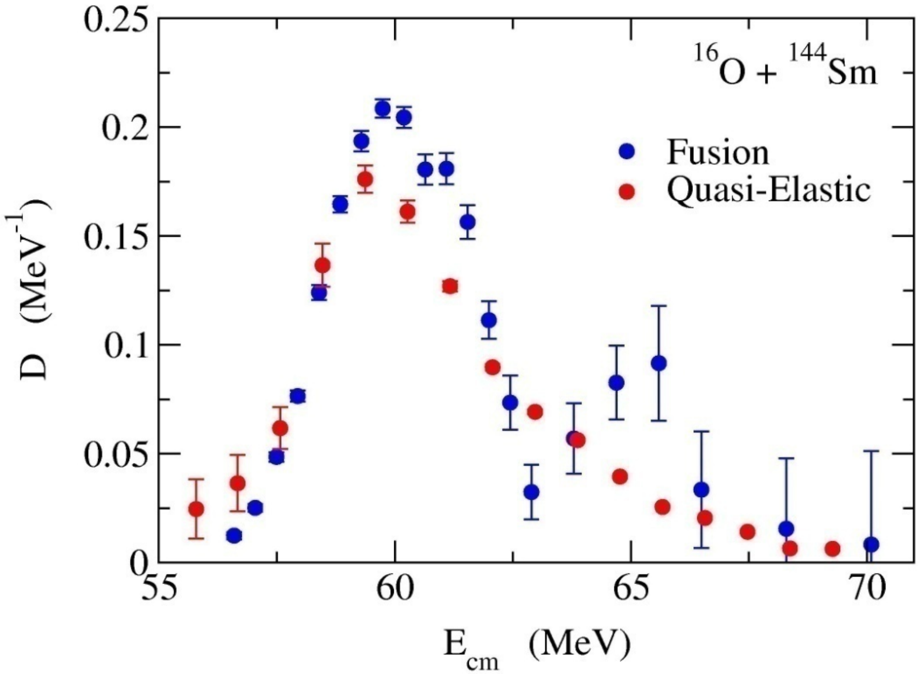
$$D_{\text{fus}}(E) = \frac{d^2(E\sigma_{\text{fus}})}{dE^2}$$

準弾性障壁分布

$$D_{\text{qel}}(E) = -\frac{d}{dE}\left(\frac{\sigma_{\text{qel}}(E,\pi)}{\sigma_R(E,\pi)}\right)$$



K.H. and N. Rowley, PRC69('04)054610



H. Timmers et al., NPA584('95)190

大まかな構造は非常に似通っている

準弾性散乱障壁分布を測定する利点

$$D_{\mathrm{qel}}(E) = -\frac{d}{dE}\left(\frac{\sigma_{\mathrm{qel}}(E,\pi)}{\sigma_R(E,\pi)}\right) \qquad D_{\mathrm{fus}}(E) = \frac{d^2(E\sigma_{\mathrm{fus}})}{dE^2}$$

- 両者とも核構造に敏感（例えばβ_4の符号）
- 実験精度が比較的悪くても大丈夫（1階微分 vs 2階微分）
- 核融合に比べて実験が容易

  準弾性散乱：後方にきた粒子をすべて押さえればよい

  核融合：recoil separator などを用いて核融合生成物をビームと分離する必要あり

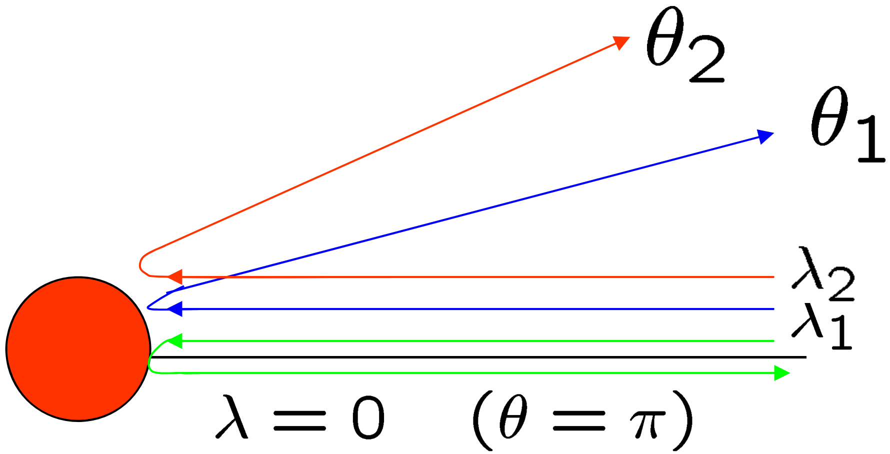
- 一つのビーム・ラインで様々な実効エネルギーの断面積を測定できる

  $\longleftrightarrow$ 散乱角度と遠心力ポテンシャルの関係

D_{qel} のスケーリング

実験 : $\theta = \pi$ での測定は不可

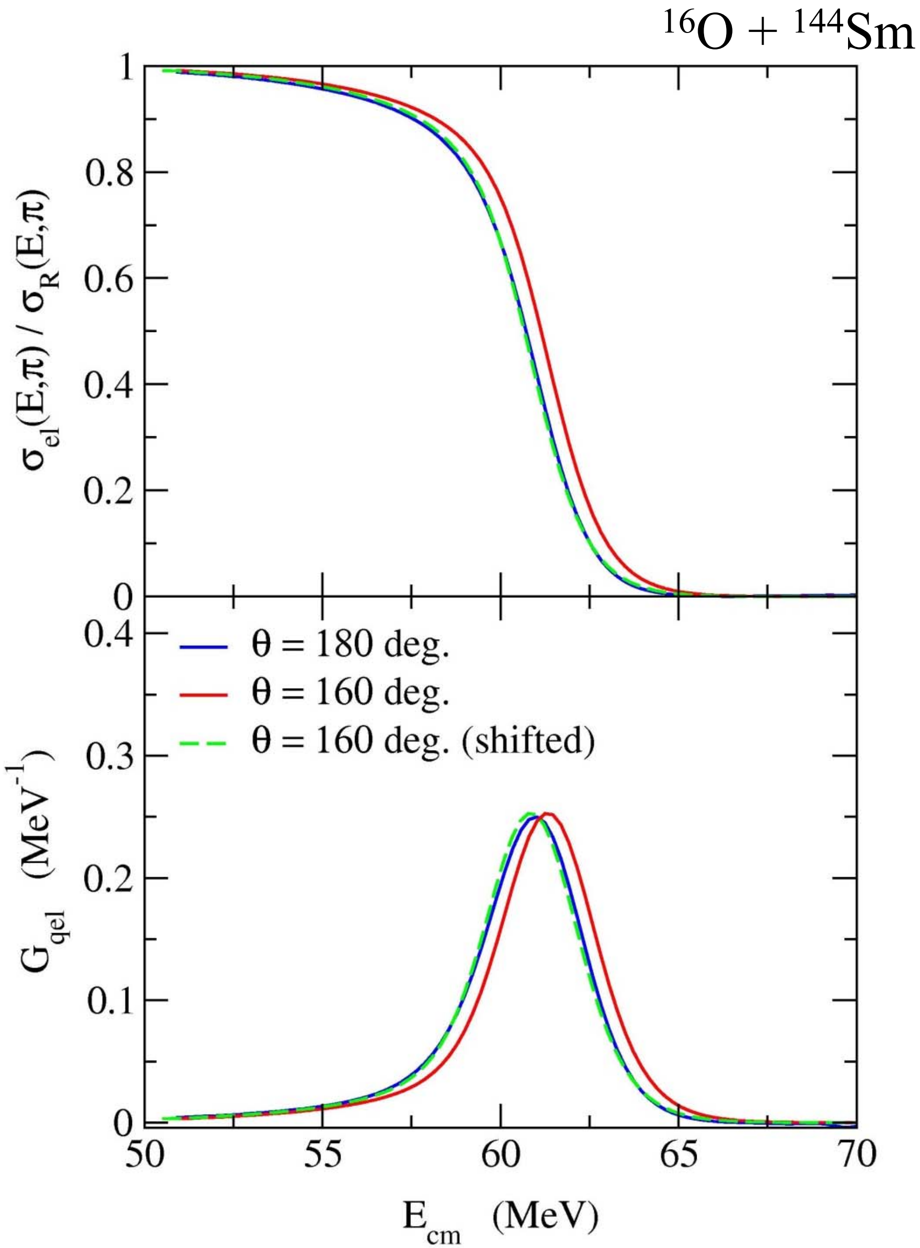
⟶ 異なる散乱角度θの関係?

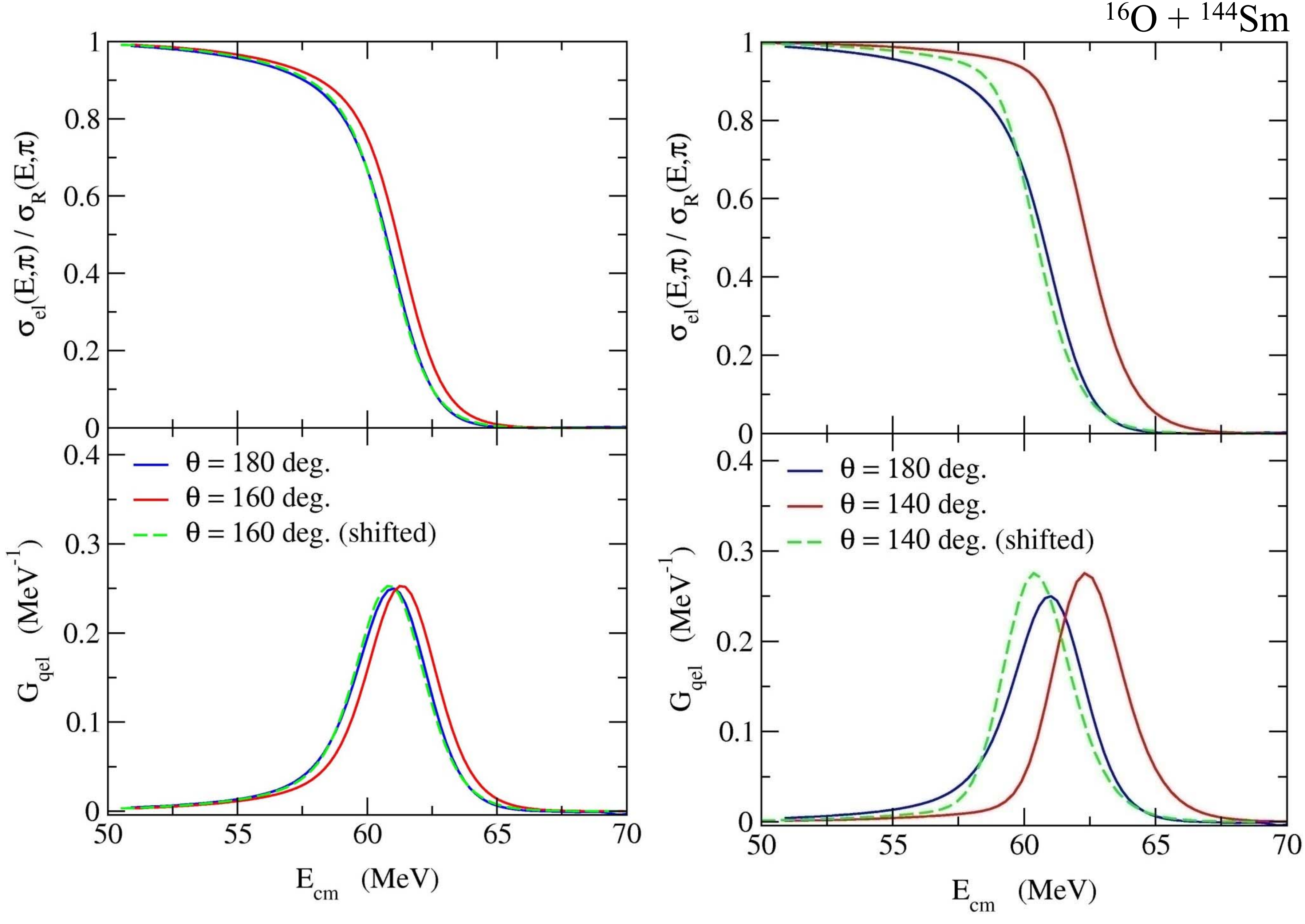


有効エネルギー:

$$\boxed{\begin{aligned} E_{\text{eff}} &\sim E - \frac{\lambda_c^2 \hbar^2}{2\mu r_c^2} \\ &= 2E \frac{\sin(\theta/2)}{1+\sin(\theta/2)} \\ D_{\text{qel}}(E,\theta) &\sim D_{\text{qel}}(E_{\text{eff}},\pi) \end{aligned}}$$

$$\lambda_c = \eta \cot(\theta/2)$$





$^{16}O + ^{144}Sm$
$\sigma_{el}(E,\pi) / \sigma_R(E,\pi)$
G_{qel} (MeV^{-1})
θ = 180 deg.
θ = 160 deg.
θ = 160 deg. (shifted)
θ = 140 deg.
θ = 140 deg. (shifted)
E_{cm} (MeV)

準弾性散乱障壁分布を測定する利点

$$D_{\rm qel}(E) = -\frac{d}{dE}\left(\frac{\sigma_{\rm qel}(E,\pi)}{\sigma_R(E,\pi)}\right) \qquad D_{\rm fus}(E) = \frac{d^2(E\sigma_{\rm fus})}{dE^2}$$

- 両者とも核構造に敏感（例えばβ_4の符号）
- 実験精度が比較的悪くても大丈夫（1階微分 vs 2階微分）
- 核融合に比べて実験が容易

準弾性散乱：後方にきた粒子をすべて押さえればよい

核融合：recoil separator などを用いて核融合生成物をビームと分離する必要あり

- 一つのビーム・ラインで様々な実効エネルギーの断面積を測定できる

$\longleftrightarrow$ 散乱角度と遠心力ポテンシャルの関係

➡ **ビーム強度が強くない不安定核ビームの実験に最適**

準弾性散乱を用いて不安定原子核の構造研究が可能

魔法数の変化に伴う B(E2) の変化が見えると面白いかも。。。

不安定核ビームを用いた実験

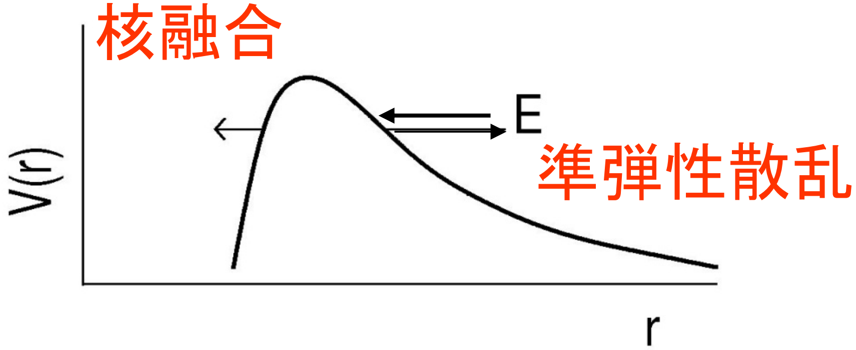
核融合障壁分布：高精度の核融合反応断面積が必要

不安定核ビーム：ビーム強度は安定核ビームに比べて弱い

→ 高精度のデータは現段階では望み薄（?）

↓

他の手段で障壁分布を引き出すことは可能か？



透過確率の代わりに
反射確率に注目

$$P + R = 1$$

⇕

準弾性散乱障壁分布

超重核生成反応におけるクーロン障壁の系統性

超重核生成反応: 非常に小さい断面積

反応に最適なエネルギーの選択が重要

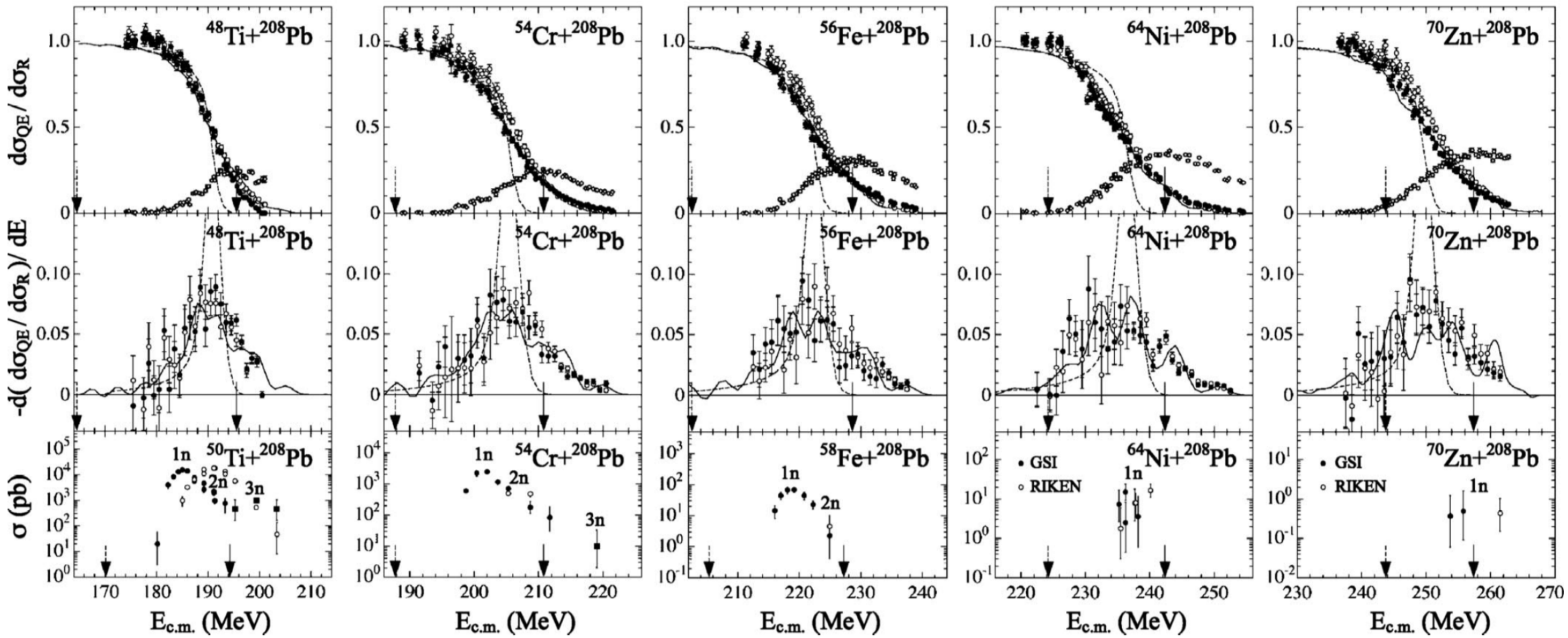
しかし、クーロン障壁に関する系統性は存在せず

準弾性障壁分布を用いた平均ポテンシャルの高さの測定

JAEA（S.Mitsuoka et al.)

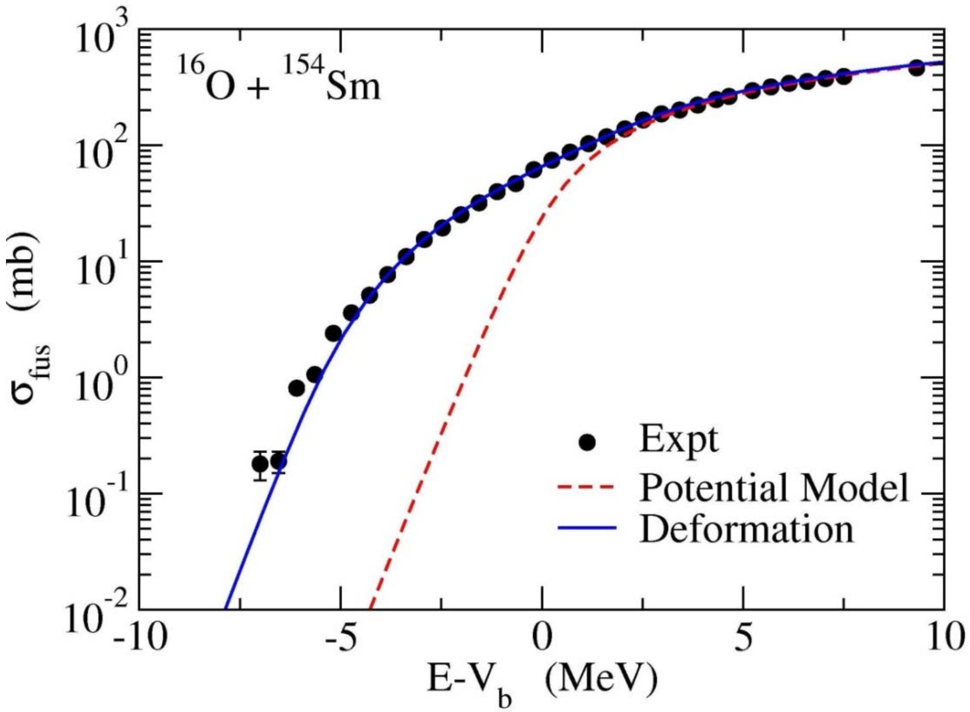
Cold fusion reactions: ^{50}Ti,^{54}Cr,^{58}Fe,^{64}Ni,^{70}Zn+^{208}Pb,^{209}Bi

系統的な障壁分布の測定



S. Mitsuoka et al., PRL99(‘07)182701

不安定核を用いた核融合反応

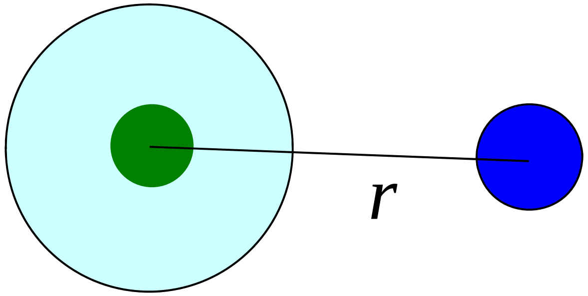


安定核の核融合反応では、原子核間相対運動と散乱核の内部自由度(内部励起)が結合することで、核融合反応断面積が増大(トンネル領域)

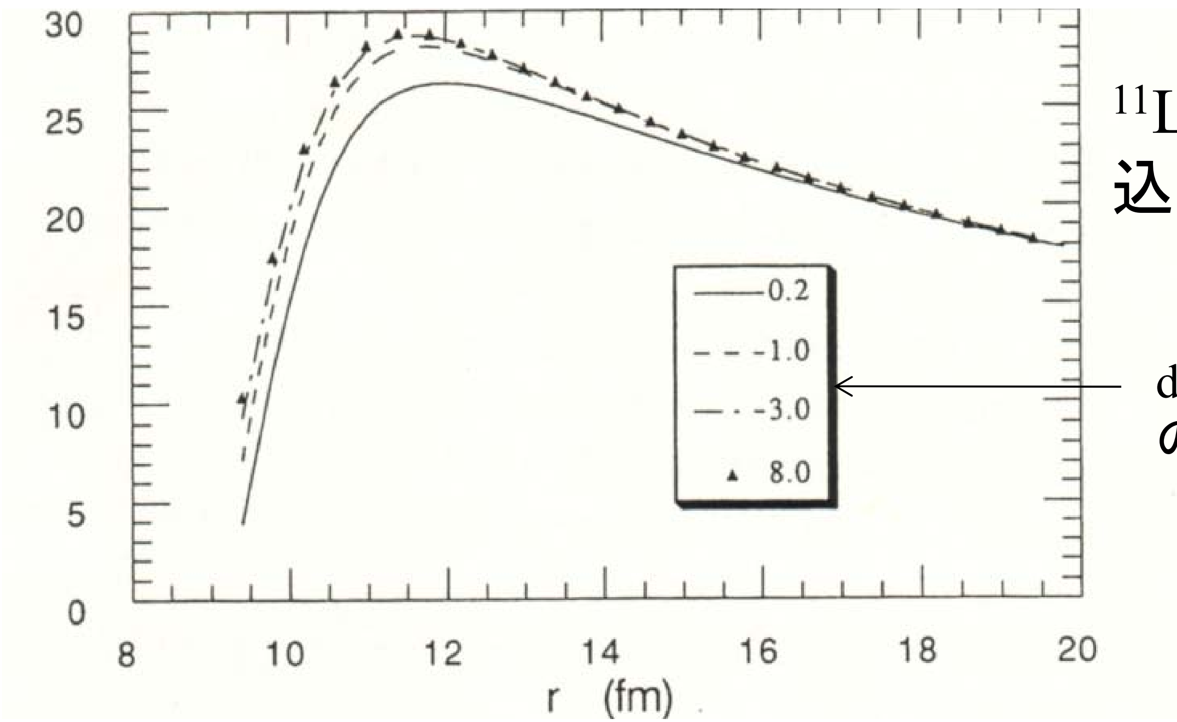
➡ 不安定核(弱束縛核)を用いるとどうなるか?
核融合反応断面積は増大? 変化なし? 減少?

2つの効果

1. ハロー構造による重イオン間ポテンシャルの低下 ➡ 核融合反応断面積の増大



ハロー → 広がった密度分布
→ 遠方から核力(引力)がはたらく



^{11}Li+^{208}Pb に対する2重畳み込みポテンシャル

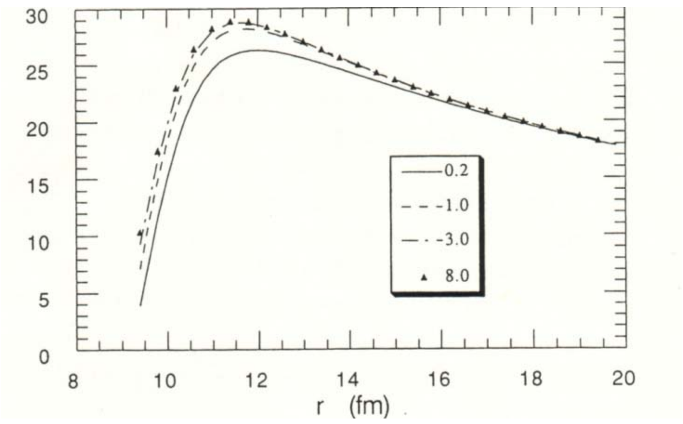
dineutron クラスターの分離エネルギー

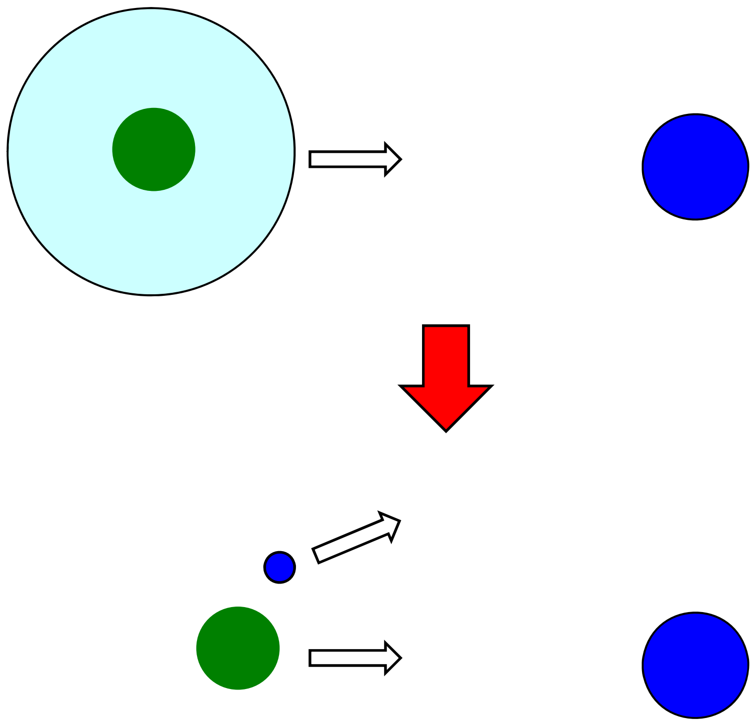
N. Takigawa and H. Sagawa, PLB265('91)23

2つの効果

1. ハロー構造による重イオン間ポテンシャルの低下
2. 分解（breakup）の効果

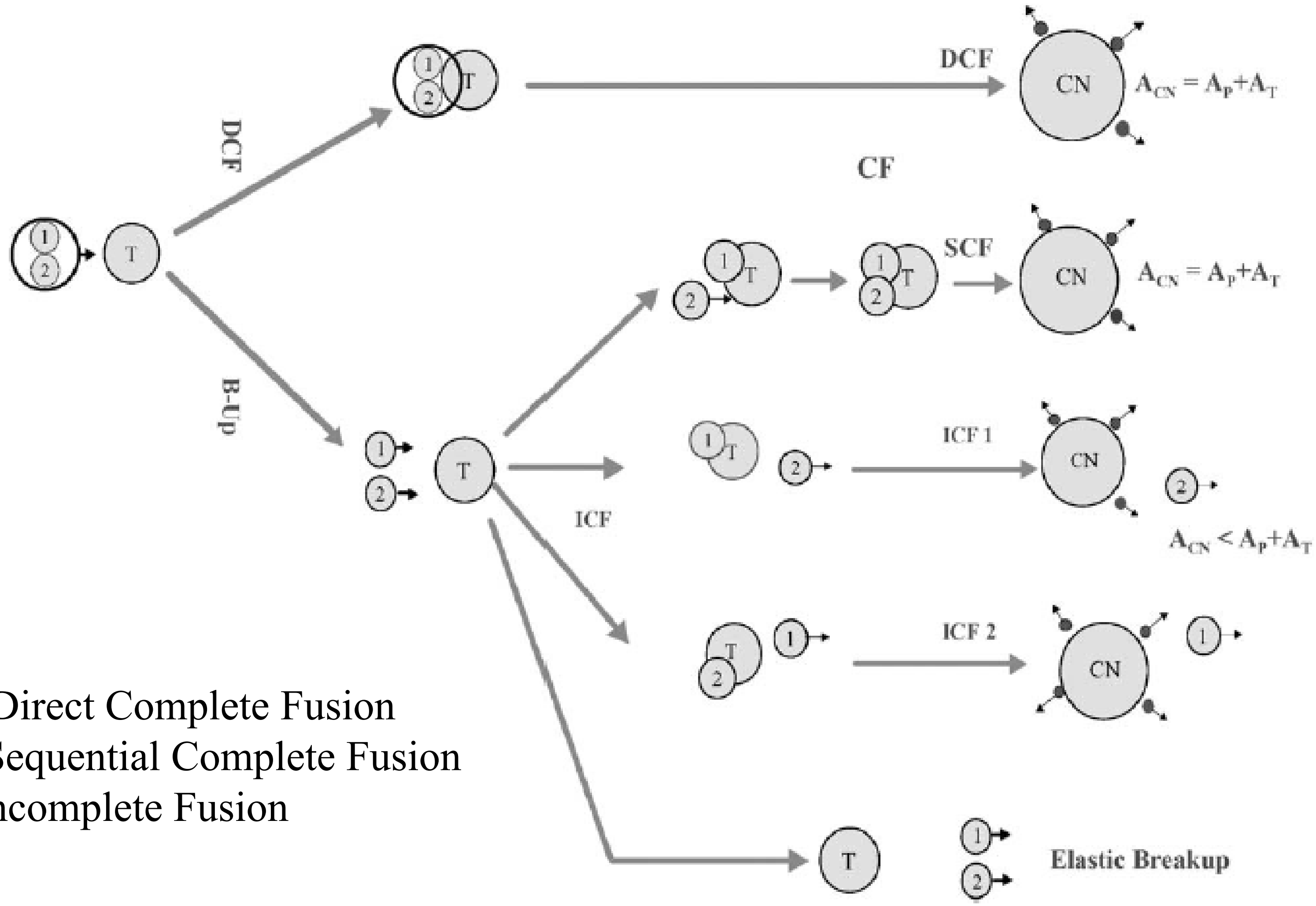
これはあまり自明ではない





- 分解すると障壁の低下がなくなるので核融合反応断面積は減少?
- 安定核と同様、結合チャンネル効果により断面積は増大?
- もっと複雑な分解の動的な効果?

