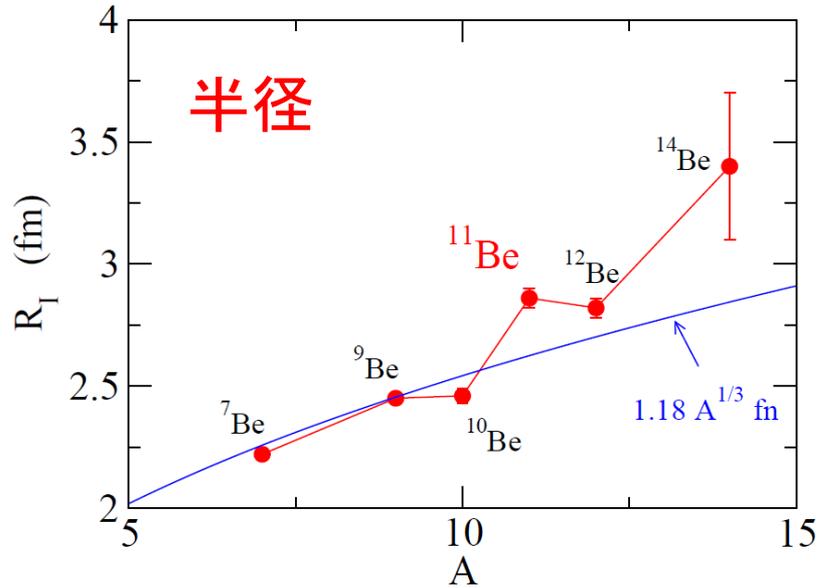


1 粒子ハロ一核の性質

- 一 束縛状態
- 一 角運動量の効果
- 一 クーロン励起

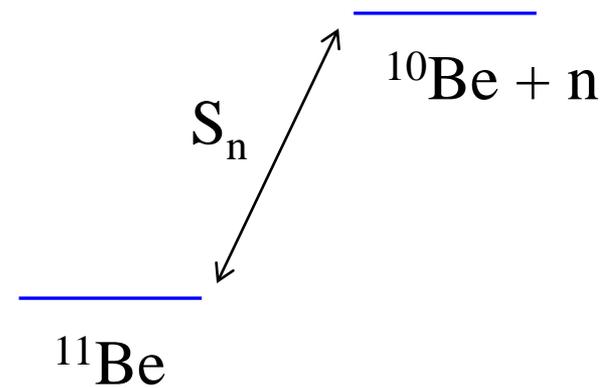
1中性子ハロ一核とは何か

典型的な例： $^{11}_4\text{Be}_7$



I. Tanihata et al.,
PRL55('85)2676; PLB206('88)592

1中性子分離エネルギー



$$S_n = 504 \pm 6 \text{ keV}$$

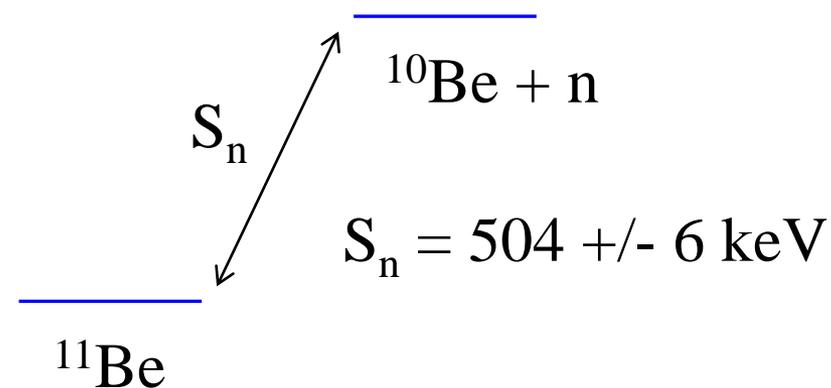
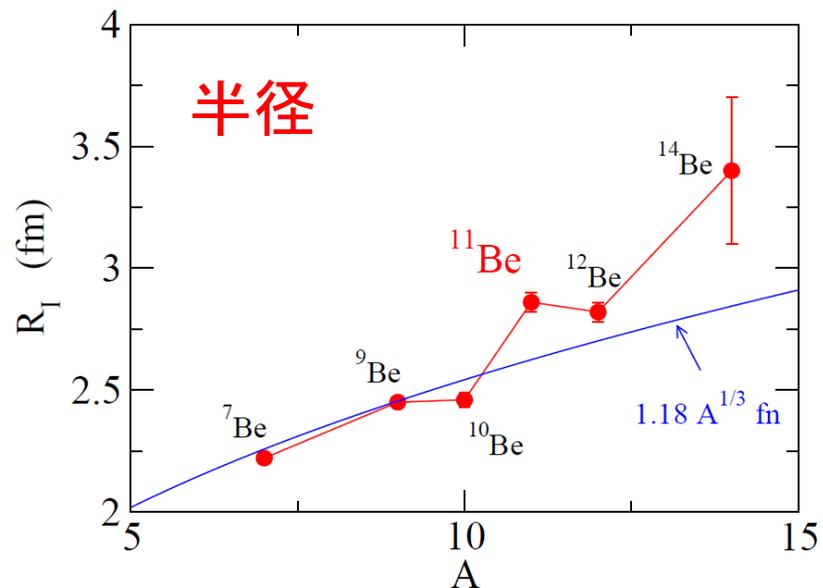
非常に小さい

ちなみに ^{13}C では、
 $S_n = 4.95 \text{ MeV}$

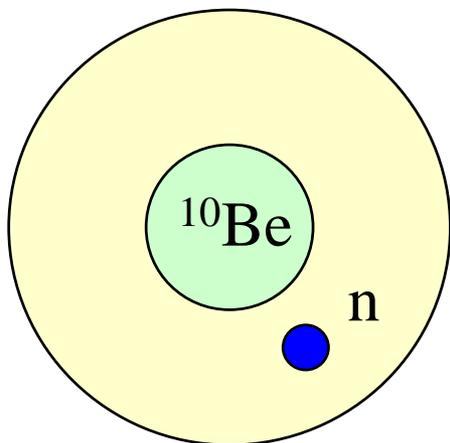
1 中性子ハロー核

1 中性子分離エネルギー

典型的な例： $^{11}_4\text{Be}_7$



解釈： ^{10}Be のまわりに1つの中性子が弱く束縛され薄く広がっている



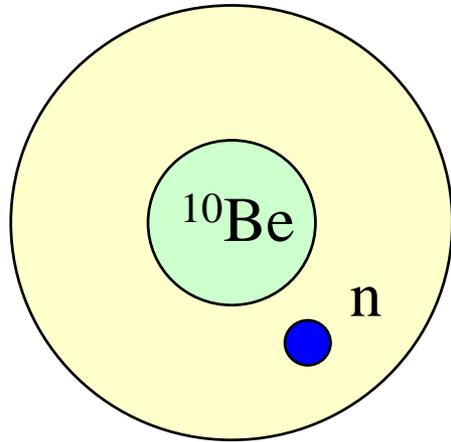
$$\psi(r) \sim \exp(-\kappa r) \quad \kappa = \sqrt{2m|\epsilon|/\hbar^2}$$

弱く束縛された系



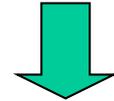
密度分布の空間的広がり(ハロー構造)

解釈: ^{10}Be のまわりに1つの中性子が弱く束縛され薄く広がっている



$$\psi(r) \sim \exp(-\kappa r) \quad \kappa = \sqrt{2m|\epsilon|/\hbar^2}$$

弱く束縛された系

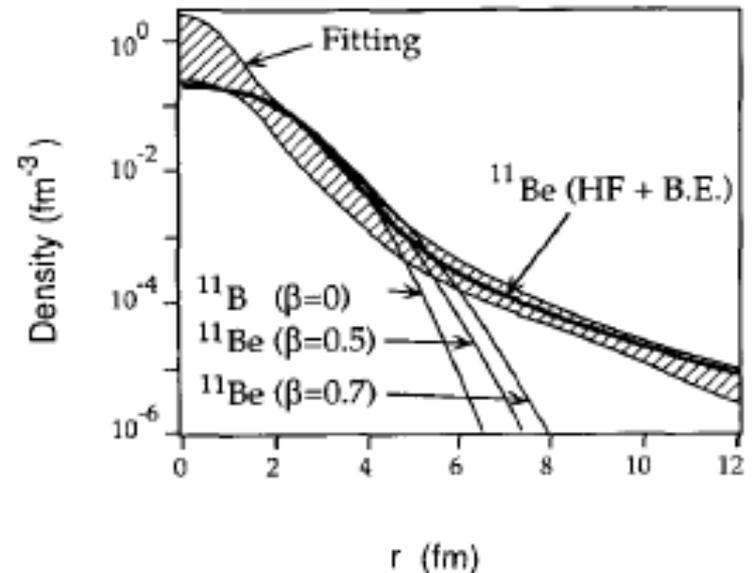


密度分布の空間的広がり(ハロー構造)

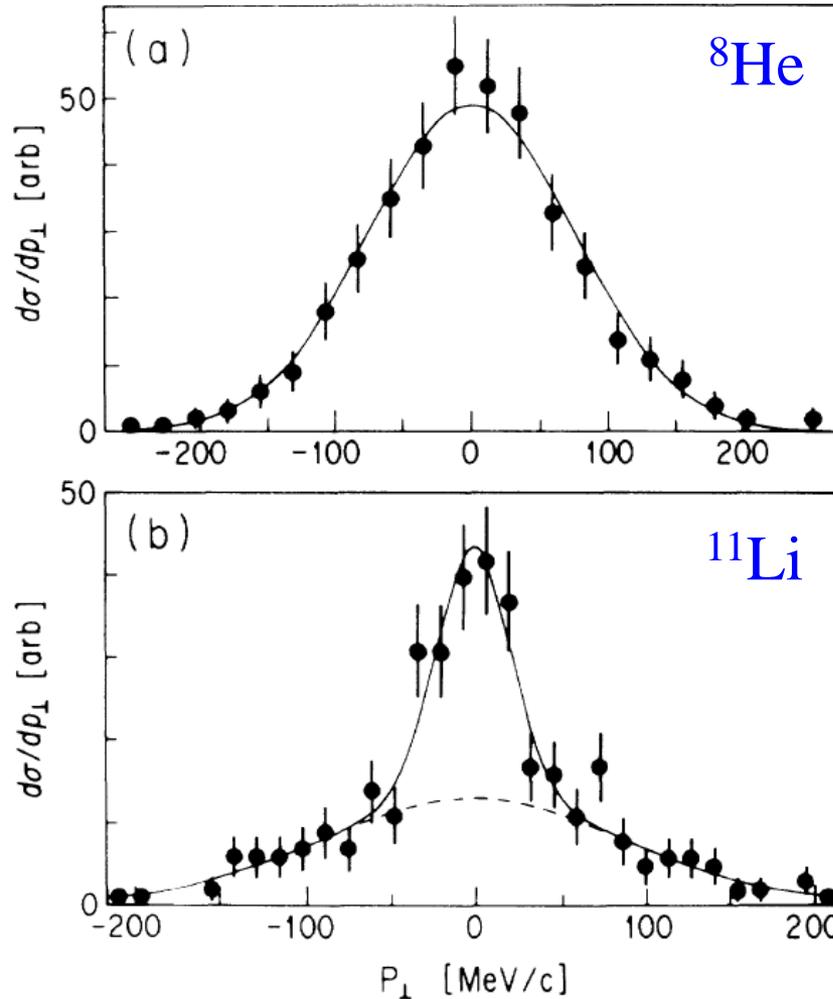
反応断面積の実験値を説明する
密度分布



月暈(月のまわりに広がる
薄い輪。ハロー。)



