

ドリップ線の外側の原子核： 一粒子共鳴状態の性質

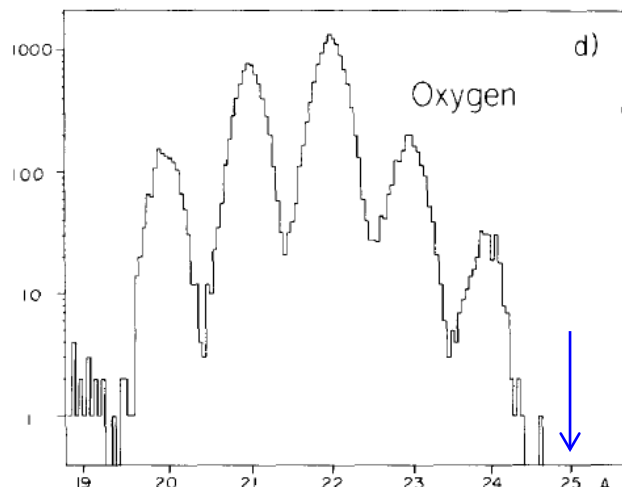
- ドリップ線の外側の原子核
- 共鳴状態の一般論
- 共鳴状態の様々な記述法
- 陽子放出崩壊

酸素同位体のドリップ線

酸素原子核 (Z=8)

✓ 安定同位体: ^{16}O (99.757%), ^{17}O (0.038%), ^{18}O (0.205%)

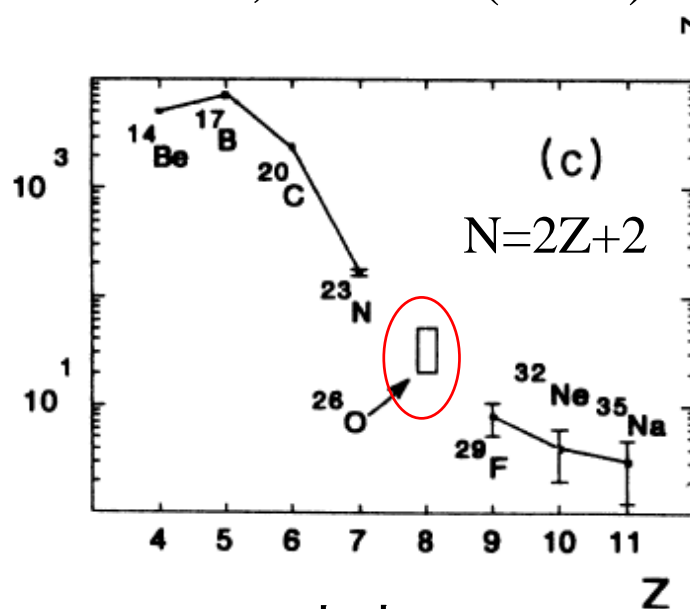
✓ ^{24}O の発見: A.G. Artukh et al., PL32B (1970) 43



^{40}Ar の破碎

M. Langevin et al.,
PL150B ('85) 71

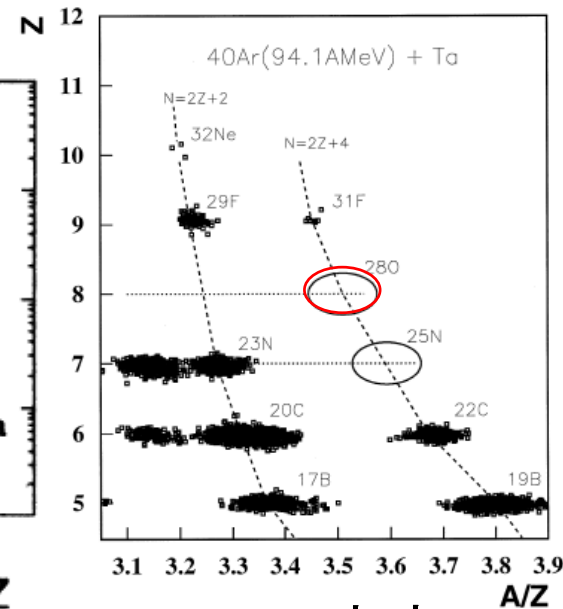
^{25}O は不検出



^{48}Ca の破碎

D. Guillemaud-Mueller et al.,
PRC41 ('90) 937

^{26}O は不検出



^{40}Ar の破碎

H. Sakurai et al.,
PLB448 ('99) 180

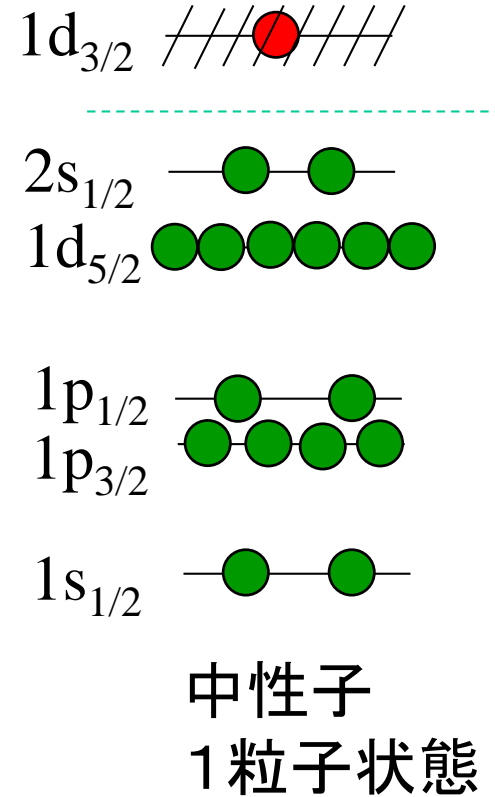
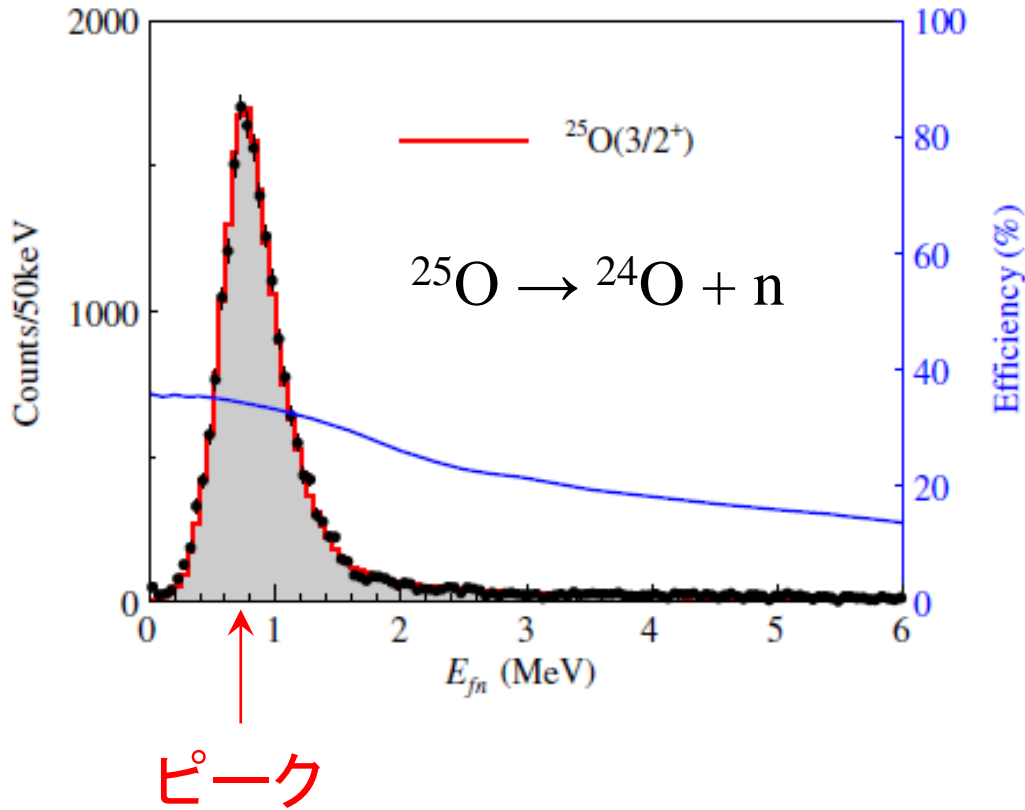
^{28}O は不検出

➡ 酸素の中性子ドリップ線は ^{24}O で確定。 $^{25,26,28}\text{O}$ は非束縛。

^{25}O はどのように見えるのか?

^{22}O	^{23}O	^{24}O	^{25}O	^{26}O
-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

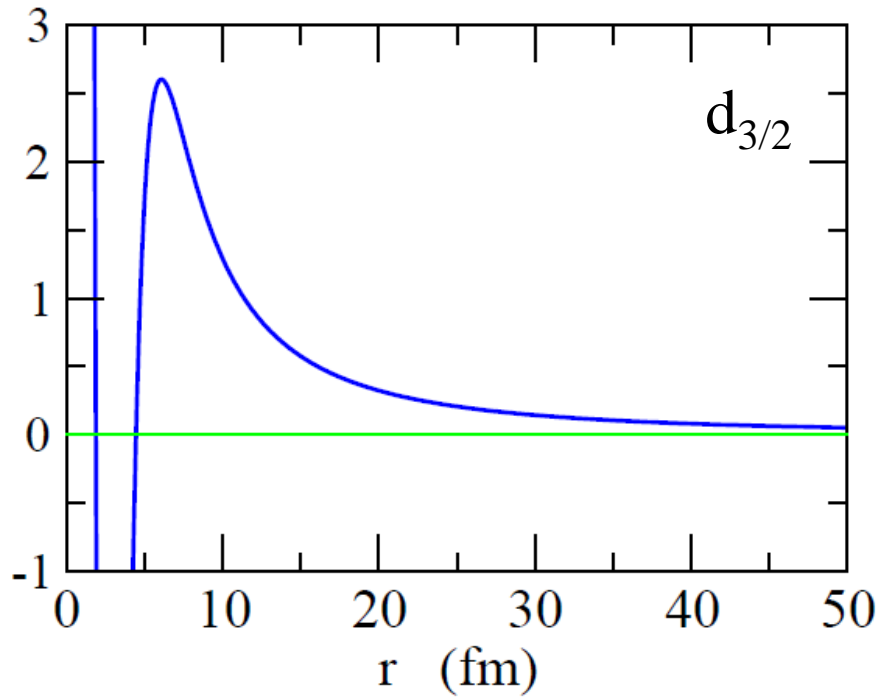
$^{26}_9\text{F}_{17}$ から1つ陽子を抜いて $^{25}_8\text{O}_{17}$ を生成 → 1中性子を放出して崩壊



Y. Kondo et al., PRL116 ('16) 102503

$1d_{3/2}$ の「準束縛」状態と解釈することができる

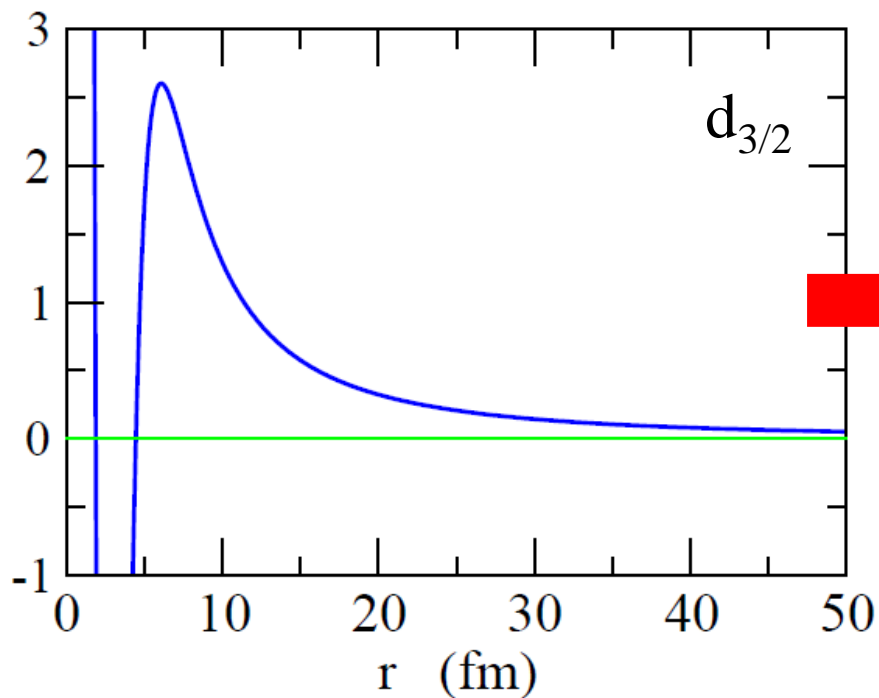
準束縛状態とは?