複雑な反応プロセス

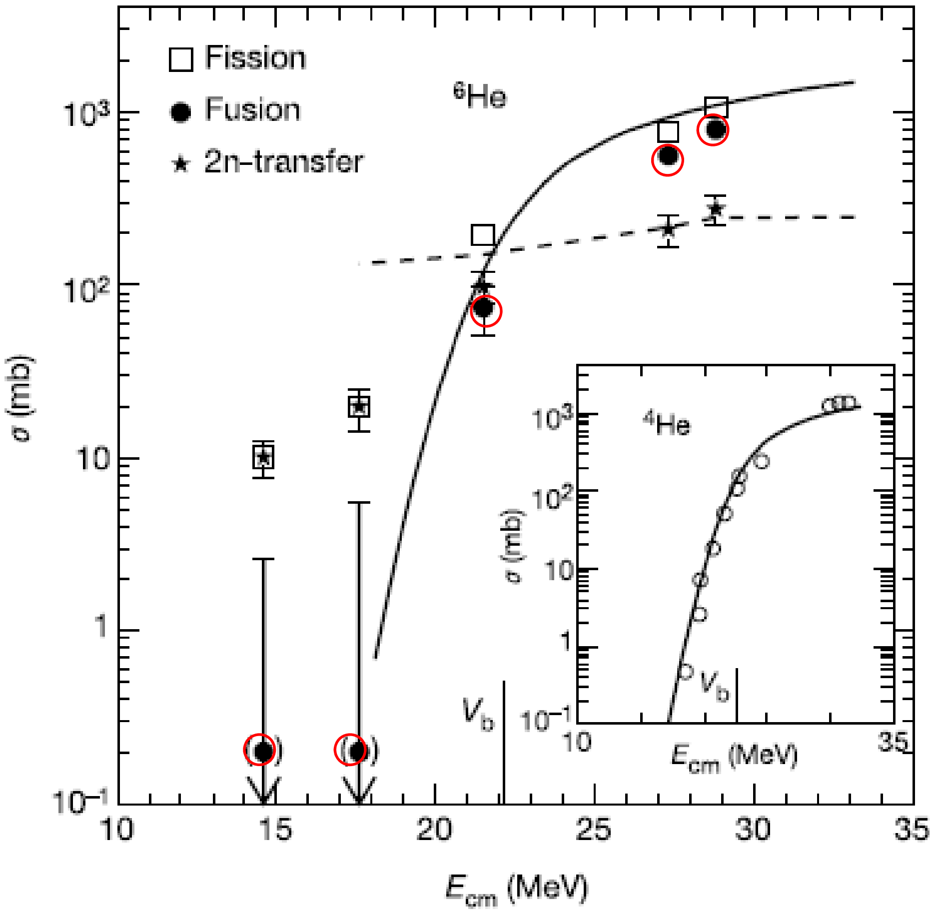


DCF=Direct Complete Fusion
SCF=Sequential Complete Fusion
ICF=Incomplete Fusion

L.F. Canto, P.R.S. Gomes, R. Donangelo, and M.S. Hussein, Phys. Rep. 424(‘06)1

実際の実験データ

$^{6}He + ^{238}U$



R. Raabe et al., Nature 431 ('04)823

- 核融合反応断面積は、ポテンシャル模型の予測と矛盾していない（ように見える）

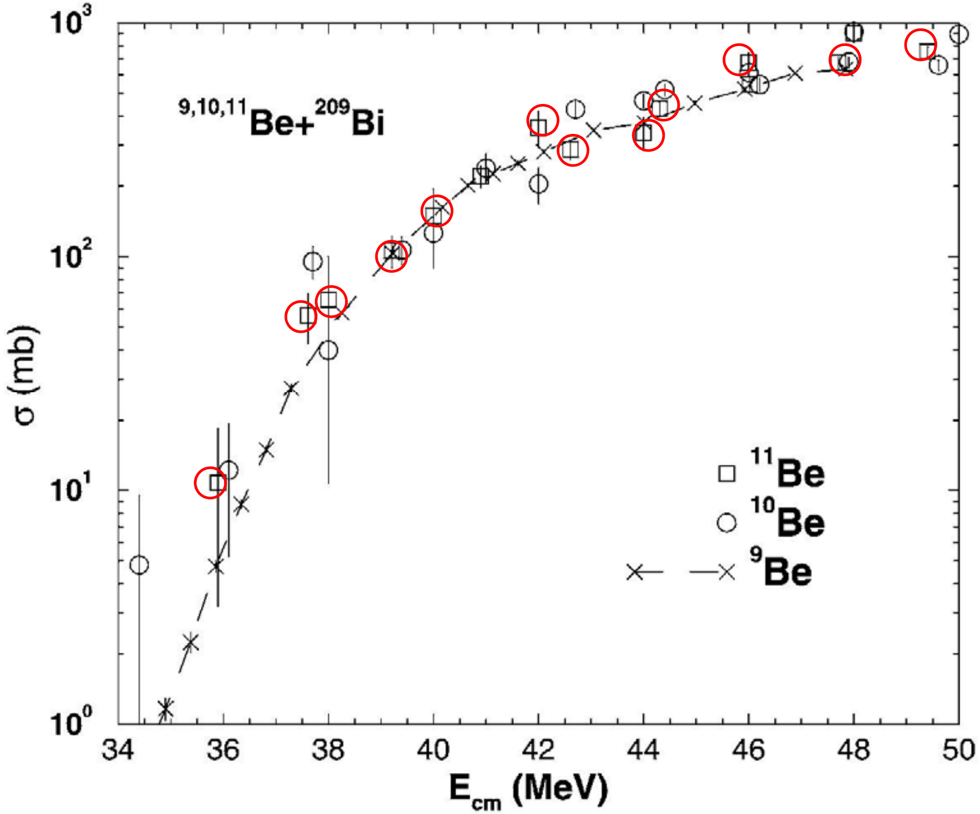
⇩

ポテンシャルの低下による
増幅と分解の効果による減少
が打ち消しあい?

- 大きな2中性子移行反応の断面積

実際の実験データ

^{9,10,11}Be + ^{209}Bi



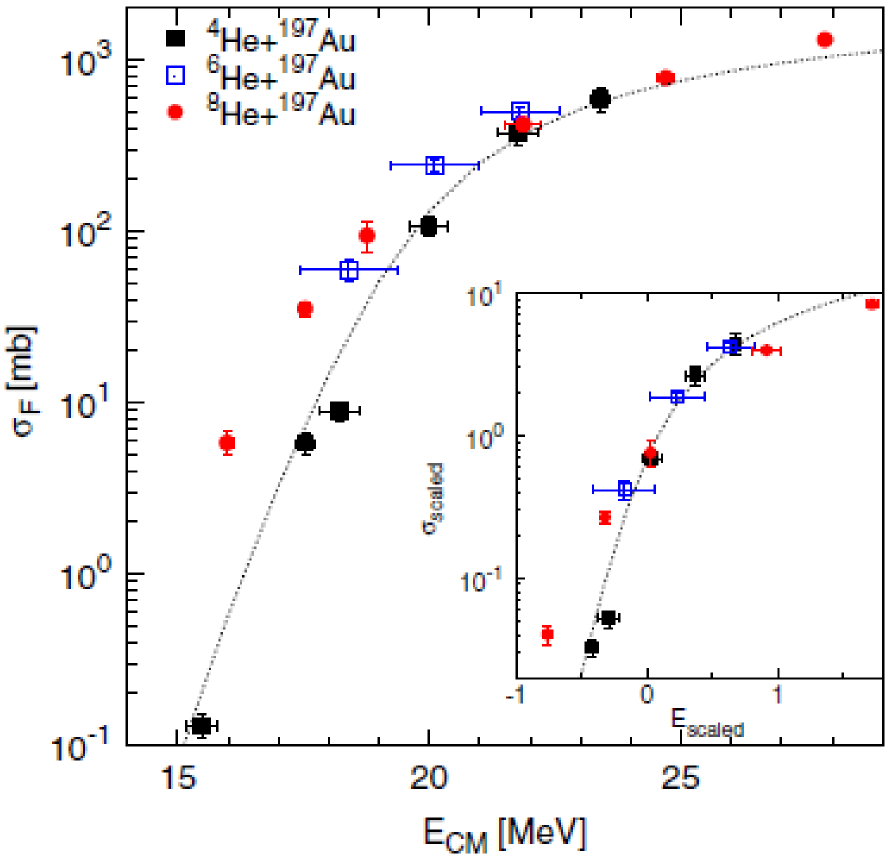
^{11}Be は特に変わった振る舞いをしない

C. Signorini et al., NPA735 ('04) 329

Padova + RIKEN collaboration

実際の実験データ

^{4,6,8}He + ^{197}Au



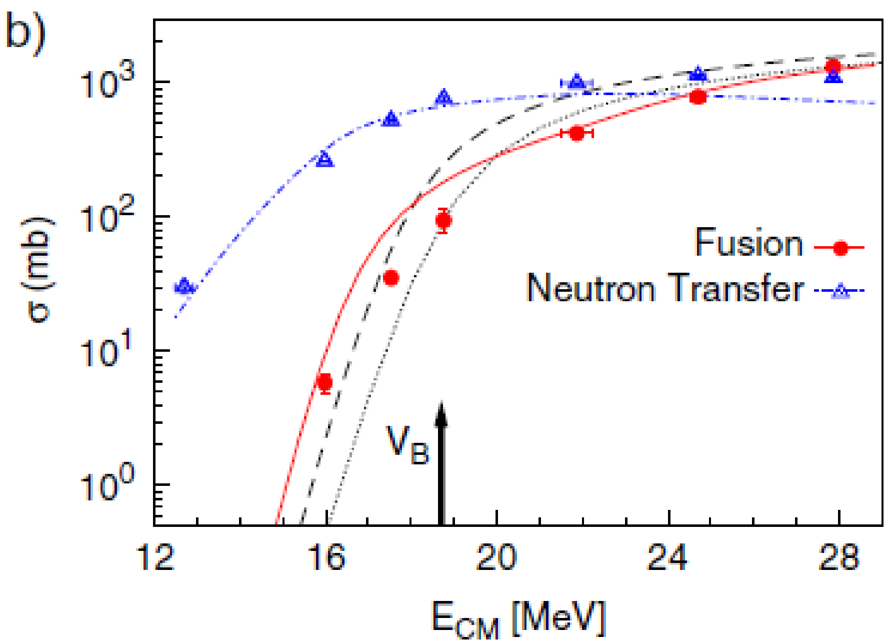
- some enhancement compared to ^{4}He
- similar behaviour between ^{6}He and ^{8}He
  (can we understand this?)

- no huge effects of breakup/transfer!?

A. Lemasson et al., PRL103('09)232701

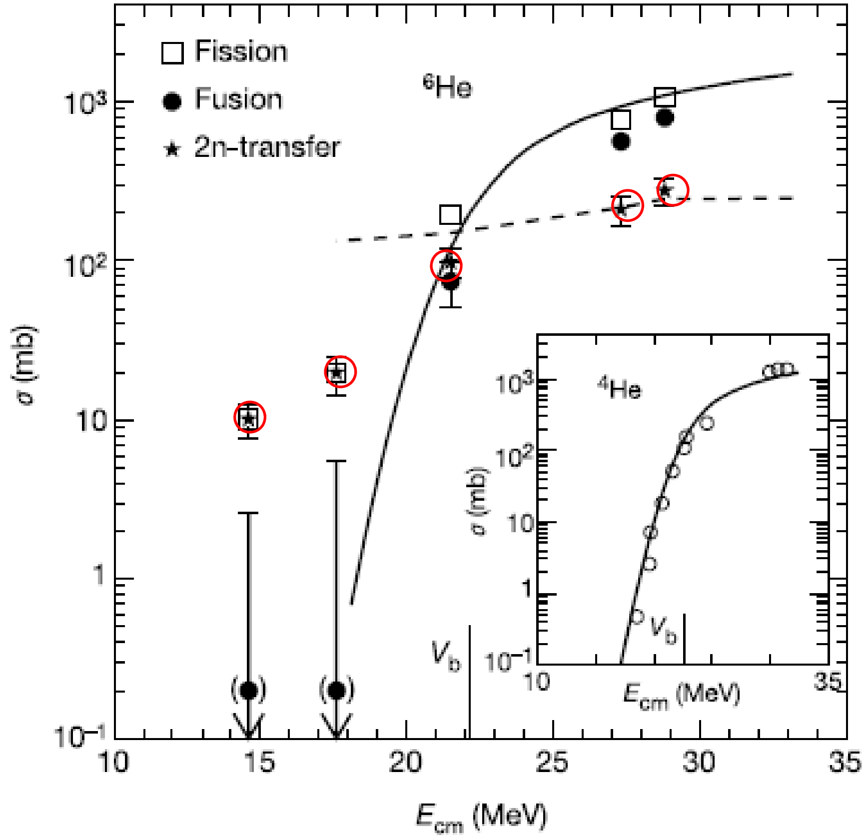
➢大きな核子移行反応断面積

$^{8}He + ^{197}Au$

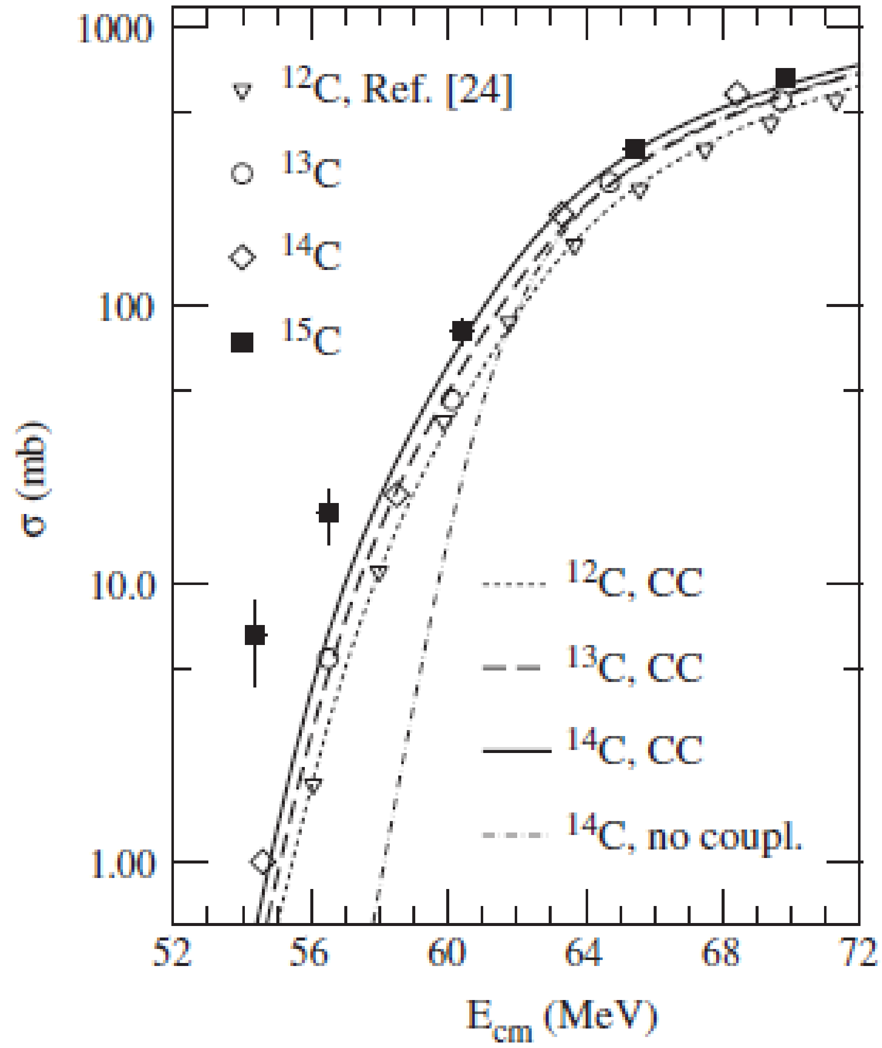


A. Lemasson et al.,
PRL103('09)232701

$^{6}He + ^{238}U$



R. Raabe et al.,
Nature 431 ('04)823



Very recent data for

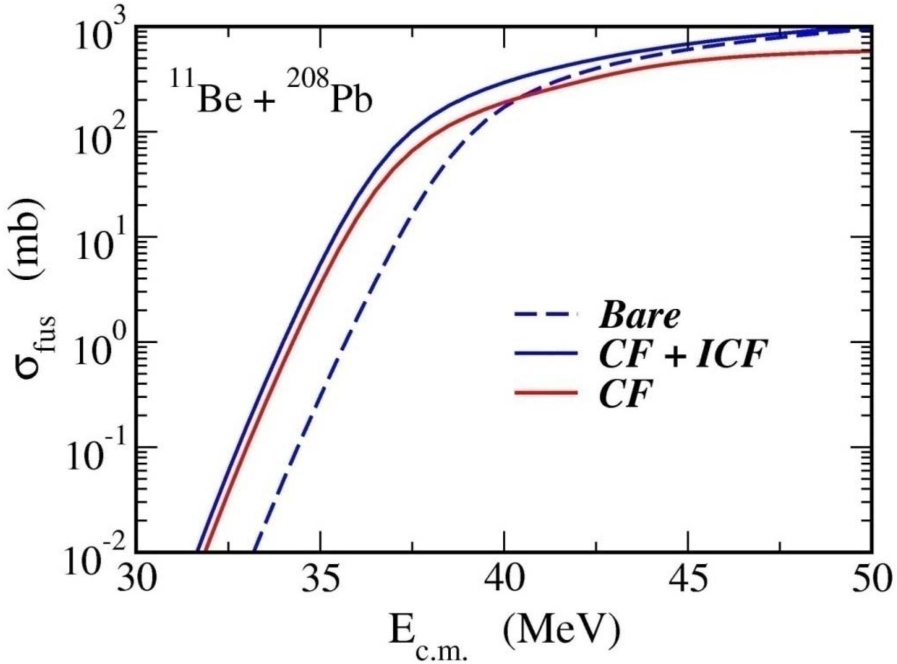
$^{12,13,14,15}C + {}^{232}Th$

M. Alcorta et al.,
PRL106('11)172701

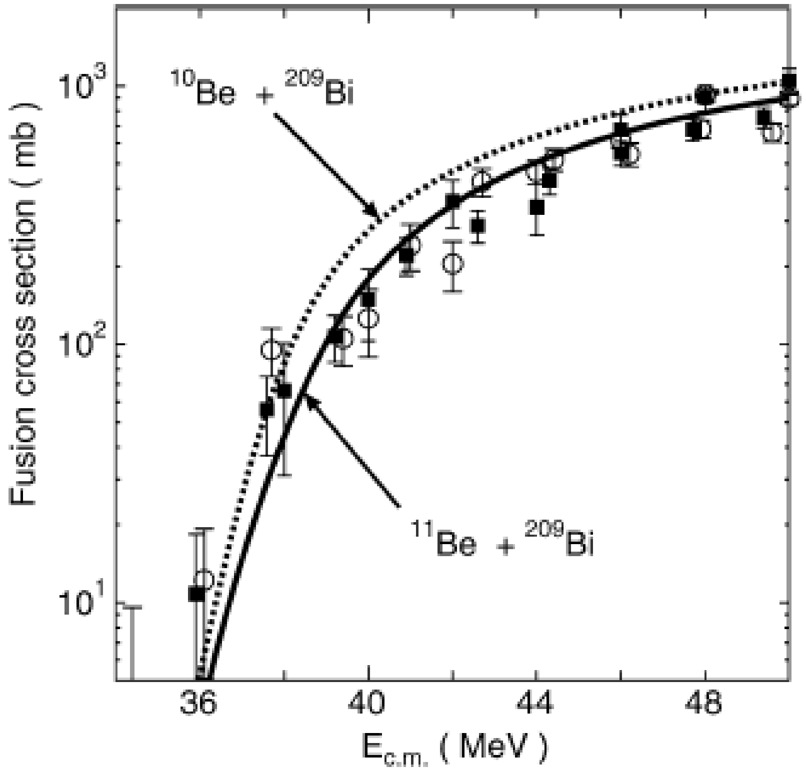
^{15}C: 1n halo nucleus

$\longrightarrow$ enhanced fusion cross sections

理論計算では、連続状態の効果と移行反応の効果をきちんと取り入れる必要がある。（中々大変。）



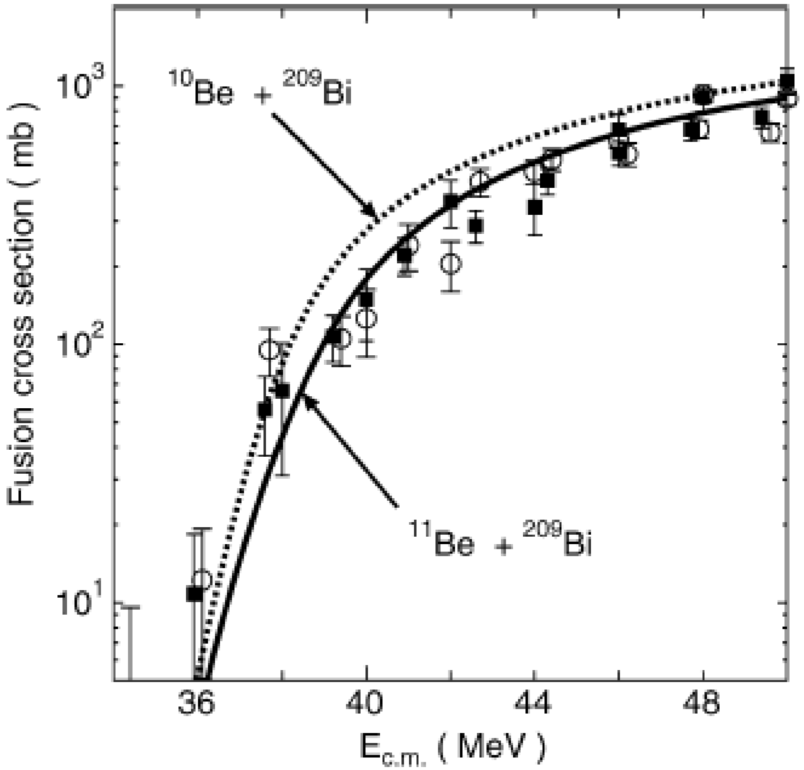
CDCC的な計算
ただし連続状態間の結合なし

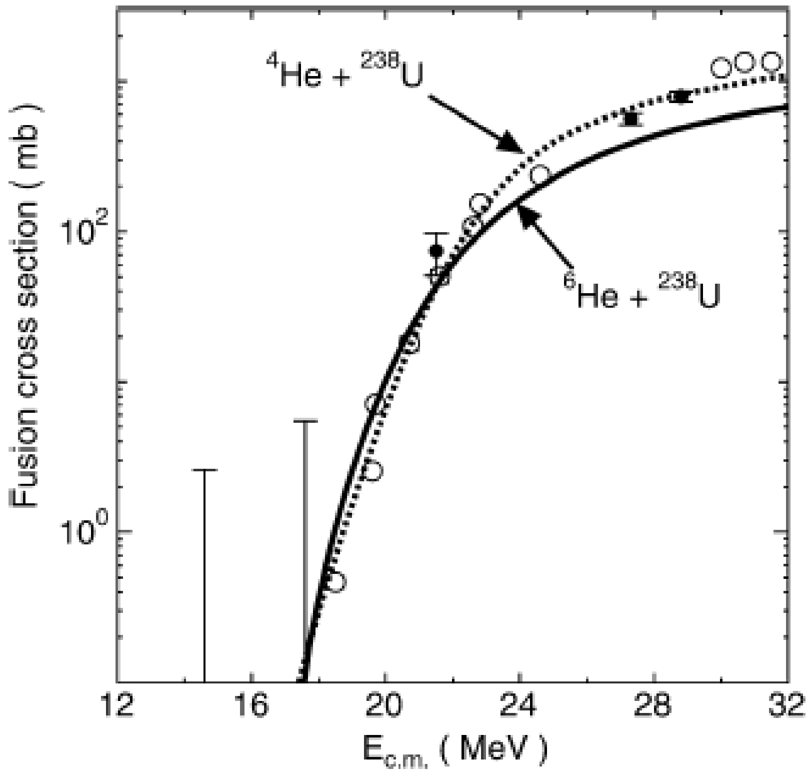


時間依存アプローチ
分解、移行の効果は
自動的に入る

K. Hagino, A. Vitturi, C.H. Dasso, and S.M. Lenzi, Phys. Rev. C61 ('00) 037602

M. Ito, K. Yabana, T. Nakatsukasa, and M. Ueda, PLB637('06)53





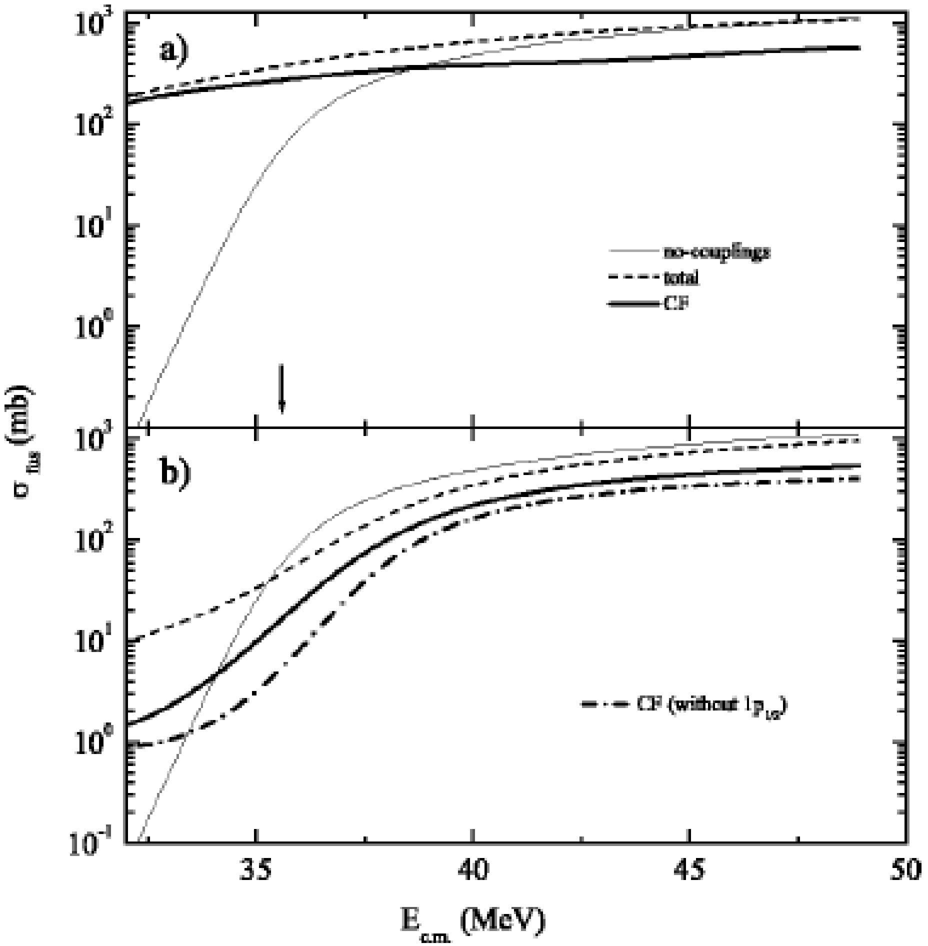
時間依存アプローチ
分解、移行の効果は
自動的に入る

（dineutron クラスター模型）

M. Ito, K. Yabana, T. Nakatsukasa, and M. Ueda, PLB637('06)53

（参考）連続状態間結合の効果

$^{11}Be + ^{208}Pb$



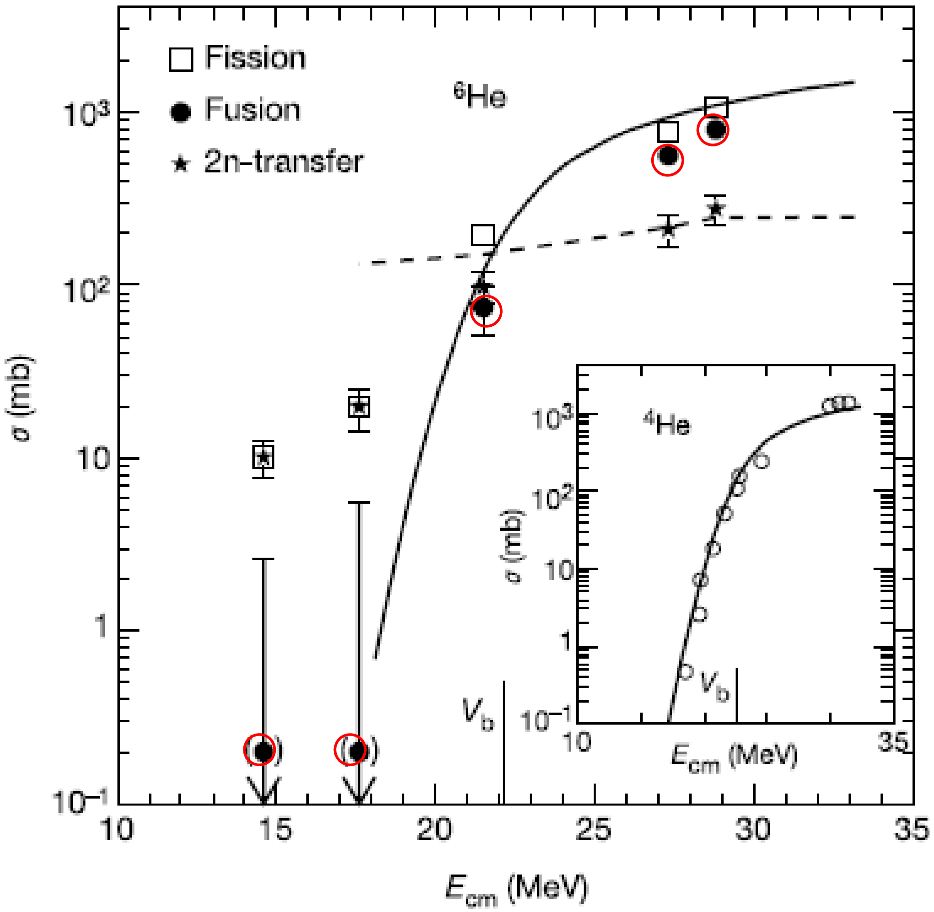
連続状態間結合なし

連続状態間結合あり

A. Diaz-Torres and I.J. Thompson, PRC65('02)024606

（補足）

^{6}He + ^{238}U



R. Raabe et al., Nature 431 ('04)823

➢核融合反応断面積は、ポテンシャル模型の予測と矛盾していない（ように見える）

⇩

ポテンシャルの低下による増幅と分解の効果による減少が打ち消しあい?