運動量分布



$$S_{2n} \sim 2.1 \text{ MeV}$$

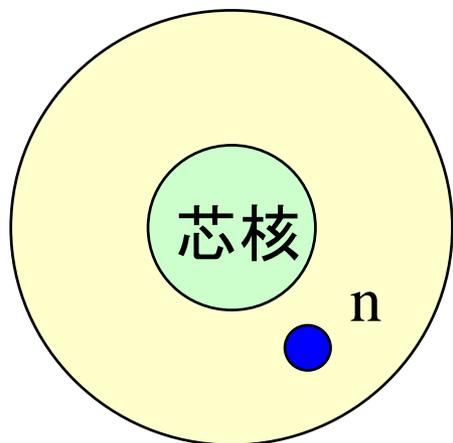
$$S_{2n} \sim 300 \text{ keV}$$

束縛が弱くなり空間的に広がると運動量分布が狭くなる

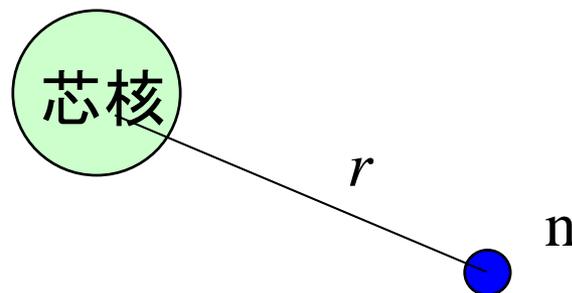
↔ 中性子ハロー

FIG. 1. Transverse-momentum distributions of (a) ${}^6\text{He}$ fragments from reaction ${}^8\text{He}+\text{C}$ and (b) ${}^9\text{Li}$ fragments from reaction ${}^{11}\text{Li}+\text{C}$. The solid lines are fitted Gaussian distributions. The dotted line is a contribution of the wide component in the ${}^9\text{Li}$ distribution.

一粒子運動の性質: 束縛状態



芯核と中性子でできる2体問題と近似



相対距離 r の関数として球対称ポテンシャル $V(r)$ を仮定。

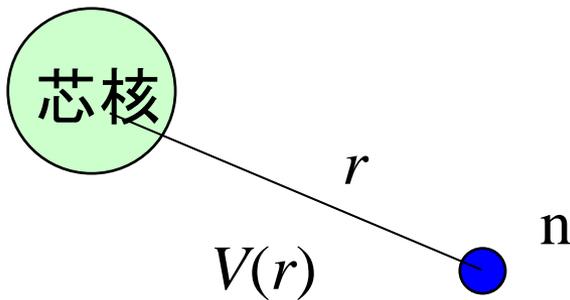
cf. 平均場ポテンシャル:

$$V(r) \sim \int v(r, r') \rho(r') dr'$$

相対運動のハミルトニアン

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V(r)$$

相対運動のハミルトニアン



$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(r)$$

簡単のためスピン軌道相互作用はないとすると (l_s 力がなくても本質は変わらない)

$$\Psi_{lmm_s}(\mathbf{r}) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \chi_{m_s}$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V(r) - \epsilon_l \right] u_l(r) = 0$$

境界条件 (束縛状態):

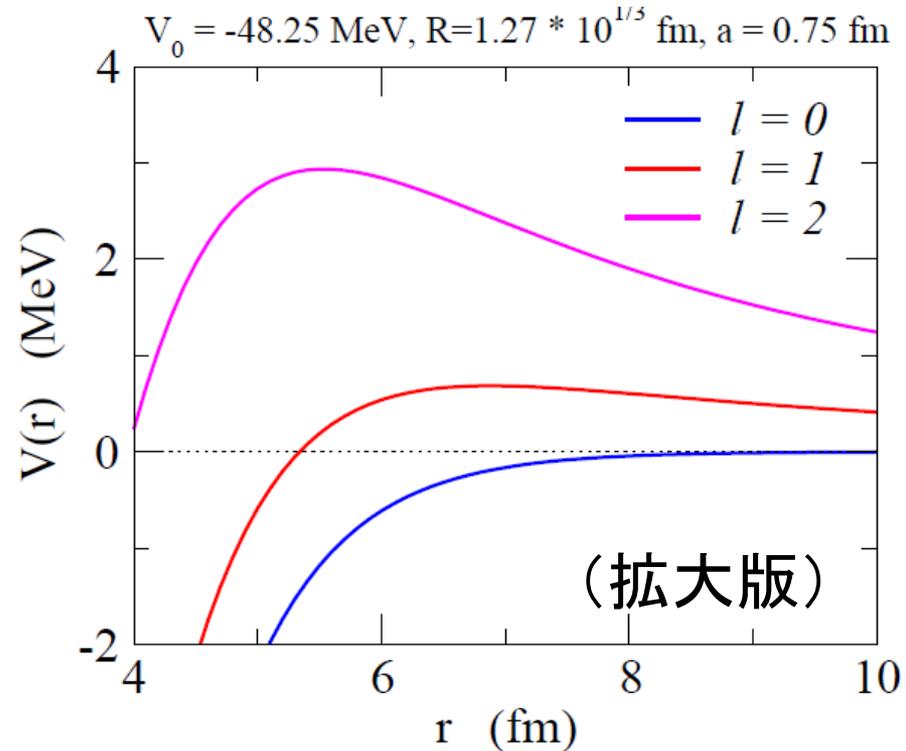
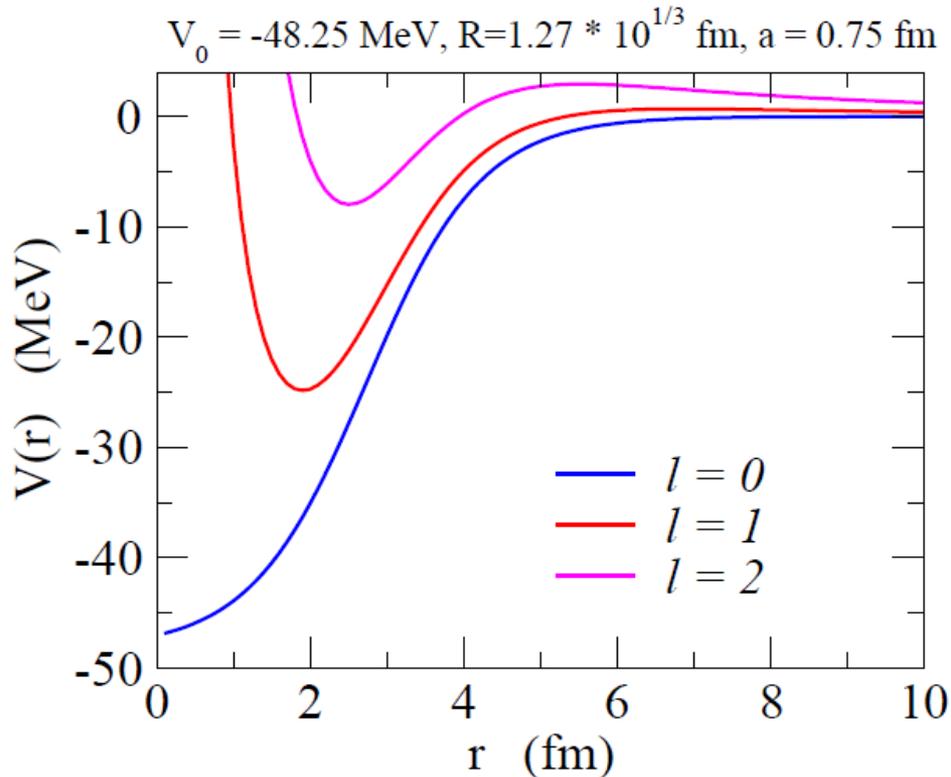
$$\begin{aligned} u_l(r) &\sim r^{l+1} && (r \sim 0) \\ &\rightarrow e^{-\kappa r} && (r \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

正確には modified 球ベッセル関数
(球ハンケル関数)

角運動量とハロー現象

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V(r) - \epsilon_l \right] u_l(r) = 0$$

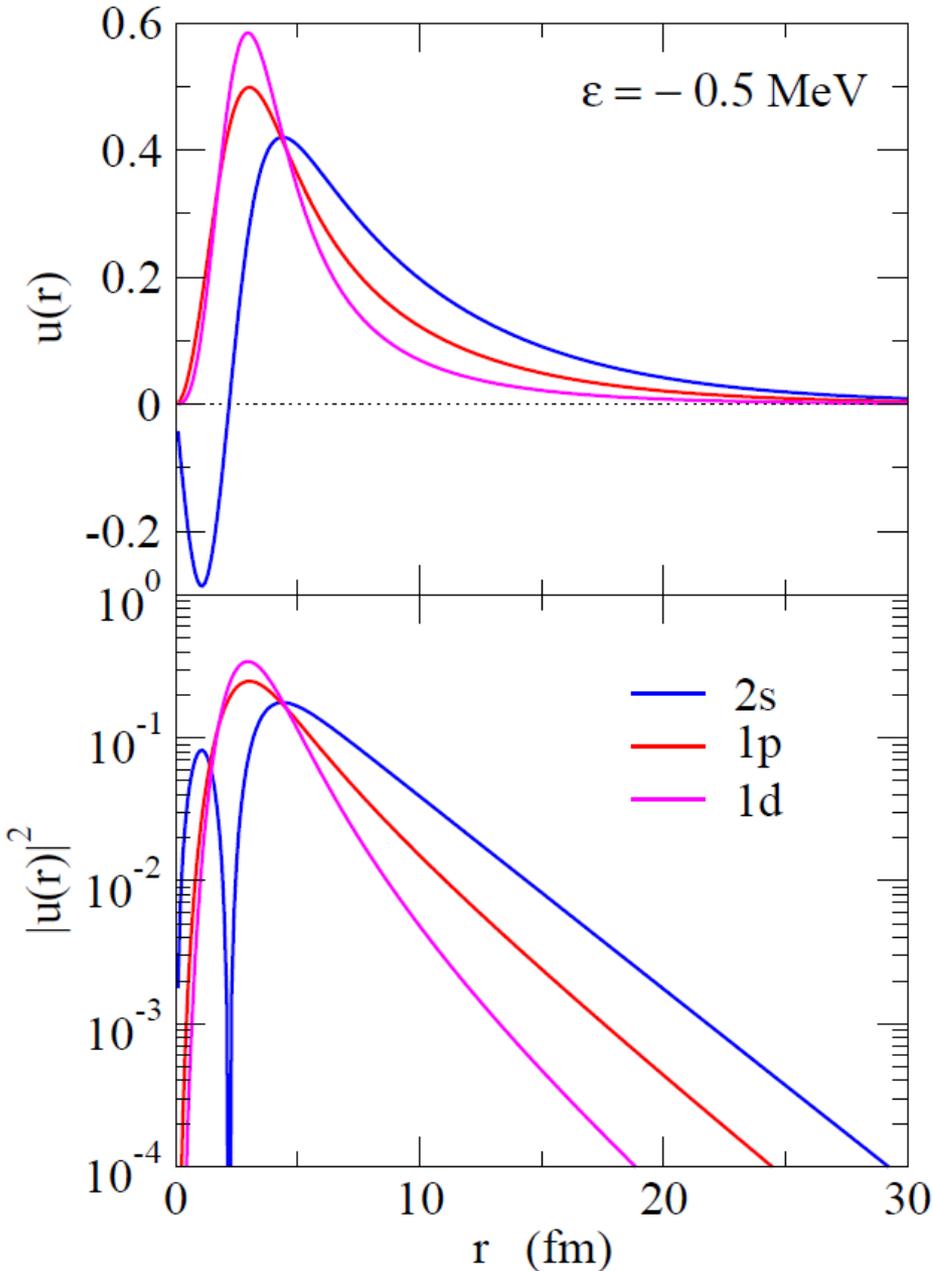
遠心力ポテンシャル



遠心力障壁の高さ: 0 MeV ($l = 0$), 0.69 MeV ($l = 1$), 2.94 MeV ($l = 2$)