実際のポテンシャル

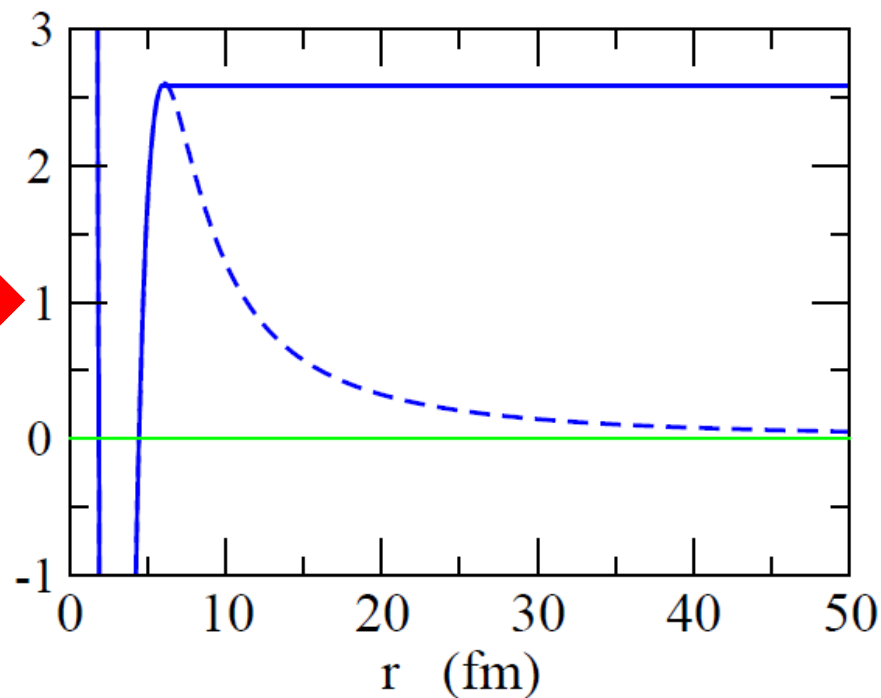
束縛状態は $E < 0$ の領域のみ

準束縛状態とは?



実際のポテンシャル

束縛状態は $E < 0$ の領域のみ

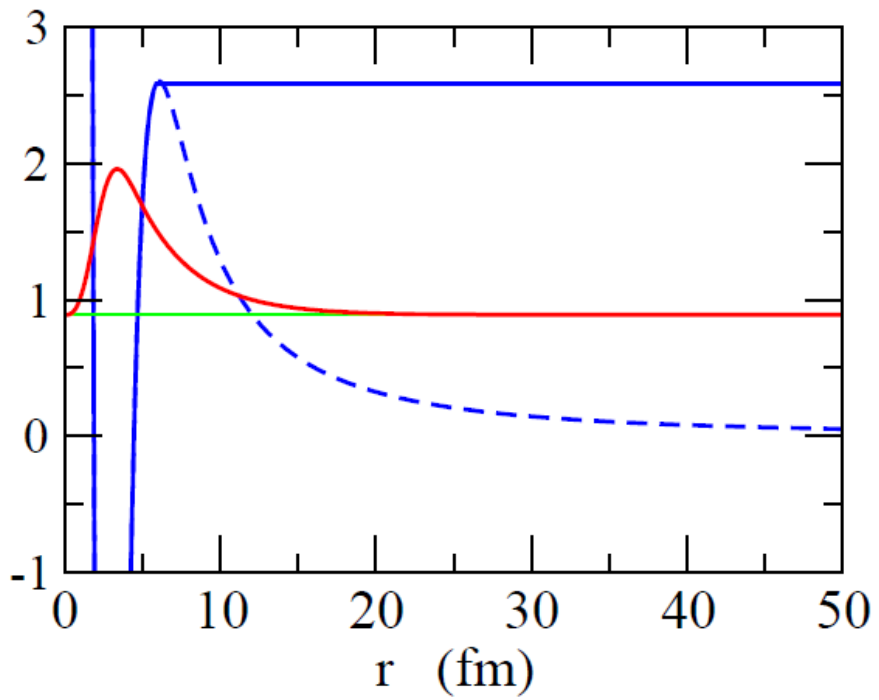


このようにポテンシャルを
変更すると

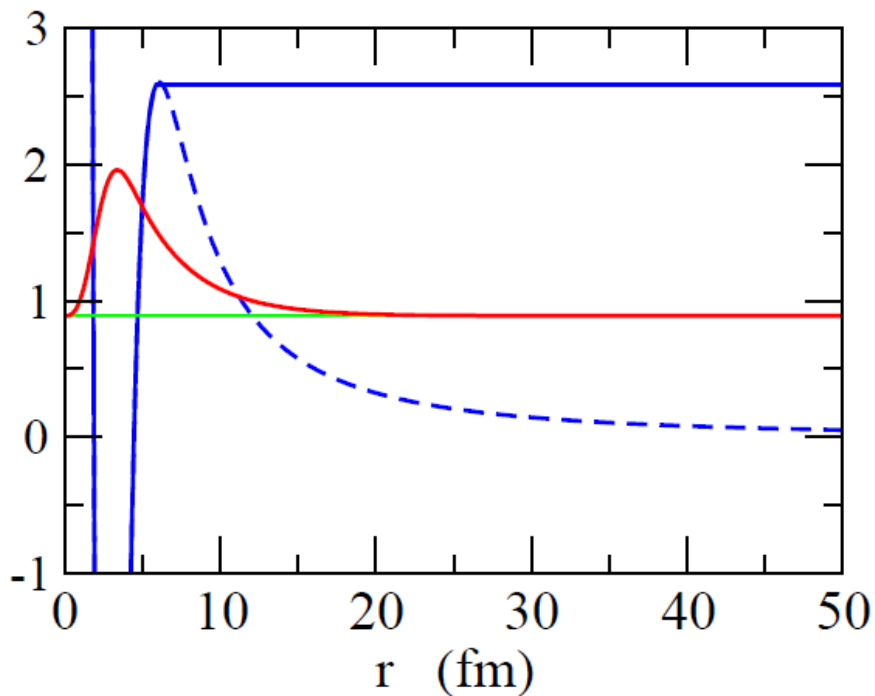
→ $E > 0$ でも束縛状態が
できる

= 準束縛(準安定)状態

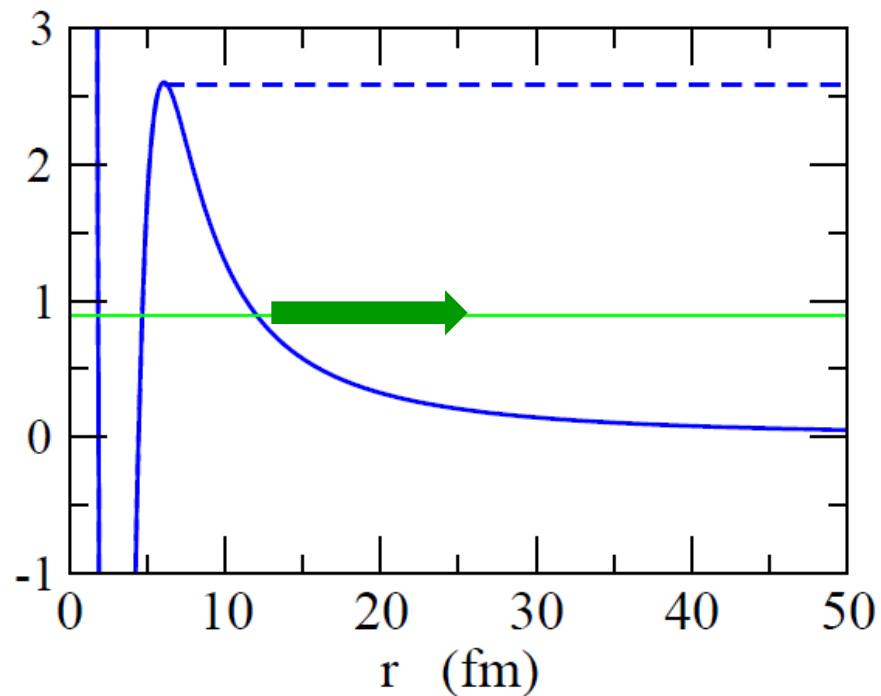
準束縛状態とは?



準束縛状態とは?



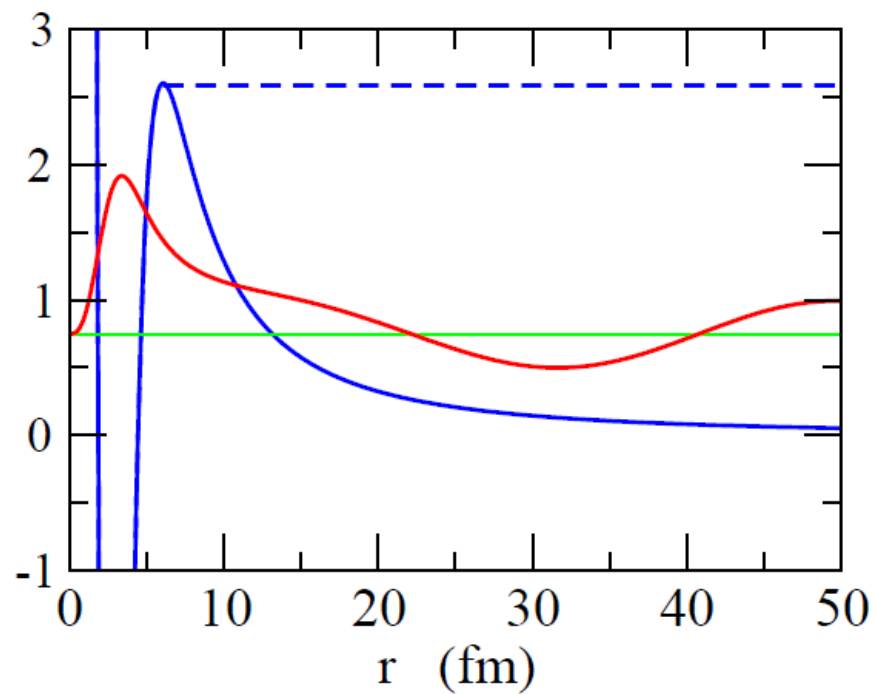
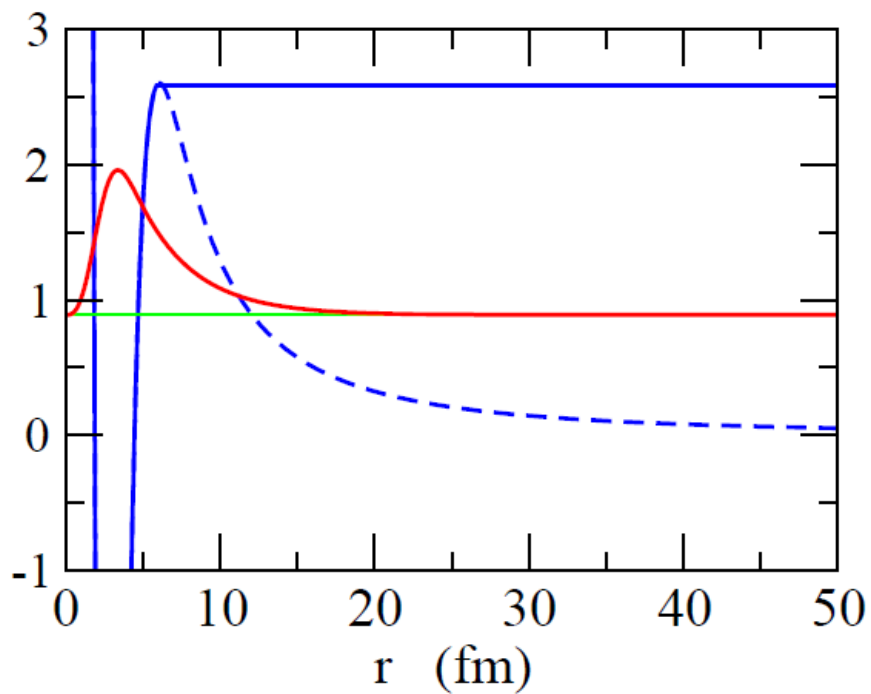
束縛状態 = 無限の寿命