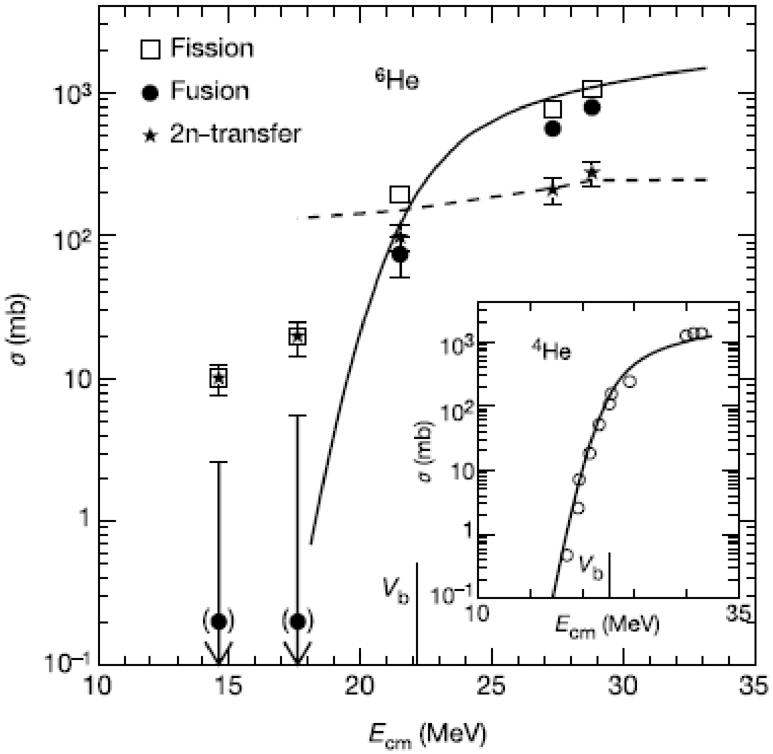
⬆

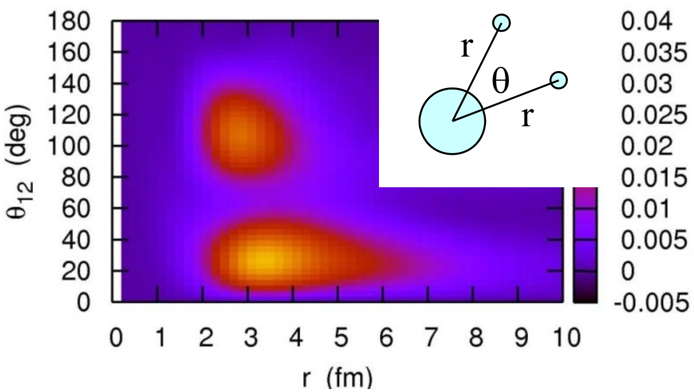
もっとエネルギーが低くなるとどうなるか?
（まだ解決していない）

cf. P.R.S. Gomes, L.F. Canto, J. Lubian, and M.S. Hussein, arXiv: 1009.0573

対移行反応

^{6}He + ^{238}U



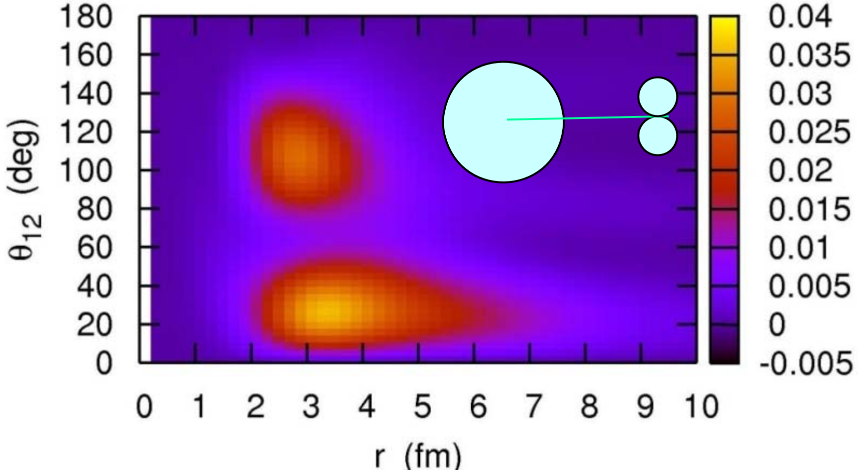


大きな 2n 移行断面積

中性子過剰核の反応では
（分解に加えて）
核子移行がキーワードの一つ

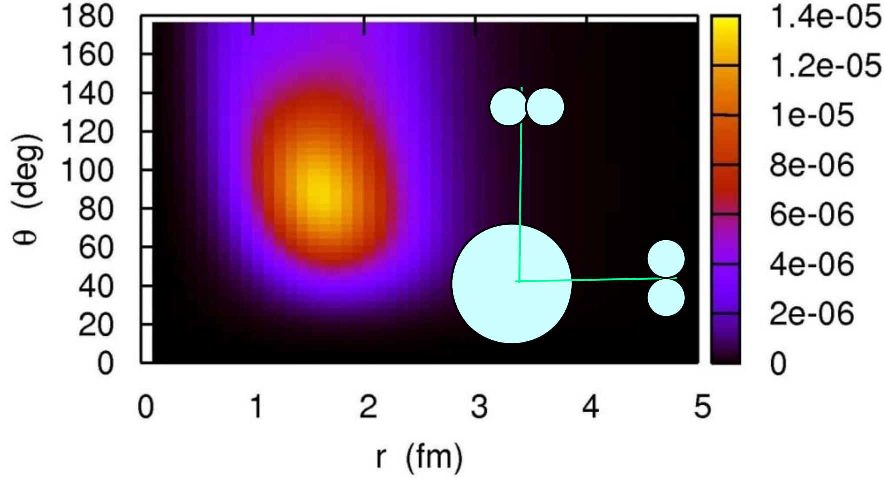
特に dineutron相関との関係で
対移行反応は今後ますます
重要な研究課題

$^6He = {}^4He$ + "dineutron"

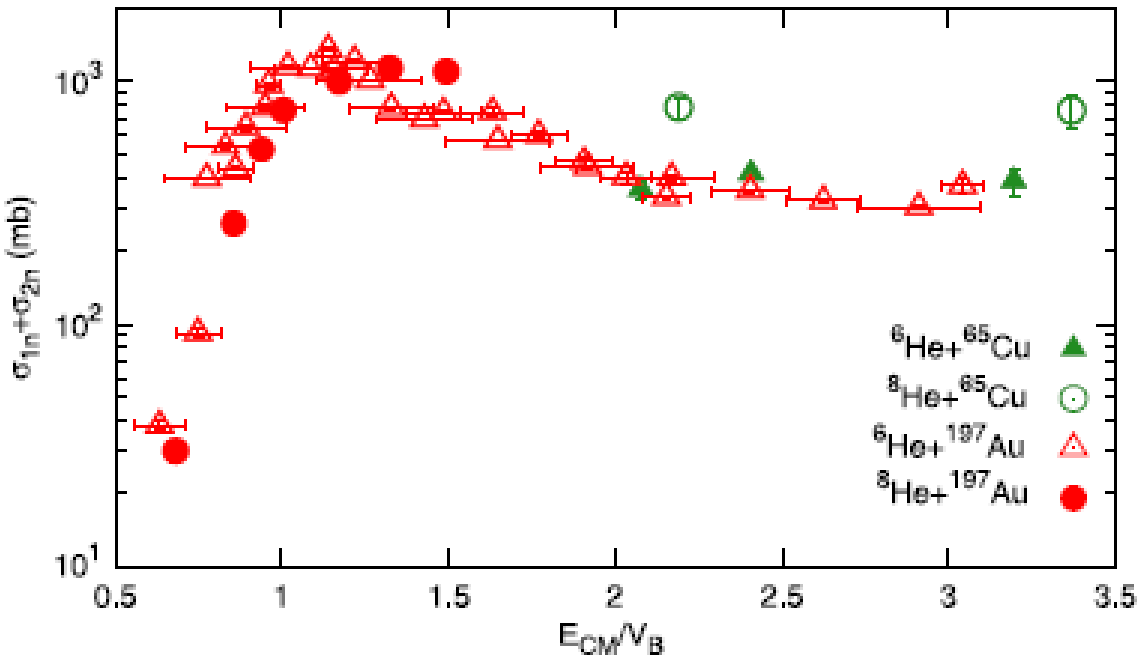


K.H. and H. Sagawa, PRC72('05)044321

$^8He = {}^4He$ + two "dineutrons"



K.H., N. Takahashi, and H. Sagawa, PRC77('08)054317.



increased transfer cross sections going from ^6He to ^8He

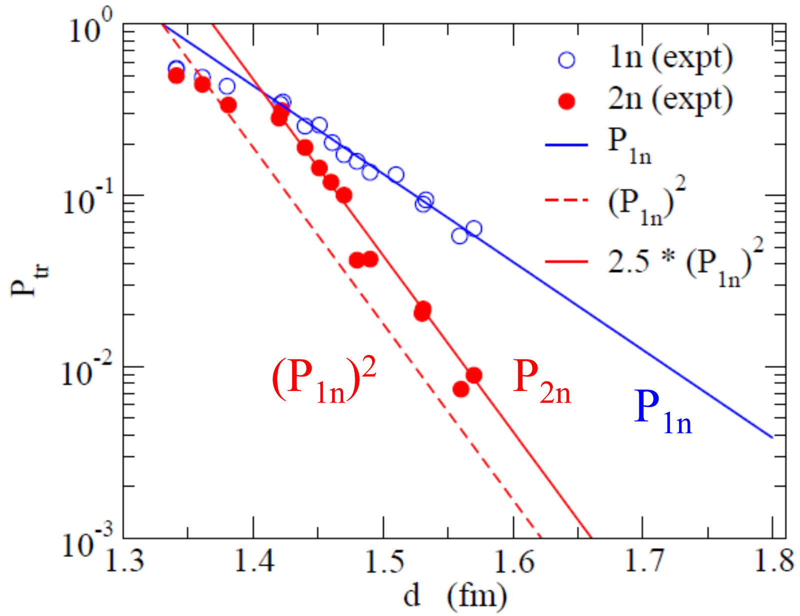
A. Lemasson et al., PLB697('11)454

対相関と対移行反応

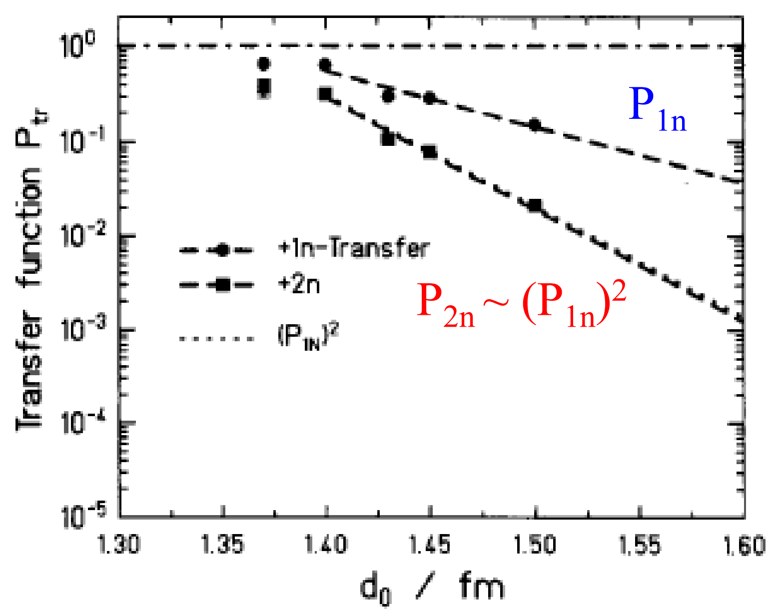
対移行反応の確率は対相関を強く反映する

対移行の確率：　$P_{\rm tr} \sim \dfrac{d\sigma_{\rm tr}}{d\sigma_R}$

^{112}Sn + ^{120}Sn



^{144}Sm + ^{208}Pb

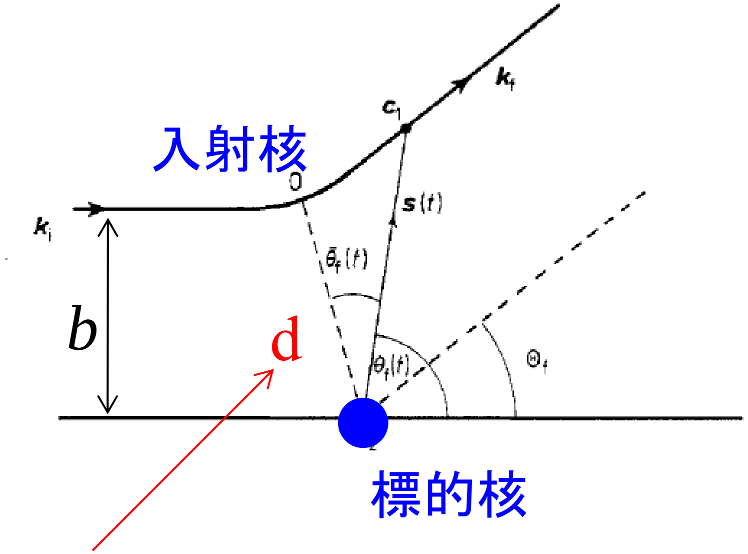


W. von Oertzen et al., Z. Phys. A326('87)463　　J. Speer et al., PLB259('91)422

$R_{\rm min} = d\,(A_P^{1/3} + A_T^{1/3})$　はラザフォード軌道の最近接距離

（補足）ラザフォード軌道

＊高田健次郎先生
「インターネットセミナー」
2-5-A章が分かりやすい



クーロン力

$$V_c(r) = \frac{Z_P Z_T e^2}{r}$$

による古典的な軌道

最近接距離 (the distance of closest approach)

$$d = \frac{Z_P Z_T e^2}{2E}\left[1 + \sqrt{1 + \cot^2\frac{\theta}{2}}\right]$$

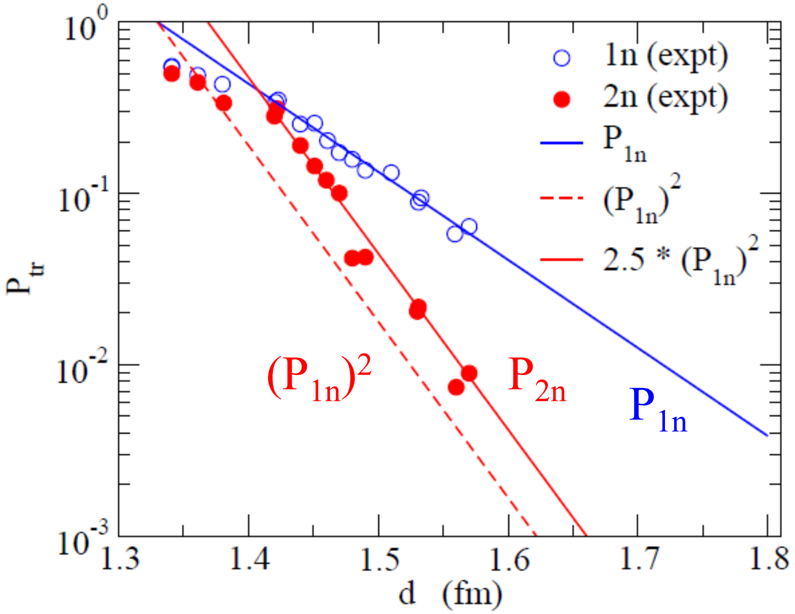
θ は散乱角

最近接距離は入射エネルギー E と散乱角 θ の関数

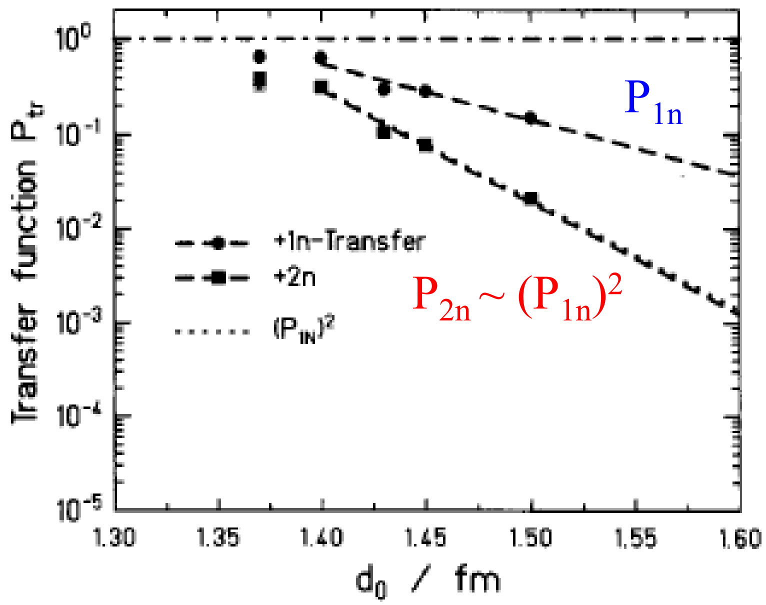
対相関と対移行反応

対移行反応の確率は対相関を強く反映する

$^{112}Sn + ^{120}Sn$



$^{144}Sm + ^{208}Pb$



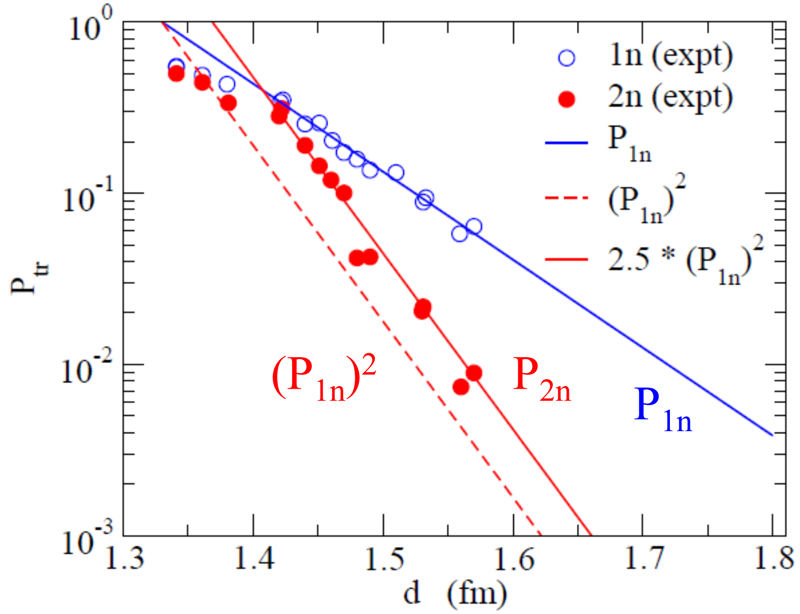
- $^{112}Sn + ^{120}Sn$ 反応では、単純な $(P_{1n})^2$ に比べて2中性子移行確率が増大
- 対相関が働かない(セミ)魔法数の原子核は2中性子移行確率の増大は見られない

2中性子移行確率は対相関に敏感

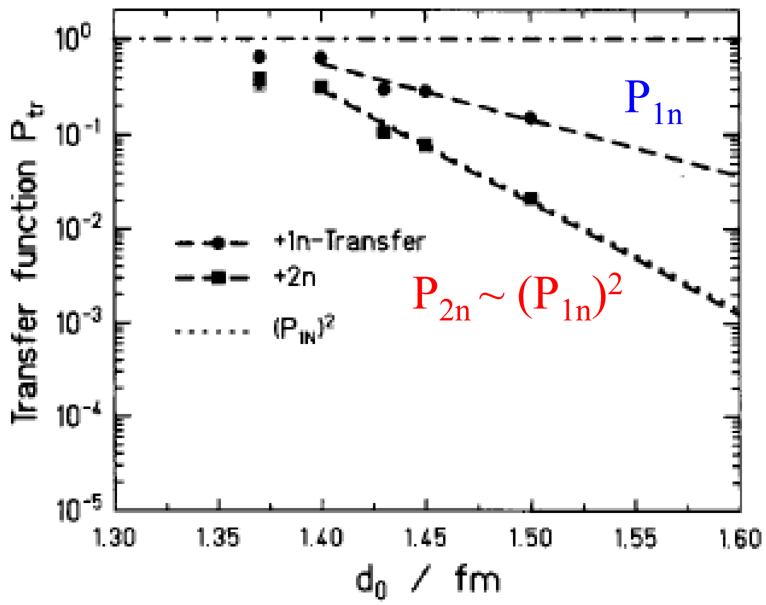
対相関と対移行反応

対移行反応の確率は対相関を強く反映する

$^{112}Sn + ^{120}Sn$



$^{144}Sm + ^{208}Pb$



（注）ペアリングの強い系でも $1n$ 移行の方が $2n$ 移行に比べて
とても多い

^{62}Ni + ^{206}Pb 多中性子移行反応

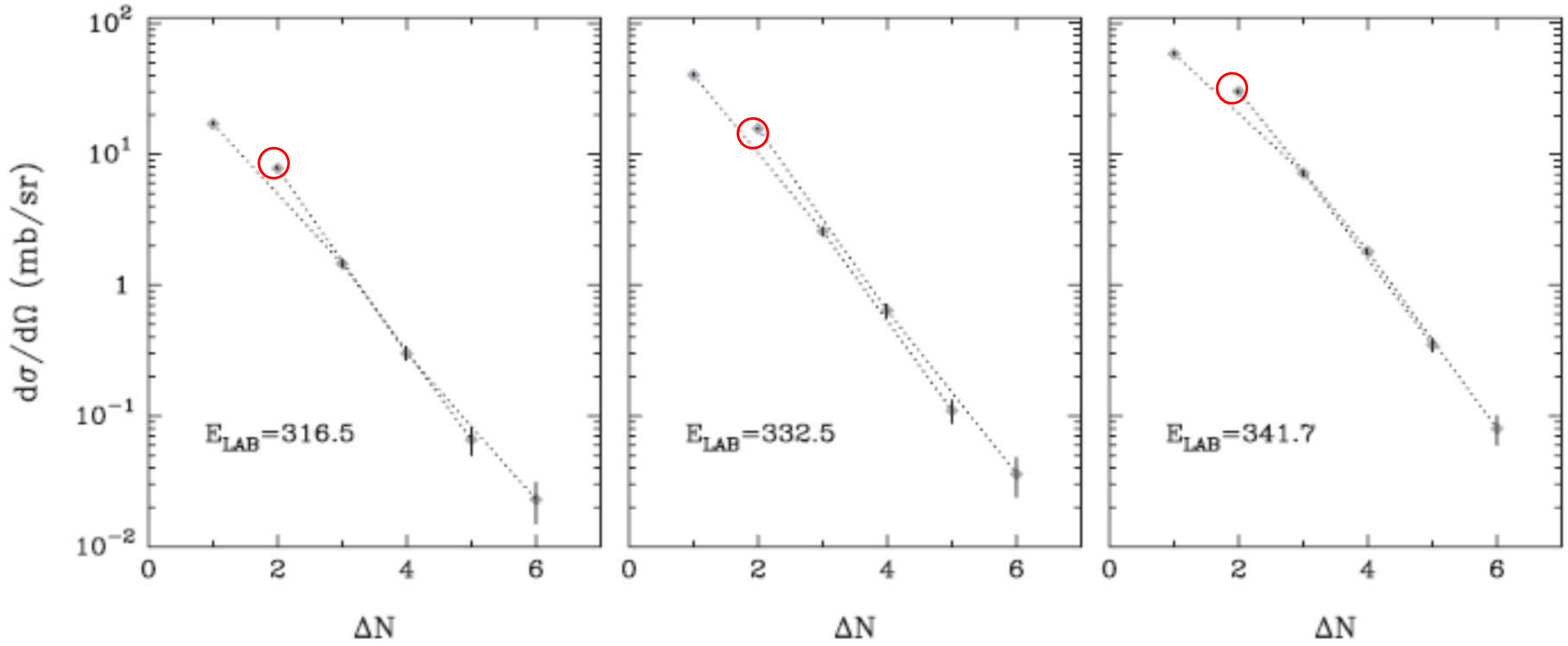


Figure 38. Results for the one- to six-neutron transfers from the reaction ^{62}Ni + ^{206}Pb at different energies covering overlap parameters up to $d_0 = 1.4$ fm. The small enhancement of the two-neutron transfer can be seen. The deviation of the higher-order transfers from the exponential fall-off defined by the 1n transfer defines here the enhancement factor EF (see also figures 23 and 46).

W. von Oertzen and A. Vitturi,
Rep. Prog. Phys. 64('01)1247

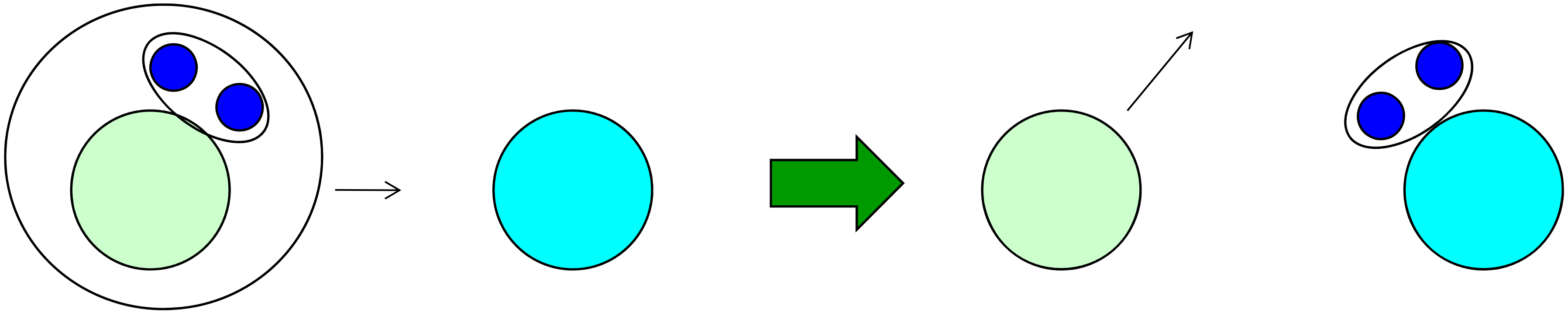
2n 移行確率の増大

⟺ di-neutron 相関との関係は?

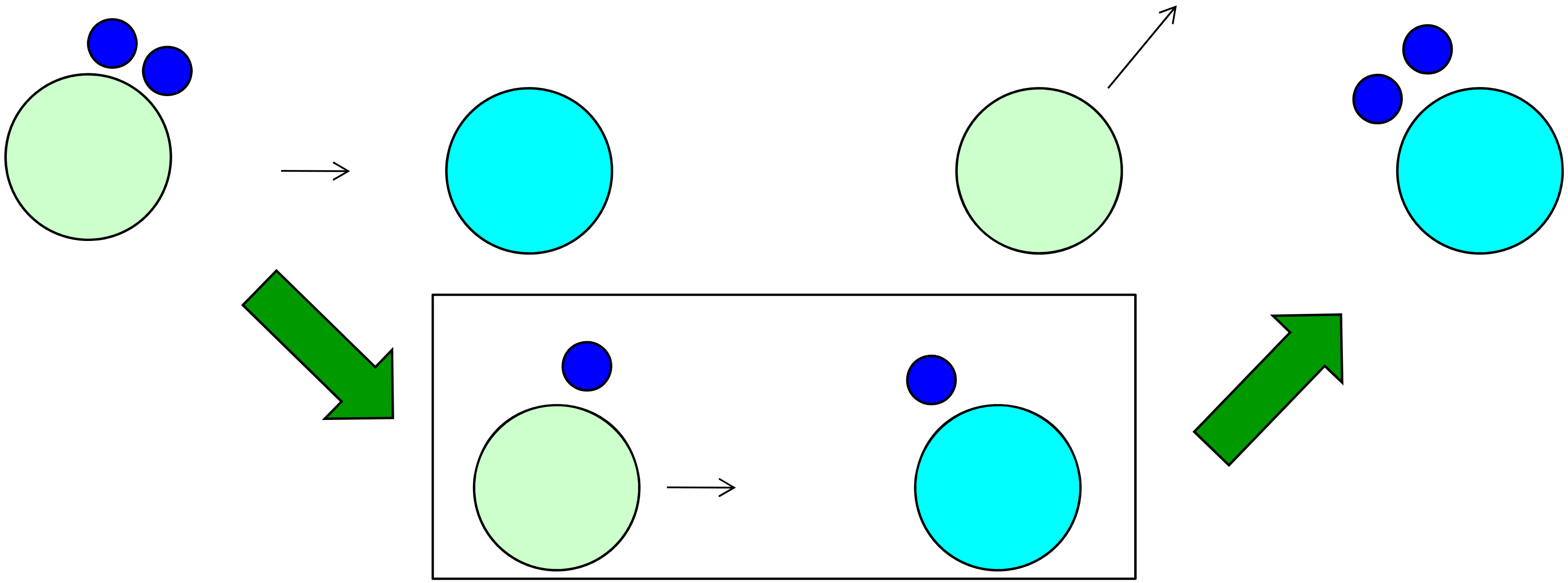
⟶ これからの課題

1ステップか2ステップか?

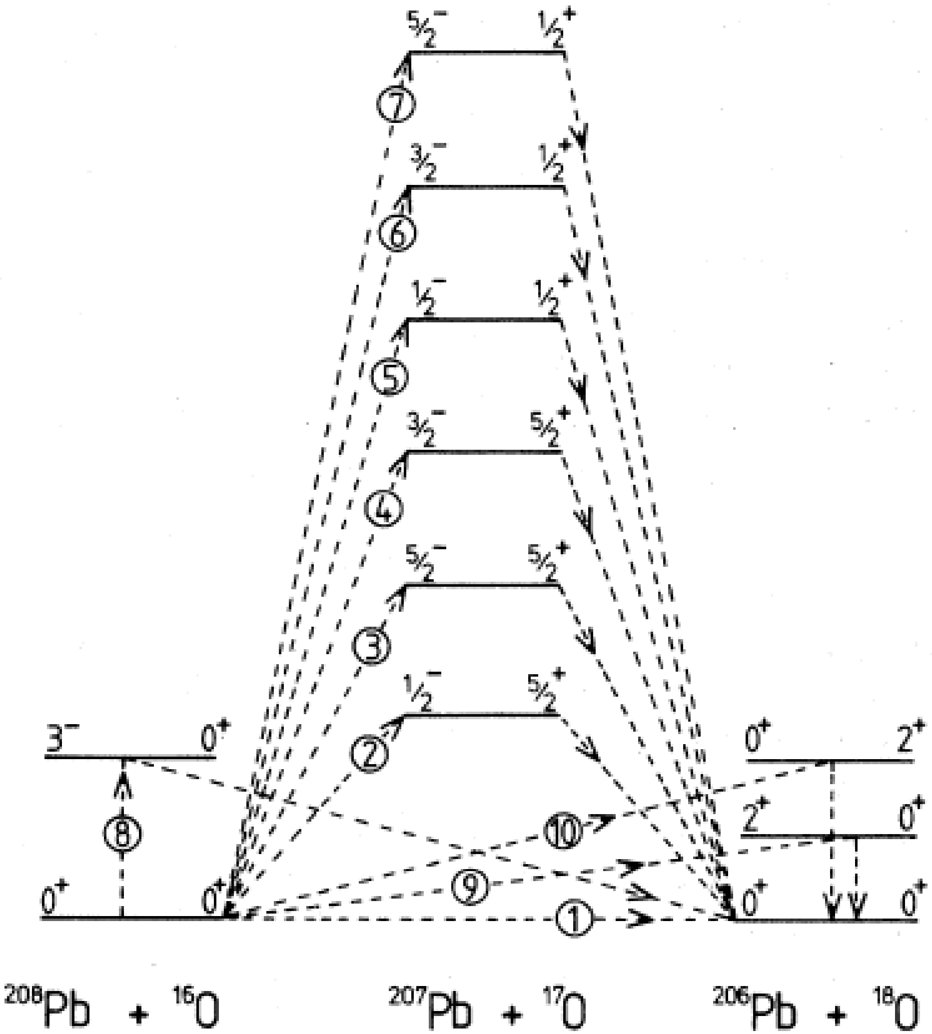
1ステップ（simultaneous/direct）

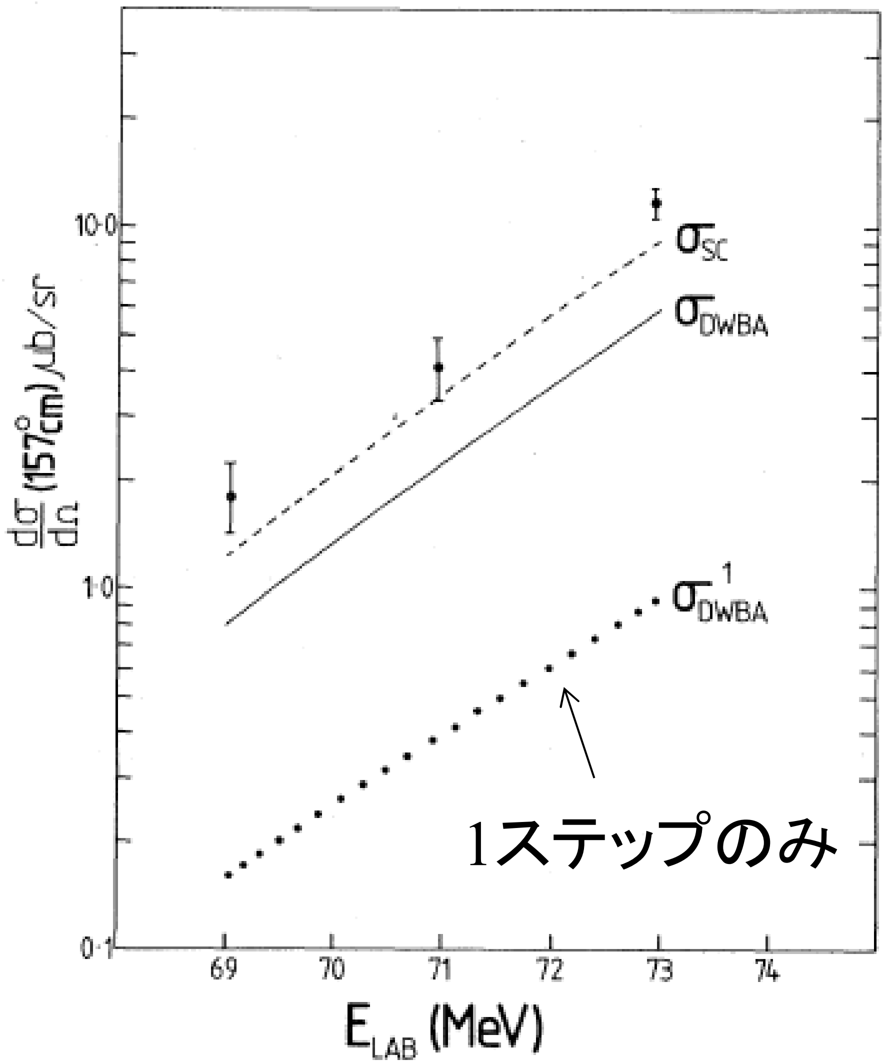


2ステップ（sequential）:



1ステップか2ステップか?