波動関数

$\varepsilon = -0.5 \text{ MeV}$ となるように各 l ごとに V_0 を調整



$l = 0$: 長いテール

$l = 2$: 局在

$l = 1$: その中間

平均2乗半径:

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{\int_0^\infty dr r^2 u_l(r)^2}$$

7.17 fm ($l = 0$)

5.17 fm ($l = 1$)

4.15 fm ($l = 2$)

ゼロ・エネルギーにおける振る舞い

K. Riisager, A.S. Jensen, and P. Moller, NPA548 ('92) 393

$$I_n \equiv \int_0^\infty dr r^n |u_l(r)|^2$$

$r > R$ で $u_l(r) \sim B h_l^{(+)}(i\kappa r)$ とすると、 $B = u_l(R)/h_l^{(+)}(i\kappa R)$

z が小さい時、 $h_l^{(+)}(z) \propto z^{-l-1}$ であることを使うと、

$$\begin{aligned} I_n &= \int_R^{\epsilon/\kappa} dr r^n |u_l(r)|^2 + \left(\int_0^R + \int_{\epsilon/\kappa}^\infty \right) dr r^n |u_l(r)|^2 \\ &\sim |u_l(R)|^2 (\kappa R)^{2l+2} \kappa^{-(n+3)} \\ &\quad \times \left(\frac{\epsilon^{n-2l+1} - (\kappa R)^{n-2l+1}}{n-2l+1} + \dots \right) \end{aligned}$$

* $\epsilon (> \kappa R)$ は $h_l^{(+)}(\epsilon)$ の漸近形が使えるくらい小さい量

ゼロ・エネルギーにおける振る舞い

K. Riisager, A.S. Jensen, and P. Moller, NPA548 ('92) 393



$$\langle r^2 \rangle = \frac{I_2}{I_0} \sim \frac{\kappa^{-5} \left(\frac{\epsilon^{-2l+3} - (\kappa R)^{-2l+3}}{-2l+3} + \dots \right)}{\kappa^{-3} \left(\frac{\epsilon^{-2l+1} - (\kappa R)^{-2l+1}}{-2l+1} + \dots \right)}$$

$$l = 0$$

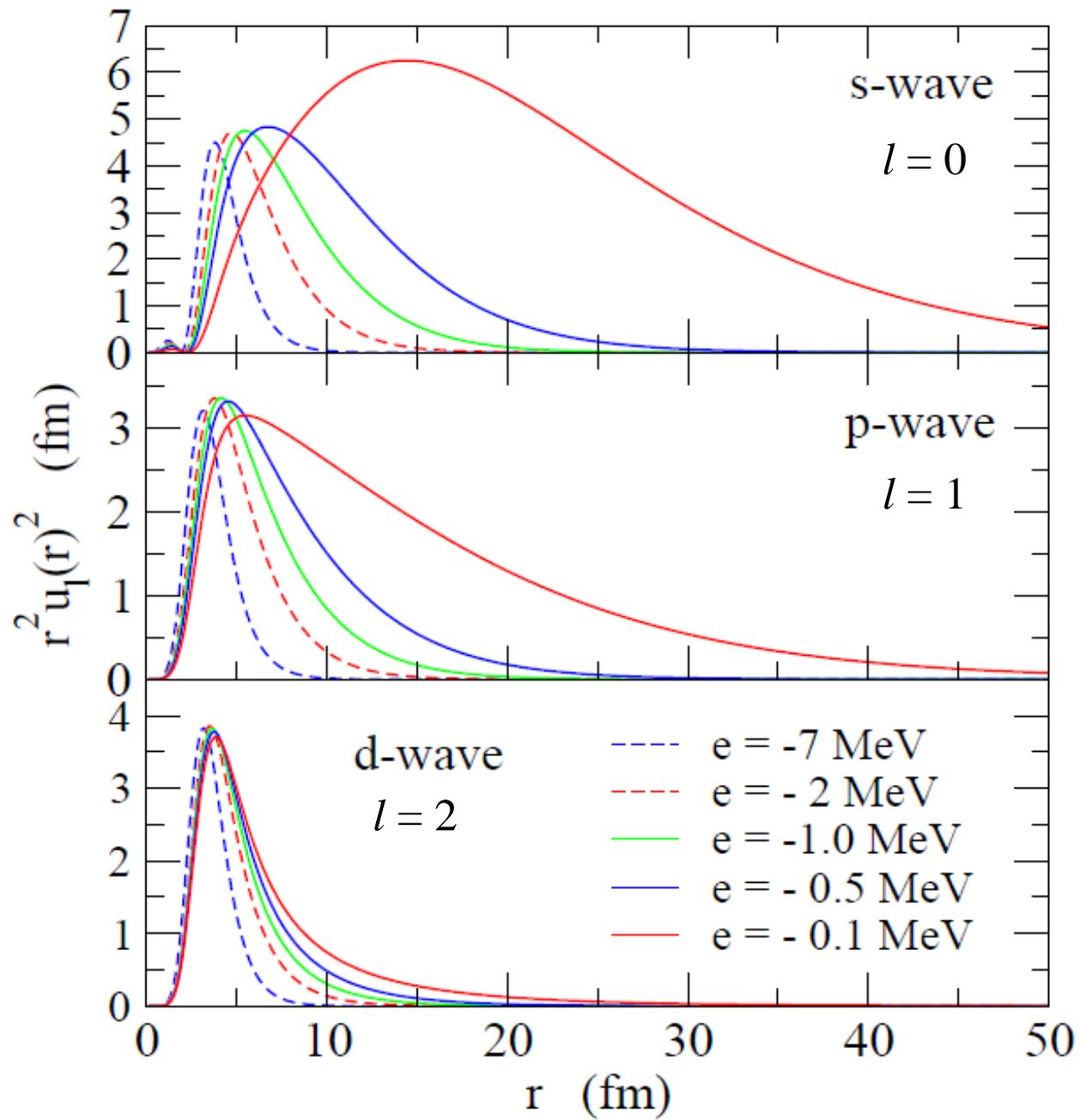
$$\langle r^2 \rangle \sim \frac{\kappa^{-5} \left(\frac{\epsilon^3}{3} + \dots \right)}{\kappa^{-3} (\epsilon + \dots)} \propto \kappa^{-2} \rightarrow \infty$$

$$l = 1$$

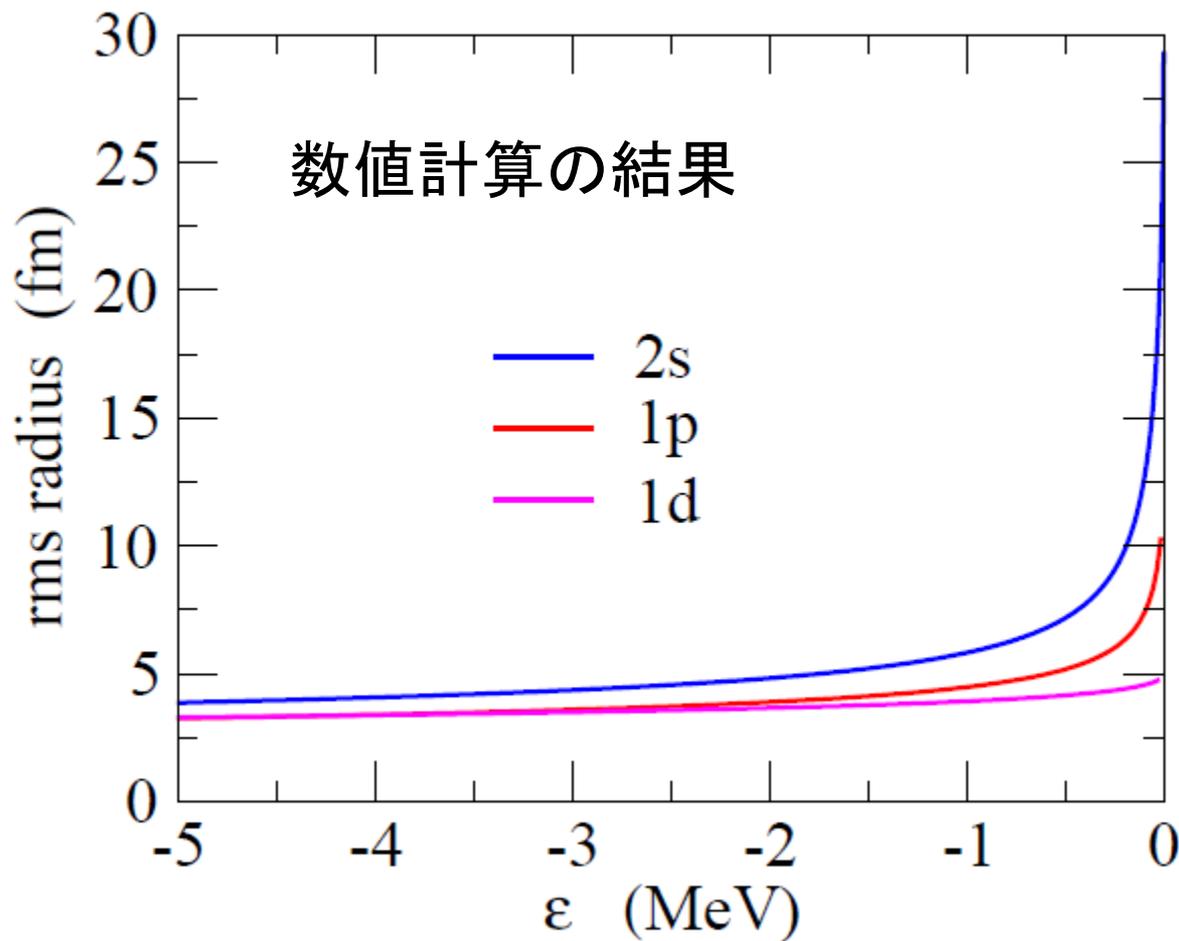
$$\langle r^2 \rangle \sim \frac{\kappa^{-5} (\epsilon + \dots)}{\kappa^{-3} \left(\frac{-(\kappa R)^{-1}}{-1} + \dots \right)} \propto \kappa^{-1} \rightarrow \infty$$

$$l \geq 2$$

$$\langle r^2 \rangle \sim \frac{\kappa^{-5} \left(\frac{-(\kappa R)^{-2l+3}}{-2l+3} + \dots \right)}{\kappa^{-3} \left(\frac{-(\kappa R)^{-2l+1}}{-2l+1} + \dots \right)} \propto \kappa^0 \rightarrow \text{finite}$$



$$\langle r^2 \rangle \propto \begin{cases} 1/|\epsilon_0| & (l=0) \\ 1/\sqrt{|\epsilon_1|} & (l=1) \\ \text{finite} & (l=2) \end{cases}$$



↓

半径は $l=0,1$ では発散
(ゼロ・エネルギー極限)