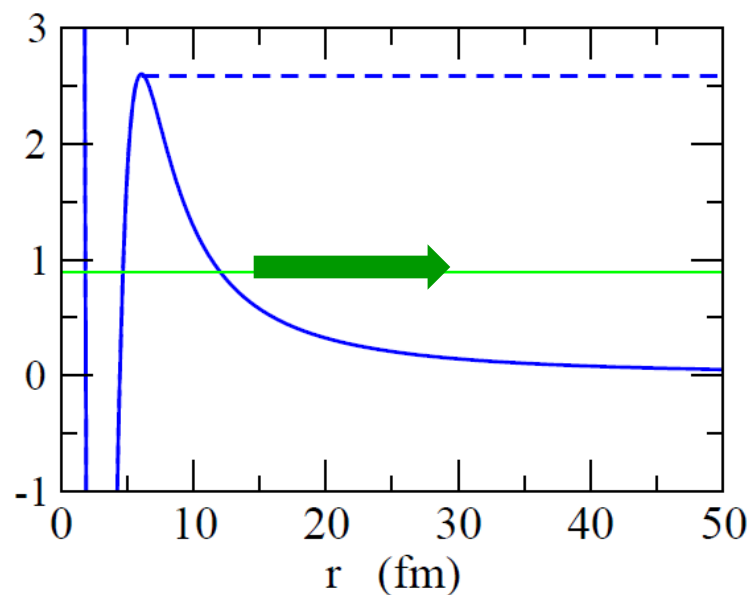
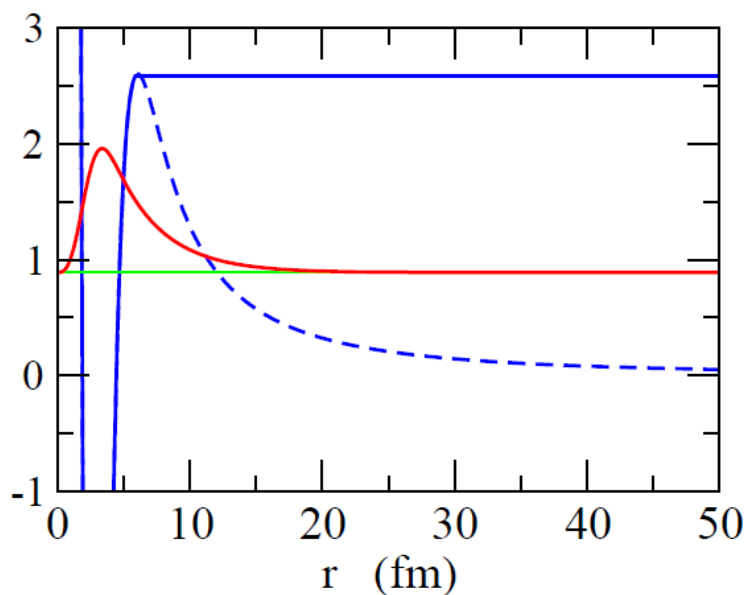
実際には有限の寿命で
障壁をトンネルし崩壊

「準束縛(準安定)状態」

準束縛状態とは?



ガモフ状態



トンネル効果で波動関数が
 しみ出し、**外向きの波として崩壊**

$$\begin{aligned}
 u(r) &\sim r^{l+1} && (r \rightarrow 0) \\
 &\rightarrow \mathcal{N} e^{i(kr - l\pi/2)} && (r \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

共鳴幅



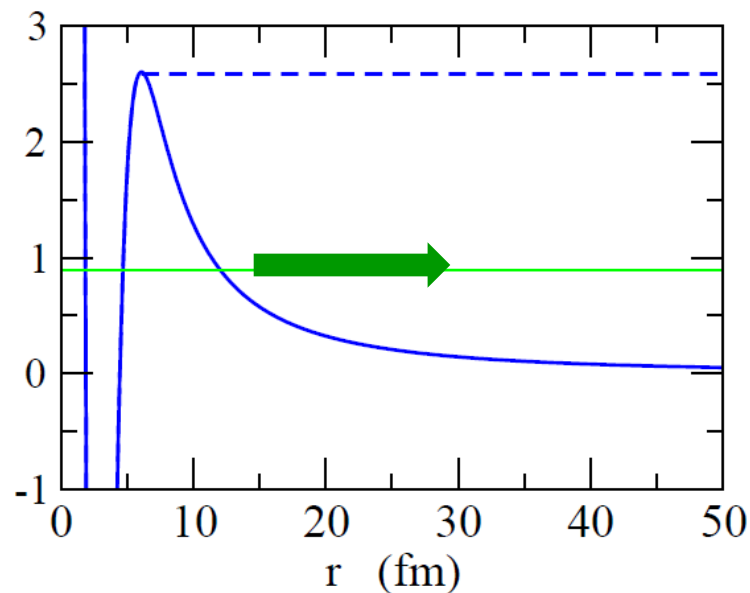
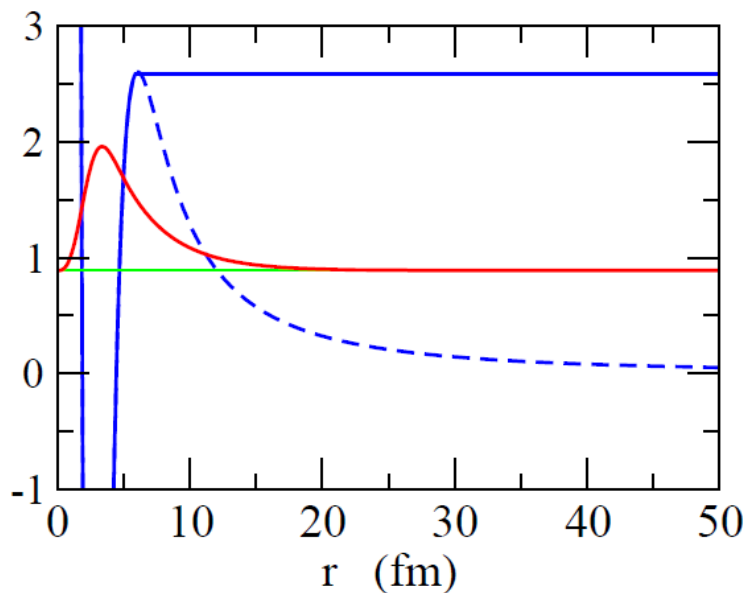
$$E \rightarrow E_R - i \frac{\Gamma}{2}$$



共鳴エネルギー

⇒ エネルギーを複素数にしなければならない:

ガモフ状態



トンネル効果で波動関数が
 沁み出し、**外向きの波として崩壊**

$$E \rightarrow E_R - i\frac{\Gamma}{2}$$

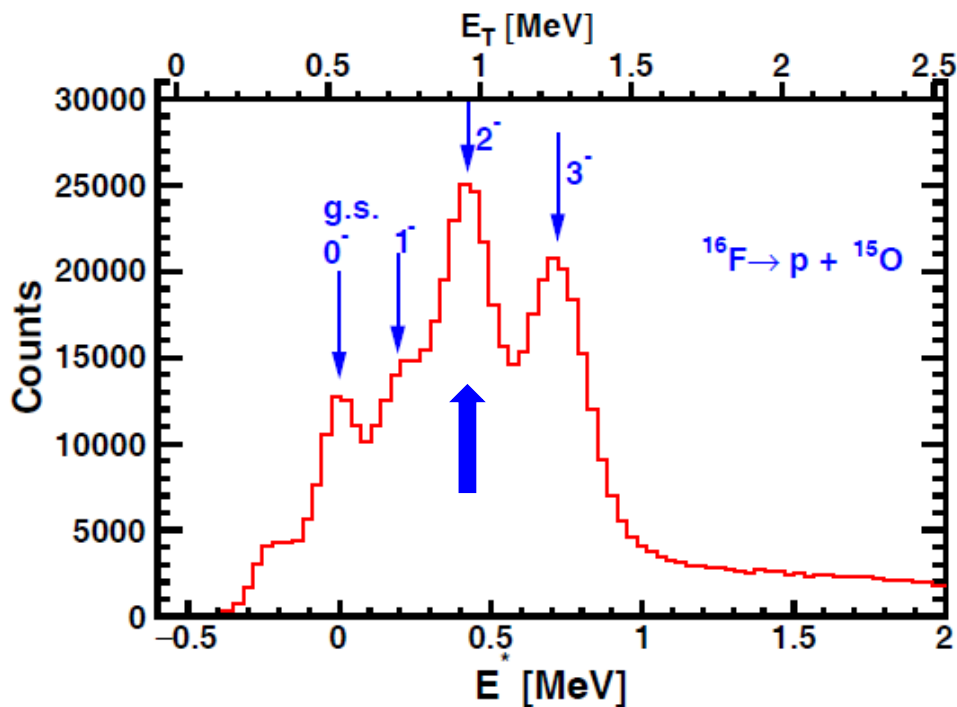
$$\begin{aligned}
 P_{\text{sur}}(t) &\equiv |\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|^2 \\
 &= |\langle \psi(0) | e^{-iHt/\hbar} | \psi(0) \rangle|^2 \\
 &= |\langle \psi(0) | e^{-i(E_R - i\Gamma/2)t/\hbar} | \psi(0) \rangle|^2 \\
 &= e^{-\Gamma t/\hbar} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\hbar/\Gamma \text{ が準安定状態の寿命}}
 \end{aligned}$$

共鳴状態と弾性散乱(共鳴散乱)

まず実際の現象から

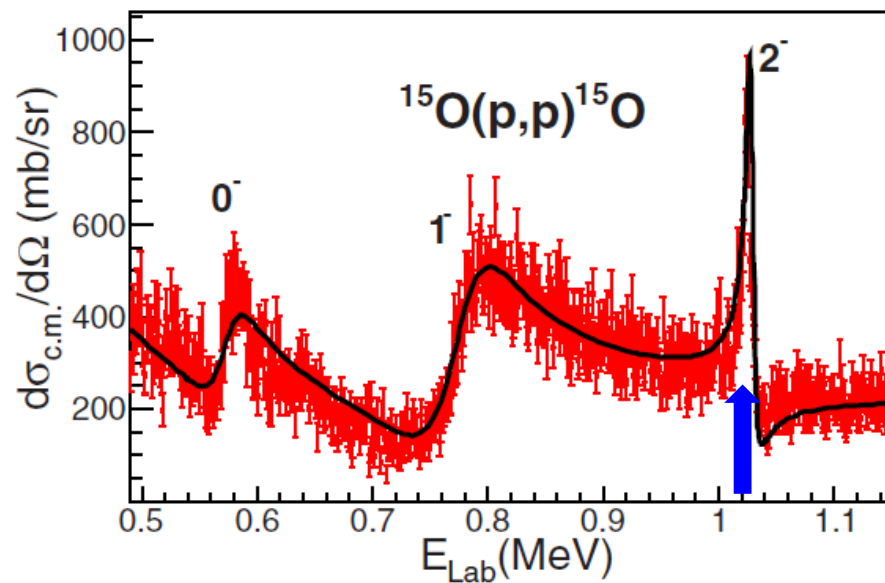
陽子非束縛核 $^{16}_9\text{F}_7$

$^{17}_{10}\text{Ne}$ から1つ陽子を抜いて
 $^{16}_9\text{F}$ を生成 → 崩壊スペクトル



R.J. Charity,
Eur. Phys. J. Plus 131 ('16) 63

$^{15}\text{O} + p$ 弾性散乱の断面積



$\theta_{\text{cm}} = 180$ deg.

I. Stefan et al., PRC90('14) 014307

共鳴エネルギーで弾性散乱の断面積が増大(共鳴散乱)

共鳴状態と弾性散乱(共鳴散乱)

次に散乱理論

自由粒子の運動:

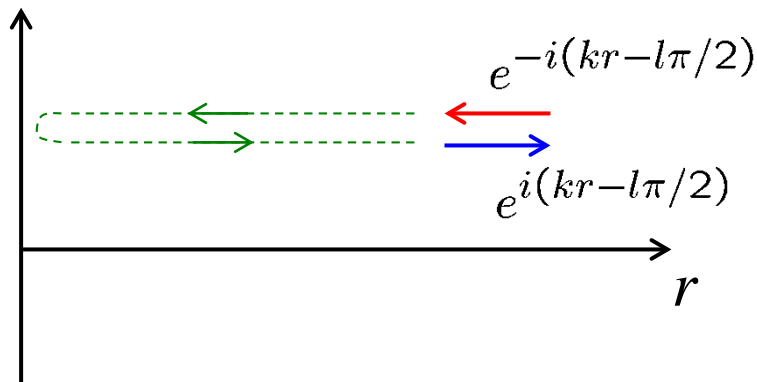
$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - E\right)\psi(\mathbf{r}) = 0$$

✓ 解:

$$\psi(\mathbf{r}) \propto j_l(kr)Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})\chi_{m_s}$$

✓ 遠方での振る舞い:

$$\begin{aligned} j_l(kr) &\rightarrow \frac{1}{kr} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) \\ &= \frac{-1}{2ikr} \left(e^{-i(kr-l\pi/2)} - e^{i(kr-l\pi/2)} \right) \end{aligned}$$



共鳴状態と弾性散乱(共鳴散乱)

自由粒子の運動:

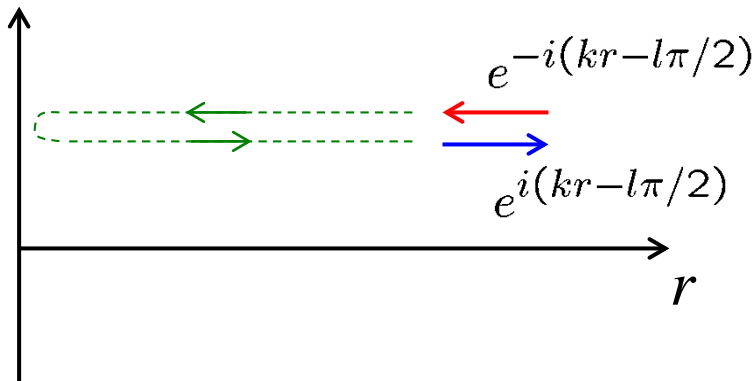
$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - E\right)\psi(\mathbf{r}) = 0$$