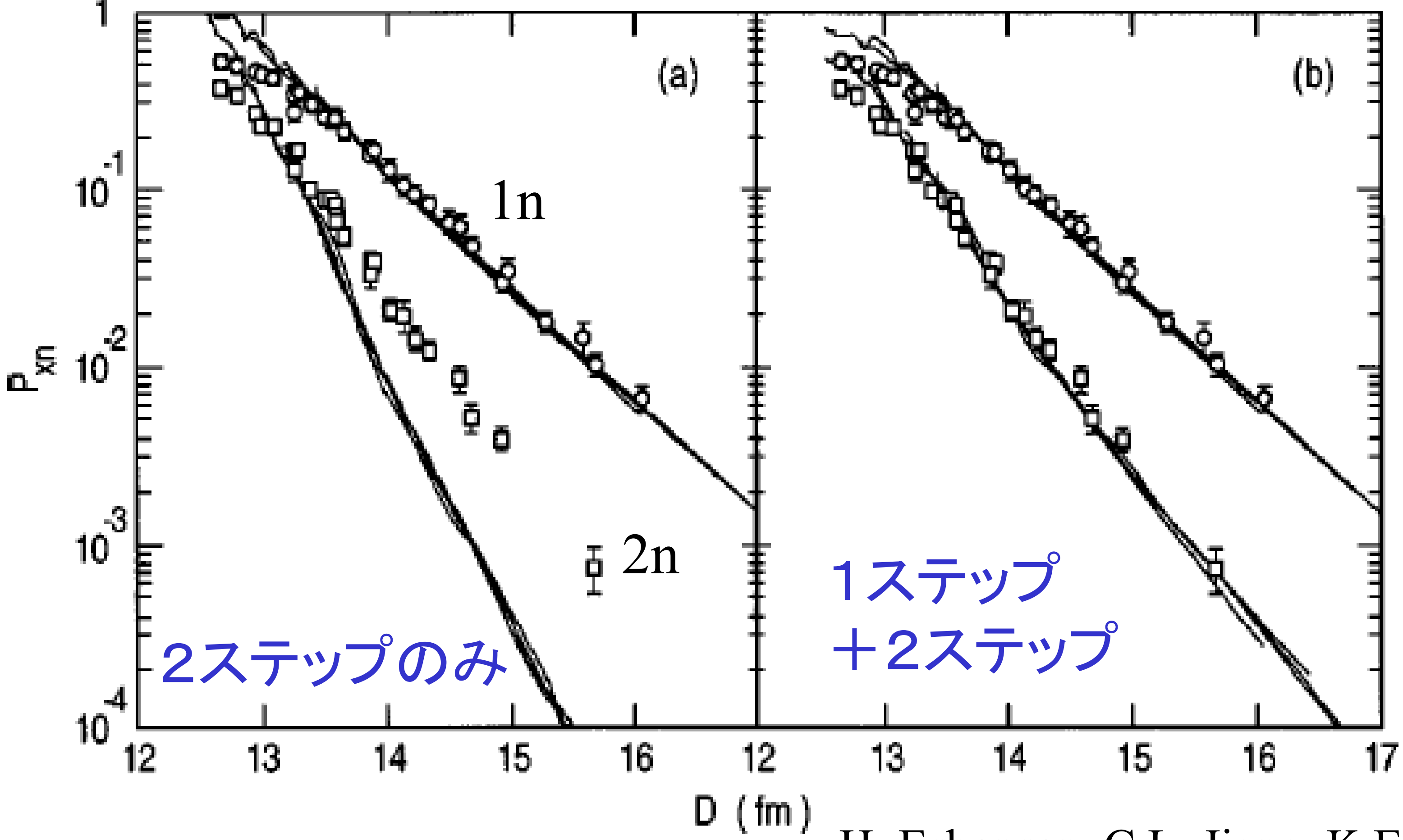
M.A. Franey et al.,
PRL41('78)837

1ステップのみの計算はデータを全く再現しない

⟶ 2ステップ過程の重要性

1ステップか2ステップか?

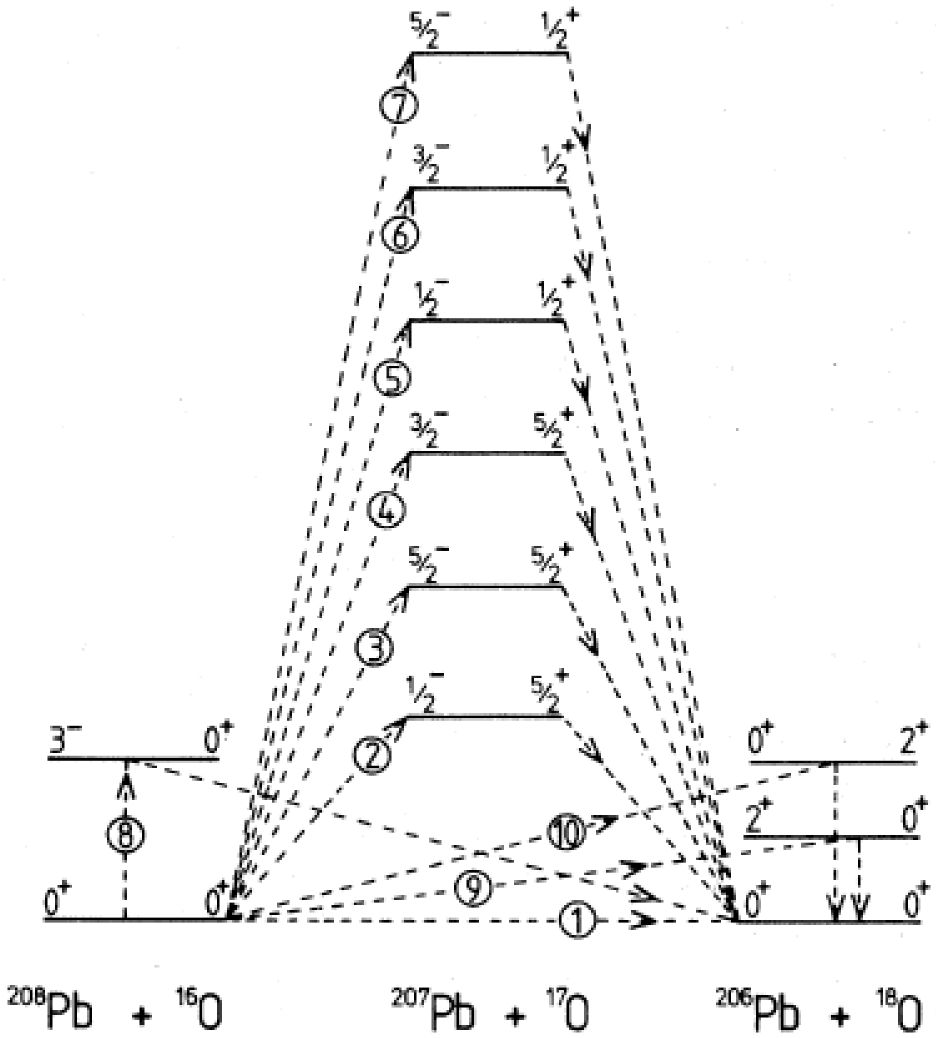
$^{124}Sn(^{58}Ni, ^{60}Ni)^{122}Sn$ 反応



H. Esbensen, C.L. Jiang, K.E. Rehm, PRC57('98)2401

1ステップと2ステップの両方が重要

中性子過剰核を用いた対移行反応



中性子過剰核を用いると、
中間状態(の多く)が非束縛

⇩

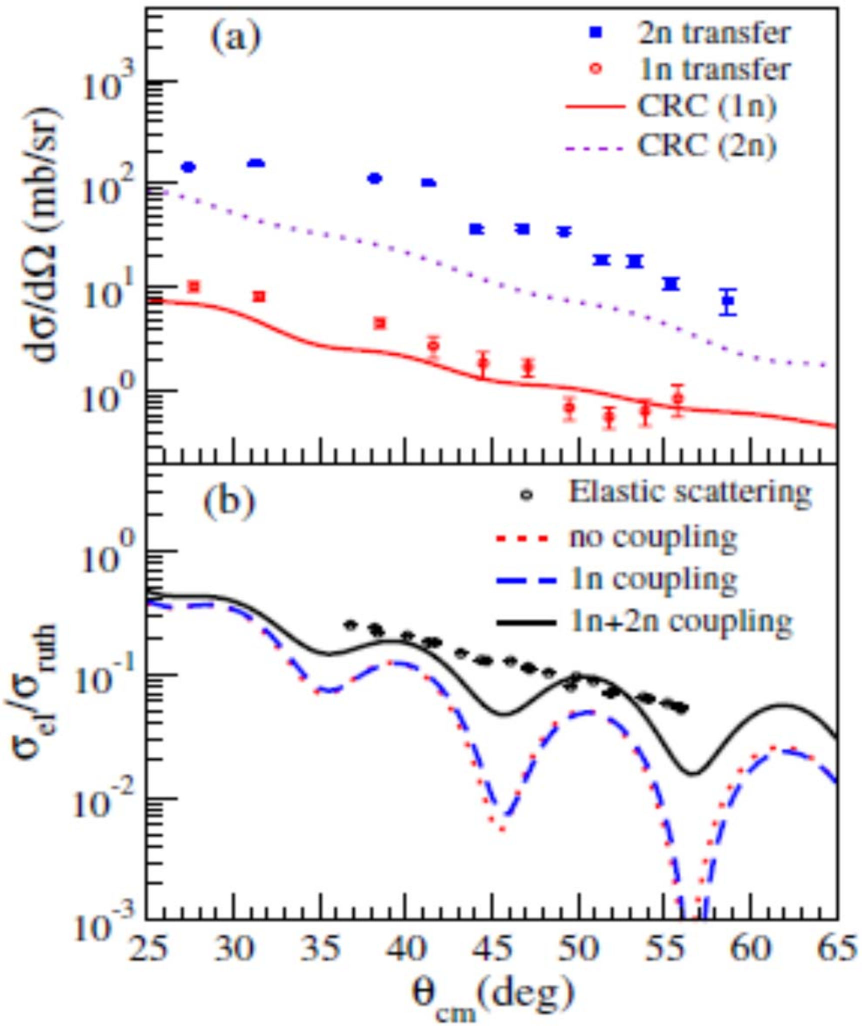
反応機構はどう変わる?

↑

これからの課題

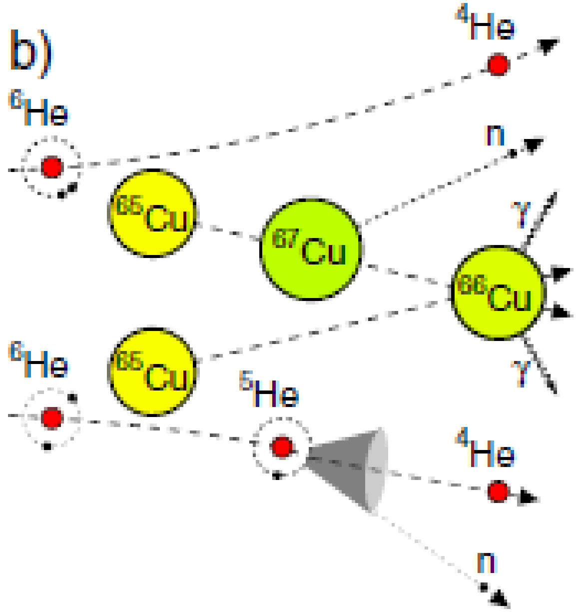
ボロミアン核の対移行反応：実験データ (i)

^{6}He + ^{65}Cu (GANIL)



E_{lab} = 22.6 MeV

A. Chatterjee et al., PRL101('08)032701

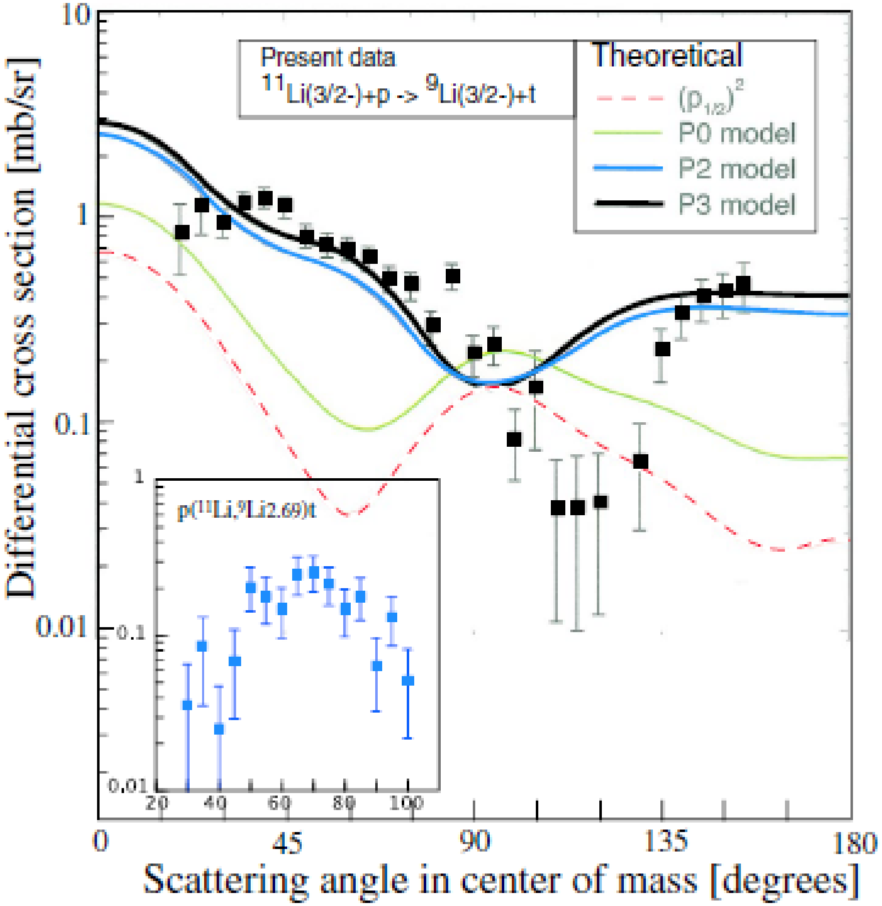


n と α の角度相関を見ることによって $1n$ 移行と $2n$ 移行を分離
（$1n$ 移行は ^{5}He の分解から n が出るので n と α が強く相関）

- $1n$ 移行に比べて $2n$ 移行が主
- これはボロミアン核の特徴
  （安定核では $1n$ 移行が主）

ボロミアン核の対移行反応:実験データ (ii)

^{1}H(^{11}Li,^{9}Li)^{3}H (TRIUMF)



- 相関なしの計算は実験データを再現せず
- $(s_{1/2})^2$ の割合が 31% (P2 model), 45% (P3 model) のモデルでは前方領域をよく再現。
- ただし、後方の合いはいまいち。（光学ポテンシャル?中間状態?）

↑

中間状態として ^{10}Li の 1/2+ 状態と 1/2- 状態

E_{lab} = 3 MeV/A

I. Tanihata et al., PRL100('08)192502

(参考)代理反応

中性子移行反応は原子力の観点からも重要

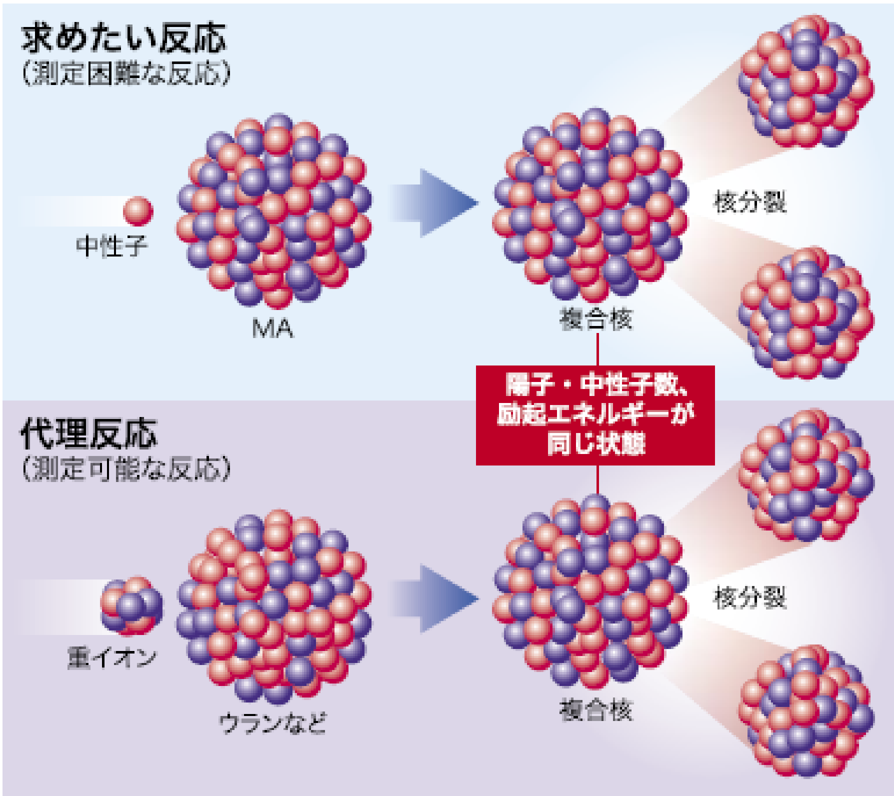
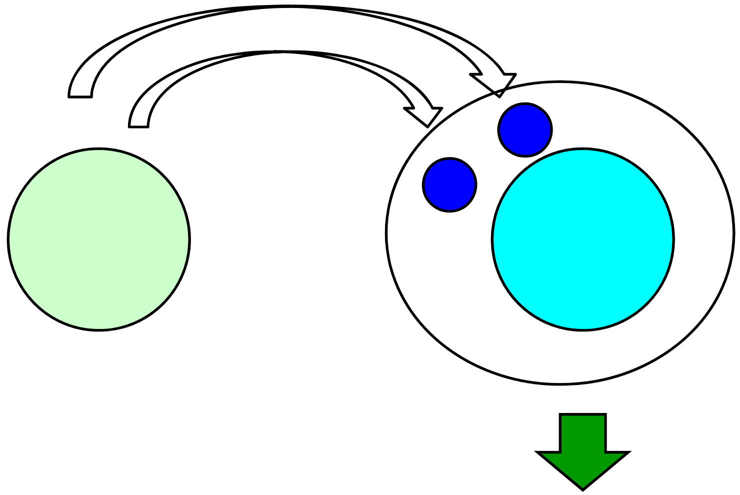


図1　代理反応

http://asrc.jaea.go.jp/15panhu/kagaku/32kagaku/32interview.pdf

中性子誘起核分裂 (n,f) を
中性子移行反応を用いて摸擬
(代理反応)



核分裂

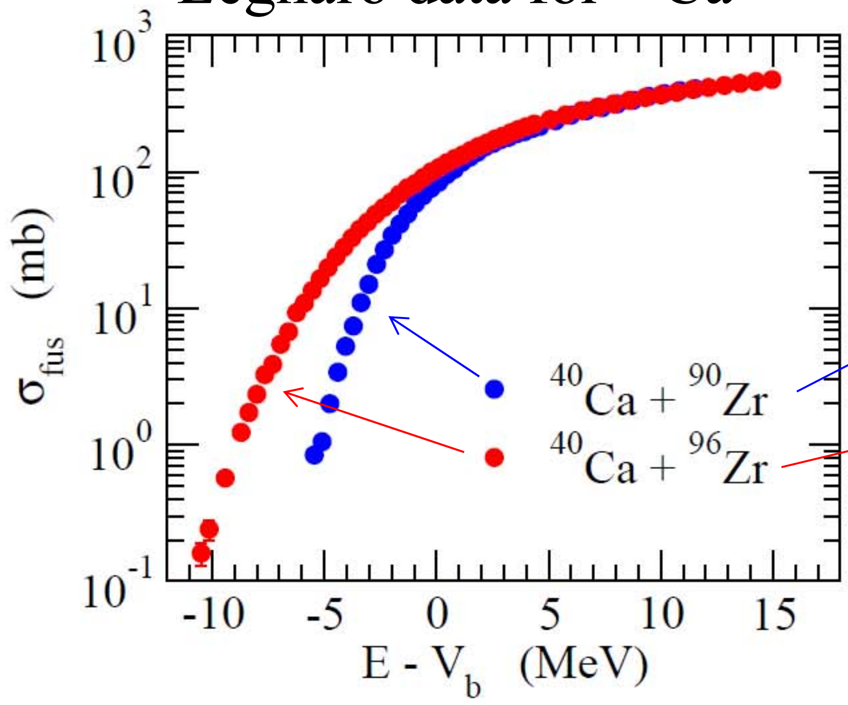
中性子誘起核分裂の間接測定

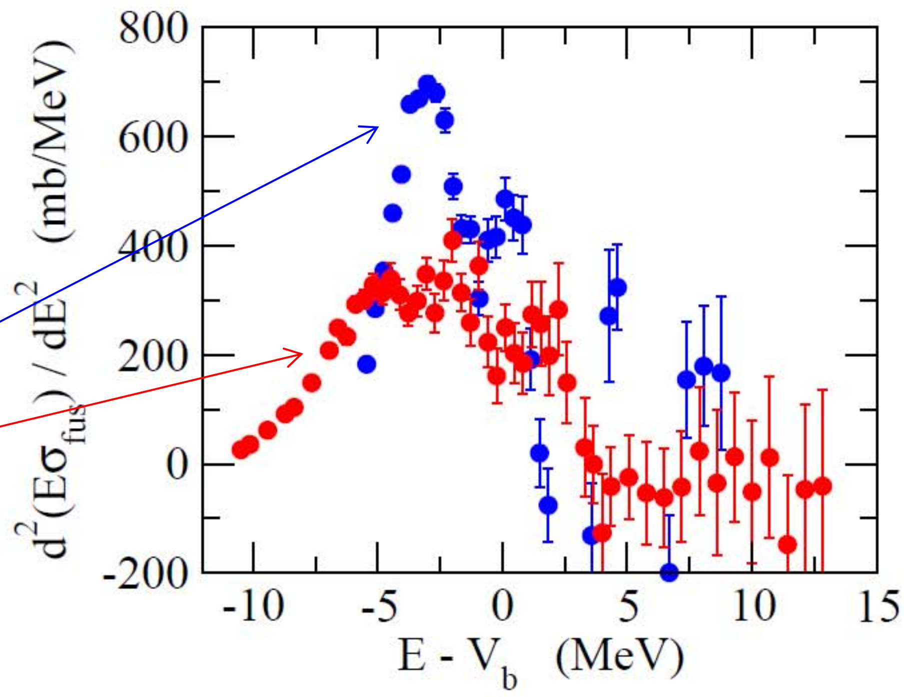
千葉敏氏を中心に JAEA でプロジェクトが進行中

核融合反応における多核子移行反応

これからの課題の1つ

Legnaro data for ^{40}Ca + ^{90,96}Zr





H. Timmers et al., NPA633('98)421

^{40}Ca + ^{96}Zr

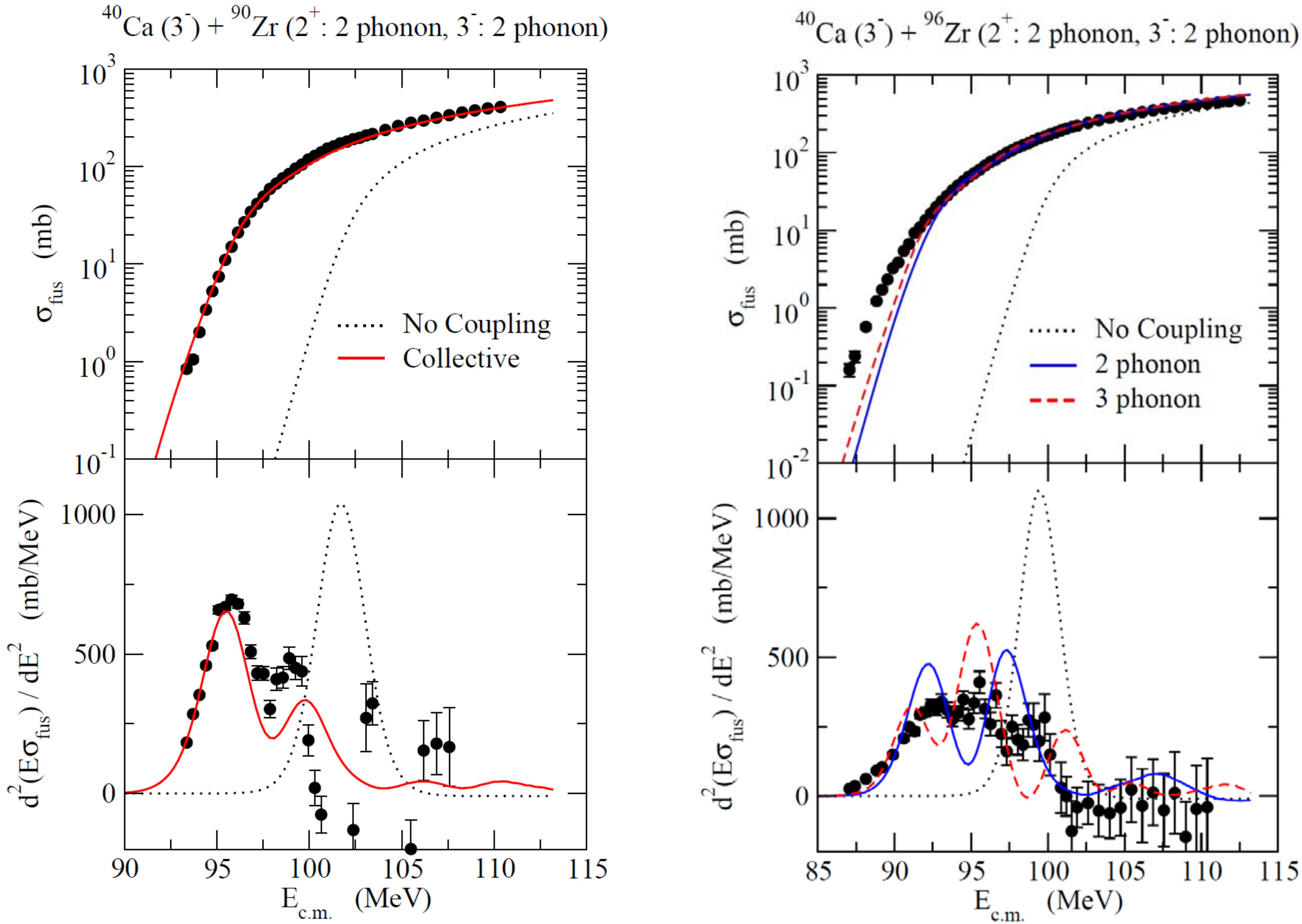
- more enhancement of fusion cross sections
- flatter barrier distribution

✓stronger octupole collectivity
✓multi-neutron transfer process

stronger octupole collectivity in ^{96}Zr

^{90}Zr: $B(E3: 3^-_1 \rightarrow 0^+) = 29.1$ W.u., $E_{3^-} = 2.748$ MeV

^{96}Zr: $B(E3: 3^-_1 \rightarrow 0^+) = 52.7$ W.u., $E_{3^-} = 1.897$ MeV



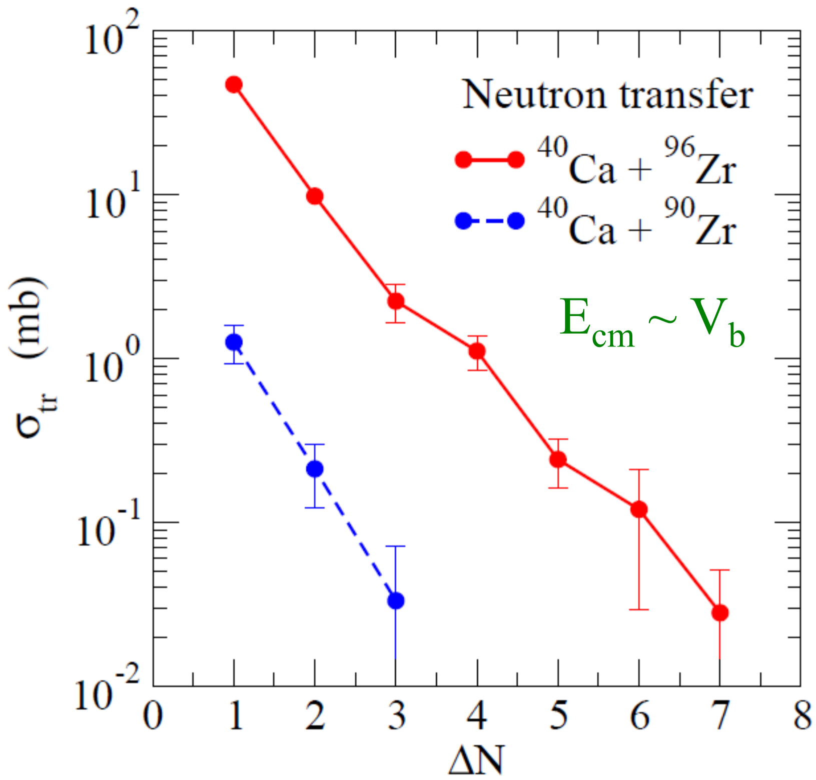
Q-values for multi-neutron transfer channels

Q_{gg} (MeV)

	$^{40}Ca + ^{90}Zr$	$^{40}Ca + ^{96}Zr$
+1n	-3.61	+0.51
+2n	-1.44	+5.53
+3n	-5.86	+5.24
+4n	-4.17	+9.64
+5n	-9.65	+8.42
+6n	-9.05	+11.62

cf. Q_{gg} (-1n) = -8.45 MeV for $^{40}Ca+^{90}Zr$

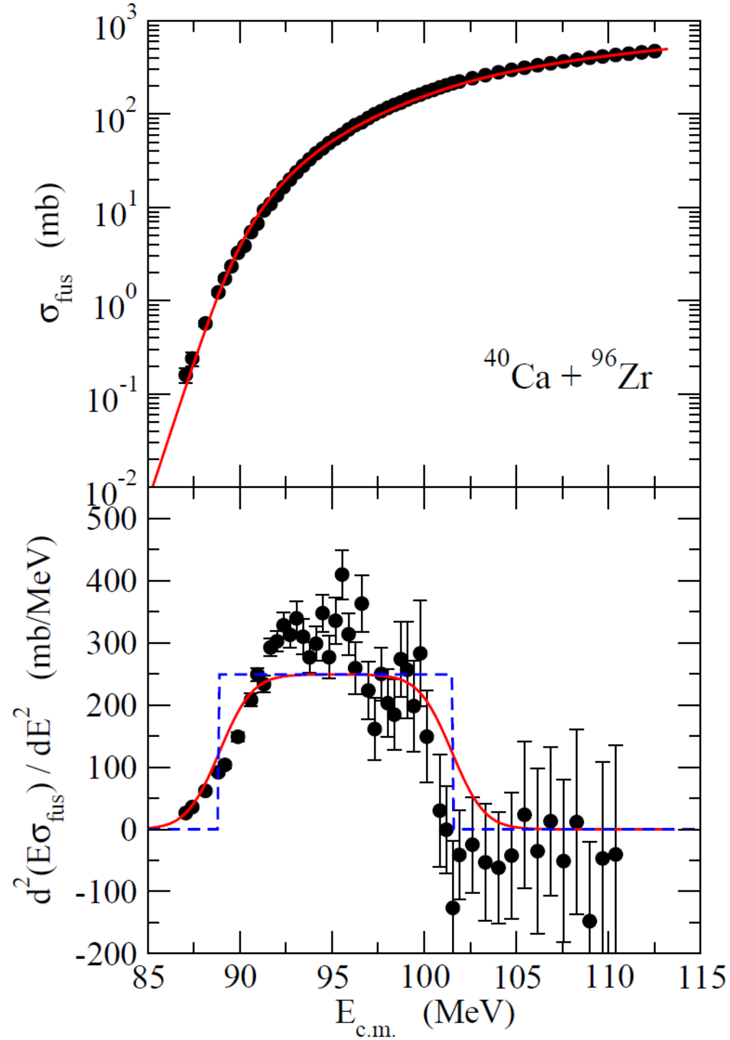
Experimental data for total transfer cross sections



G. Montagnoli et al.,
J. of Phys. G23('97)1431

How to treat multi-neutron transfer?