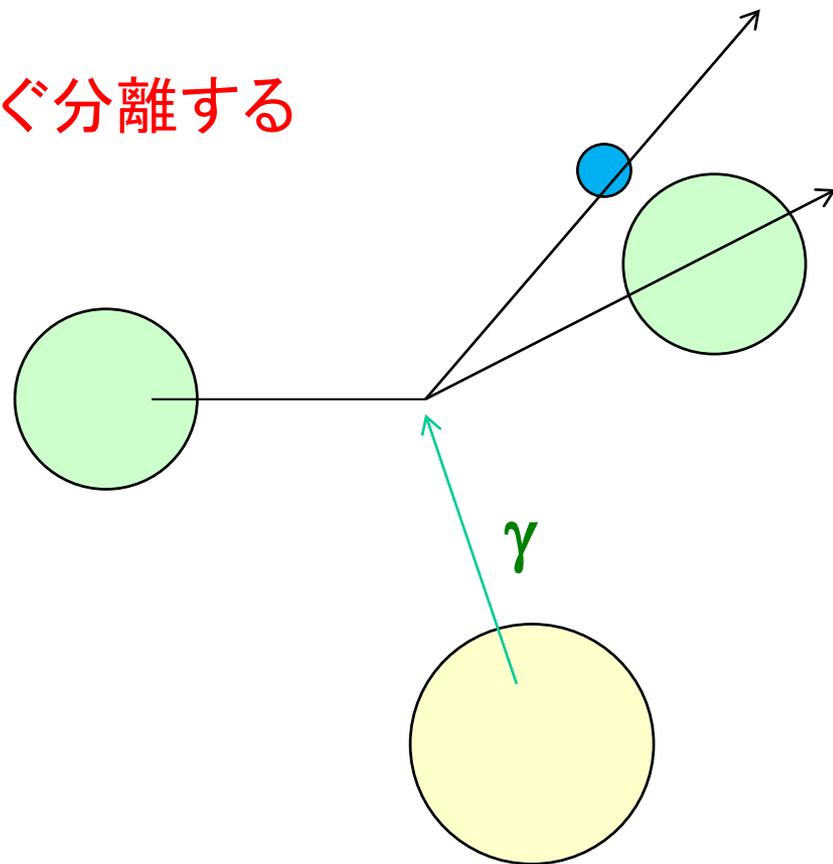
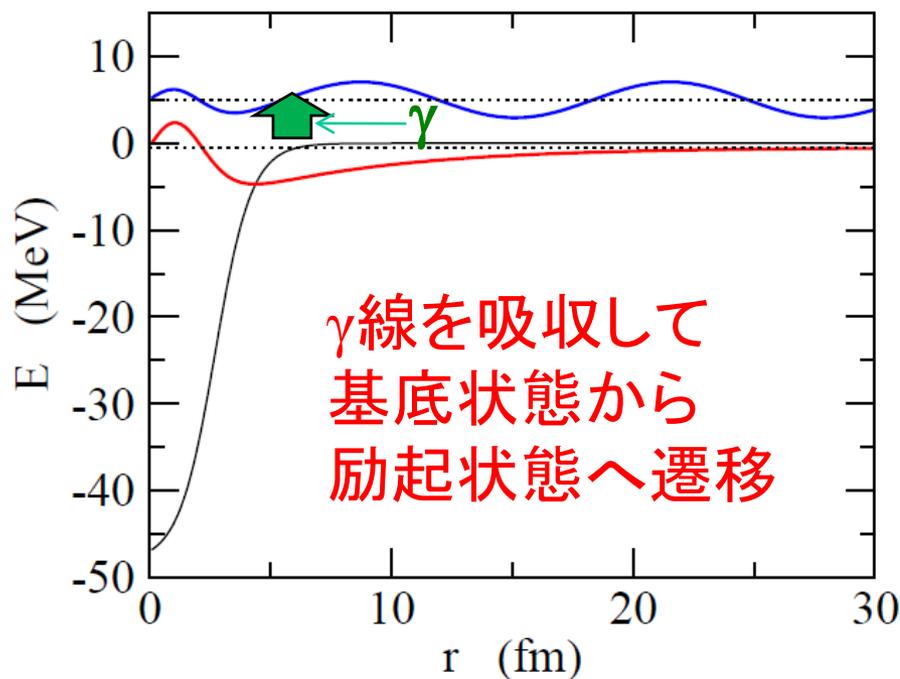
↓

ハロー(異常に大きい
半径)は $l=0$ or 1 で
のみおこる

1 中性子ハロー核のクーロン励起

ハロー核: 弱束縛がキーワード

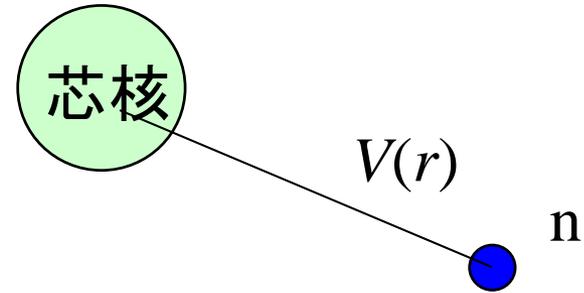
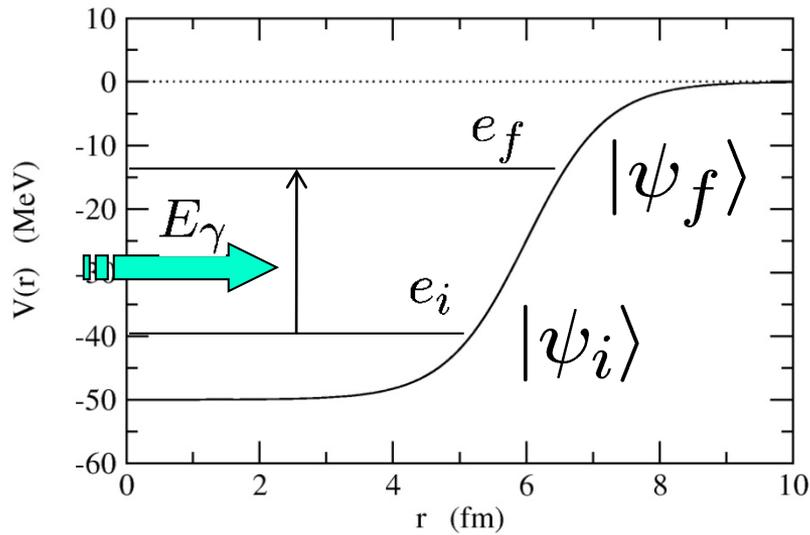
→ 刺激を与えると中性子がすぐ分離する



連続状態へ励起されれば
分解が起きる

← 標的核の作るクーロン場による励起

電磁遷移の計算



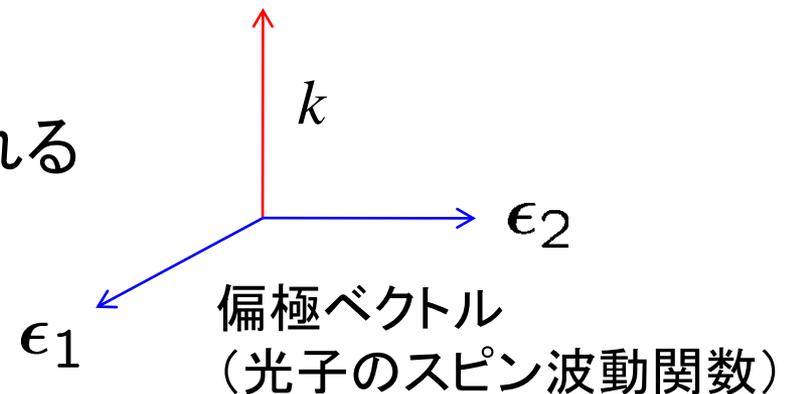
簡単のため、離散的な状態から
離散的な状態への遷移を考える。

- ψ_i, ψ_f はハミルトニアン固有状態:

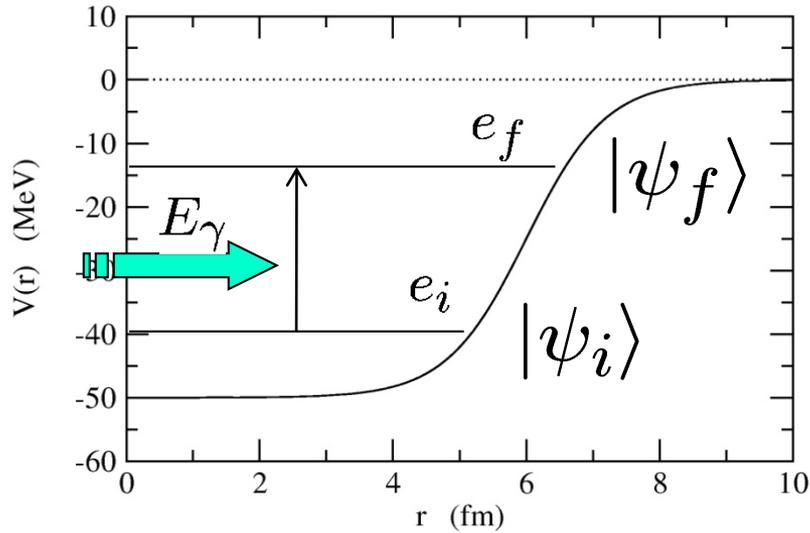
$$H\psi_i = e_i\psi_i$$

$$H\psi_f = e_f\psi_f$$

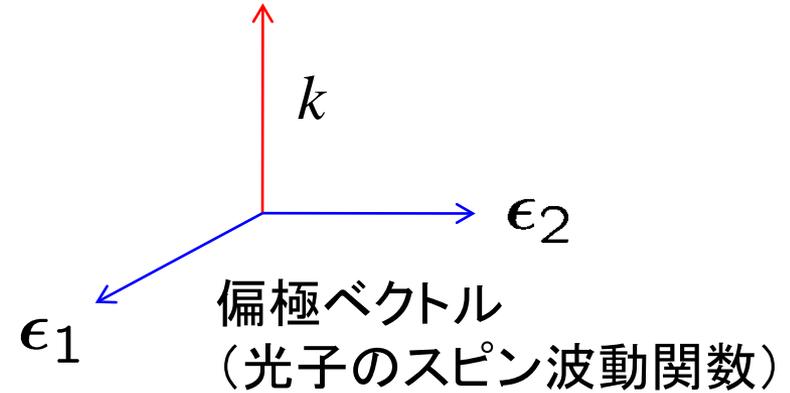
- 光子の状態は運動量と偏極で指定される



電磁遷移の計算



光子



初期状態: $|\psi_i\rangle |n_{k\alpha} = 1\rangle$



原子核の状態が Ψ_i ,
運動量 k , 偏極 α を持つ
1個のフォトン ($\alpha = 1$ or 2)

遷移



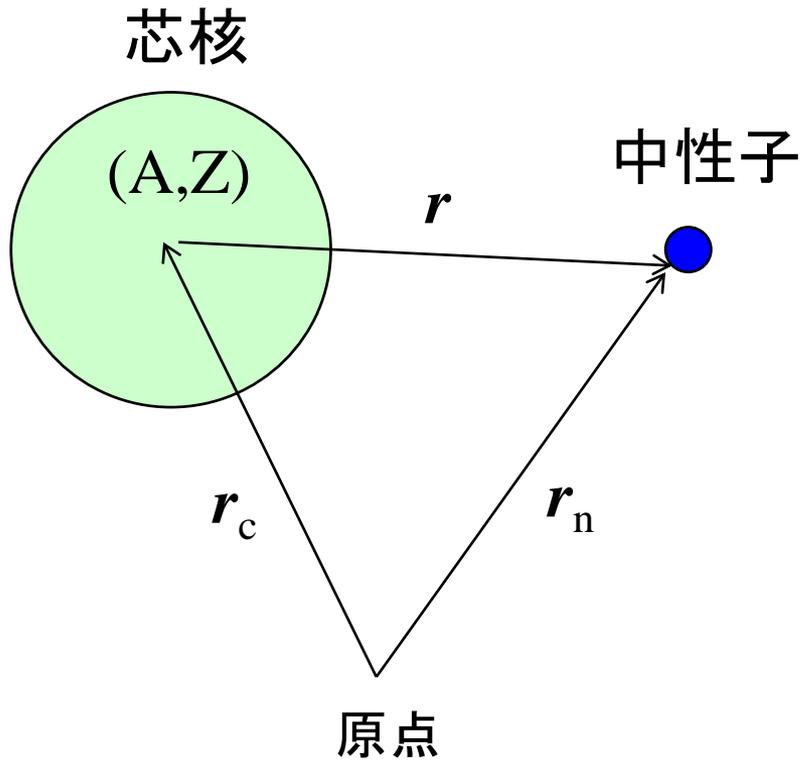
H_{int}
(原子核と電磁場
の相互作用)