✓解:

$$\psi(\mathbf{r}) \propto j_l(kr)Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})\chi_{m_s}$$

✓遠方での振る舞い:

$$\begin{aligned} j_l(kr) &\rightarrow \frac{1}{kr} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) \\ &= \frac{-1}{2ikr} \left(e^{-i(kr-l\pi/2)} - e^{i(kr-l\pi/2)} \right) \end{aligned}$$



次に散乱理論

ポテンシャル中の運動:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r) - E\right)\psi(\mathbf{r}) = 0$$

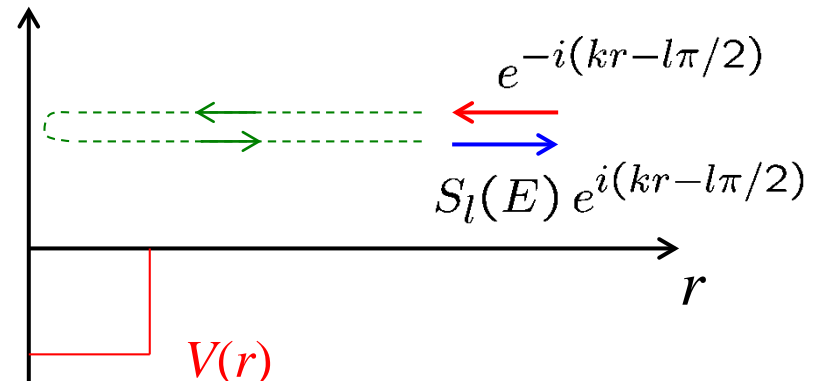
✓解:

$$\psi(\mathbf{r}) \propto R_l(r)Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})\chi_{m_s}$$

✓遠方での振る舞い:

$$R_l(r) \rightarrow \frac{-1}{2ikr} \left(e^{-i(kr-l\pi/2)} - S_l(E) e^{i(kr-l\pi/2)} \right)$$

* 吸収がなければ $|S_l(E)| = 1$



共鳴状態と弾性散乱(共鳴散乱)

自由粒子の運動:

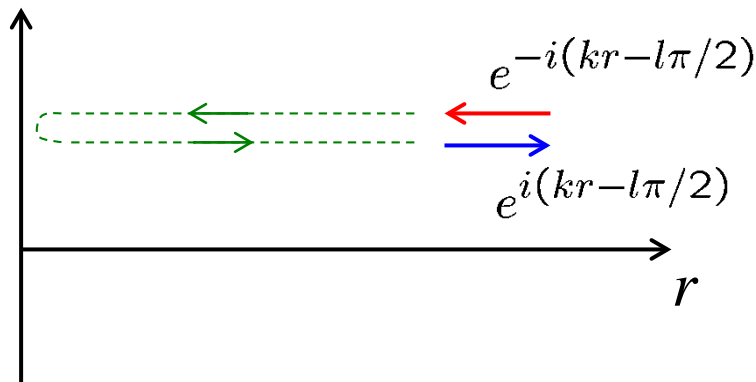
$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - E\right)\psi(\mathbf{r}) = 0$$

✓解:

$$\psi(\mathbf{r}) \propto j_l(kr)Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})\chi_{m_s}$$

✓遠方での振る舞い:

$$\begin{aligned} j_l(kr) &\rightarrow \frac{1}{kr} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) \\ &= \frac{-1}{2ikr} \left(e^{-i(kr-l\pi/2)} - e^{i(kr-l\pi/2)} \right) \end{aligned}$$



次に散乱理論

ポテンシャル中の運動:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r) - E\right)\psi(\mathbf{r}) = 0$$

✓解:

$$\psi(\mathbf{r}) \propto R_l(r)Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})\chi_{m_s}$$

✓遠方での振る舞い:

$$R_l(r) \rightarrow \frac{-1}{2ikr} \left(e^{-i(kr-l\pi/2)} - S_l(E) e^{i(kr-l\pi/2)} \right)$$

* 吸収がなければ $|S_l(E)| = 1$

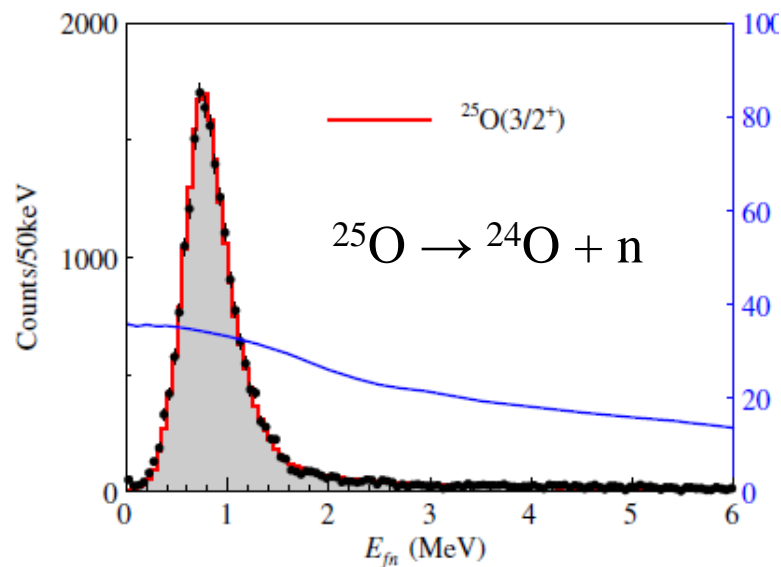
位相のずれ (phase shift)

$$S_l(E) = e^{2i\delta_l(E)}$$

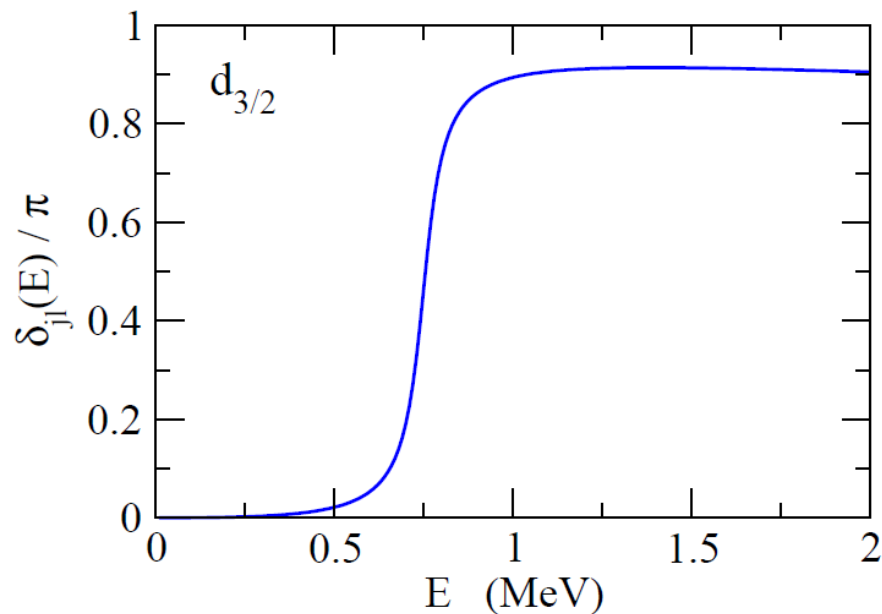
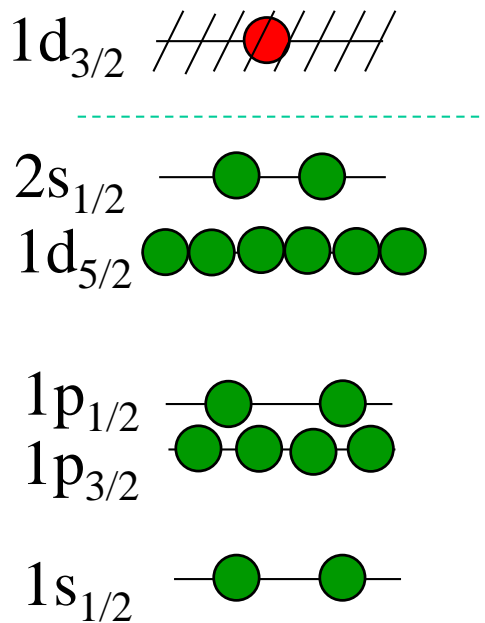
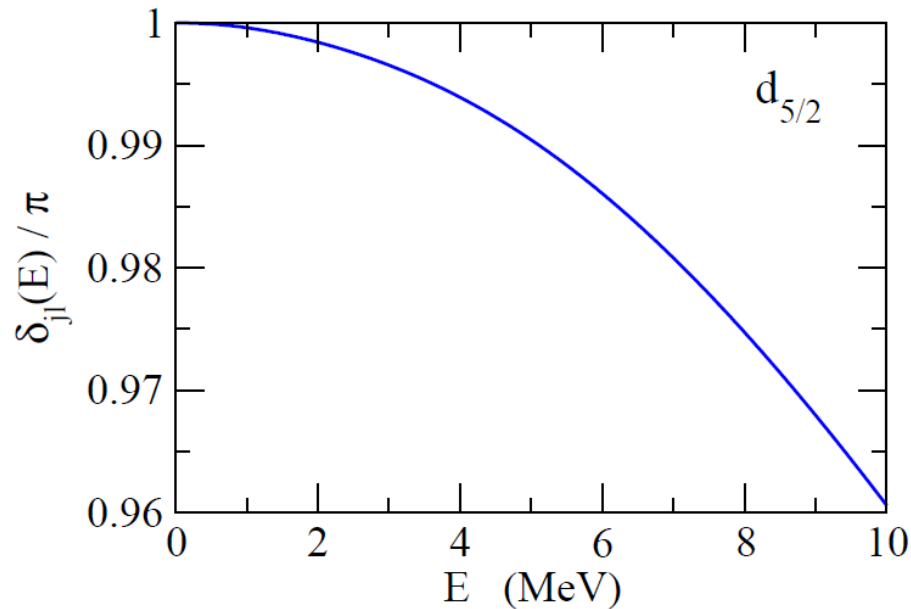


$$R_l(r) \rightarrow -\frac{e^{i\delta_l(E)}}{kr} \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l(E))$$

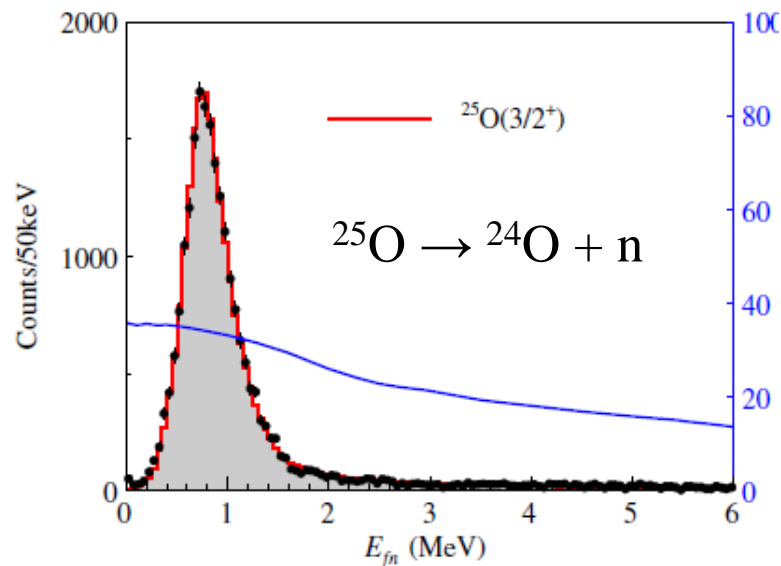
共鳴があると位相のずれはどう振る舞う?