1. Stelson model: P.H. Stelson, PLB205('88)190

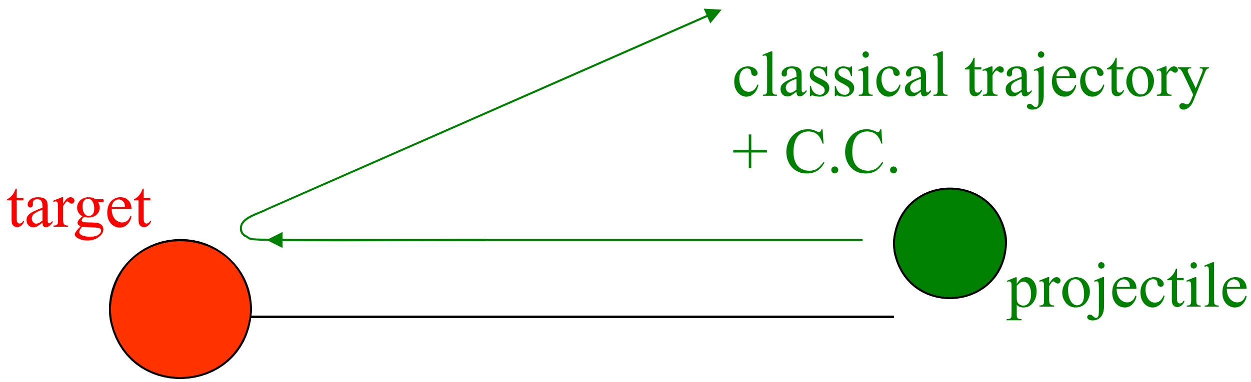


- Flat barrier distribution
  (B_{min}, B_{max}: parameters)
- Simple, and easy to implement
- Purely phenomenological
- No connection to transfer cross sections

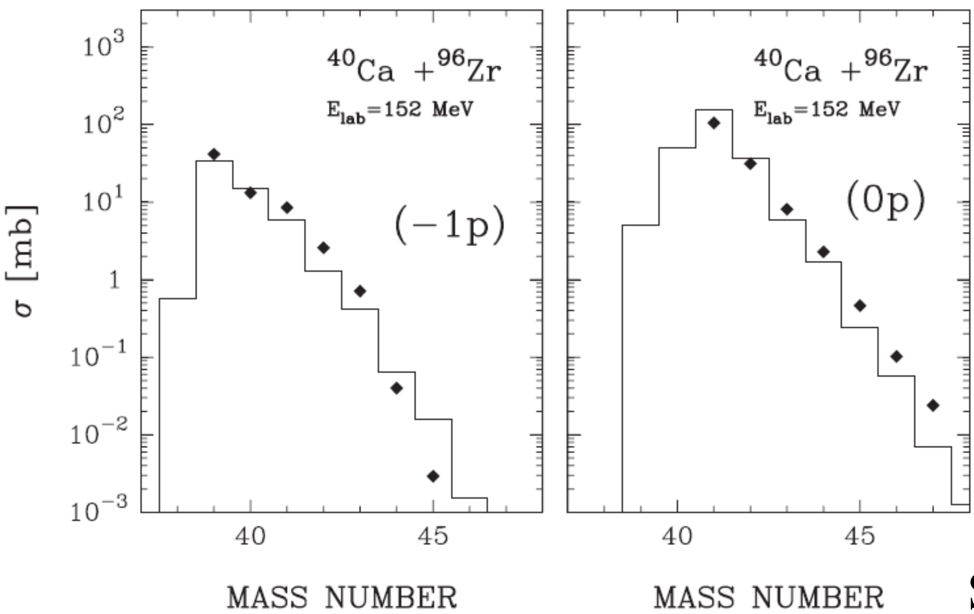
2. GRAZING: G. Pollarolo and A. Winther, PRC62('00)054611
3. Zagrebaev's model: V.I. Zagrebaev, PRC67('03)061601(R)

How to treat multi-neutron transfer?

1. Stelson model: P.H. Stelson, PLB205('88)190
2. GRAZING: G. Pollarolo and A. Winther, PRC62('00)054611



semi-classical coupled-channels method



- ➢Good for transfer reactions
- ➢No dynamics for tunneling in fusion reactions (classical trajectory up to the turning point)

S. Szilner et al., PRC76('07)024604

3. Zagrebaev's model: V.I. Zagrebaev, PRC67('03)061601(R)

How to treat multi-neutron transfer?

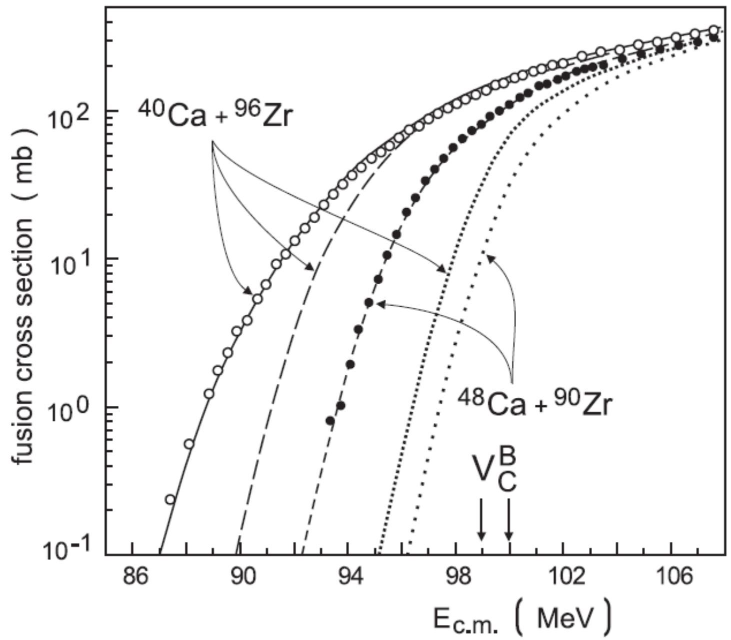
1. Stelson model: P.H. Stelson, PLB205('88)190
2. GRAZING: G. Pollarolo and A. Winther, PRC62('00)054611
3. Zagrebaev's model: V.I. Zagrebaev, PRC67('03)061601(R)

$$\sigma(E) \sim \sum_k \int_{-E}^{Q_{gg}(k)} dQ\, \underbrace{\alpha_k(Q)}_{\text{Q-value distribution}}\, \underbrace{\sigma_{CC}(E+Q)}_{\text{fusion at } E+Q}$$

^{40}Ca+^{96}Zr

^{41}Ca+^{95}Zr

energy gain



➡ too naive

cf. 3^- excitation: energy loss

but still large enhancement of σ_{fus}

New Simple Model

K.H., N. Sekine, and N. Rowley, in preparation

✓Stelson model: purely phenomenological, no connection to $\sigma_{transfer}$
✓GRAZING: not for fusion
✓Zagrebaev's model: basically wrong
✓Time-Dependent Hartree-Fock (TDHF): no tunneling

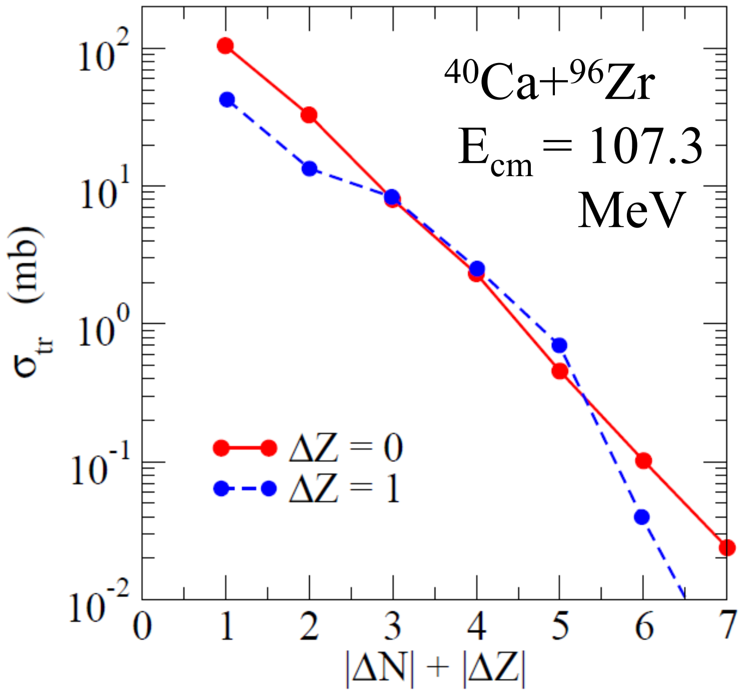
$\longrightarrow$ New simple model for multi-nucleon transfer

c.f. a preliminary version:
N. Rowley, in Proc. of fusion workshop at Dubna ('01)

See also:
H. Esbensen, C.L. Jiang, and K.E. Rehm,
PRC57('98)2401

New Simple Model

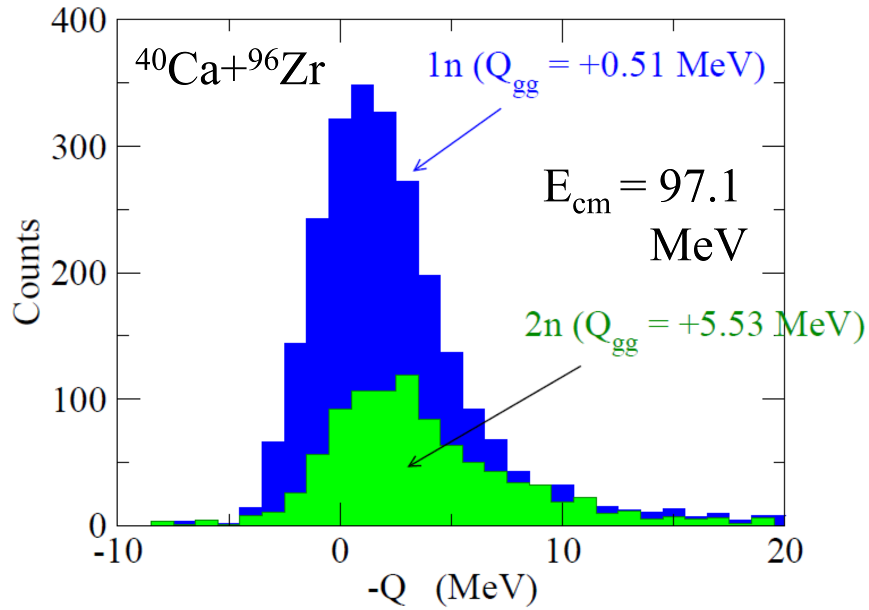
1. Neutron transfer chain only



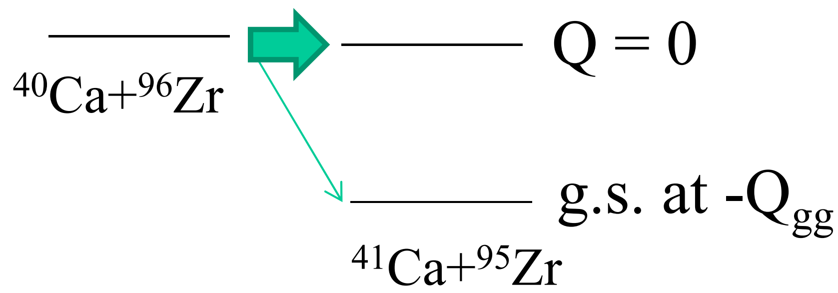
S. Szilner et al., PRC76('07)024604

proton transfer: less strongly coupled to the entrance channel

2. Approximate Q-value distribution



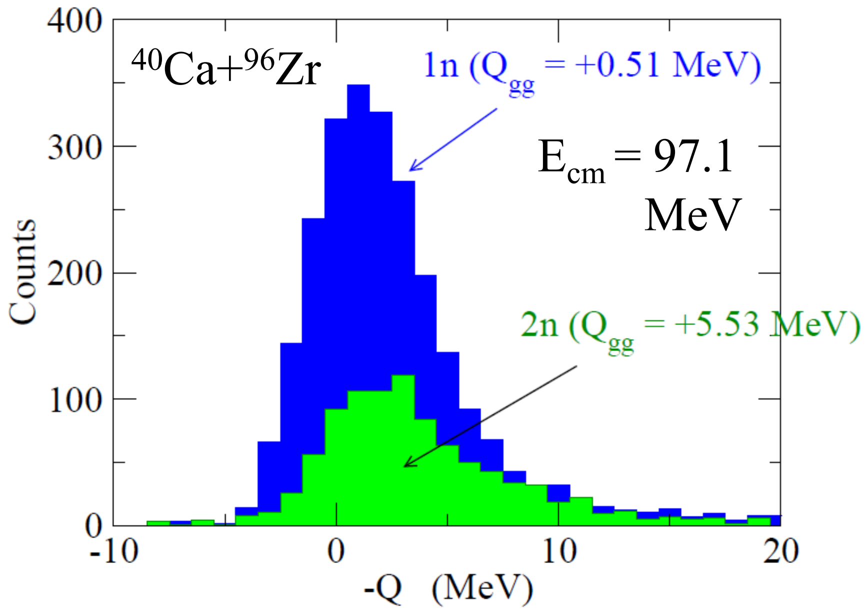
L. Corradi et al., PRC84('11)034603
(Recent data with PRISMA)



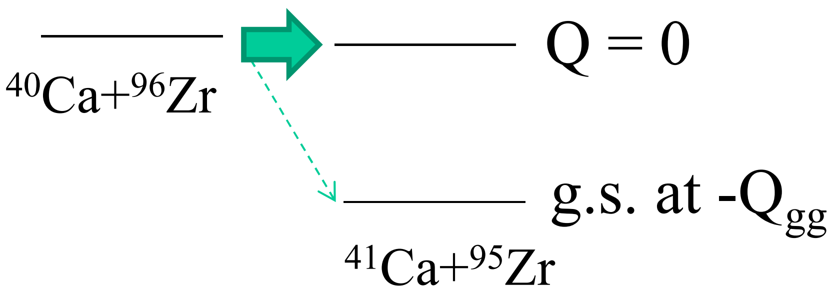
Q-value matching

→ put all the strength to a single state at Q=0

2. Approximate Q-value distribution



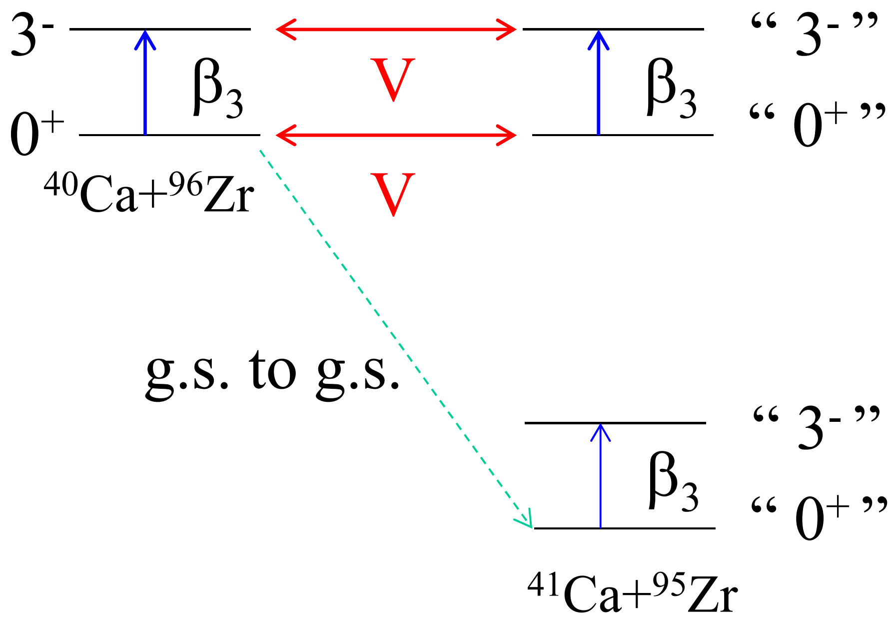
L. Corradi et al., PRC84('11)034603
(Recent data with PRISMA)



Q-value matching

$\longrightarrow$ put all the strength
to a single state at Q=0

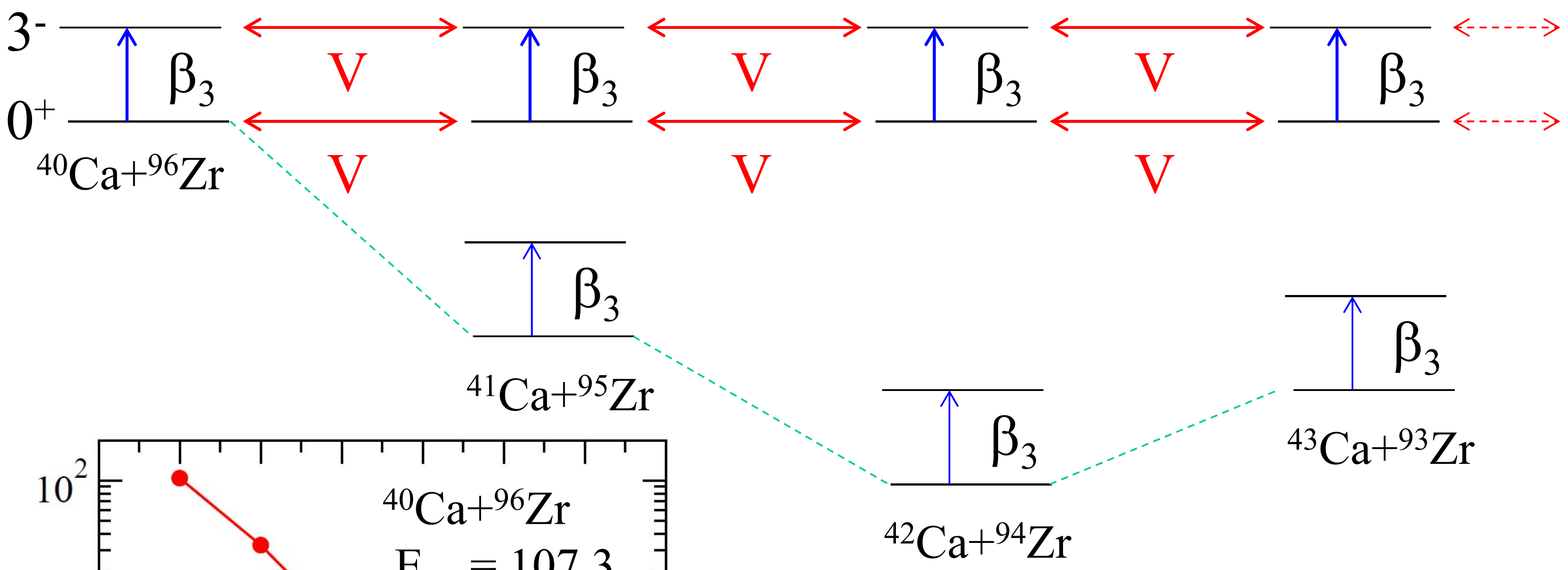
3. Same coupling scheme for inelastic excitations

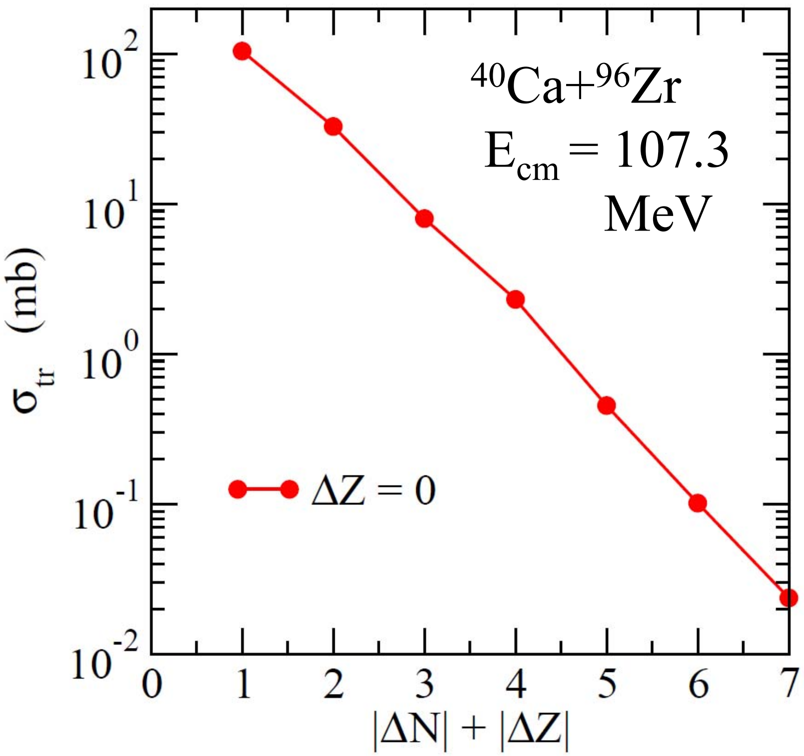


Brink-Axel hypothesis

constant coupling approximation
for transfer

4. Sequential coupling to each transfer partition with the same strength





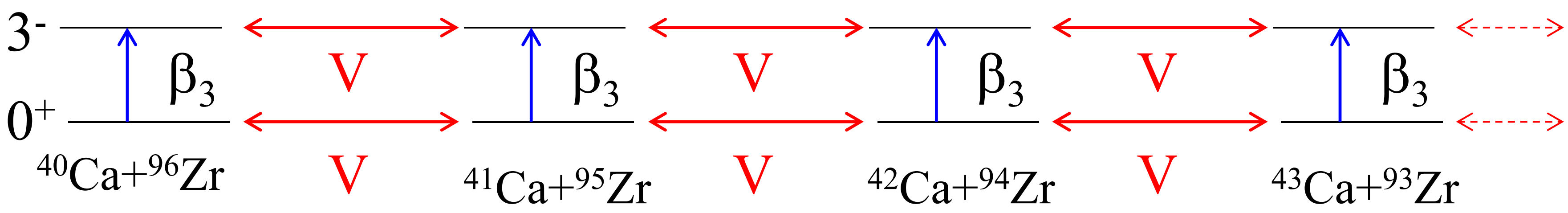
Brink-Axel hypothesis

experimental data:

$$\frac{\sigma_{\Delta N}}{\sigma_{\Delta N-1}} \sim const.$$

S. Szilner et al., PRC76('07)024604

4. Sequential coupling to each transfer partition with the same strength



Eigen-channel approach

$$\boxed{\sigma_{\mathrm{fus}}(E) = \sum_i w_i \, \sigma_{\mathrm{CC}}(E + \lambda_i)}$$

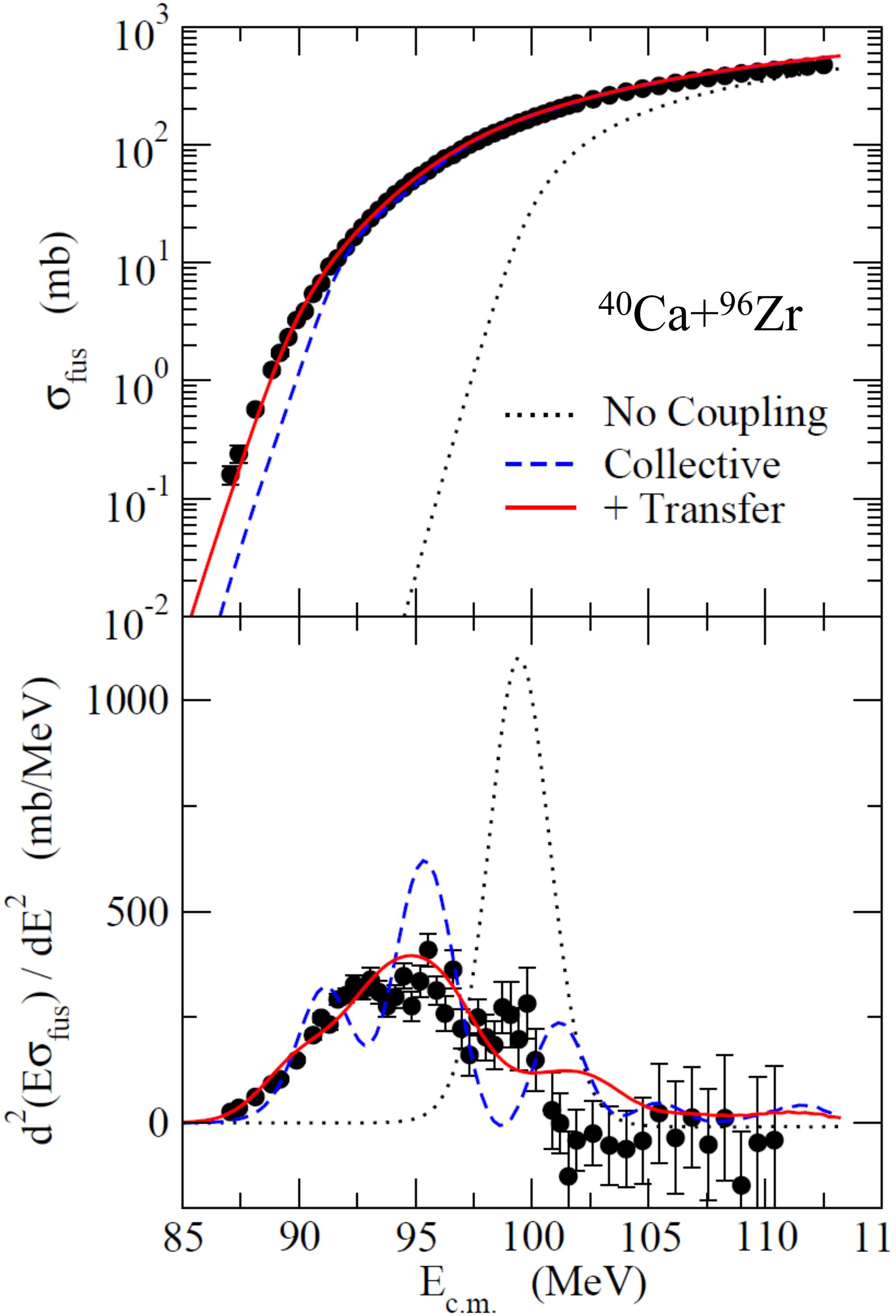
$$V \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & & & \end{pmatrix} \xrightarrow{} $$

diagonalization

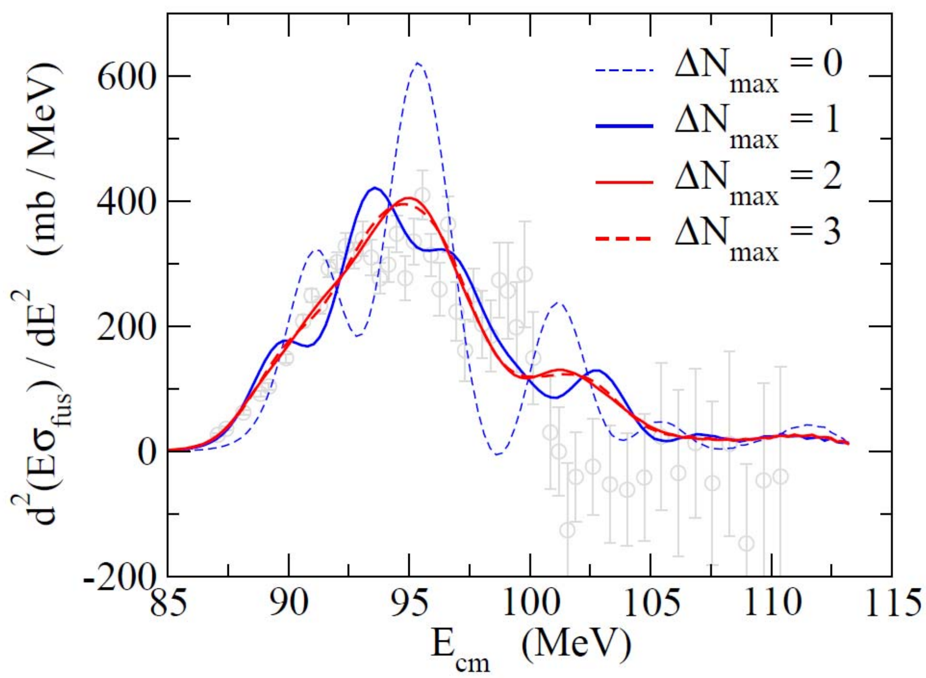
eigen-values λ_α
eigen-vectors $|\lambda_\alpha>$

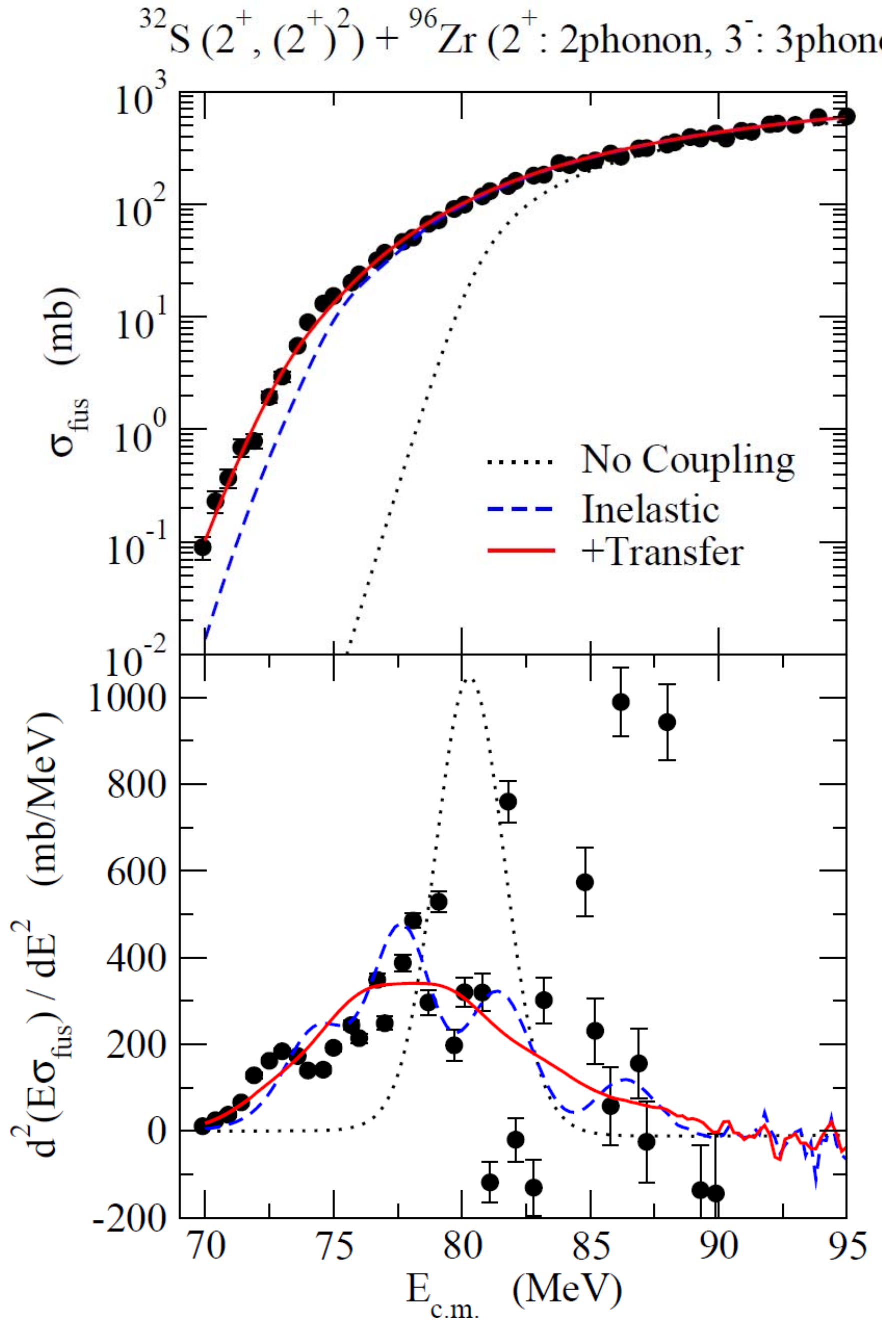
$$w_\alpha = |<1 \mid \lambda_\alpha>|^2$$

Model: One adjustable parameter: V



convergence feature

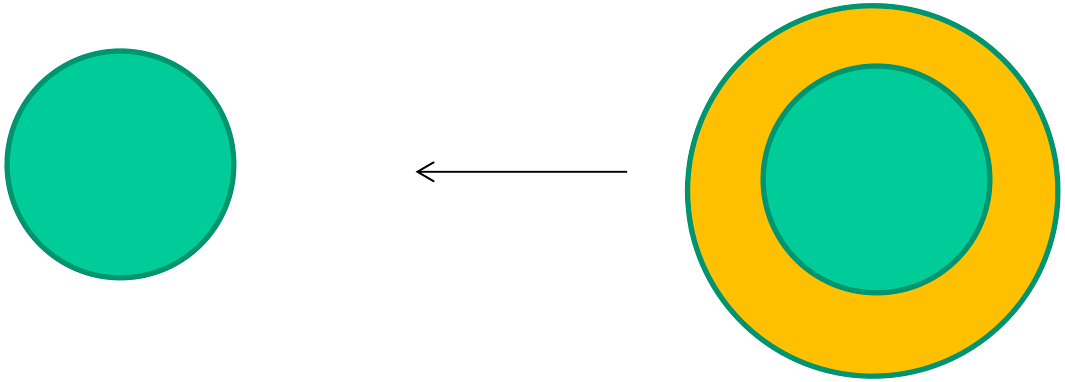




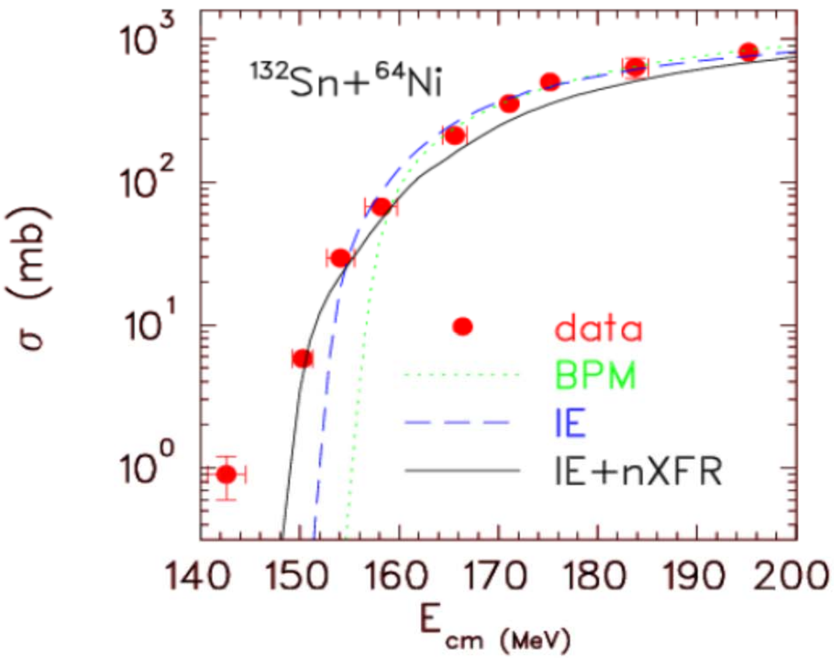
Experimental data:
H.Q. Zhang, C. Beck et al.,
PRC82('10)054609

	^{32}S+ ^{90}Zr	^{32}S + ^{96}Zr
+1n	-3.33	+0.79
+2n	-1.23	+5.74
+3n	-6.59	+4.51
+4n	-6.32	+7.66

スキン原子核の核融合反応?