フェルミの黄金則
(1次の摂動論)

終状態: $|\psi_f\rangle |n_{k\alpha} = 0\rangle$

原子核と電磁場の相互作用



$$H = \frac{p_c^2}{2Am} + \frac{p_n^2}{2m} + V(r)$$

電磁場との相互作用:

$$p_c \rightarrow p_c - \frac{Ze}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_c, t)$$

と置き換え。

重心固定系 ($\mathbf{P} = 0$) では

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{Am} \cdot \frac{Ze}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}$$

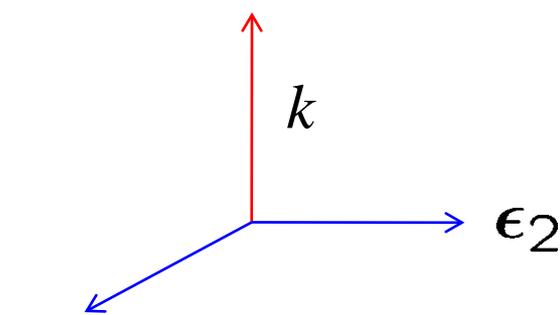
$$\mathbf{p} = \frac{1}{A+1} (A\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_c)$$

原子核と電磁場の相互作用

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{Am} \cdot \frac{Ze}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} \int \frac{d\mathbf{k}}{2\pi} \frac{\hbar c}{\sqrt{\hbar\omega}} \left[a_{\mathbf{k}\alpha} \epsilon_{\alpha} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t} + a_{\mathbf{k}\alpha}^{\dagger} \epsilon_{\alpha} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + i\omega t} \right]$$

$\omega = kc$



E1近似 (E1フォトンの吸収)

$$e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \sim 1$$

* 一般の多重極は Ring-Schuck の Appendix B を見よ

$$E_{\gamma} = 1 \text{ MeV} \rightarrow k = \hbar\omega/\hbar c \sim 1/200 \text{ fm}^{-1}$$



フェルミの黄金則より

$$\Gamma_{i \rightarrow f} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{Ze}{A} \right)^2 \frac{1}{m^2\omega} \left| \langle \psi_f | p_z | \psi_i \rangle \right|^2 \delta(e_f - e_i - \hbar\omega)$$

(フォトンの偏極の向きを z 軸に取った)

(note) $[p^2, r] = -2i\hbar p$


$$\begin{aligned}\langle \psi_f | p_z | \psi_i \rangle &= \left\langle \psi_f \left| \frac{1}{-2i\hbar} \cdot 2\mu \left[\frac{p^2}{2\mu} + V(r), z \right] \right| \psi_i \right\rangle \\ &= \frac{i\mu}{\hbar} \langle \psi_f | H_0 z - z H_0 | \psi_i \rangle \\ &= \frac{i\mu}{\hbar} (e_f - e_i) \langle \psi_f | z | \psi_i \rangle\end{aligned}$$



$$\Gamma_{i \rightarrow f} = \frac{1}{2\pi\hbar} \left(\frac{Ze}{A+1} \right)^2 (e_f - e_i) |\langle \psi_f | z | \psi_i \rangle|^2 \delta(e_f - e_i - \hbar\omega)$$

(参考)これをフォトンのフラックス $c/(2\pi)^3$ で割れば、光吸収断面積:

$$\sigma_\gamma = \frac{4\pi^2}{\hbar c} \left(\frac{Ze}{A+1} \right)^2 (e_f - e_i) |\langle \psi_f | z | \psi_i \rangle|^2 \delta(e_f - e_i - \hbar\omega)$$

E1 有効電荷 (effective charge)

$$\sigma_\gamma = \frac{4\pi^2}{\hbar c} \left(\frac{Ze}{A+1} \right)^2 (e_f - e_i) |\langle \psi_f | z | \psi_i \rangle|^2 \delta(e_f - e_i - \hbar\omega)$$

$$z = r \cos \theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} r Y_{10}(\theta) \quad \text{を用いて書き直すと}$$

$$\sigma_\gamma = \frac{16\pi^3}{3\hbar c} \left(\frac{Ze}{A+1} \right)^2 (e_f - e_i) |\langle \psi_f | r Y_{10} | \psi_i \rangle|^2 \delta(e_f - e_i - \hbar\omega)$$

dipole operator:

$$\hat{D}_\mu = e_{E1} \cdot r Y_{1\mu}(\theta, \phi)$$

E1 有効電荷:

$$e_{E1} = \frac{Z}{A+1} e$$

(重心から測った電荷の分布)

$$\text{一般には} \quad e_{E1} = \frac{Z_1 A_2 - Z_2 A_1}{A_1 + A_2} e$$

Wigner-Eckart の定理と換算遷移確率

$$\sigma_\gamma = \frac{16\pi^3}{3\hbar c} \left(\frac{Ze}{A+1} \right)^2 E_\gamma |\langle \psi_f | r Y_{10} | \psi_i \rangle|^2 \delta(e_f - e_i - E_\gamma)$$

$$E_\gamma = e_f - e_i = \hbar\omega$$

実際には

$$\begin{cases} \psi_i(\mathbf{r}) = \psi_{lm}(\mathbf{r}) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \\ \psi_f(\mathbf{r}) = \psi_{l'm'}(\mathbf{r}) = \frac{u_{l'}(r)}{r} Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{r}}) \end{cases}$$

角運動量の
固有状態


$$\begin{aligned} |\langle \psi_f | r Y_{10} | \psi_i \rangle|^2 &\rightarrow \frac{1}{2l+1} \sum_{m,m'} |\langle \psi_{l'm'} | r Y_{10} | \psi_{lm} \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2l+1} |\langle \psi_{l'} || r Y_1 || \psi_l \rangle|^2 \end{aligned}$$

↑
Wigner-Eckart の定理

$$\begin{aligned} \sigma_\gamma &= \frac{16\pi^3}{9\hbar c} E_\gamma \cdot \frac{1}{2l+1} |\langle \psi_f || e_{E1} r Y_1 || \psi_i \rangle|^2 \delta(e_f - e_i - E_\gamma) \\ &= \frac{16\pi^3}{9\hbar c} E_\gamma \cdot \frac{dB(E1)}{dE_\gamma} \end{aligned}$$

換算遷移確率

(復習) Wigner-Eckart の定理

$$\begin{aligned}\langle \psi_{l'm'} | rY_{10} | \psi_{lm} \rangle &= (-1)^{l'-m'} \begin{pmatrix} l' & 1 & l \\ -m' & 0 & m \end{pmatrix} \langle \psi_{l'} || rY_1 || \psi_l \rangle \\ &= \underbrace{\frac{(-1)^{l-m}}{\sqrt{3}} \langle l'm' | l-m | 10 \rangle}_{m, m' \text{ の依存性は単純な Clebsch}} \underbrace{\langle \psi_{l'} || rY_1 || \psi_l \rangle}_{m, m' \text{ に依存しない量}}\end{aligned}$$

m, m' の依存性は単純な Clebsch m, m' に依存しない量



$$\begin{aligned}|\langle \psi_f | rY_{10} | \psi_i \rangle|^2 &\rightarrow \frac{1}{2l+1} \sum_{m, m'} |\langle \psi_{l'm'} | rY_{10} | \psi_{lm} \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2l+1} |\langle \psi_{l'} || rY_1 || \psi_l \rangle|^2 \\ &\quad \times \sum_{m, m'} \langle l'm' | l-m | 10 \rangle^2 = 1 \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2l+1} |\langle \psi_{l'} || rY_1 || \psi_l \rangle|^2\end{aligned}$$

E1 電磁遷移強度分布の簡単な見積もり(解析的な模型)

$l=0$ 状態から $l=1$ 状態への遷移:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{初期状態の波動関数: } \psi_i(\mathbf{r}) = \sqrt{2\kappa} \frac{e^{-\kappa r}}{r} Y_{00}(\hat{\mathbf{r}}) \\ \text{終状態の波動関数: } \psi_f(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{2\mu k}{\pi \hbar^2}} j_1(kr) Y_{1m}(\hat{\mathbf{r}}) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \kappa = \sqrt{\frac{2\mu |E_b|}{\hbar^2}} \\ j_1(kr) \text{ は球ベッセル関数} \end{array}$$

$$k = \sqrt{\frac{2\mu E_c}{\hbar^2}}$$

とすると、

$$\frac{dB(E1)}{dE} = \frac{3}{4\pi} e_{E1}^2 \left| \int_0^\infty r^2 dr r \cdot \frac{\sqrt{2\kappa} e^{-\kappa r}}{r} \cdot \sqrt{\frac{2\mu k}{\pi \hbar^2}} j_1(kr) \right|^2$$

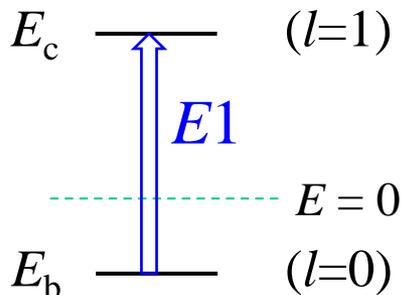
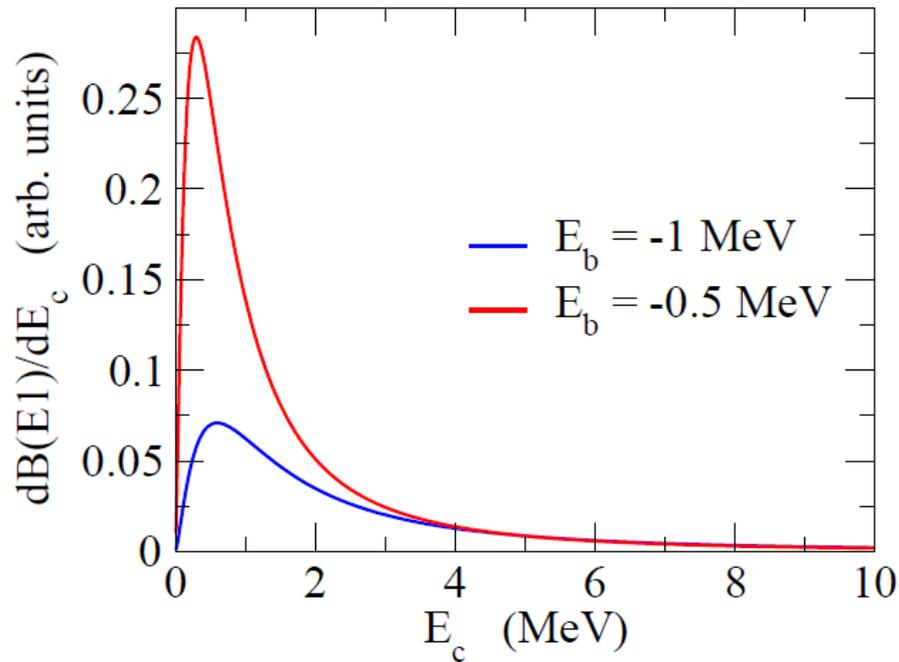
積分は解析的に実行可能


$$\frac{dB(E1)}{dE} = \frac{3\hbar^2}{\pi^2 \mu} e_{E1}^2 \frac{\sqrt{|E_b|} E_c^{3/2}}{(|E_b| + E_c)^4}$$

Refs. (一般的な l_i, l_f の場合の式も)