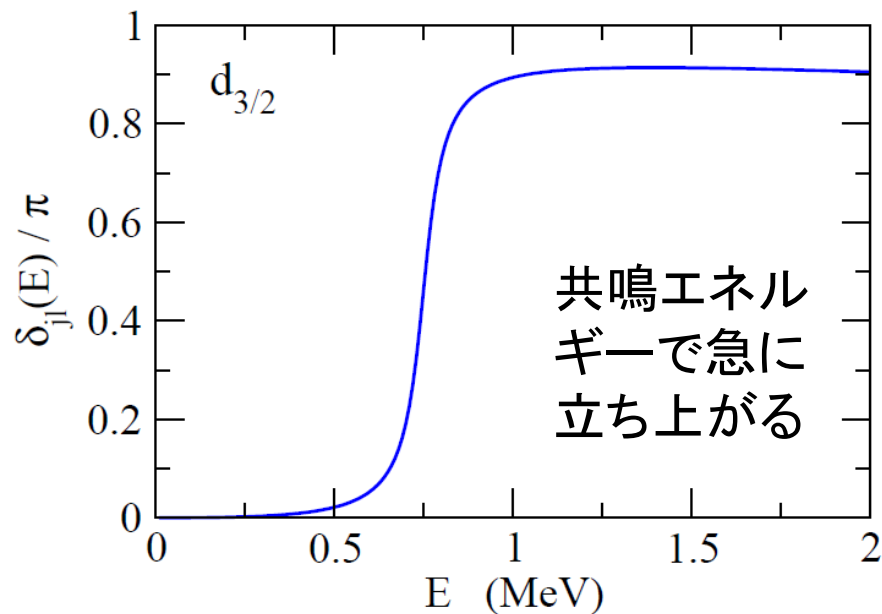
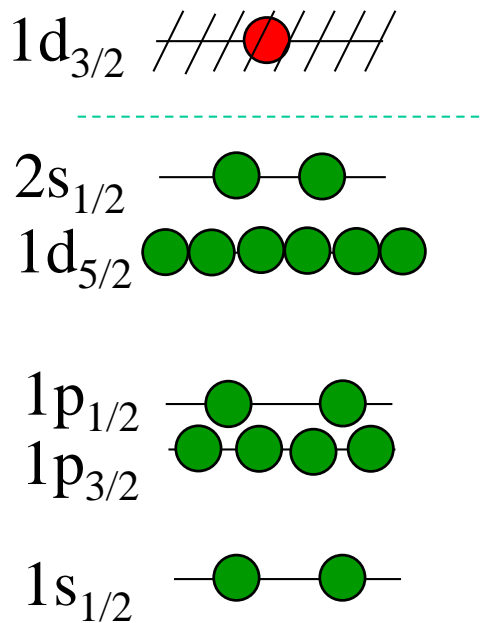
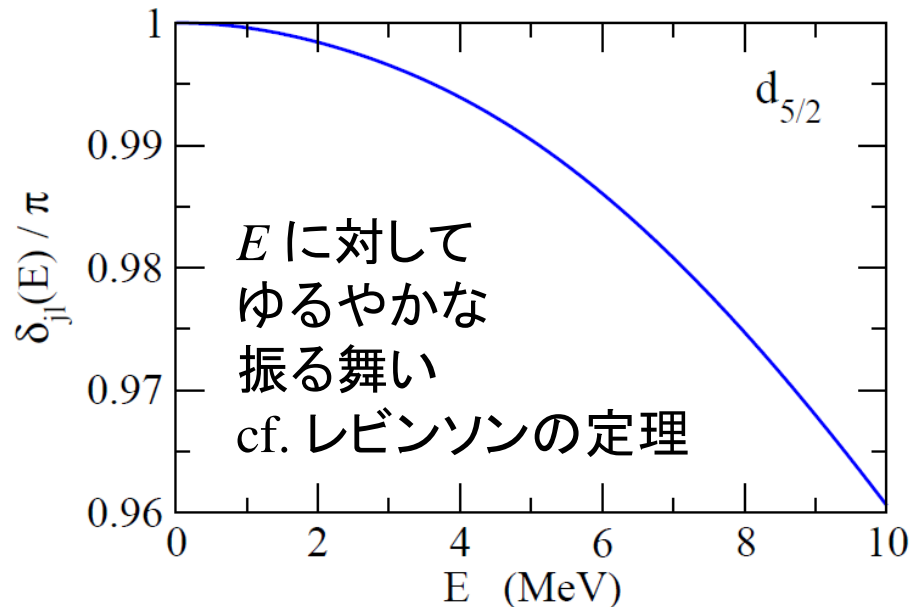
WS ポテンシャルによる n - ^{24}O 散乱



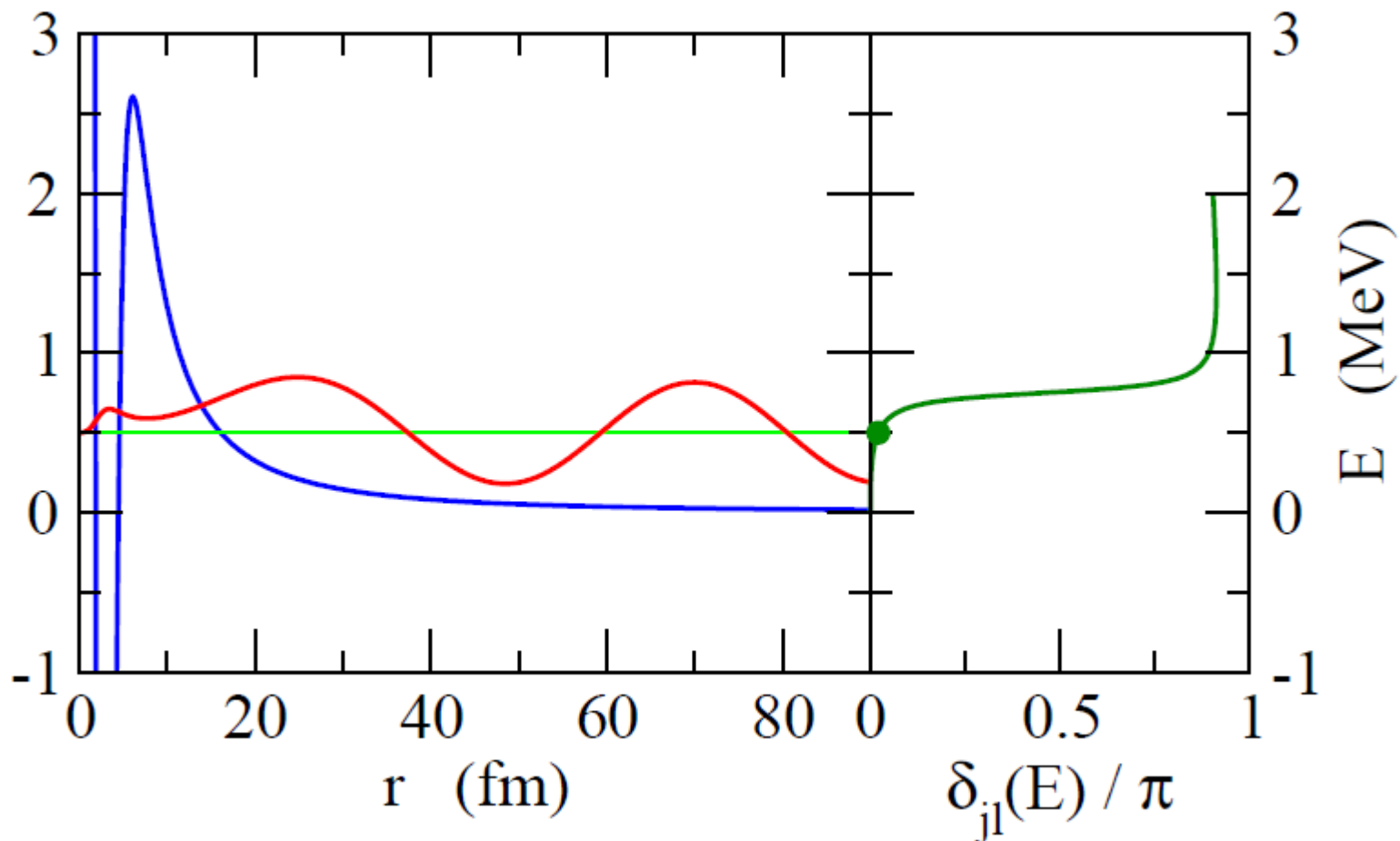
共鳴があると位相のずれはどう振る舞う?



WS ポテンシャルによる n - ^{24}O 散乱

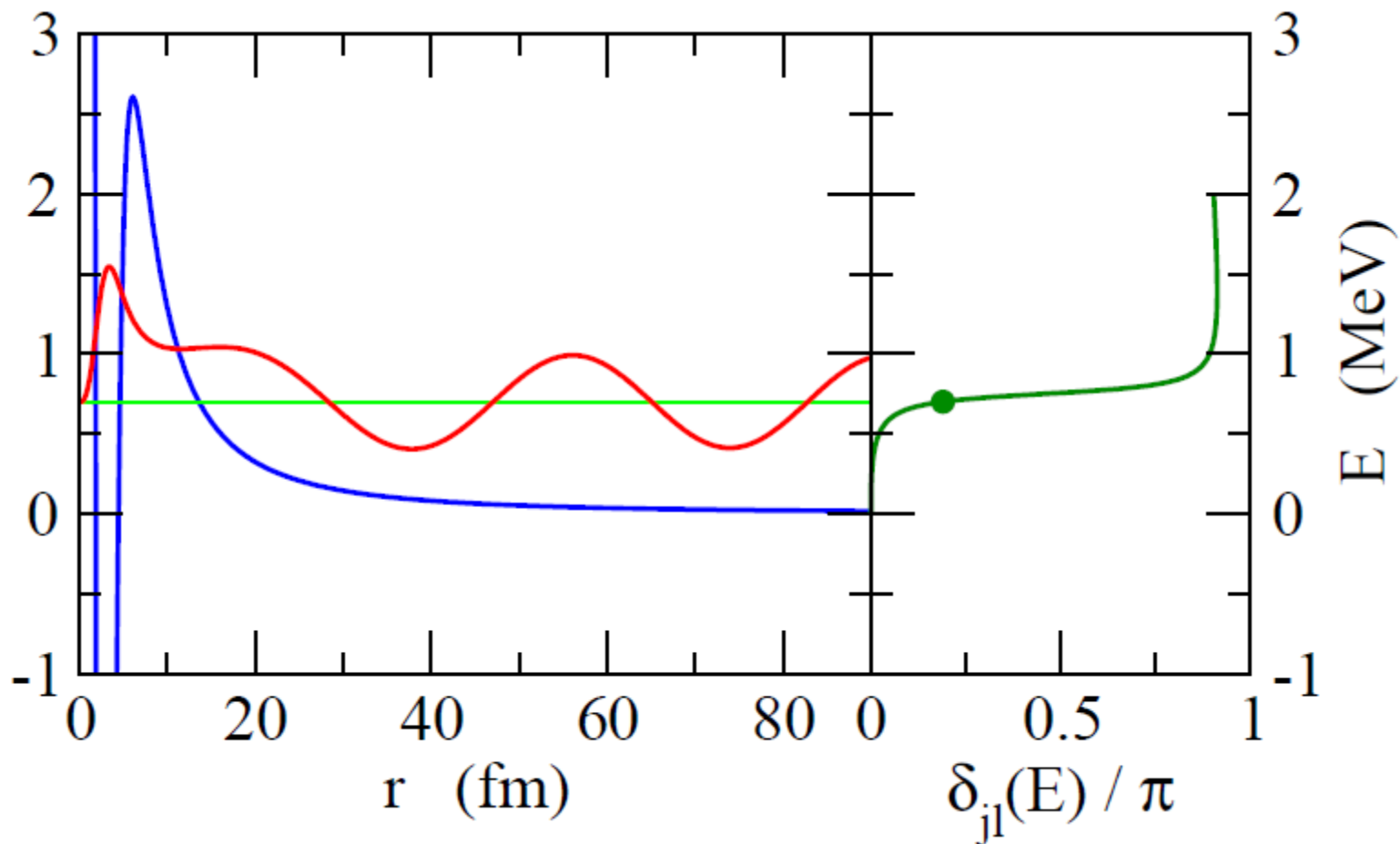


それでは波動関数は?