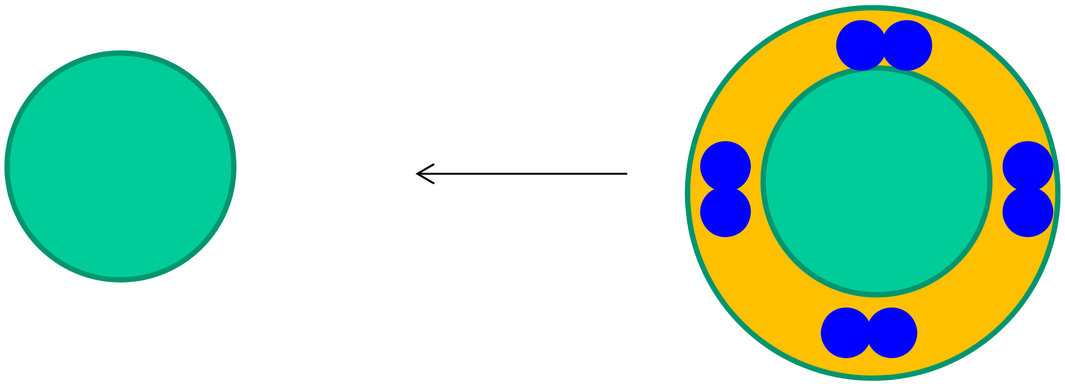
スキン部分にある多核子の移行?



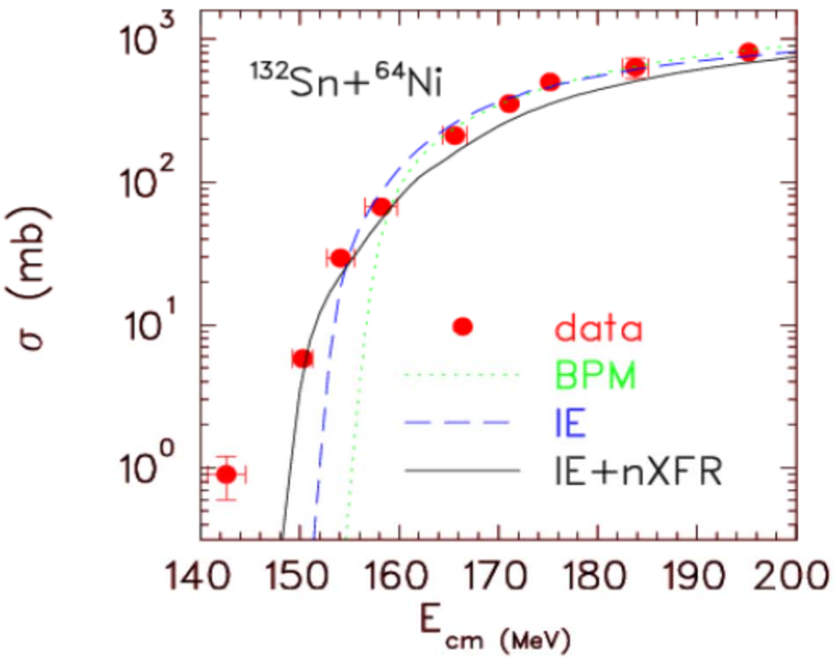
CCFULL

J.F. Liang et al., PRC75('07)054607

スキン原子核の核融合反応?



スキン部分にある多核子の移行?



スキン部分の中性子が
di-neutron 的になっていると
どうなる?

CCFULL

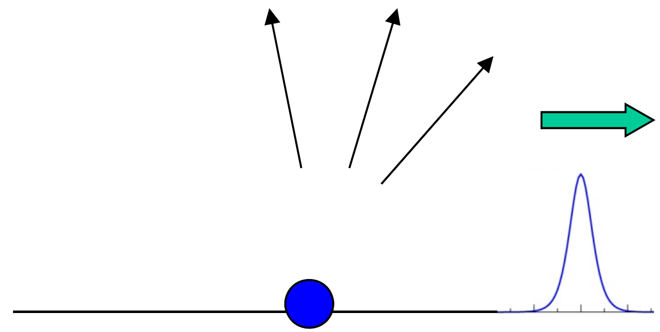
J.F. Liang et al., PRC75('07)054607

弾性散乱の最近の話題２つ

(i) Threshold Anomaly

反応プロセス

- 弾性散乱
- 非弾性散乱
- 粒子移行
- 複合粒子形成（核融合）



弾性フラックスの減少（吸収）

光学ポテンシャル

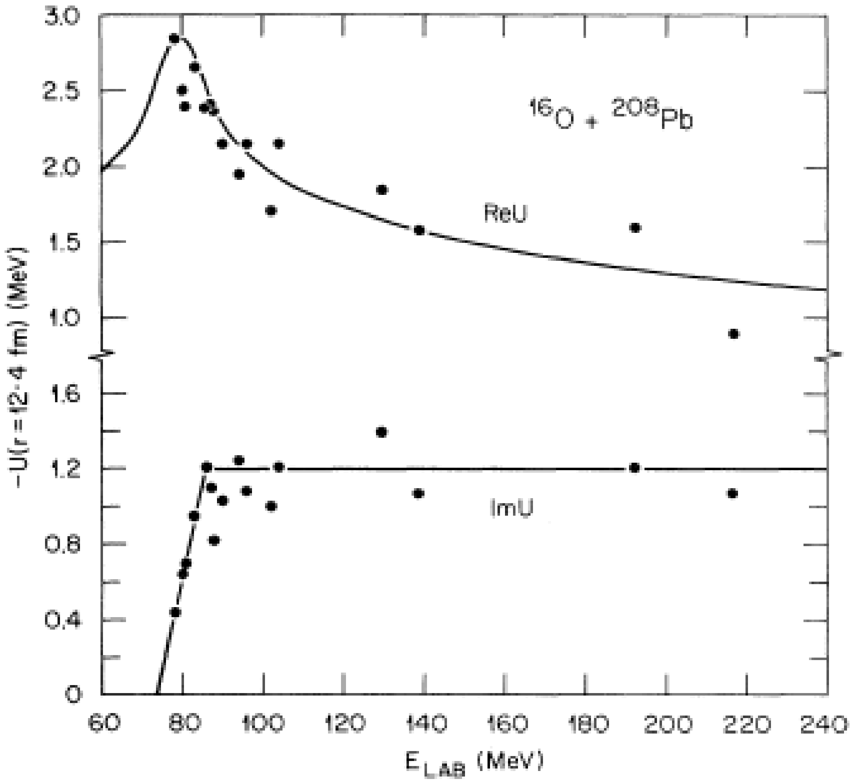
$$V_{\mathrm{opt}}(\boldsymbol{r}) = V(\boldsymbol{r}) - iW(\boldsymbol{r}) \qquad (W > 0)$$

光学ポテンシャルのエネルギー依存性は?

(i) Threshold Anomaly

$^{16}O+^{208}Pb$

角度分布を再現する
現象論的光学ポテンシャル



M.A. Nagarajan, C.C. Mahaux, and G.R. Satchler, PRL54('85)1136

- 光学ポテンシャルの虚部はクーロン障壁を境に急激に減少
- 実部も同じエネルギーで増大

↓

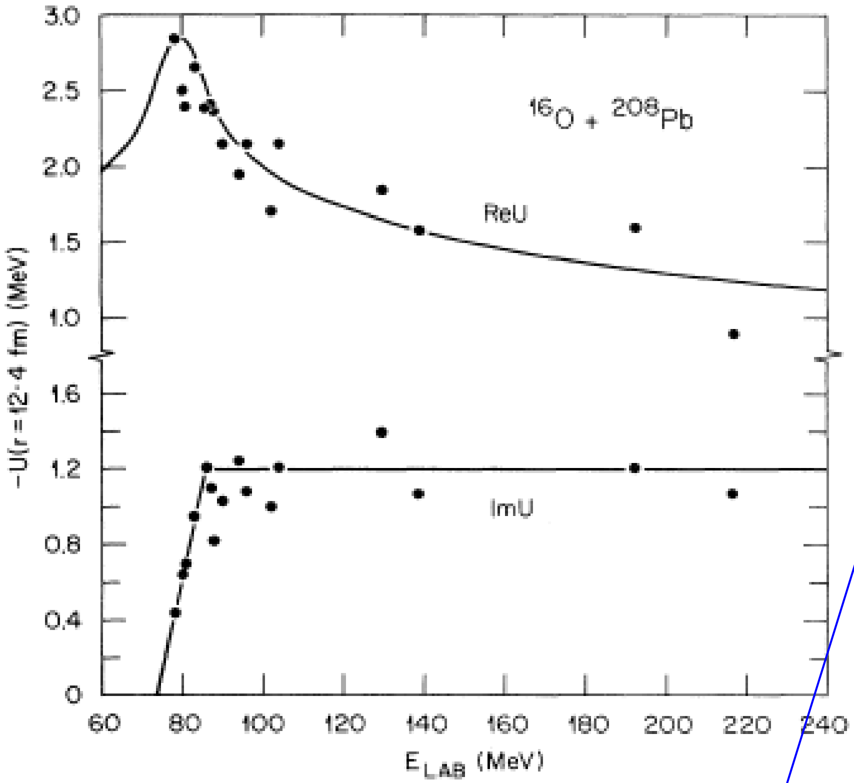
虚部が減少するのは理解しやすい
(クーロン障壁のため実効的に他チャンネルが閉じるから)
実部の振る舞いはよくわからない??

↓

"Threshold Anomaly" とよばれた

(i) Threshold Anomaly

$^{16}O+^{208}Pb$



M.A. Nagarajan, C.C. Mahaux, and G.R. Satchler, PRL54('85)1136

- 光学ポテンシャルの虚部はクーロン障壁を境に急激に減少
- 実部も同じエネルギーで増大

↓

"Threshold Anomaly" とよばれた

分散関係 (dispersion relation) で説明できることを示した。

$$\Delta V(E) = \frac{P}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{W(E')}{E'-E}\,dE'$$

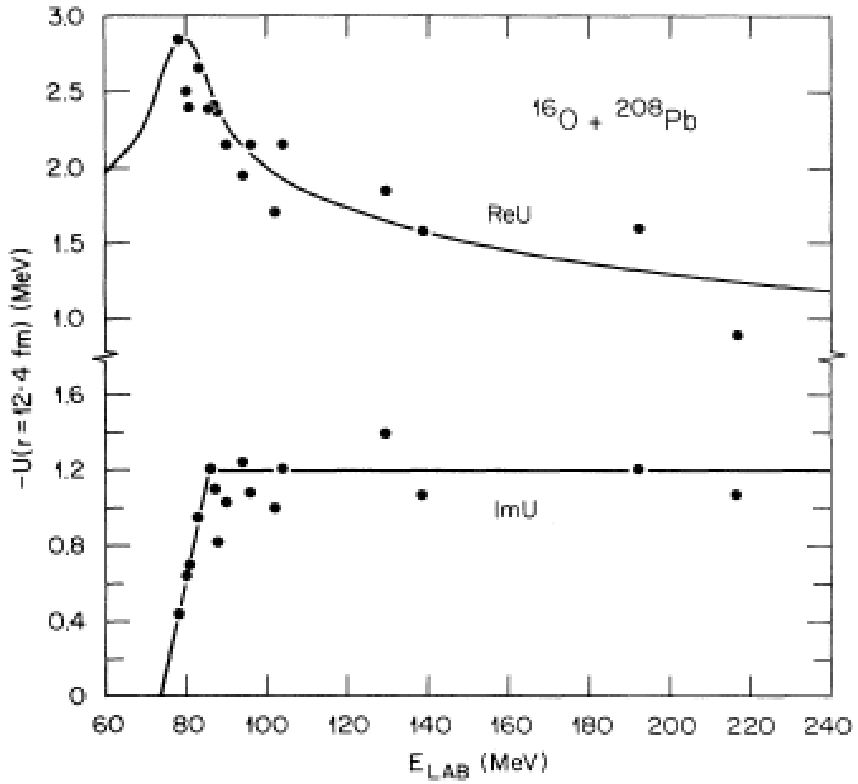
実部と虚部は互いに関連している

↓

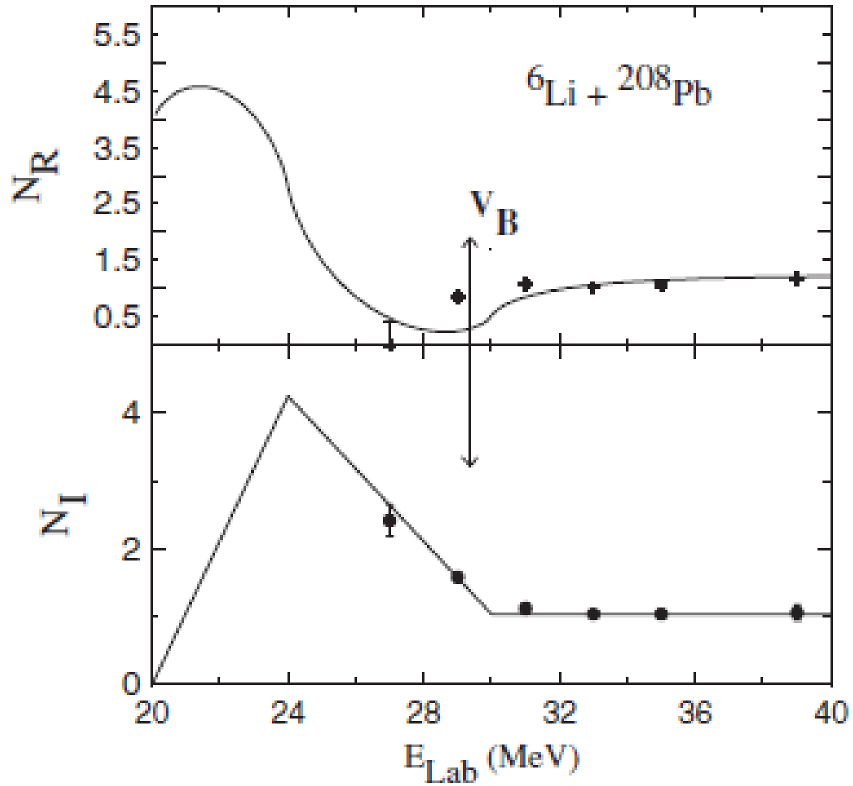
もはや anomaly ではなくなった。
（名前だけが残った。）

(i) Threshold Anomaly

$^{16}O+^{208}Pb$



$^{6}Li+^{208}Pb$



分解過程が重要となる反応系
では振る舞いが全く異なる

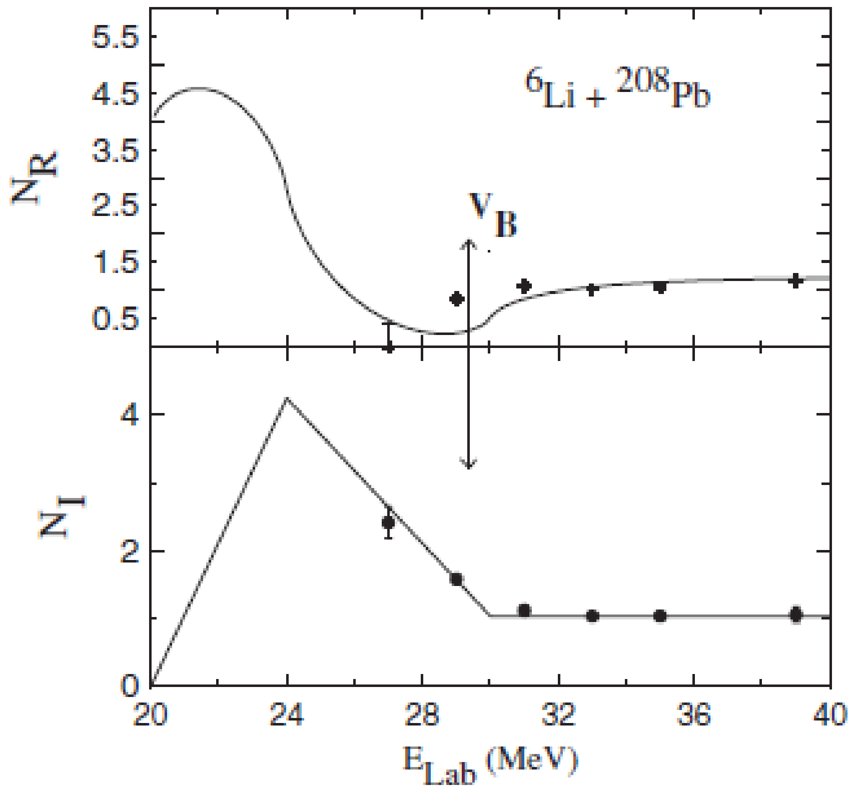
分解チャンネルはクーロン
障壁以下でも閉じない

→ Breakup Threshold Anomaly

M.S. Hussein et al., PRC73('06)044610

(i) Threshold Anomaly

$^6Li+^{208}Pb$

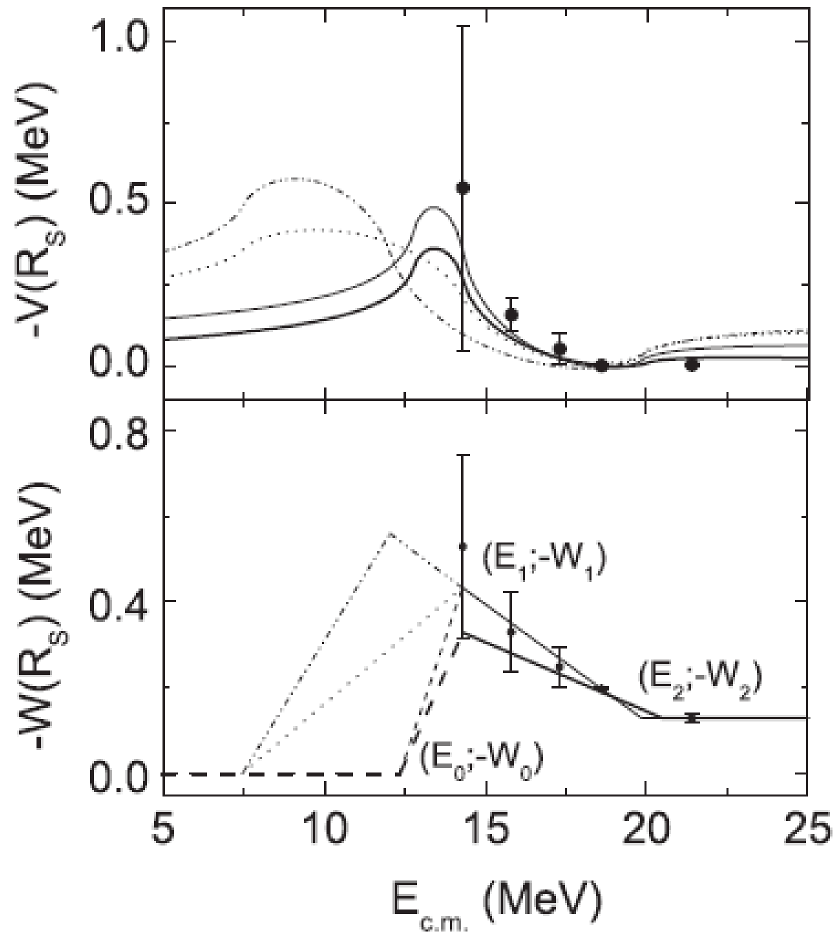


分解過程が重要となる反応系では振る舞いが全く異なる

→ Breakup Threshold Anomaly

M.S. Hussein et al., PRC73('06)044610

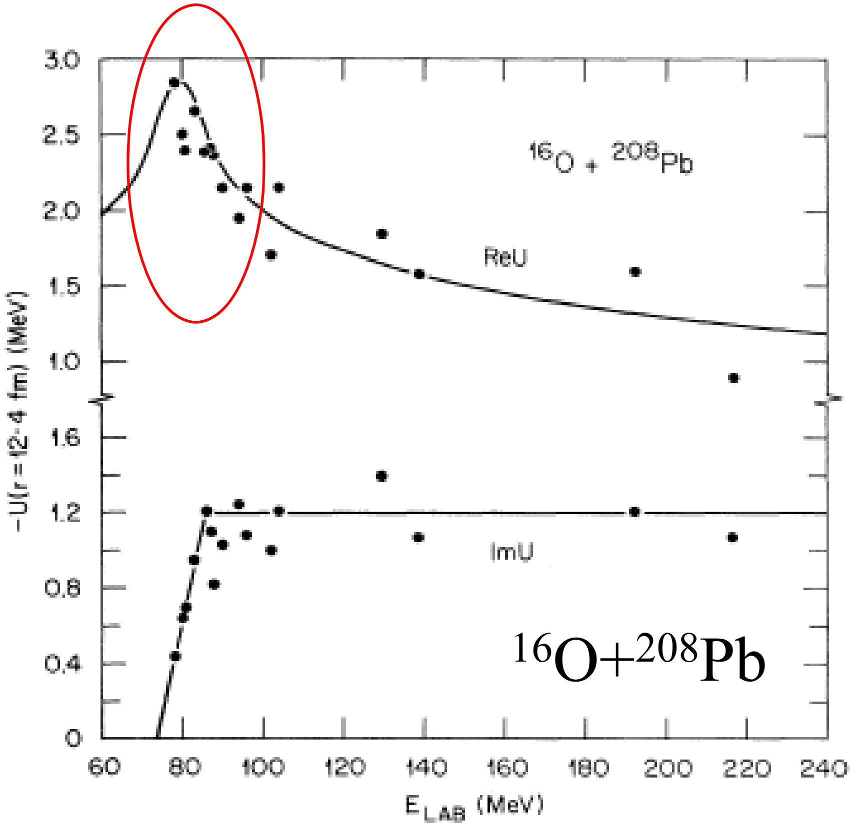
$^6He+^{209}Bi$

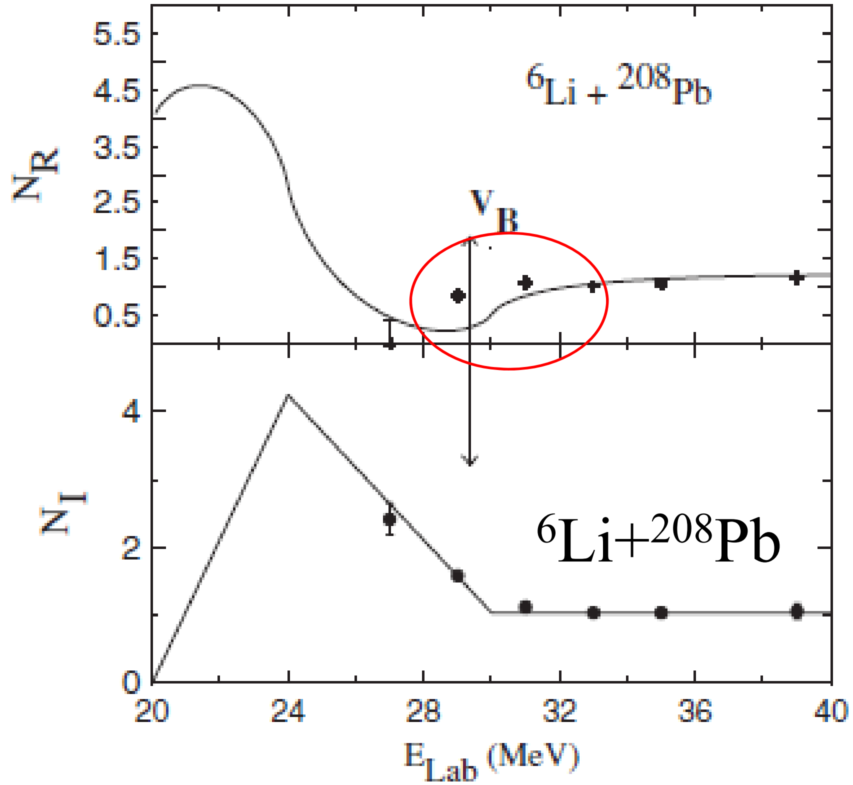


A.R. Garcia et al., PRC76('07)067603

中性子過剰核でも同様の振る舞い（特に虚部）

(i) Threshold Anomaly （補足）核融合反応との関係





通常の非弾性励起の場合、
ポテンシャルは深くなる

核融合反応断面積は増大

分解反応との結合の場合、
ポテンシャルは浅くなる

核融合反応断面積は減少

(i) Threshold Anomaly （補足）核融合反応との関係

通常の非弾性励起の場合、
ポテンシャルは深くなる

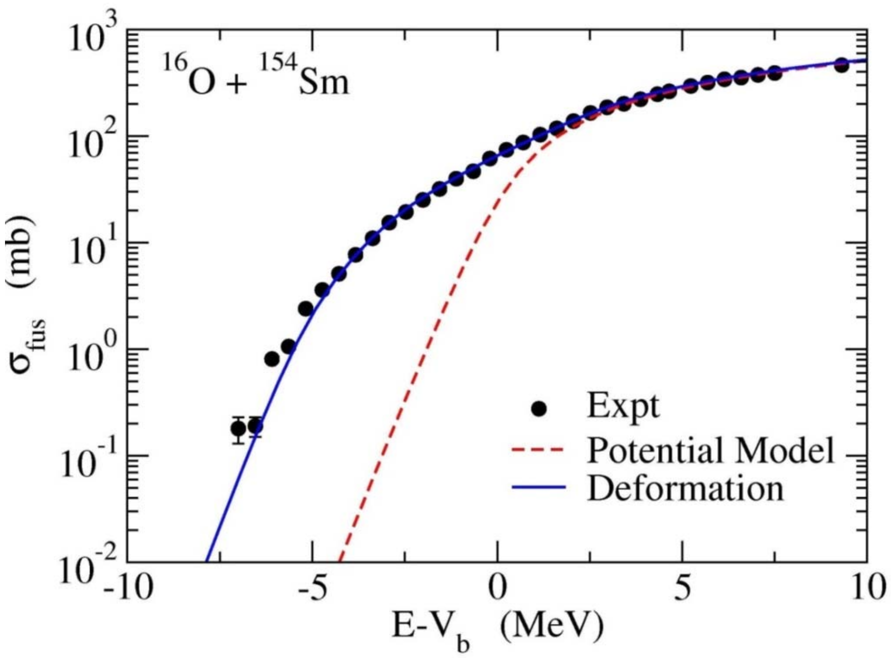
⇩

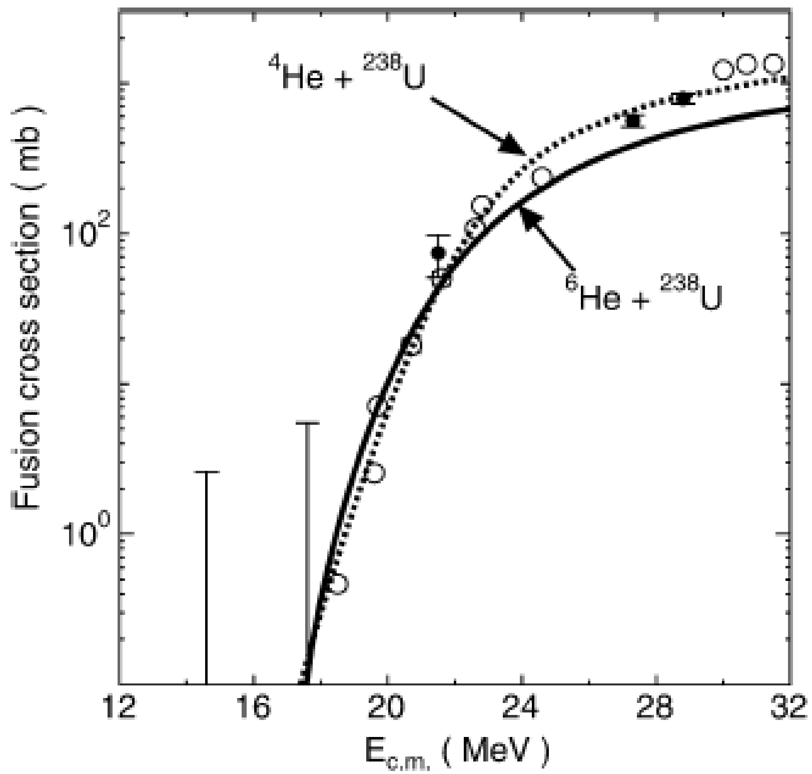
核融合反応断面積は増大

分解反応との結合の場合、
ポテンシャルは浅くなる

⇩

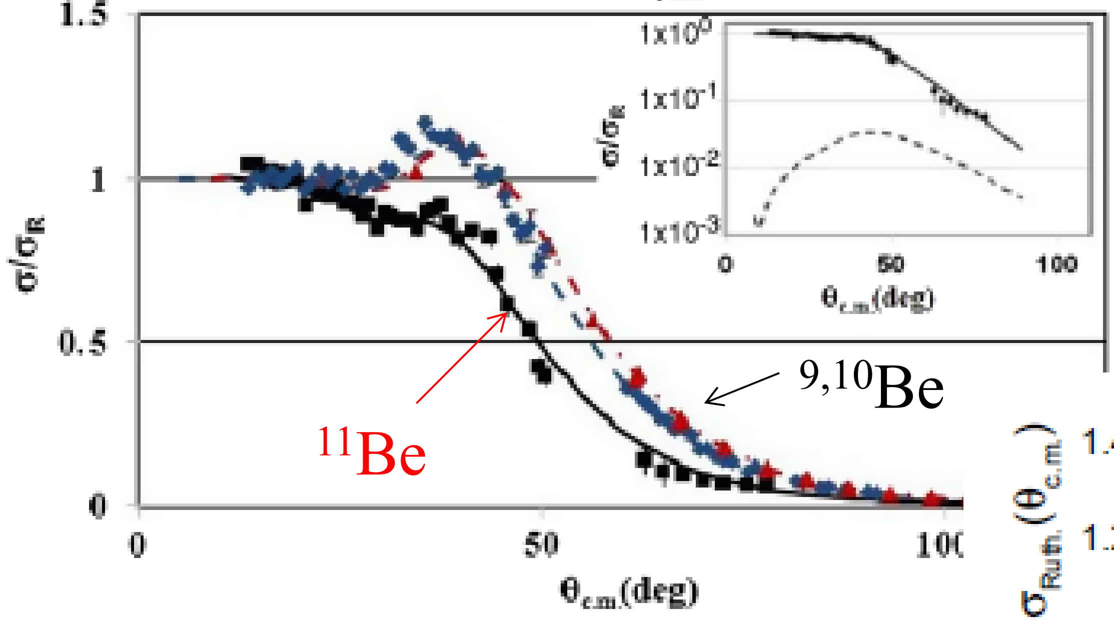
核融合反応断面積は減少





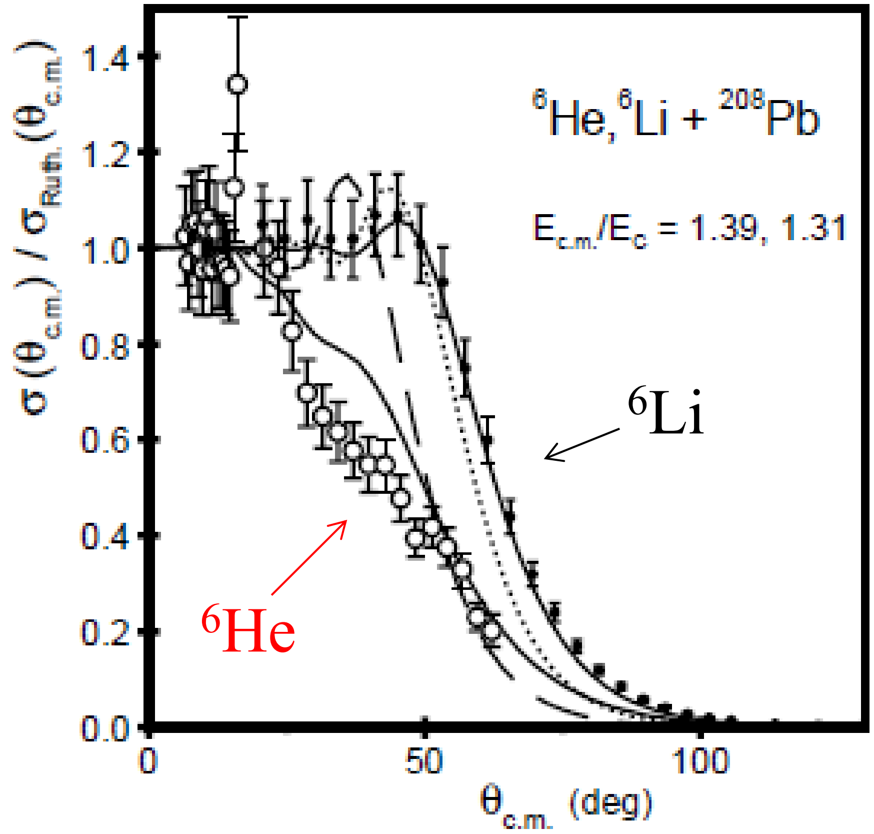
(ii) ハロー核の弾性散乱

^{9,10,11}Be + ^{64}Zn (E_{cm} = 24.5 MeV)