- M.A. Nagarajan, S.M. Lenzi, A. Vitturi, Eur. Phys. J. A24('05)63
- S. Typel and G. Baur, NPA759('05)247

$$\frac{dB(E1)}{dE} = \frac{3\hbar^2}{\pi^2\mu} e_{E1}^2 \frac{\sqrt{|E_b|} E_c^{3/2}}{(|E_b| + E_c)^4}$$



ピーク的位置: $E_c = \frac{3}{5} |E_b|$
 $(E_x = E_c - E_b = \frac{8}{5} |E_b|)$

ピークの高さ: $\propto 1/|E_b|^2$

全遷移確率:

$$B(E1) = S_0 = \frac{3\hbar^2 e_{E1}^2}{16\pi^2\mu |E_b|}$$

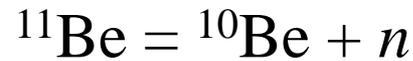
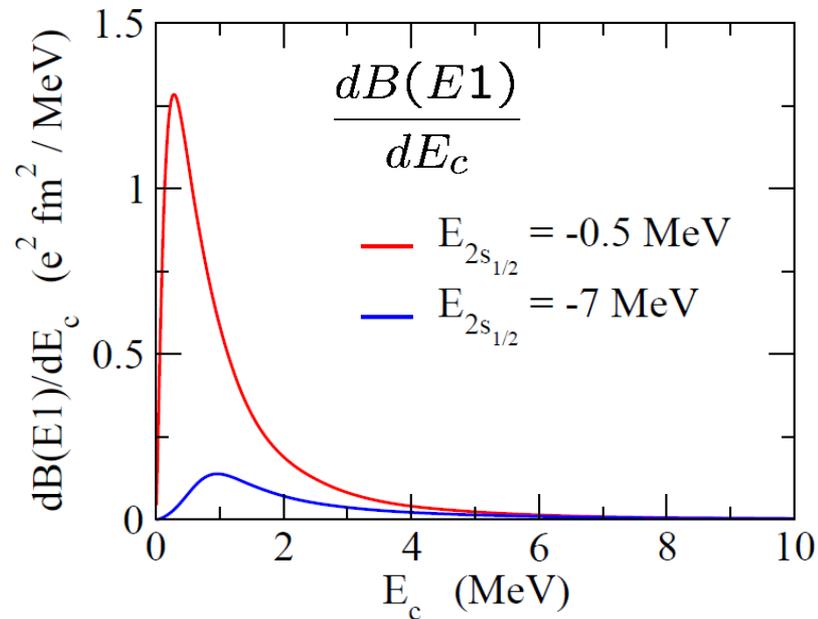


➤ 束縛状態のエネルギーが小さくなると鋭くて高いピーク

➤ 束縛状態のエネルギーが小さくなるとピークのエネルギーが小さくなる

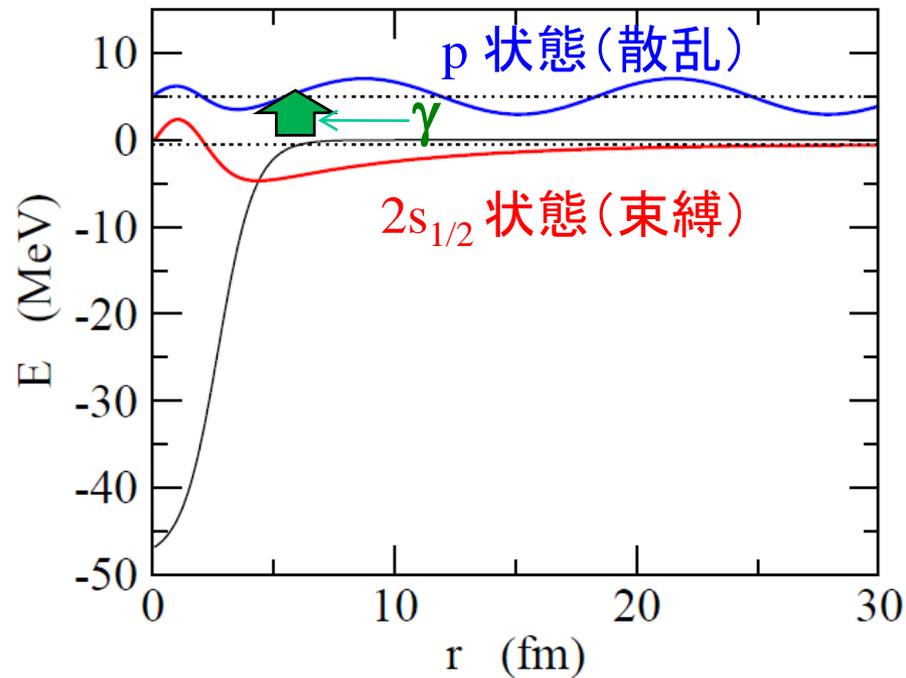
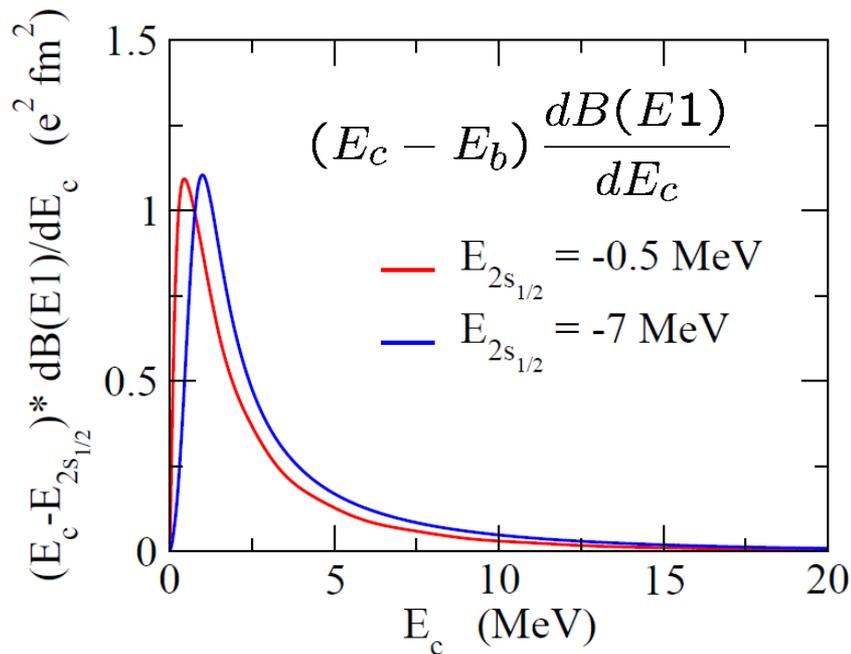
$$E_{\text{peak}} = 0.3 \text{ MeV } (E_b = -0.5 \text{ MeV})$$

Woods-Saxon ポテンシャルを用いた実際の数値計算



$2s_{1/2}$ 状態 (束縛) から p 状態 ($l=1$) への遷移強度

弱く束縛されている場合と強く束縛されている場合の比較





➤ 束縛状態のエネルギーが小さくなると
鋭くて高いピーク

$$S_0 = \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c}$$

$$= 1.53 \text{ e}^2\text{fm}^2 \text{ (} E_b = -0.5 \text{ MeV)}$$

$$0.32 \text{ e}^2\text{fm}^2 \text{ (} E_b = -7 \text{ MeV)}$$

➤ 束縛状態のエネルギーが小さくなると
ピークのエネルギーが小さくなる

$$E_{\text{peak}} = 0.28 \text{ MeV (} E_b = -0.5 \text{ MeV)}$$

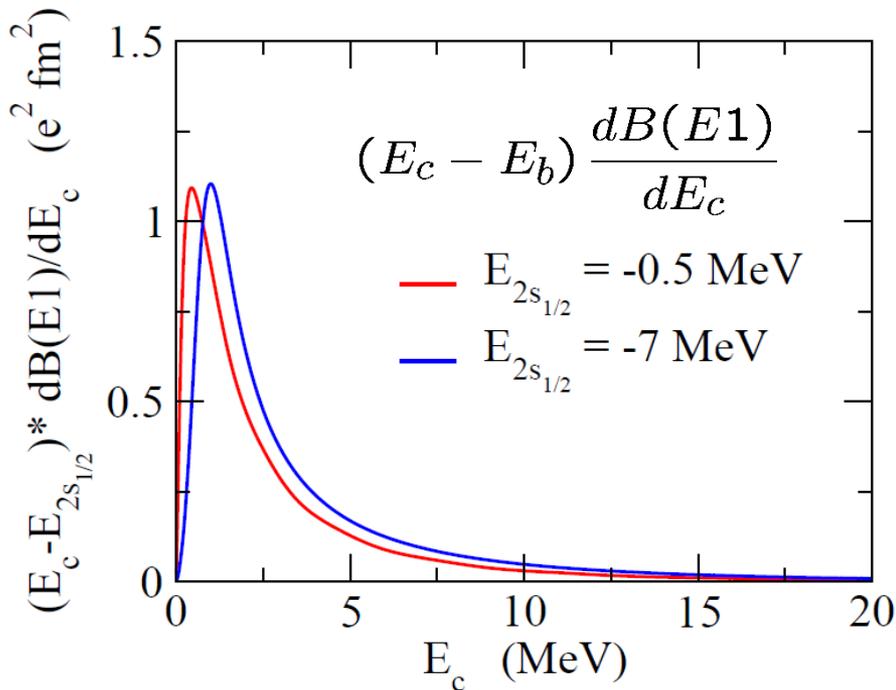
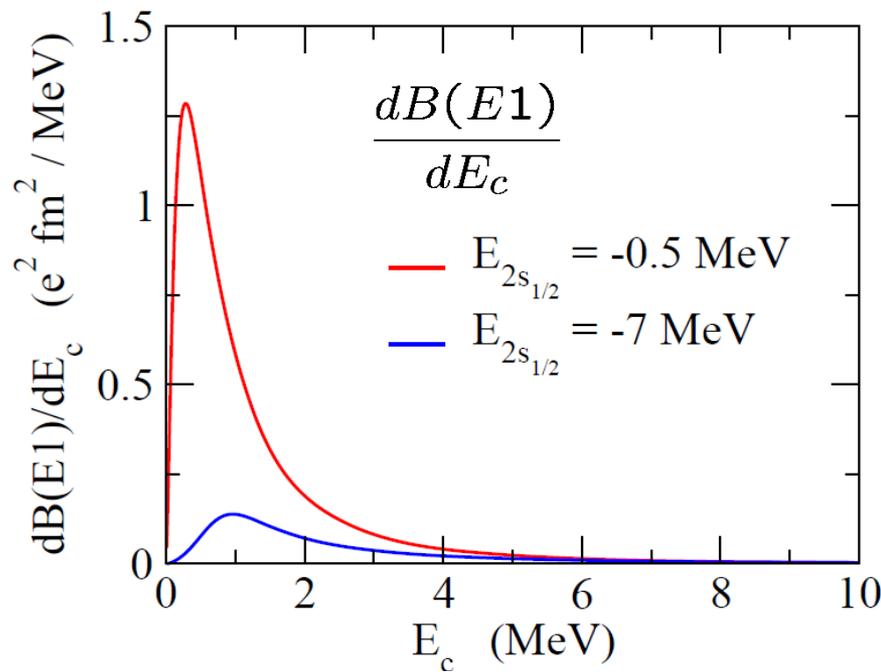
$$0.96 \text{ MeV (} E_b = -7 \text{ MeV)}$$

➤ 遷移強度に $(E_c - E_b)$ を掛けたものは
あまり E_b に依らない

$$S_1 = \int_0^\infty dE_c (E_c - E_b) \frac{dB(E1)}{dE_c}$$

$$= 2.79 \text{ e}^2\text{fm}^2 \text{ MeV (} E_b = -0.5 \text{ MeV)}$$

$$3.18 \text{ e}^2\text{fm}^2 \text{ MeV (} E_b = -7 \text{ MeV)}$$



$$S_0 \sim \sum_f |\langle \psi_f | z | \psi_i \rangle|^2 \quad \text{は } E_i \text{ に大きく依存}$$

$$S_1 \sim \sum_f (E_f - E_i) |\langle \psi_f | z | \psi_i \rangle|^2 \quad \text{は } E_i \text{ に依存しない}$$

自明ですか?