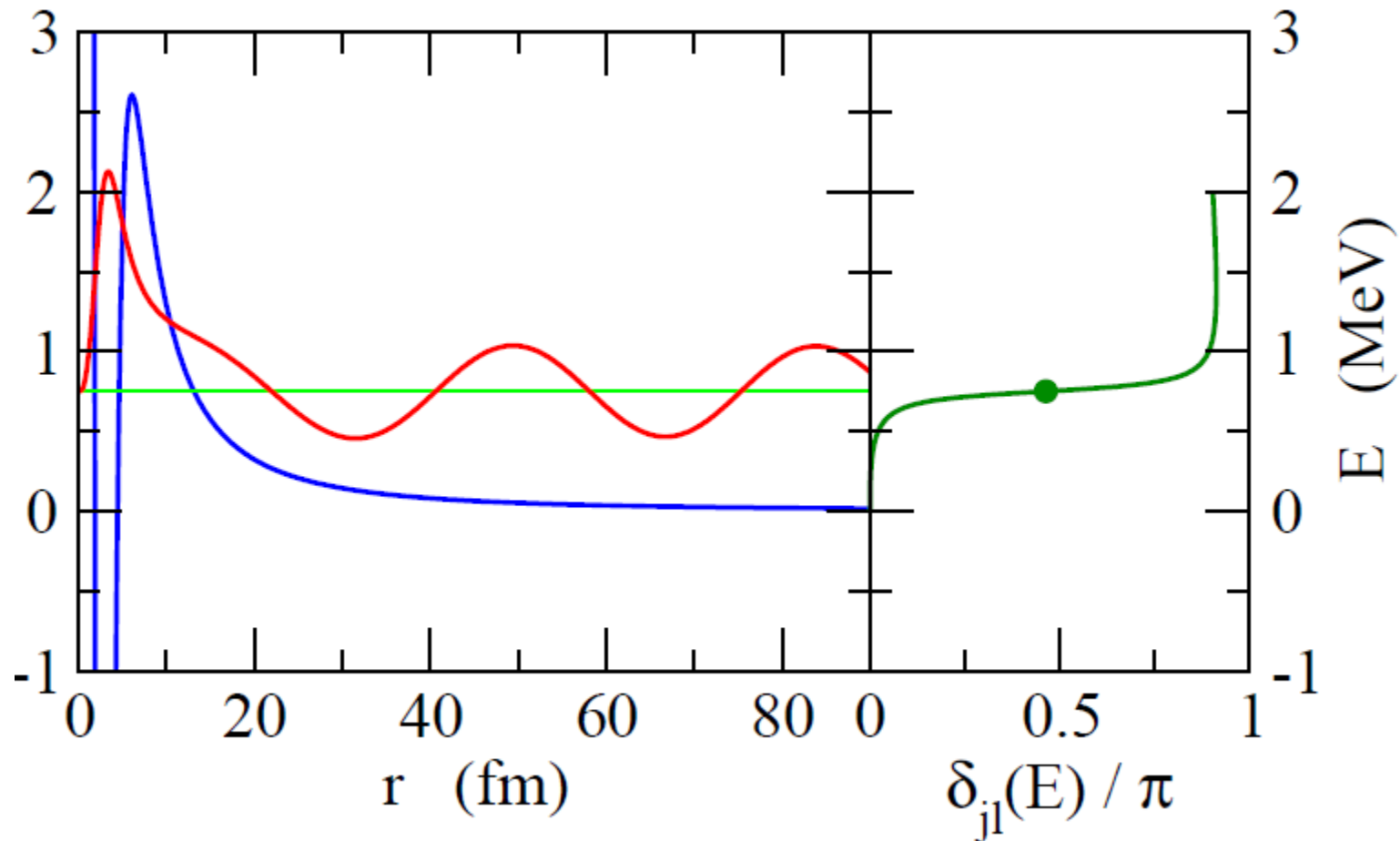
$$rR_{jl}(r) \rightarrow \sqrt{\frac{2m}{\pi k \hbar^2}} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{jl}(E)\right); \quad \int dr \psi_E(r) \psi_{E'}^*(r) = \delta(E - E')$$

それでは波動関数は?



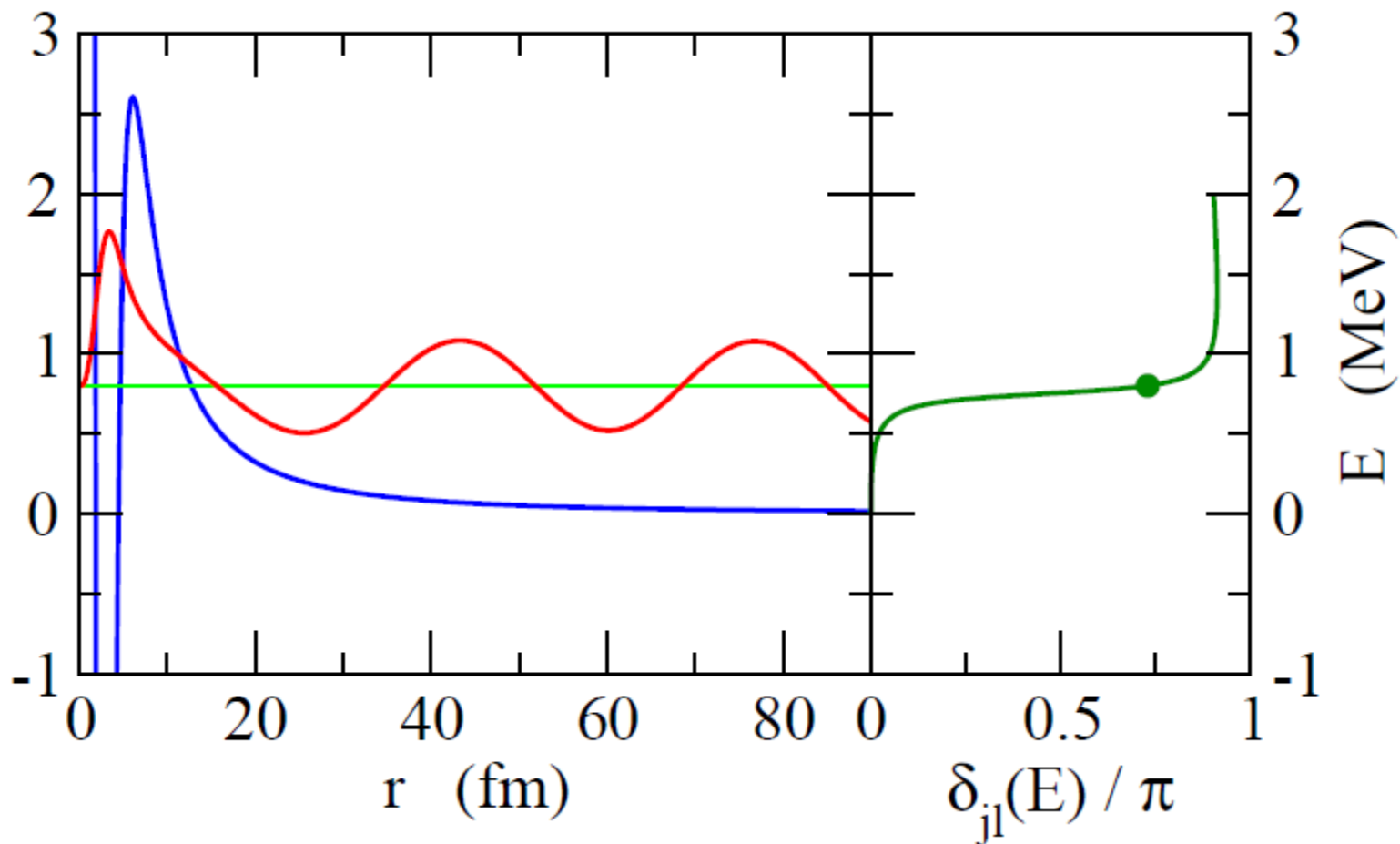
$$rR_{jl}(r) \rightarrow \sqrt{\frac{2m}{\pi k \hbar^2}} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{jl}(E)\right); \quad \int dr \psi_E(r) \psi_{E'}^*(r) = \delta(E - E')$$

それでは波動関数は?



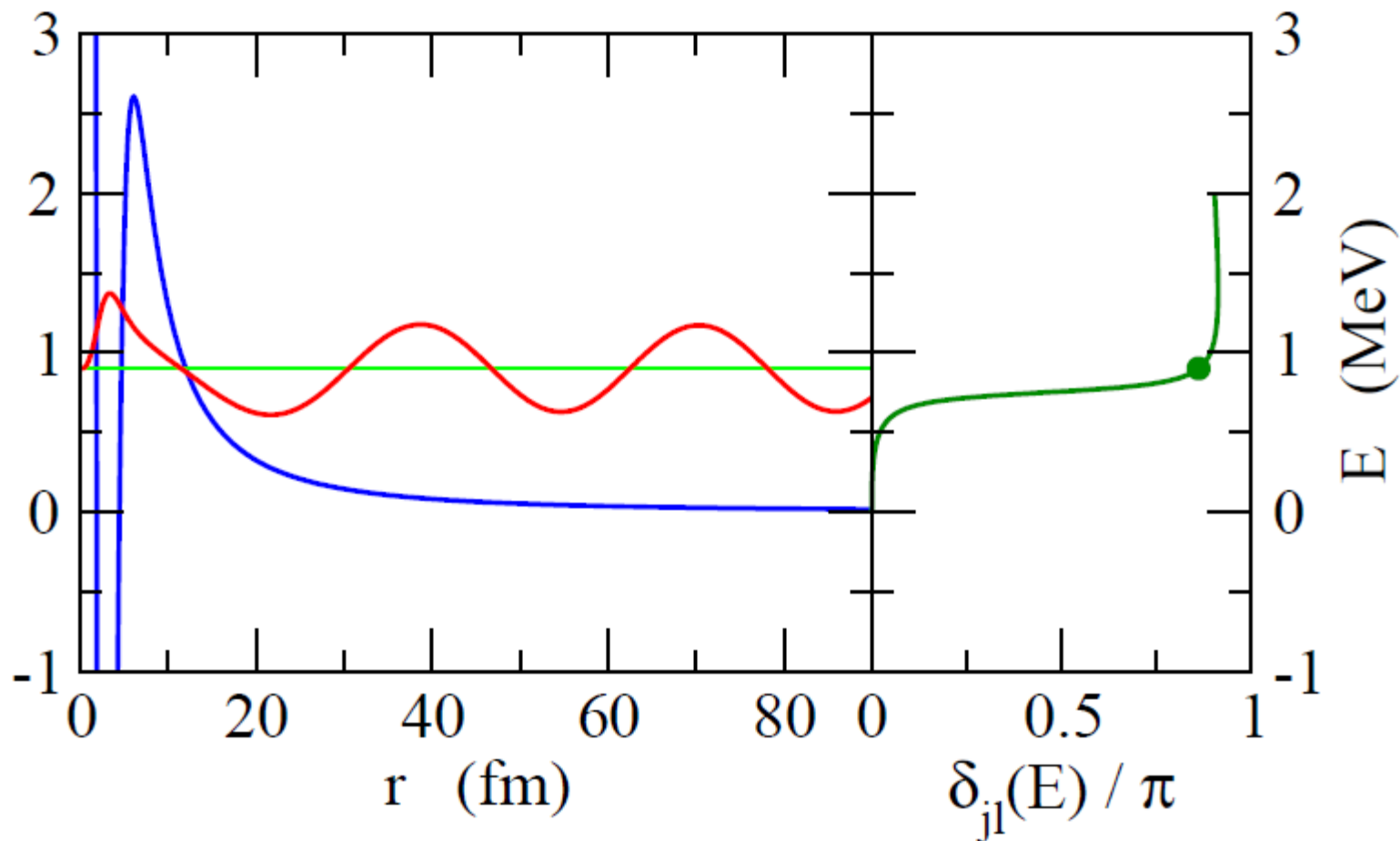
$$rR_{jl}(r) \rightarrow \sqrt{\frac{2m}{\pi k \hbar^2}} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{jl}(E)\right); \quad \int dr \psi_E(r) \psi_{E'}^*(r) = \delta(E - E')$$

それでは波動関数は?



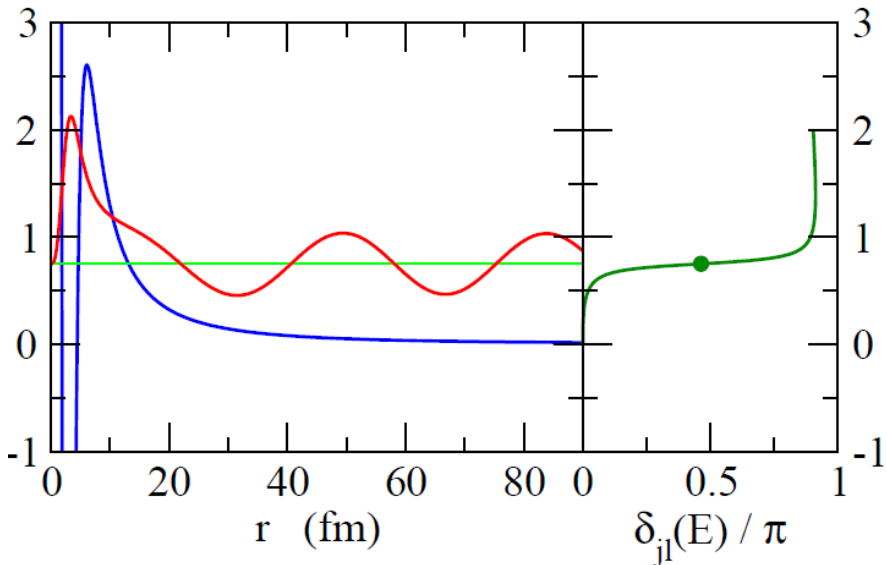
$$rR_{jl}(r) \rightarrow \sqrt{\frac{2m}{\pi k \hbar^2}} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{jl}(E)\right); \quad \int dr \psi_E(r) \psi_{E'}^*(r) = \delta(E - E')$$

それでは波動関数は?