A. Di Pietro et al., PRL105('10)022701

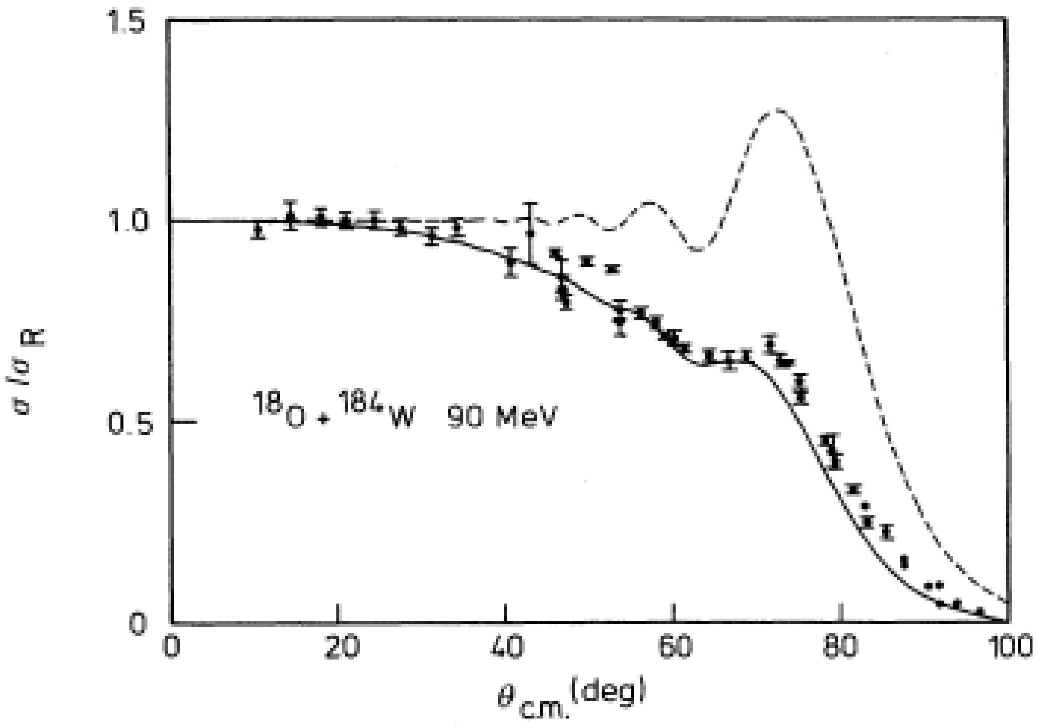
K. Rusek et al., PRC67('03)041604(R)

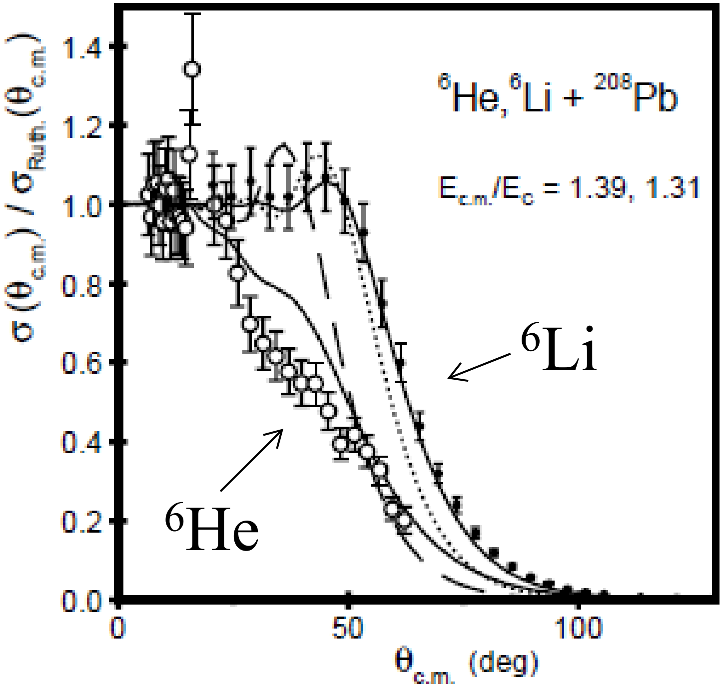


ハロー核を用いると弾性散乱の断面積が大きく減少

(ii) ハロー核の弾性散乱

同様の弾性散乱断面積の減少
（フレネル・パターンからの大きなずれ）は
安定な変形核ではすでによく知られていた





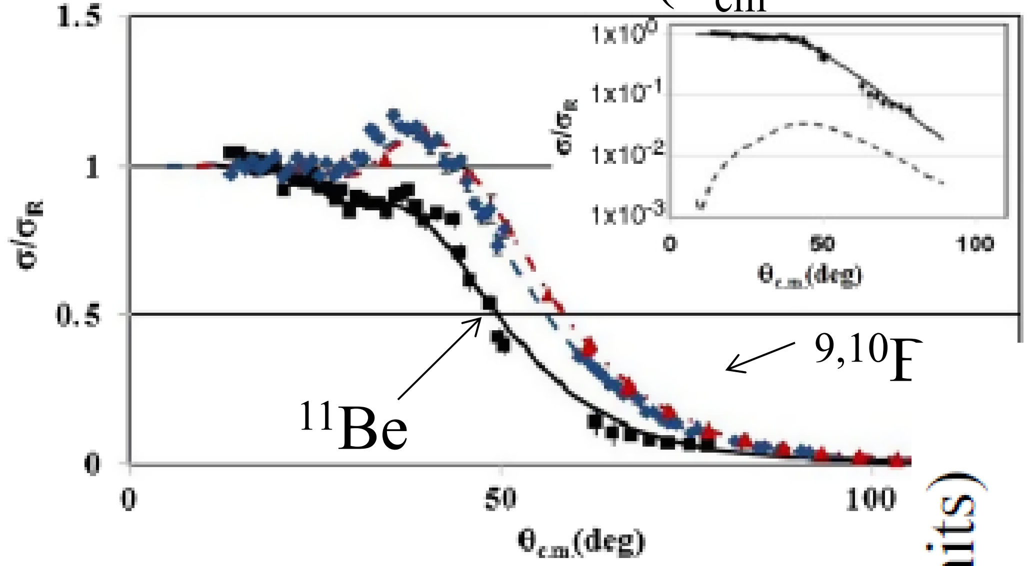
N. Takigawa, F. Michel, A.B. Balantekin, G. Reidemeister, PRC44('91)477

回転励起のエネルギーは小 ⟶ （クーロン）励起されやすい

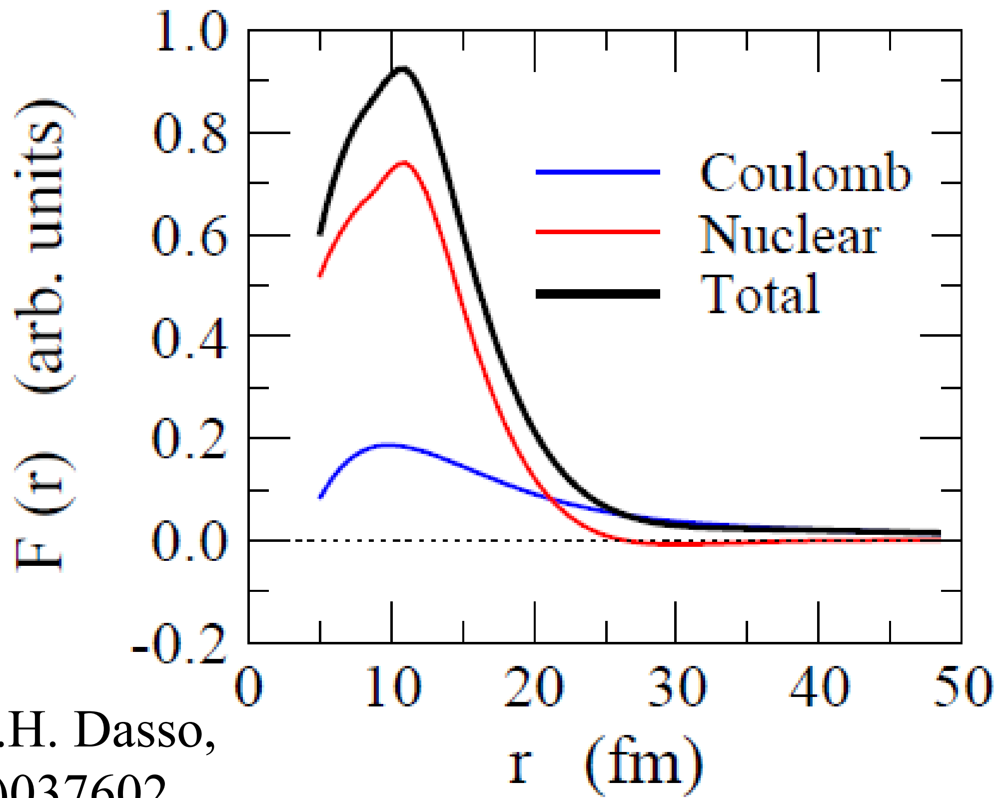
long range な吸収ポテンシャルを導入することにより角度分布が説明される (W.G. Love, T. Terasawa, G.R. Satchler, NPA291('77)183)

(ii) ハロー核の弾性散乱

$^{9,10,11}Be + {}^{64}Zn$ (E_{cm} = 24.5 MeV)



$^{11}Be+{}^{208}Pb$ 反応
$2s_{1/2}$ から E_c = 0.9 MeV にある $p_{3/2}$ 状態への結合ポテンシャル

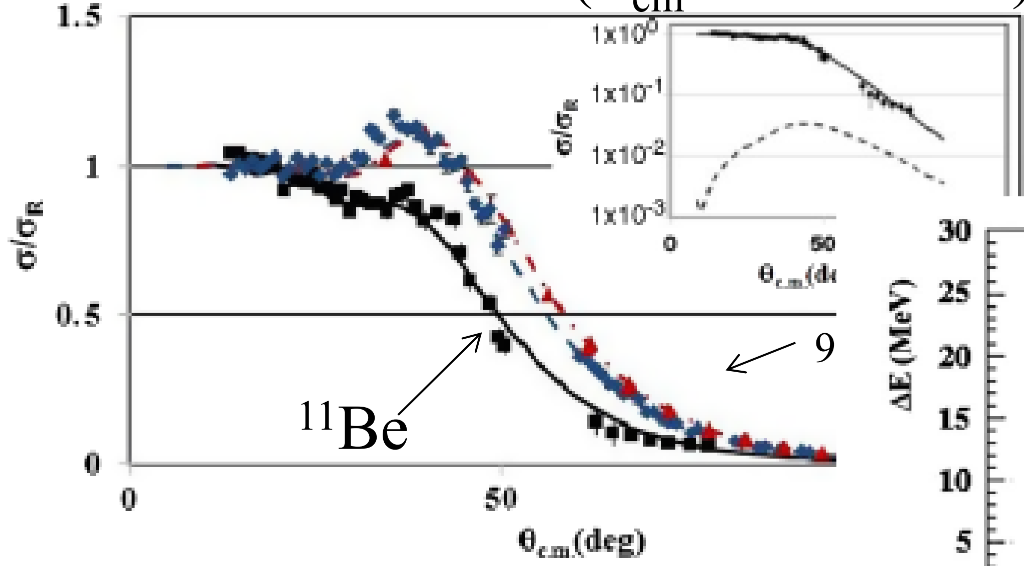


^{11}Be の分解チャンネルとの結合ポテンシャルも同様に long range

K. Hagino, A. Vitturi, C.H. Dasso, S.M. Lenzi, PRC61(‘00)037602

(ii) ハロー核の弾性散乱

^{9,10,11}Be + ^{64}Zn (E_{cm} = 24.5 MeV)



A. Di Pietro et al.,
PRL105('10)022701

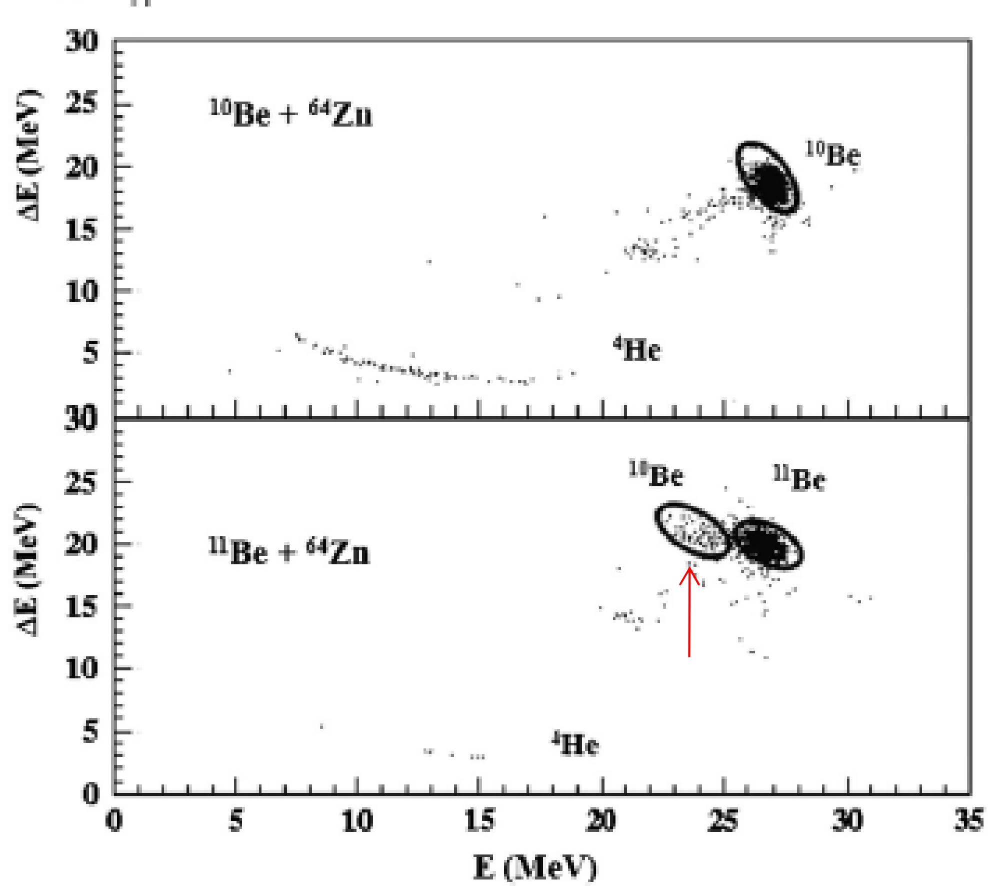


FIG. 2. ΔE-E scatter plots for the reactions ^{10}Be + ^{64}Zn (top) and ^{11}Be + ^{64}Zn (bottom), at $\theta = 35°$.

反応断面積:

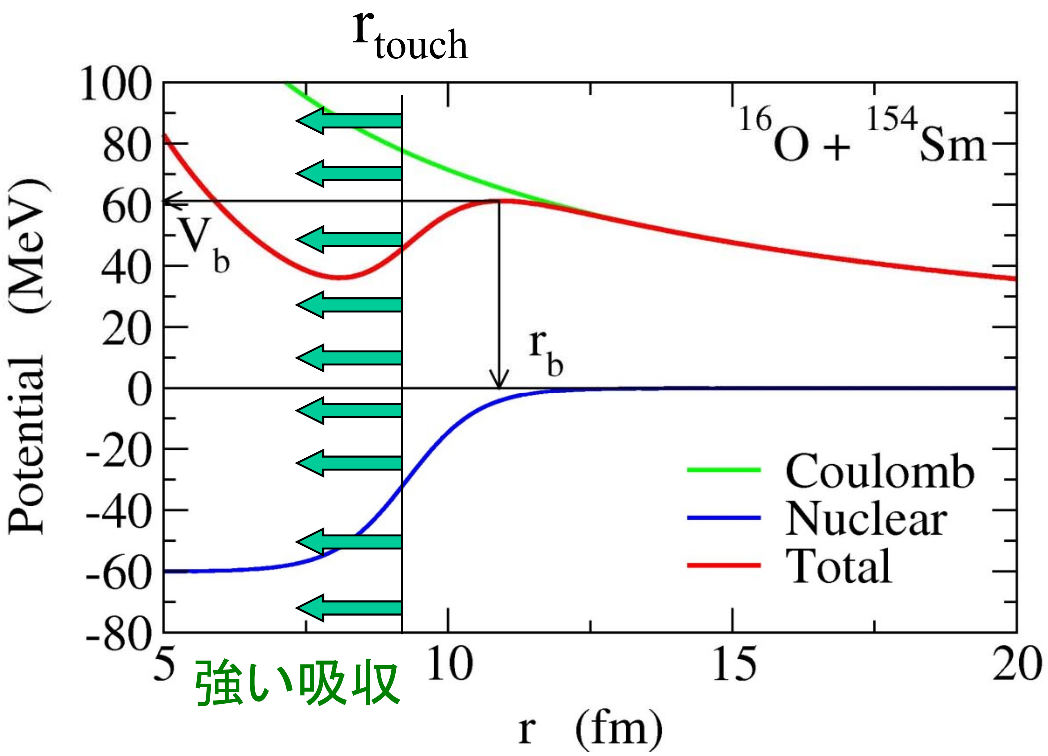
σ_R = 1090 mb (^{9}Be)

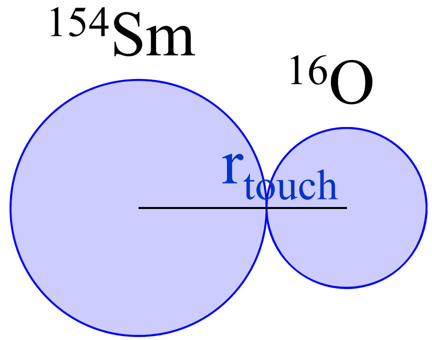
1260 mb (^{10}Be)

2730 mb (^{11}Be)

超重核領域における重イオン核融合反応

➢ 中重核領域における核融合反応:



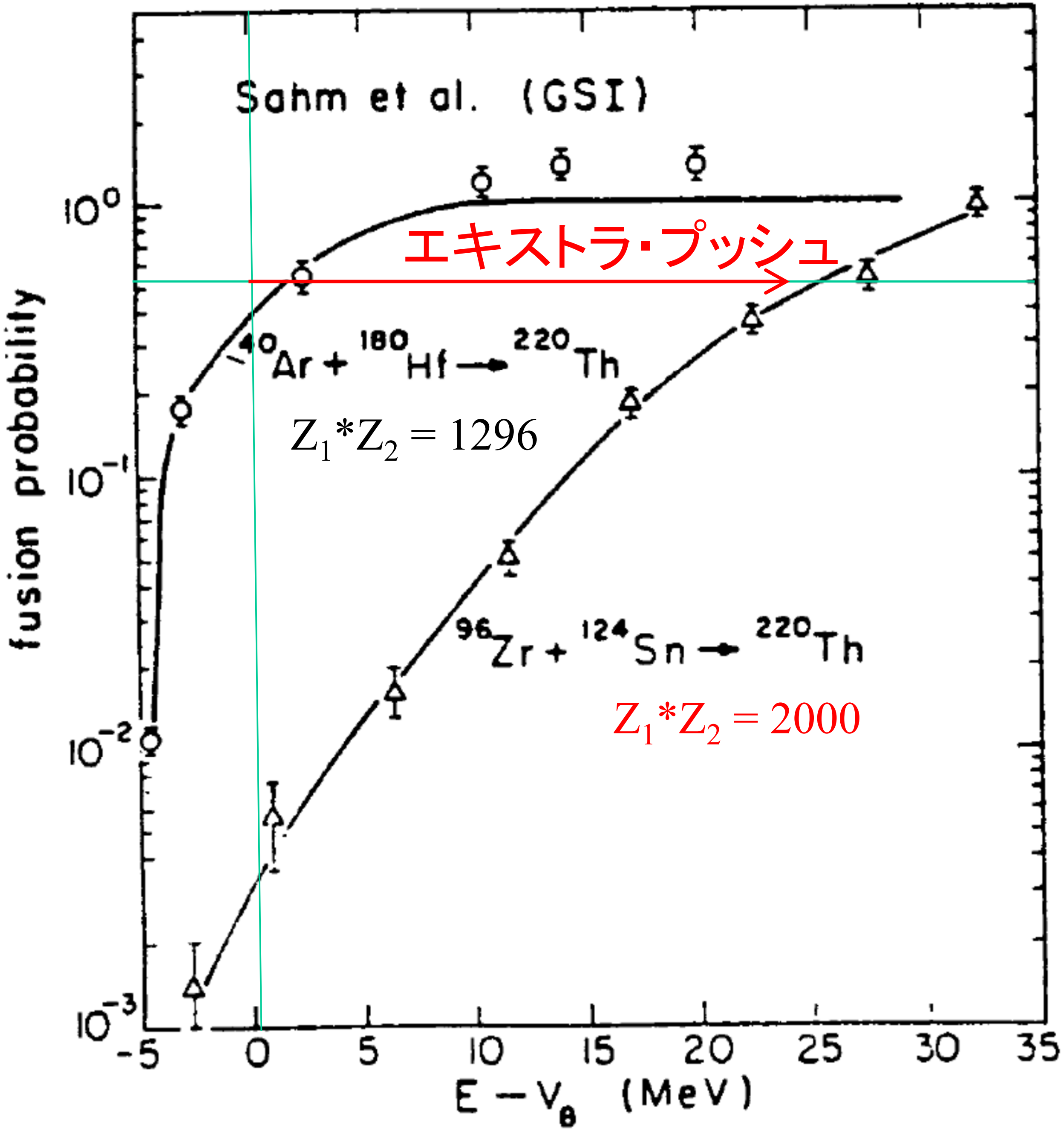


一度接触すると自動的に複合核を形成
（強吸収の仮定）

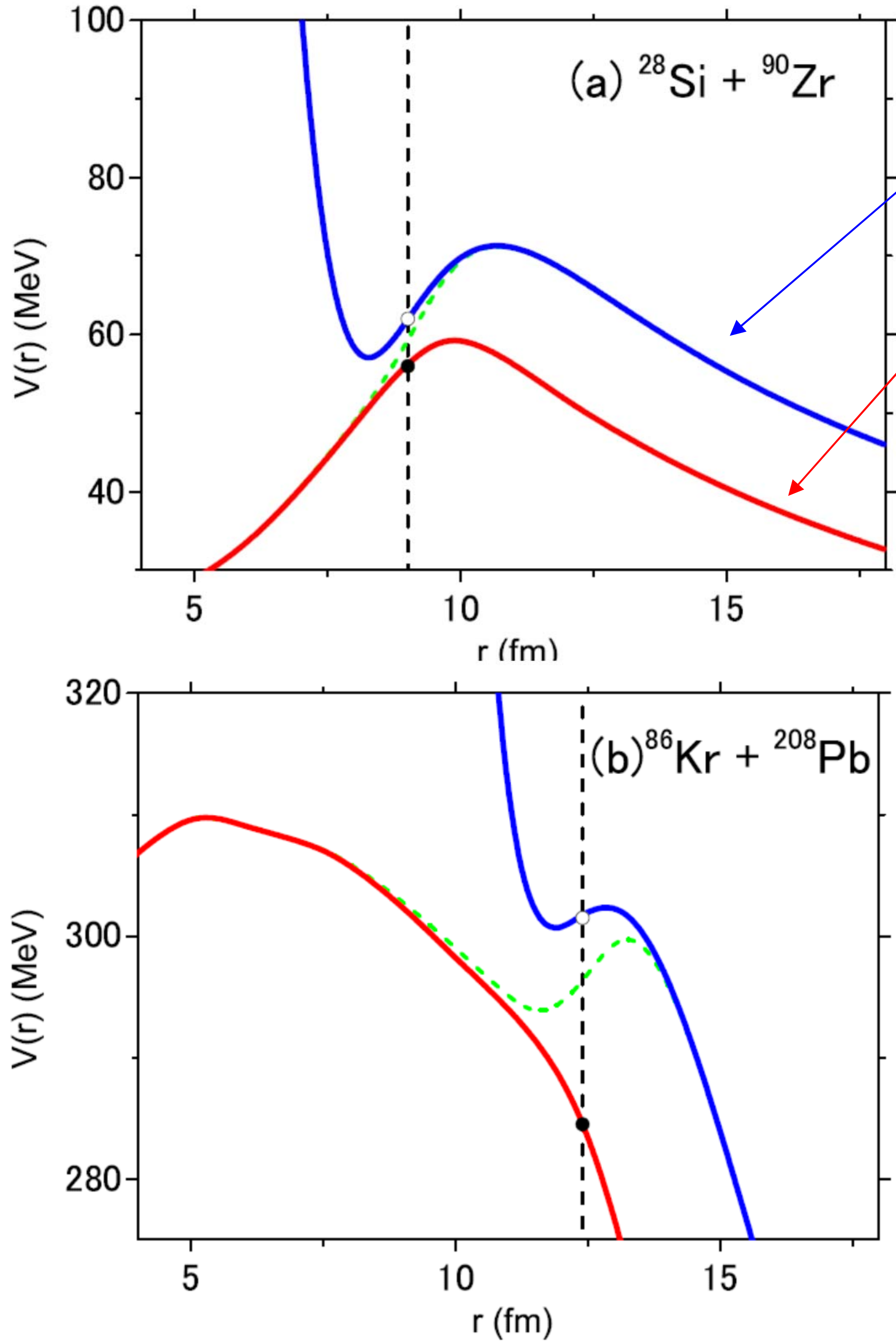
➢ 重核・超重核領域における核融合反応:

接触しても大きな確率で離れてしまう（クーロン反発が強いため）

目安: $Z_1 * Z_2 > 1600 \sim 1800$ の系でこのようなことが起こる



C.-C. Sahm et al.,
Z. Phys. A319('84)113



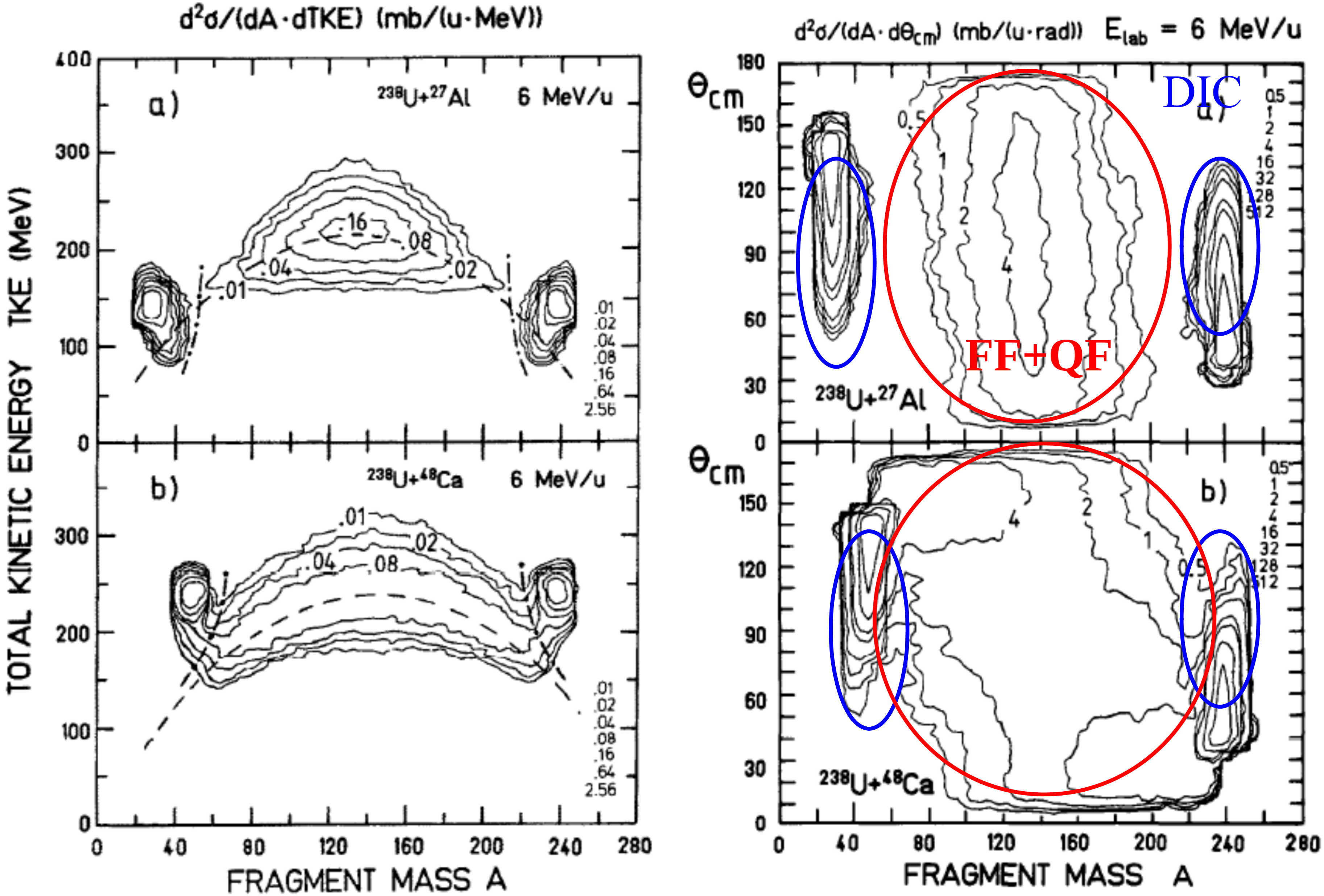
接触する前の2体ポテンシャル

接触後の1体ポテンシャル

青ポテンシャルを越えても
赤ポテンシャルをもう一度
越える必要がある

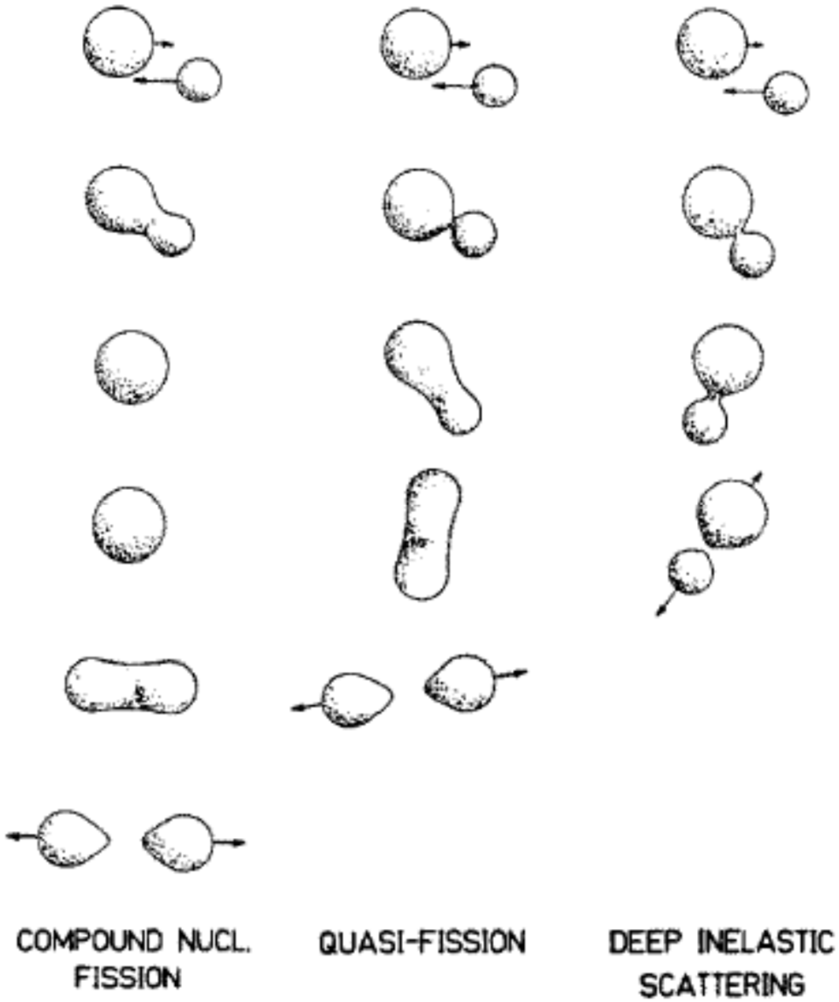
↓

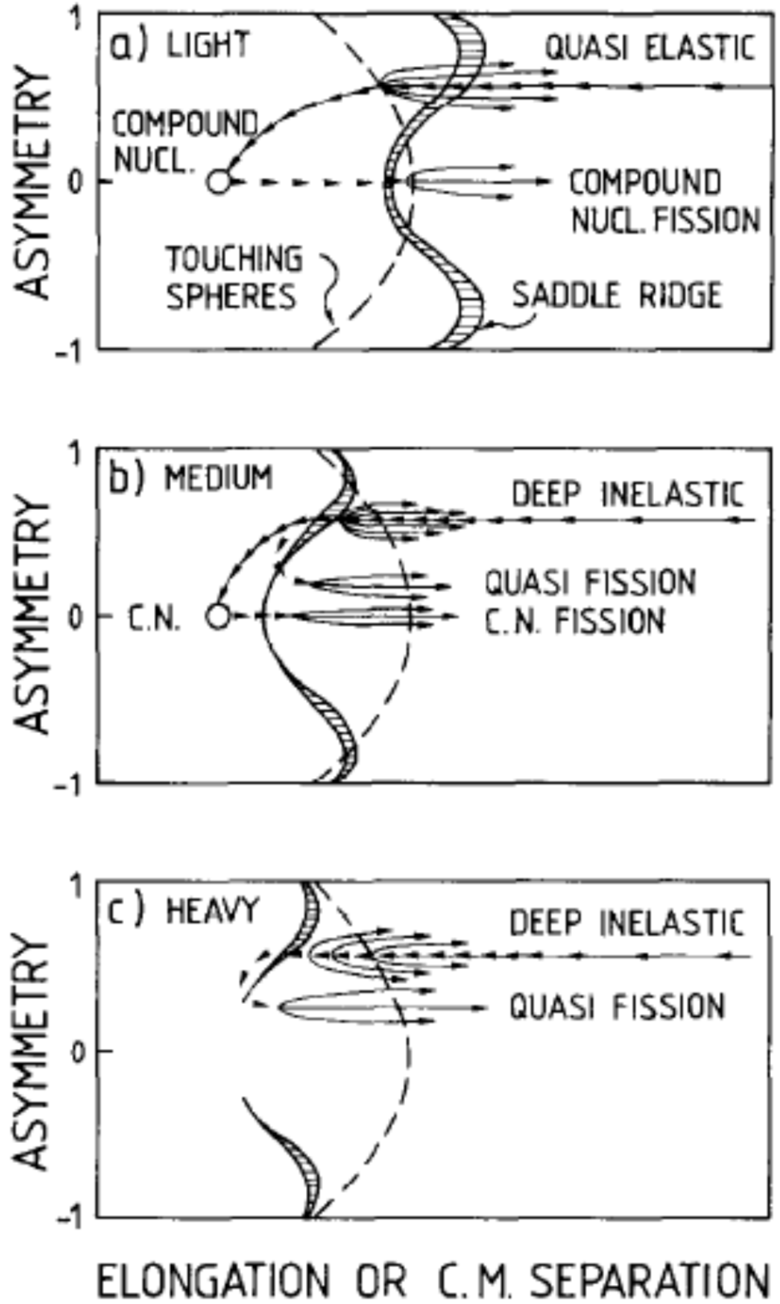
越えきれずに再分離する
確率が大（準核分裂）



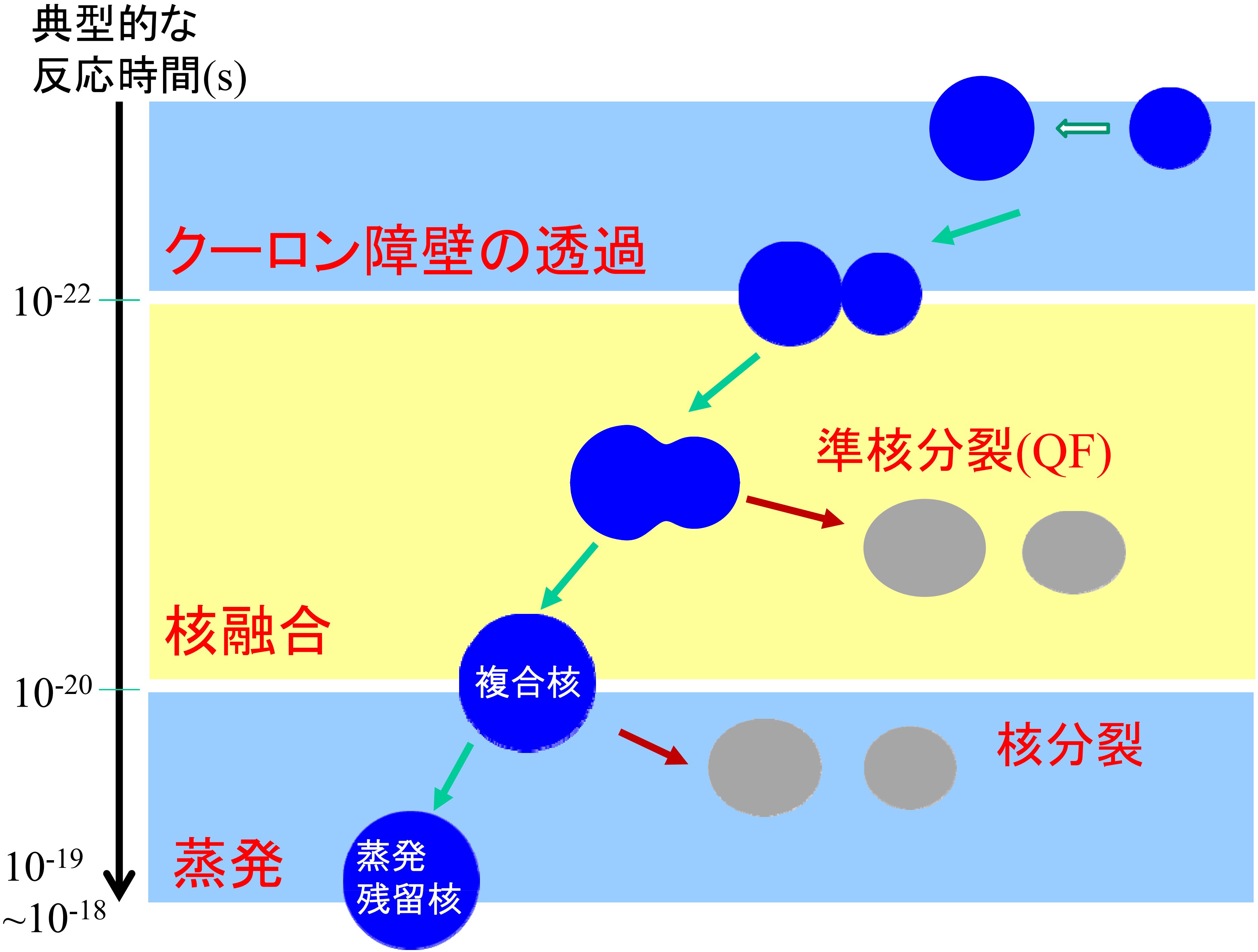
J. Toke et al., NPA440('85)327

*重い系では DIC と QF の領域が重なっている





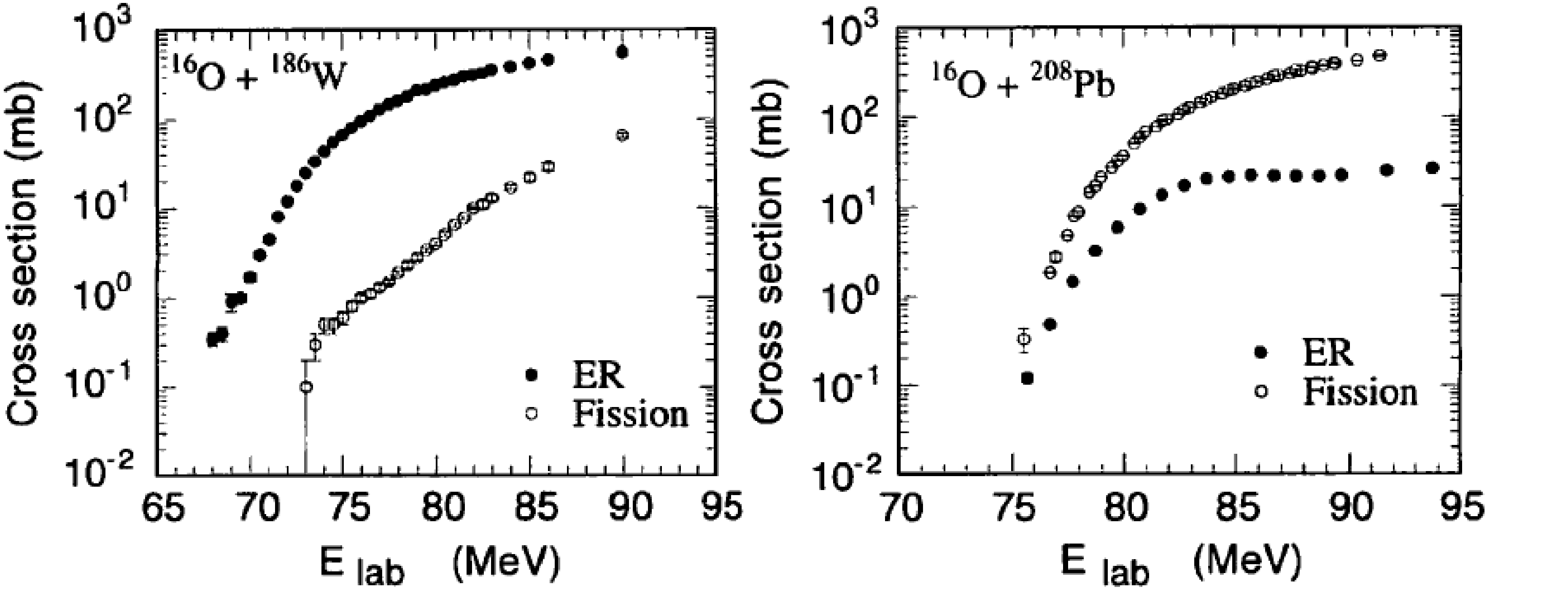
J. Toke et al., NPA440('85)327


典型的な
反応時間(s)
10^-22
10^-20
10^-19
~10^-18
クーロン障壁の透過
核融合
蒸発
準核分裂(QF)
核分裂
複合核
蒸発
残留核

＊どのように核融合反応断面積を測定するのか?

➢ 中重核領域の場合:

✓核融合生成物の直接測定(蒸発残留核＋核分裂)

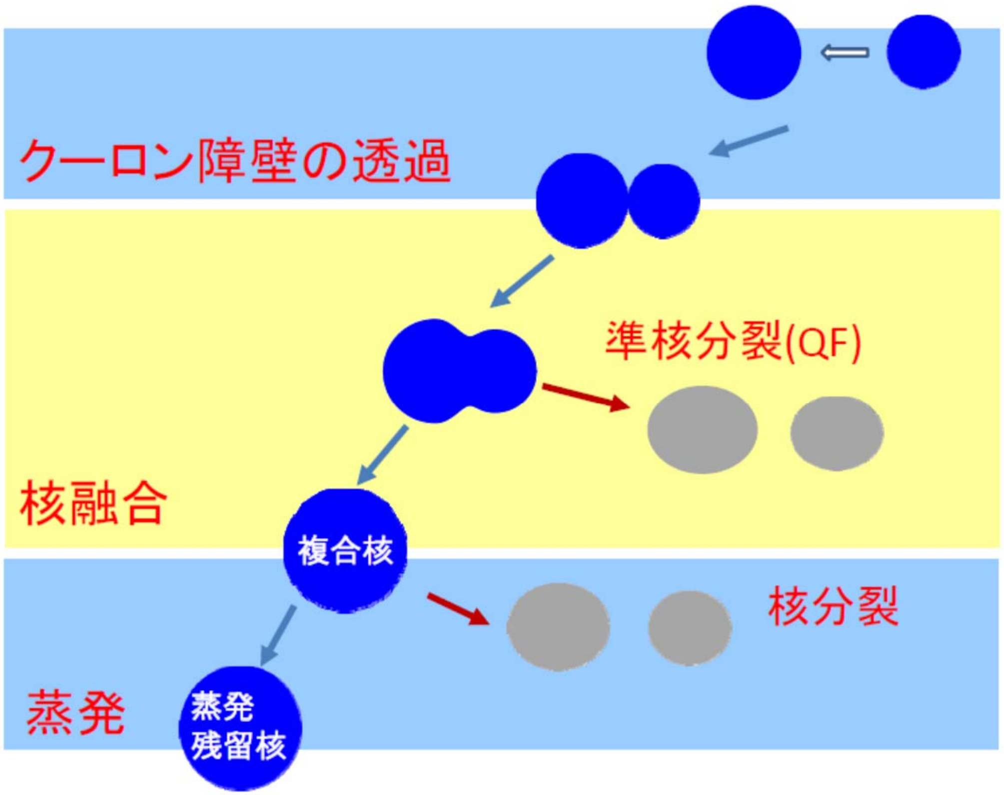


＊どのように核融合反応断面積を測定するのか?

➢ 中重核領域の場合:

✓核融合生成物の直接測定（蒸発残留核＋核分裂）

➢ 重核・超重核領域の場合:



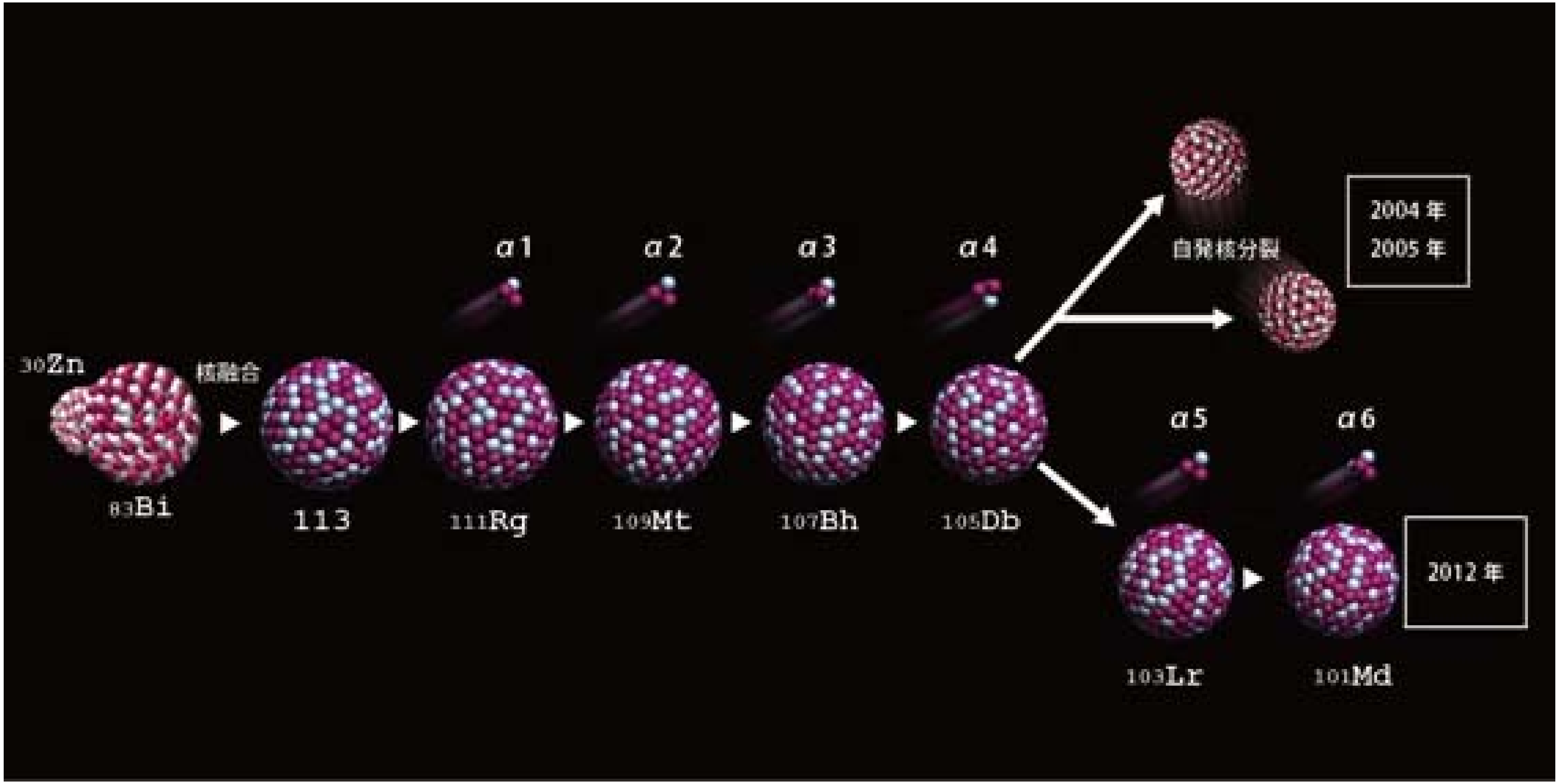
大きな準核分裂の確率のため、核分裂片の測定は複合核形成を意味しない（QFとFFの区別は実験的に困難）

蒸発残留核の測定をもって複合核形成とみなす

重い複合核:
圧倒的な確率で核分裂
（例: ^{58}Fe + ^{208}Pb 反応では
核分裂しない確率は
$P_{suv} \sim 10^{-6}$ 程度）

準核分裂＋生き残りの2重苦

113番元素の合成の成功（理研：森田浩介氏のグループ）

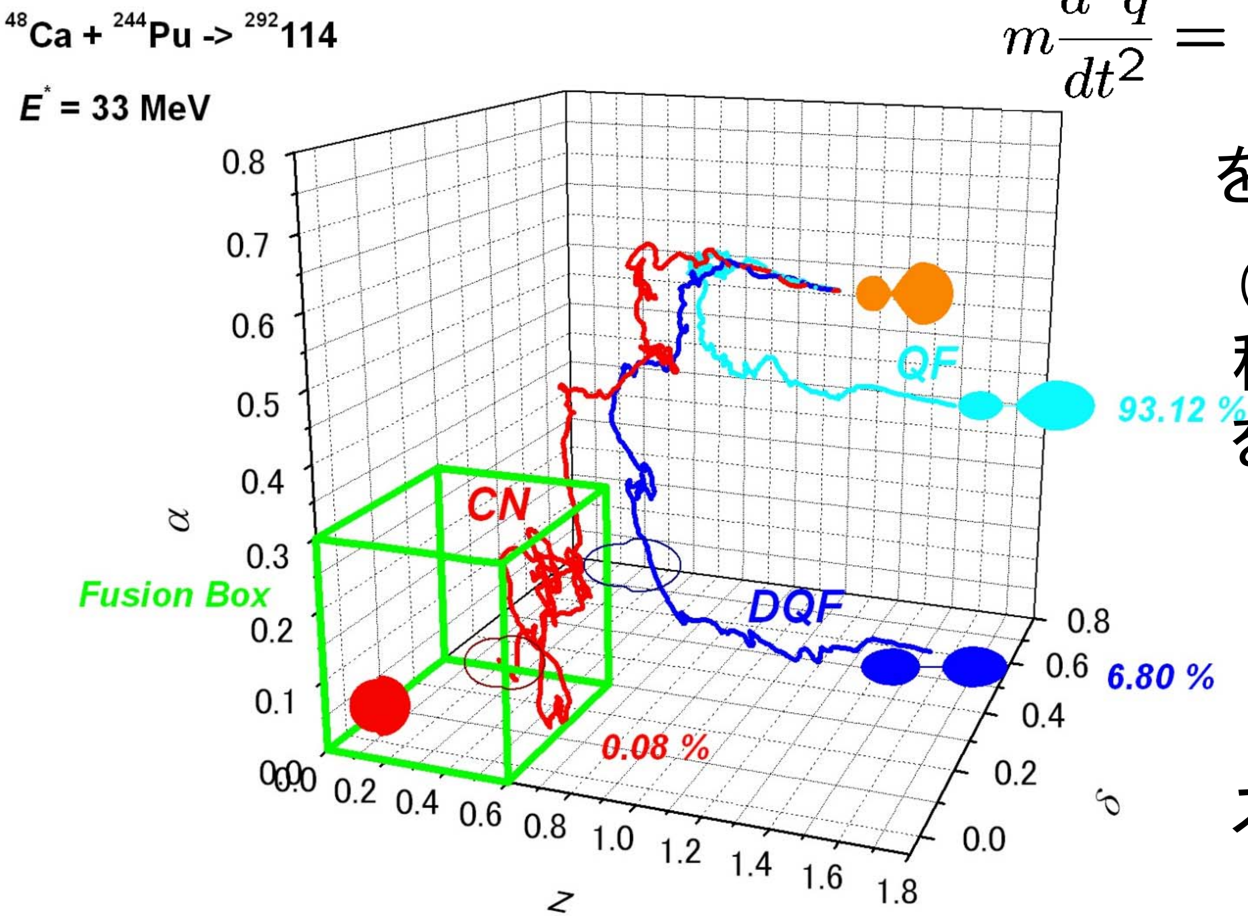


K. Morita et al., J. Phys. Soc. Jpn. 81('12)103201

$$\sigma_{ER} = 22^{+20}_{-13} \quad \mathrm{fb}$$

（全553日の実験で3イベント）

理論:ランジュバン計算(阿部氏、和田氏、太田氏、有友氏)



$$m\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{dV(q)}{dq} - \gamma\frac{dq}{dt} + R(t)$$

を多次元に拡張したもの

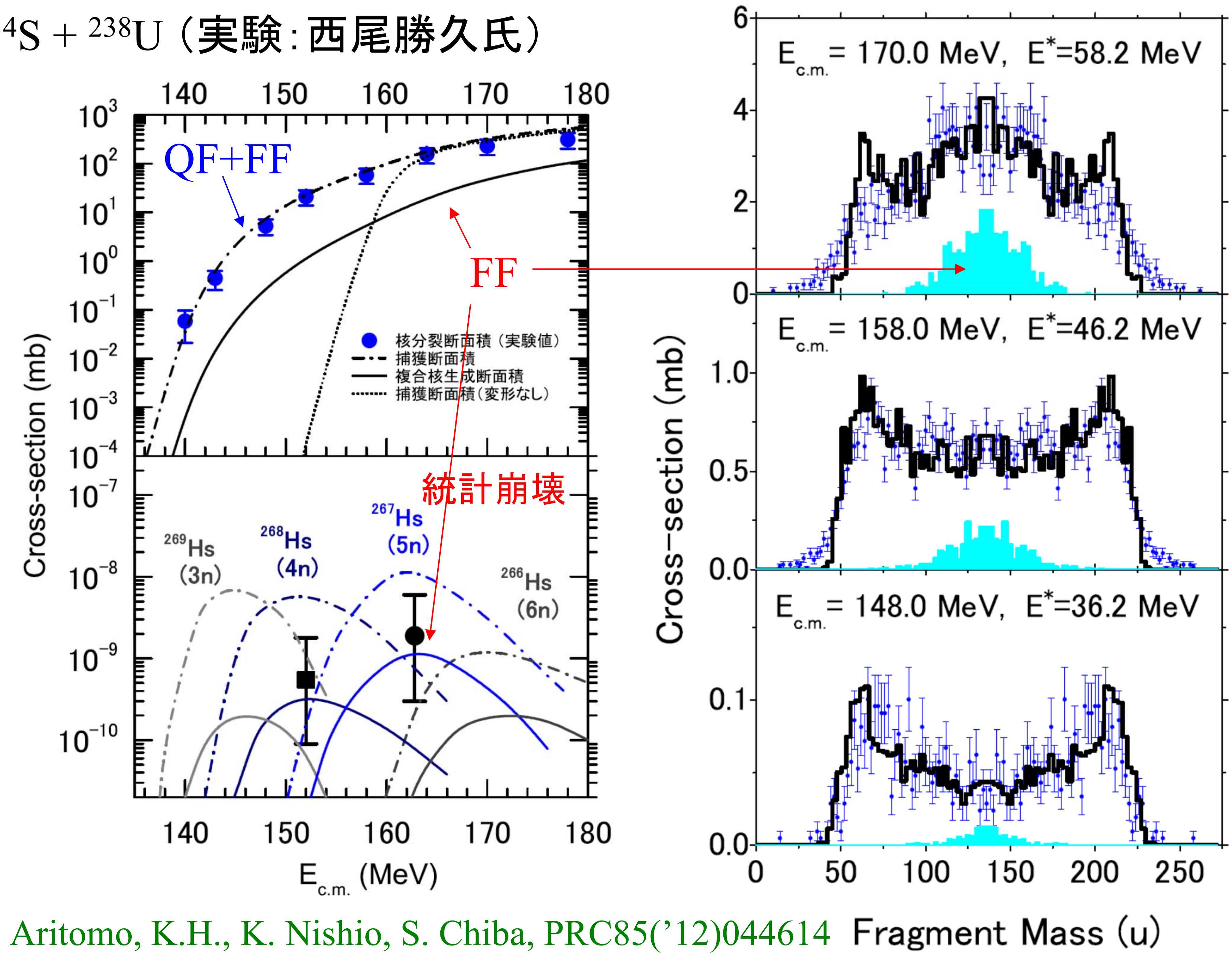
(核間距離、質量非対称度、変形度を座標 q として用いる)

スライド:有友嘉浩氏

最近の進展:結合チャンネル法(接触前)+ランジュバン(接触後)+統計模型(複合核形成後)による解析

Y. Aritomo, K.H., K. Nishio, and S. Chiba, PRC85('12)044614

$^{34}S + ^{238}U$（実験:西尾勝久氏）



Y. Aritomo, K.H., K. Nishio, S. Chiba, PRC85('12)044614

まとめ

クーロン障壁近傍のエネルギーでの重イオン核融合反応

✧核融合反応と量子トンネル効果

低エネルギーでは核融合はトンネルで起こる

✧結合チャンネル法の基礎

反応の途中で励起される集団運動状態

✧核融合障壁分布の概念

核構造に敏感

$$D_{\rm fus}(E) = \frac{d^2(E\sigma_{\rm fus})}{dE^2}$$

✧準弾性散乱と量子反射

✧不安定核の核融合反応

分解、核子移行過程との競合

✧超重核領域の核融合

核融合断面積の阻害と準核分裂

コンピューター・プログラム: CCFULL

http://www.nucl.phys.tohoku.ac.jp/~hagino/ccfull.html

レポート問題1

^{16}O+^{144}Sm 反応を考える。核力ポテンシャルとして指数関数ポテンシャル

$$V_N(r) = -V_0 \exp[-(r-R_0)/a]$$
$$V_0 = 105 \text{ MeV}$$
$$R_0 = 8.54 \text{ fm}$$
$$a = 0.75 \text{ fm}$$

を用いると、クーロン障壁は $R_b = 10.9$ fm に現れる。

i) s波 ($l = 0$) に対するクーロン障壁の高さを求めよ。
ii) クーロン障壁の位置 ($R_b = 10.9$ fm) が近似的に変化しないとしたとき、$l = 50$ に対する障壁の高さを求めよ。

^{16}O と ^{144}Sm 原子核の換算質量を用いなければならないことに注意せよ。ただし、ここで、質量数 A の原子核の質量を $mc^2 = 931.5 \times A$ (MeV) として計算してよい。

レポート問題2

レポート問題1と同様に^{16}O+^{144}Sm 反応を考える。レポート問題1と同じ核力ポテンシャルを用いると、クーロン障壁の曲率 $\hbar\Omega$ は 4.46 MeV となる。

Wongの公式を用いて、E_{cm} = 60 MeV 及び 75 MeV における核融合反応断面積を求めよ (mb の単位で答えよ)。

Wong の式:

$$\sigma_{\text{fus}}(E_{c.m.}) = \frac{\hbar\Omega}{2E} R_b^2 \log\left[1 + \exp\left(\frac{2\pi}{\hbar\Omega}(E_{c.m.} - V_b)\right)\right]$$

レポート問題3

レポート問題1、2と同様に$^{16}O+^{144}Sm$ 反応を考える。レポート問題1、2と同じ核力ポテンシャルを用いる。また、^{144}Sm の 3^- 状態の励起をDasso et al. の2準位模型で取り入れる。$\varepsilon = 1.8$ MeV, $F = 3$ MeV とする。問題2と同様、Wongの公式を用いて、$E_{cm} = 60$ MeV 及び 75 MeV における核融合反応断面積を求めよ。問題2の場合の核融合反応断面積と比べてどのように変化したか述べよ。

(note) $\begin{pmatrix} 0 & F \\ F & \epsilon \end{pmatrix}$ を対角化すると、固有値、固有関数は

$$\lambda_\pm = \frac{\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 + 4F^2}}{2} \qquad \begin{pmatrix} \alpha_\pm \\ \beta_\pm \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{F^2 + \lambda_\pm^2}} \cdot \begin{pmatrix} F \\ \lambda_\pm \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \sigma_{\rm fus}(E) = |\alpha_+|^2 \sigma_{\rm fus}(E; V + \lambda_+) + |\alpha_-|^2 \sigma_{\rm fus}(E; V + \lambda_-)$$