和則 (Sum Rule)

$$\left\{ \begin{array}{l} S_0 = \int_0^{\infty} dE_c \frac{dB(E_1)}{dE_c} \\ S_1 = \int_0^{\infty} dE_c (E_c - E_b) \frac{dB(E_1)}{dE_c} \end{array} \right.$$

は簡単な式で表わすことができる。

和則(わそく) : Sum Rule

まず $S_0 = \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c}$ から:

$$\begin{aligned} \text{基本的な考え方: } \sum_f |\langle f | \hat{F} | \psi_i \rangle|^2 &= \sum_f \langle \psi_i | F | f \rangle \langle f | \hat{F} | \psi_i \rangle \\ &= \langle \psi_i | \hat{F}^2 | \psi_i \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\uparrow \\ \text{(完全系)} \quad \sum_f |f\rangle \langle f| &= 1 \end{aligned}$$

和則(わそく) : Sum Rule

まず $S_0 = \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c}$ から:

$$\begin{aligned} \text{基本的な考え方: } \sum_f |\langle f | \hat{F} | \psi_i \rangle|^2 &= \sum_f \langle \psi_i | F | f \rangle \langle f | \hat{F} | \psi_i \rangle \\ &= \langle \psi_i | \hat{F}^2 | \psi_i \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{(完全系)} \quad \sum_f |f\rangle \langle f| = 1 \end{array}$$

$$S_0 = \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c} \sim \sum_f \frac{1}{2l_i + 1} |\langle \psi_f | \hat{D} | \psi_i \rangle|^2$$

$$\hat{D}_\mu = e_{E1} r Y_{1\mu}(\hat{r})$$

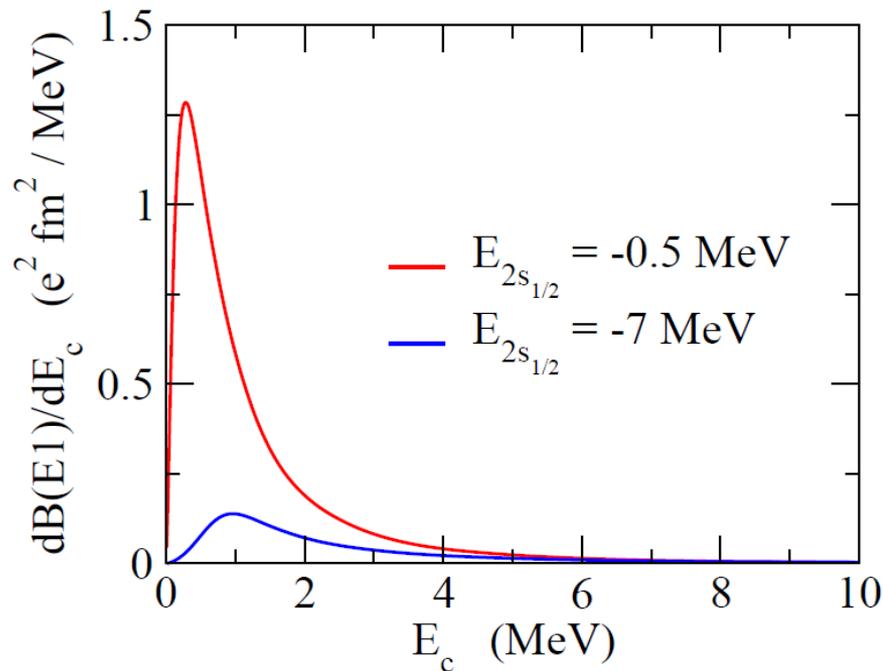
$$= \frac{3}{4\pi} e_{E1}^2 \langle r^2 \rangle_i$$

和則(わそく) : Sum Rule

$$S_0 = \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c} = \frac{3}{4\pi} e_{E1}^2 \langle r^2 \rangle_i$$



全E1遷移確率は r^2 の(基底状態)期待値に比例



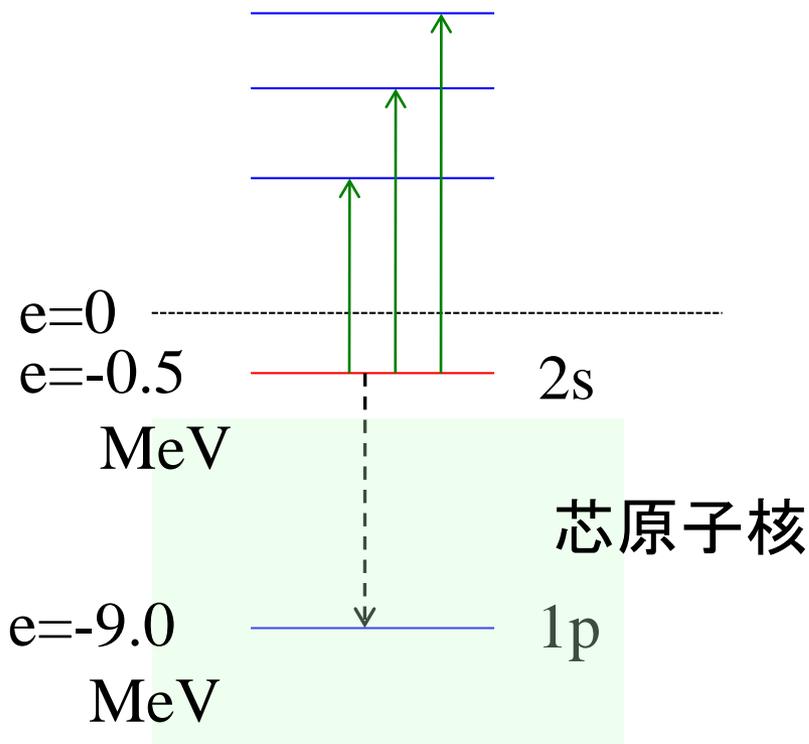
$$\begin{aligned} S_0 &= \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c} \\ &= 1.53 \text{ e}^2 \text{fm}^2 \quad (E_b = -0.5 \text{ MeV}) \\ &\quad 0.32 \text{ e}^2 \text{fm}^2 \quad (E_b = -7 \text{ MeV}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{3}{4\pi} e_{E1}^2 \langle r^2 \rangle_i \\ &= 1.62 \text{ e}^2 \text{fm}^2 \quad (E_b = -0.5 \text{ MeV}) \\ &\quad 0.41 \text{ e}^2 \text{fm}^2 \quad (E_b = -7 \text{ MeV}) \end{aligned}$$

* ほぼ一致。

少しずれているのはパウリ禁止遷移 (2sから1pへの遷移)のため

(補足)パウリ禁止遷移



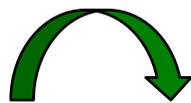
$$S_0 = \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c} = \frac{3}{4\pi} e_{E1}^2 \langle r^2 \rangle_i$$

$$S_0 = \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c} = 1.5275 \text{ e}^2 \text{ fm}^2$$

$$B(E1: 2s \rightarrow 1p) = 0.0967 \text{ e}^2 \text{ fm}^2$$

$$\frac{3}{4\pi} e_{E1}^2 \langle r^2 \rangle_i$$

$$= 1.6244 \text{ e}^2 \text{ fm}^2$$



$$\underbrace{1.5275}_{\text{physical transition}} + \underbrace{0.0967}_{\text{forbidden transition}} = 1.6242$$

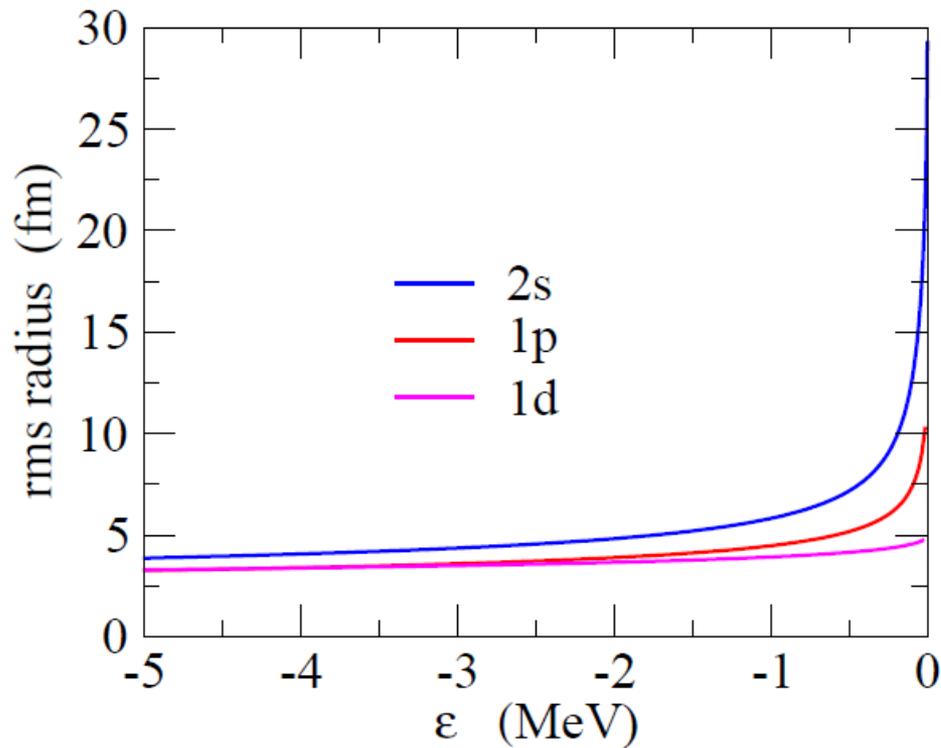
physical transition + forbidden transition

和則(わそく) : Sum Rule

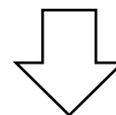
$$S_0 = \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c} = \frac{3}{4\pi} e_{E1}^2 \langle r^2 \rangle_i$$