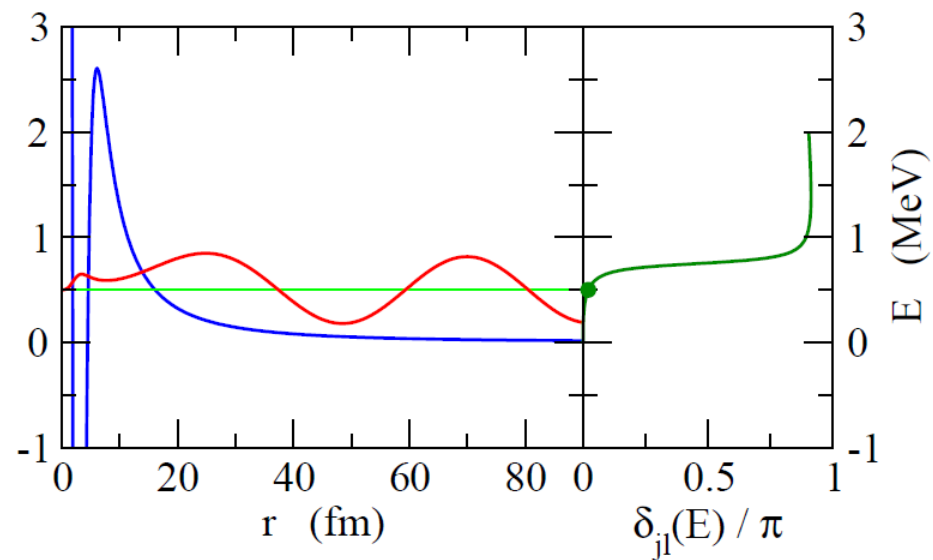
$$rR_{jl}(r) \rightarrow \sqrt{\frac{2m}{\pi k \hbar^2}} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{jl}(E)\right); \quad \int dr \psi_E(r) \psi_{E'}^*(r) = \delta(E - E')$$

それでは波動関数は?



on-resonance:

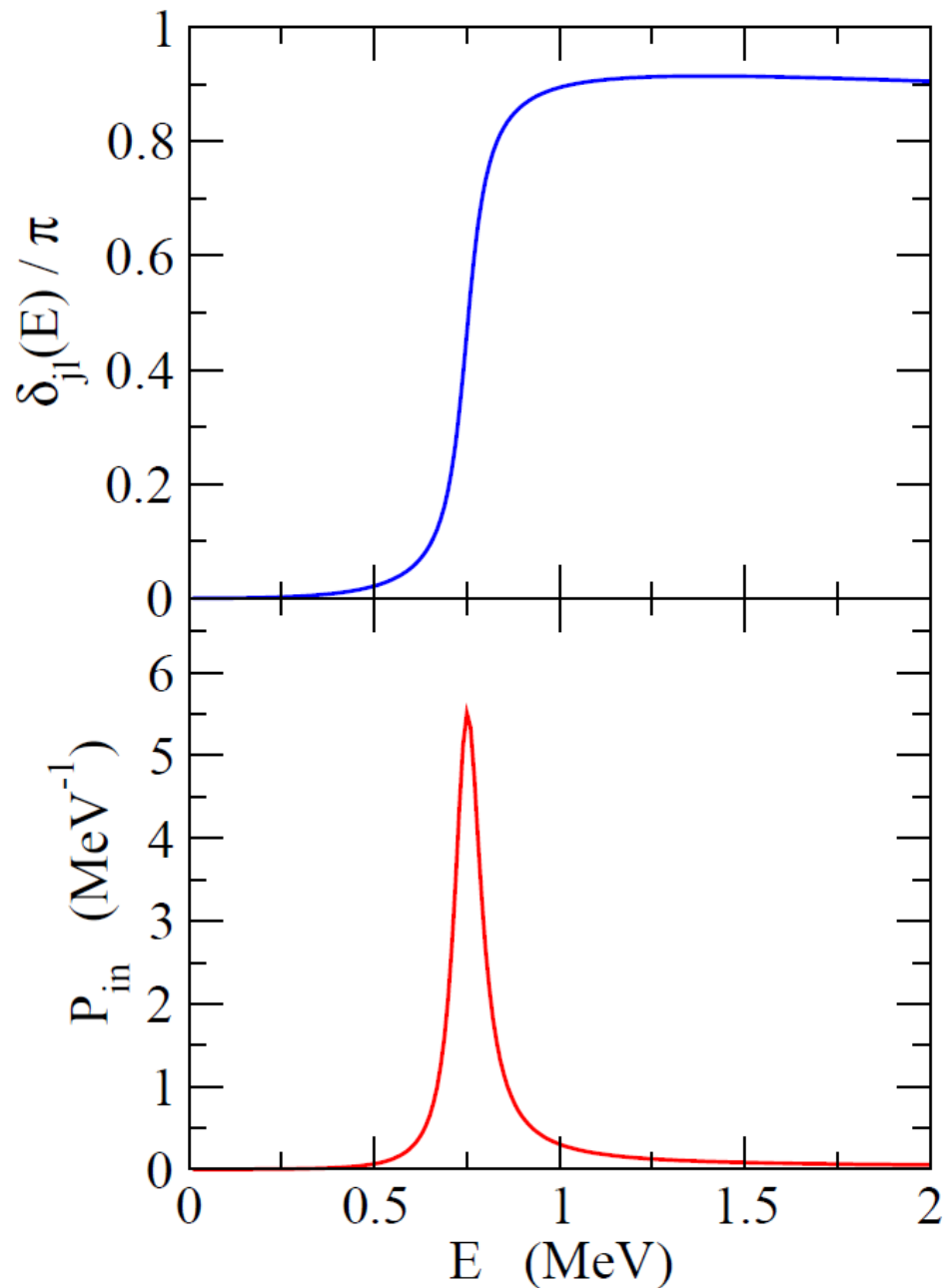
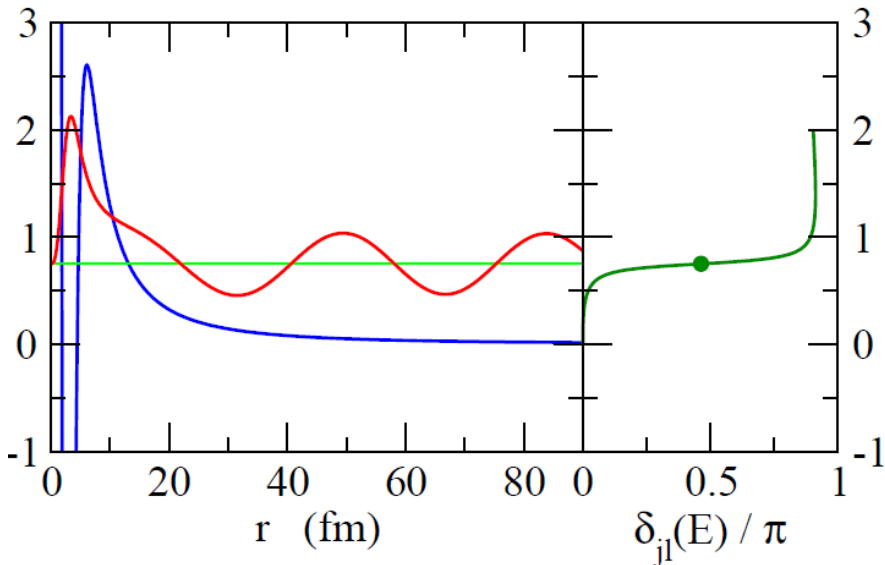
波動関数は障壁の内側で
大きな振幅



off-resonance:

障壁の内側では振幅が
小さい

それでは波動関数は?



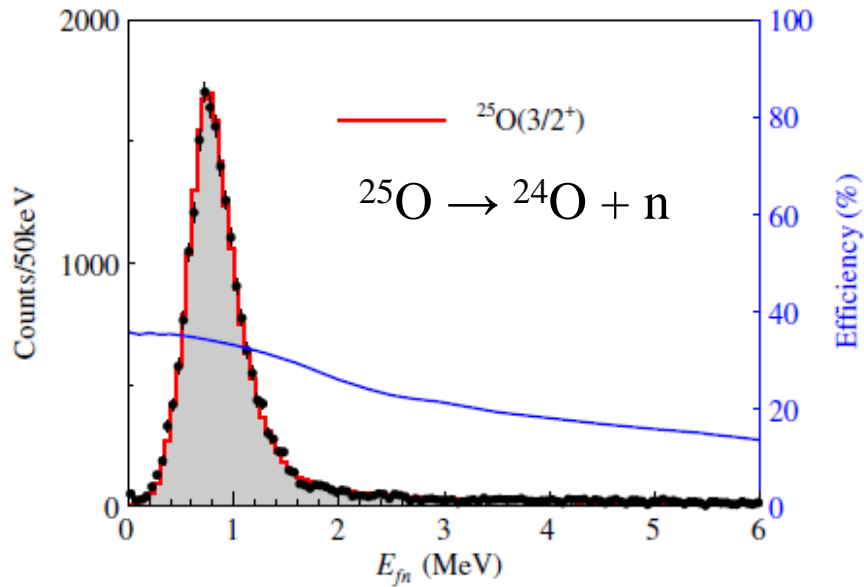
on-resonance:
波動関数は障壁の内側で
大きな振幅

障壁内部の存在確率

$$P_{in} \equiv \int_0^{r_b} r^2 dr |R_{jl}(r)|^2$$

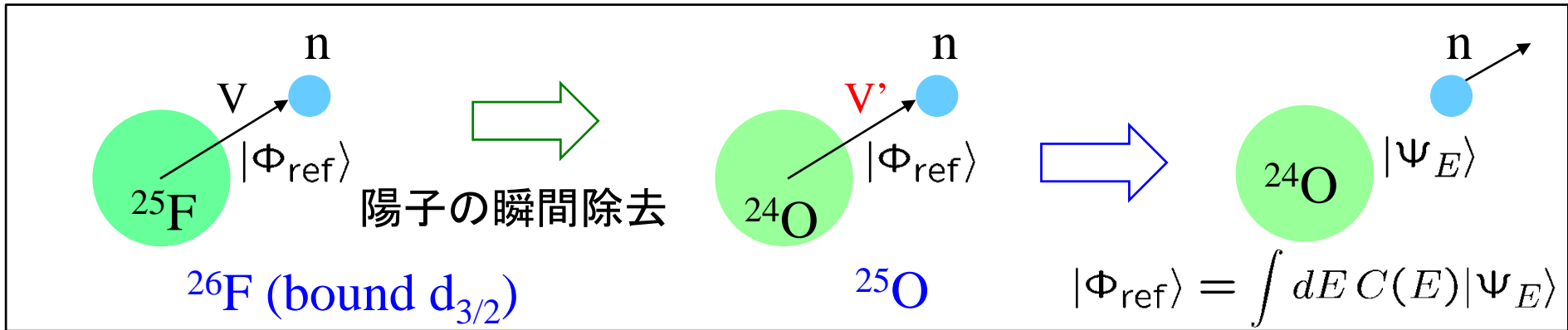
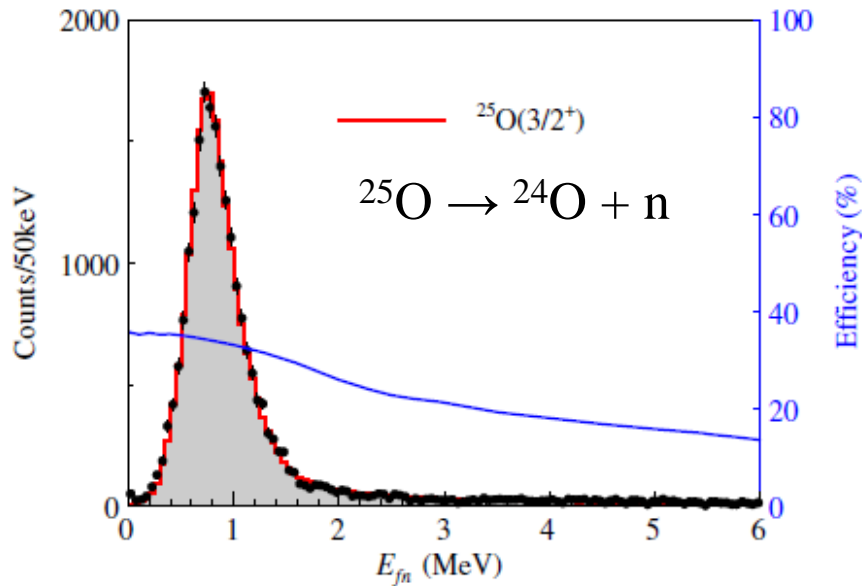
不変質量スペクトルの解析