全E1遷移確率は r^2 の(基底状態)期待値に比例



初期状態が $l=0$ または $l=1$ だと
束縛が弱くなるほど半径は増大



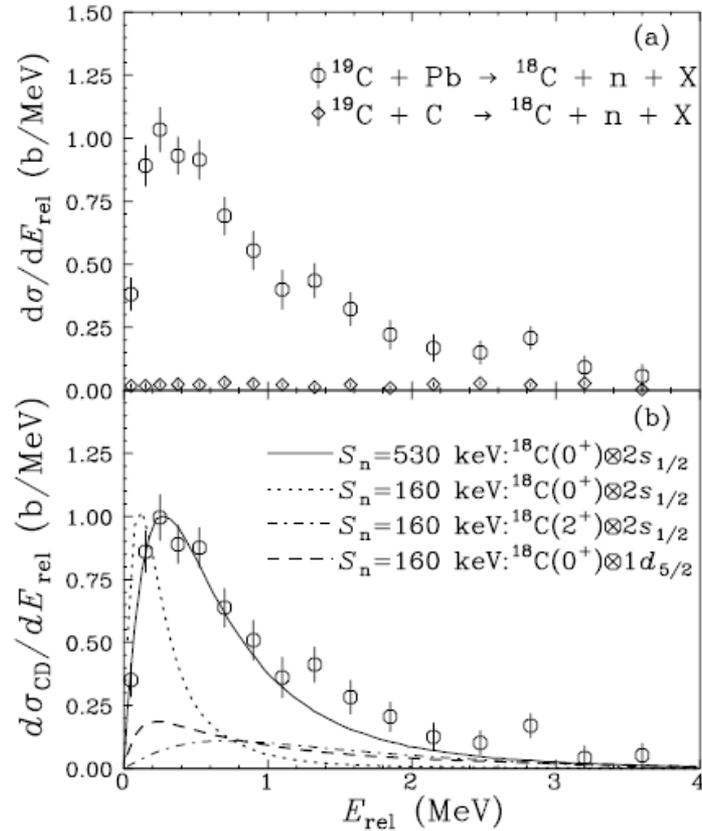
全E1遷移確率も増大



逆に大きな全E1遷移確率
(またはクーロン分解断面積)
が観測されたら $l=0$ or $l=1$ が示唆
される → **ハロー構造**

1n ハロ一核の他の候補

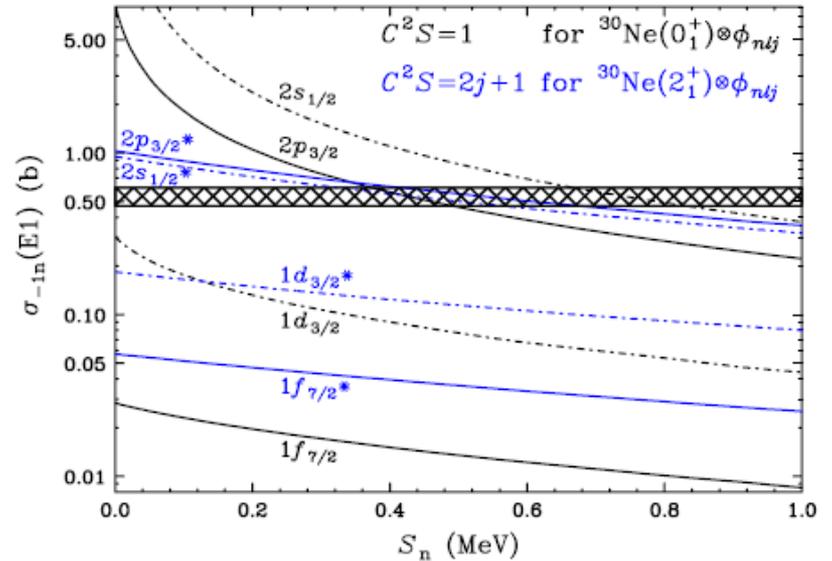
^{19}C : $S_n = 0.58(9)$ MeV



^{19}C のクーロン分解反応

T. Nakamura et al., PRL83('99)1112

^{31}Ne : $S_n = 0.29 \pm 1.64$ MeV



大きなクーロン分解反応の
断面積

T. Nakamura et al.,
PRL103('09)262501

和則(わそく) : Sum Rule

$$\text{次に } S_1 = \int_0^\infty dE_c (E_c - E_b) \frac{dB(E_1)}{dE_c} \quad (\text{Energy Weighted Sum Rule})$$

基本的な考え方:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle \psi_i | [\hat{F}, [H, \hat{F}]] | \psi_i \rangle &= \frac{1}{2} \langle \psi_i | \hat{F} (H\hat{F} - \hat{F}H) - (H\hat{F} - \hat{F}H) \hat{F} | \psi_i \rangle \\ &= \langle \psi_i | \hat{F} H \hat{F} - E_i \hat{F}^2 | \psi_i \rangle \\ &= \sum_f E_f |\langle \psi_i | \hat{F} | f \rangle|^2 - E_i \langle \psi_i | \hat{F}^2 | \psi_i \rangle \\ &= \sum_f (E_f - E_i) |\langle f | \hat{F} | \psi_i \rangle|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_i | \hat{F} H \hat{F} | \psi_i \rangle &\uparrow \\ &= \sum_f \langle \psi_i | \hat{F} H | f \rangle \langle f | \hat{F} | \psi_i \rangle \\ &= \sum_f E_f \langle \psi_i | \hat{F} | f \rangle \langle f | \hat{F} | \psi_i \rangle \\ &\quad (\text{完全系}) \quad \sum_f |f\rangle \langle f| = 1 \end{aligned}$$

和則(わそく) : Sum Rule

$$\sum_f (E_f - E_i) |\langle f | \hat{F} | \psi_i \rangle|^2 = \frac{1}{2} \langle \psi_i | [\hat{F}, [H, \hat{F}]] | \psi_i \rangle$$

$$S_1 = \int_0^\infty dE_c (E_c - E_b) \frac{dB(E1)}{dE_c} \sim \sum_f \frac{E_f - E_i}{2l_i + 1} |\langle \psi_f | \hat{D} | \psi_i \rangle|^2$$

$$\begin{aligned} \hat{D}_0 &= e_{E1} r Y_{10}(\hat{r}) \\ &= e_{E1} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} z \end{aligned}$$

$$[H_0, \hat{D}_0] = \left[\frac{p^2}{2\mu} + V(r), \hat{D}_0 \right] = \left[\frac{p_z^2}{2\mu}, \hat{D}_0 \right] = \frac{1}{2\mu} \cdot e_{E1} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot (-i\hbar p_z)$$

$$[\hat{D}_0, [H_0, \hat{D}_0]] = \frac{-i\hbar}{\mu} \cdot \left(e_{E1} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \right)^2 [z, p_z] = \frac{\hbar^2}{\mu} \cdot \left(e_{E1} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \right)^2$$

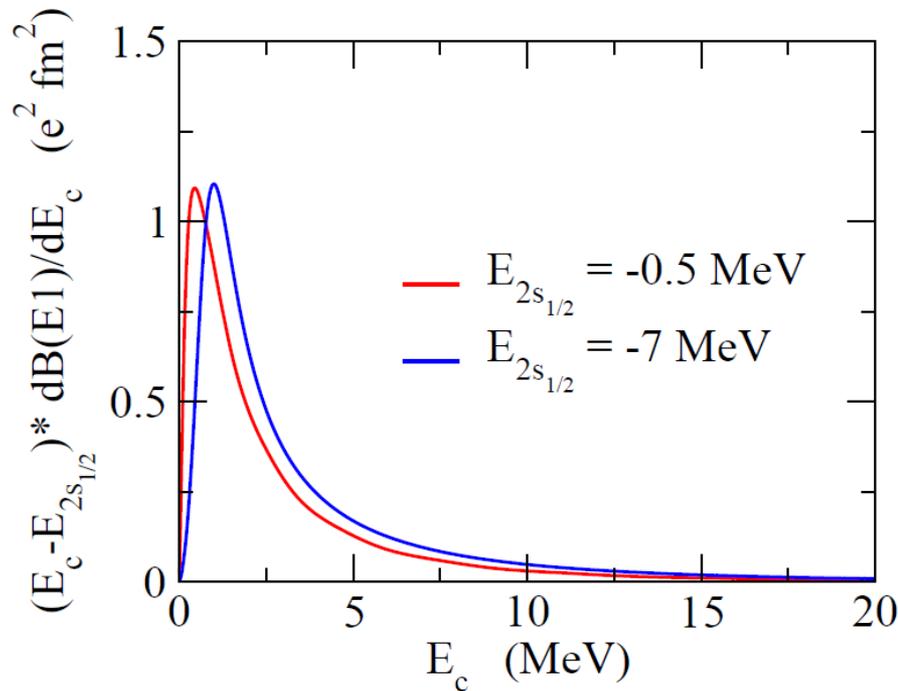

$$S_1 = \frac{9}{8\pi} e_{E1}^2 \frac{\hbar^2}{\mu}$$

モデル(ポテンシャル、束縛エネルギー、角運動量など)に依らない定数

[TRK (Thomas-Reiche-Kuhn) Sum Rule]

和則(わそく) : Sum Rule

$$S_1 = \int_0^{\infty} dE_c (E_c - E_b) \frac{dB(E1)}{dE_c} = \frac{9}{8\pi} e_{E1}^2 \frac{\hbar^2}{\mu}$$



$$S_1 = \int_0^{\infty} dE_c (E_c - E_b) \frac{dB(E1)}{dE_c}$$

$$= 2.79 \text{ e}^2 \text{ fm}^2 \text{ MeV} \quad (E_b = -0.5 \text{ MeV})$$

$$3.18 \text{ e}^2 \text{ fm}^2 \text{ MeV} \quad (E_b = -7 \text{ MeV})$$

$$\frac{9}{8\pi} e_{E1}^2 \frac{\hbar^2}{\mu} = 1.97 \text{ e}^2 \text{ fm}^2 \text{ MeV}$$

* ほぼ一致。

少しずれているのはパウリ禁止遷移 (2sから1pへの遷移) のため

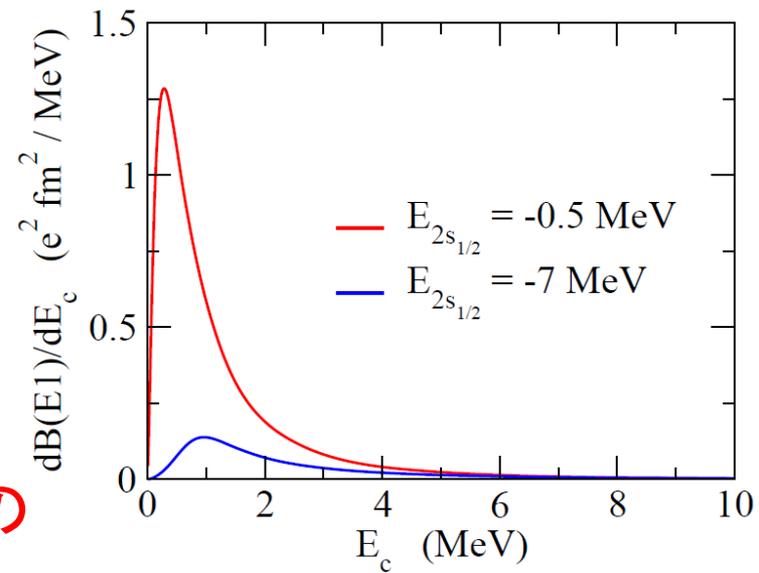
和則の利点

$$S_0 = \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c} = \frac{3}{4\pi} e_{E1}^2 \langle r^2 \rangle_i$$

$$S_1 = \frac{9}{8\pi} e_{E1}^2 \frac{\hbar^2}{\mu}$$

和則:

励起状態の(ある種の)情報が基底状態の性質のみによって表わされる
(励起状態の情報を知っている必要がない)。



- 実験で強度分布が測られた時、測られた範囲外にも強度があるかどうか (missing strength) 判断できる。
- 強度分布を測ることによって原子核の半径などの情報を得られる。
- 実験データや数値計算のチェックになる。
(和則の値よりとても大きくなると何かがおかしい)。

current-current correlation tensor:

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}(q) &= i \int dx^4 e^{iqx} \langle 0 | T[j_\mu(x), j_\nu(0)] | 0 \rangle \\ &= (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) \Pi(q^2)\end{aligned}$$

dispersion relation

$$\Pi(q^2) = \int \frac{ds}{2\pi} \frac{\rho(s)}{s - q^2 - i\epsilon}$$



$$\int_0^\infty \frac{ds}{2\pi} s \rho(s) = -\frac{1}{3} \int d^3x \langle 0 | [[j_\mu(0, \mathbf{x}), H], j^\mu(0)] | 0 \rangle$$

など

例)

$$\int_0^\infty \frac{ds}{2\pi} s (\rho_A(s) - \rho_V(s)) = \left\langle 0 \left| \frac{4m_u}{3} \bar{u}u + \frac{4m_d}{3} \bar{d}d \right| 0 \right\rangle$$

cf. 有限密度でのハドロンの性質 (Hatsuda-Lee, 1992)