$^{26}_9\text{F}_{17}$ から1つ陽子を抜いて $^{25}_8\text{O}_{17}$ を生成 → 1中性子を放出して崩壊



不変質量スペクトルの解析

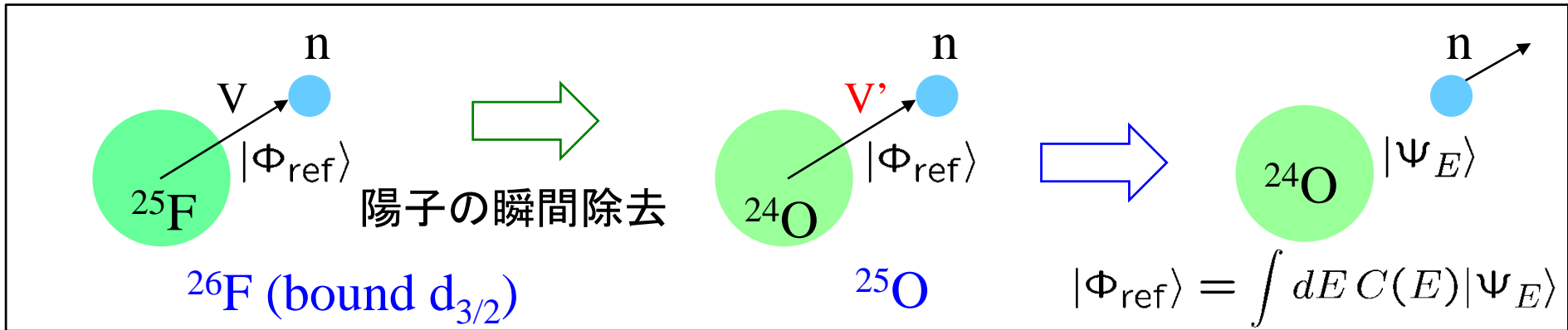
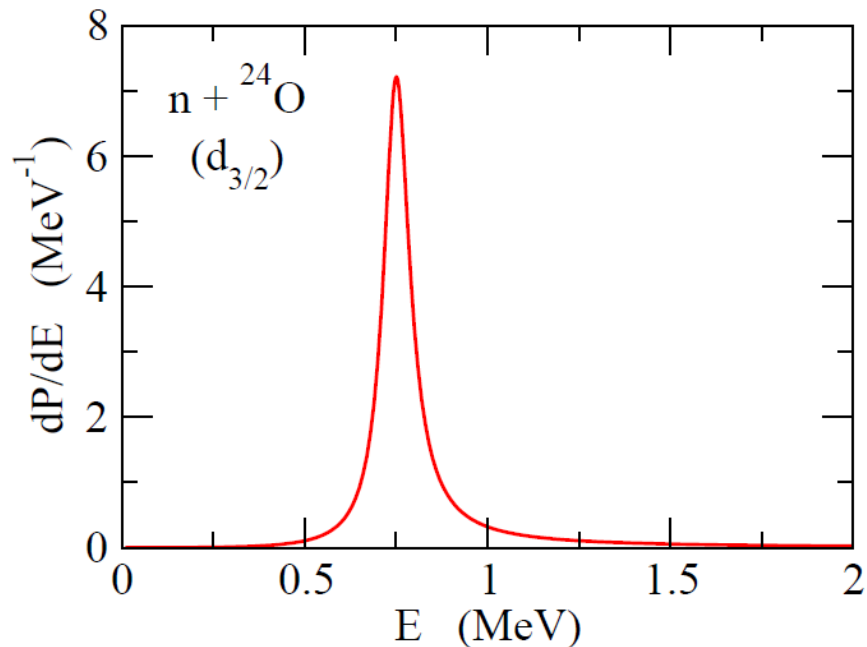
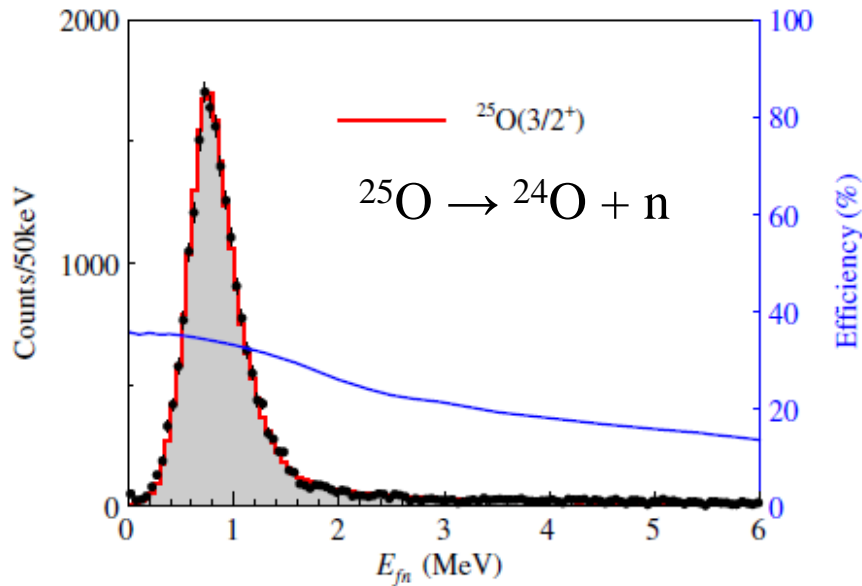
$^{26}_9\text{F}_{17}$ から1つ陽子を抜いて $^{25}_8\text{O}_{17}$ を生成 → 1中性子を放出して崩壊



不変質量スペクトルの解析

$^{26}_9\text{F}_{17}$ から1つ陽子を抜いて $^{25}_8\text{O}_{17}$ を生成 → 1中性子を放出して崩壊

$$\frac{dP}{dE} = |\langle \Phi_{\text{ref}} | \Psi_E \rangle|^2$$

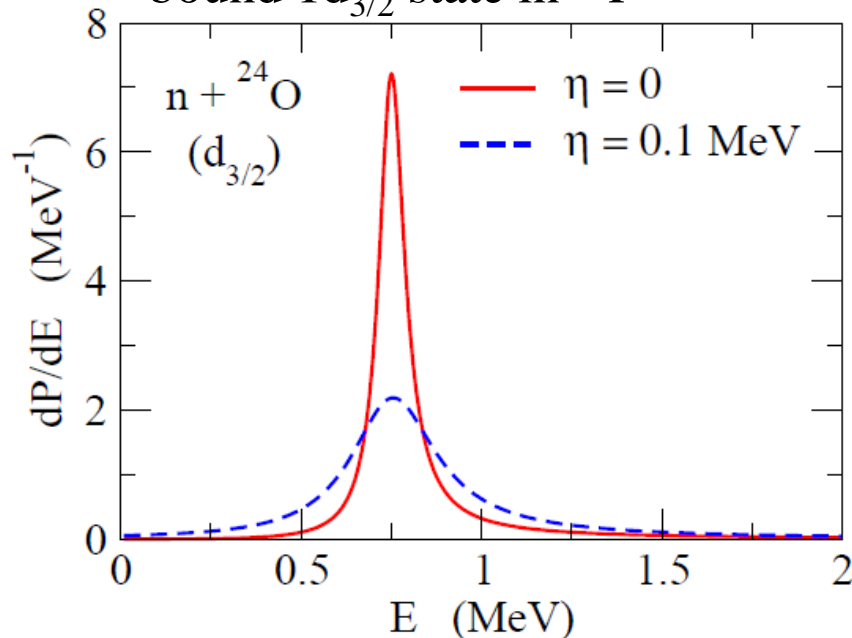


不変質量スペクトルの解析

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dE} &= |\langle \Phi_{\text{ref}} | \Psi_E \rangle|^2 = \int dE' |\langle \Phi_{\text{ref}} | \Psi_{E'} \rangle|^2 \delta(E - E') \\ &\rightarrow \frac{1}{\pi} \text{Im} \int dE' |\langle \Phi_{\text{ref}} | \Psi_{E'} \rangle|^2 \underbrace{\frac{1}{E' - E - i\eta}}\end{aligned}$$

Reference state:

bound $1d_{3/2}$ state in ^{26}F



$$= 1 / (H - E - i\eta) = G(E)$$

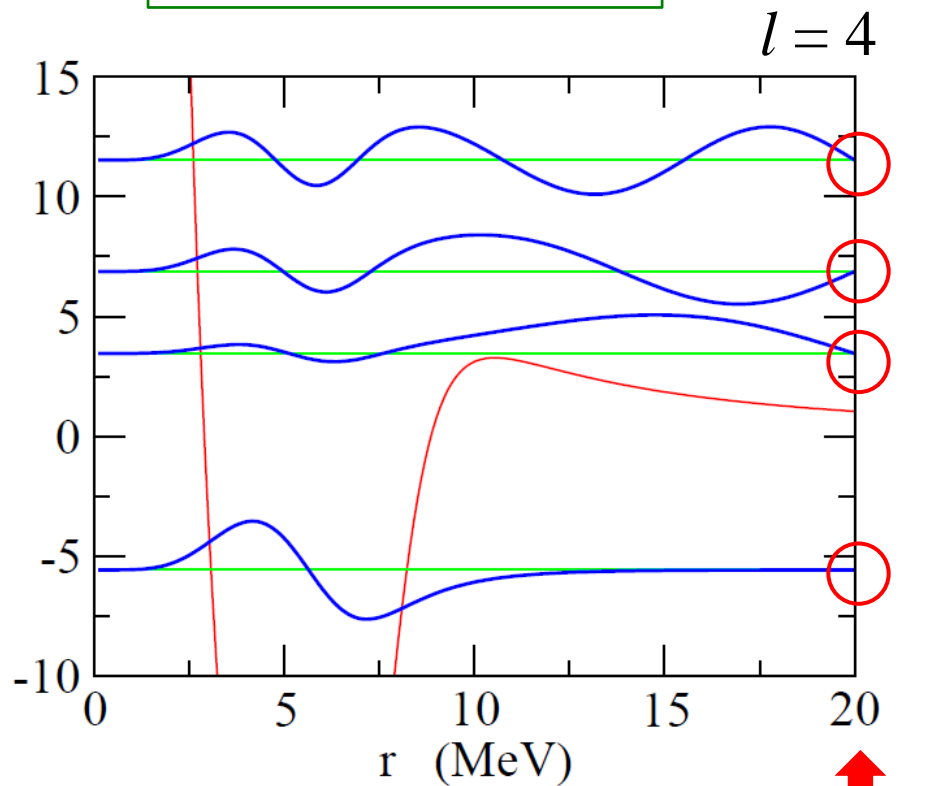
$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{x - i\eta} = P \frac{1}{x} + i\pi\delta(x)$$

有限の η でも計算できる
(数値計算上便利)

stabilization method

box 境界条件 = 散乱状態の離散化

$$u_{jl}(R_{\text{box}}) = 0$$



$$V_0 = -50 \text{ MeV}$$

$$R_0 = 1.27 * 200^{1/3} \text{ fm}$$

$$a = 0.67 \text{ fm}$$

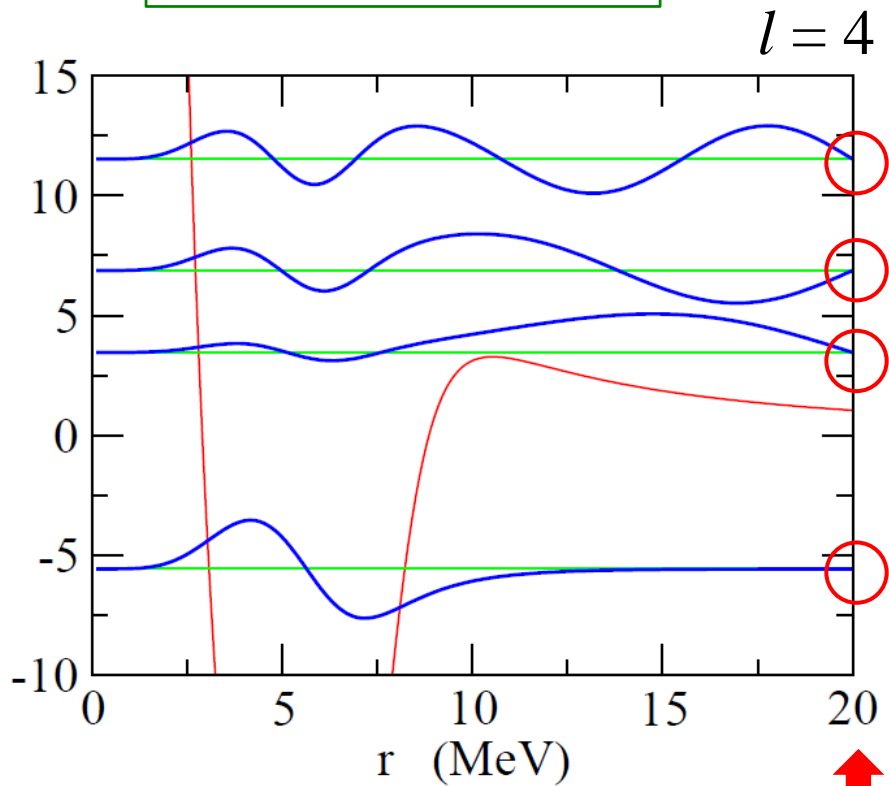
$$\mu = 200 m_N / 201$$

R_{box}

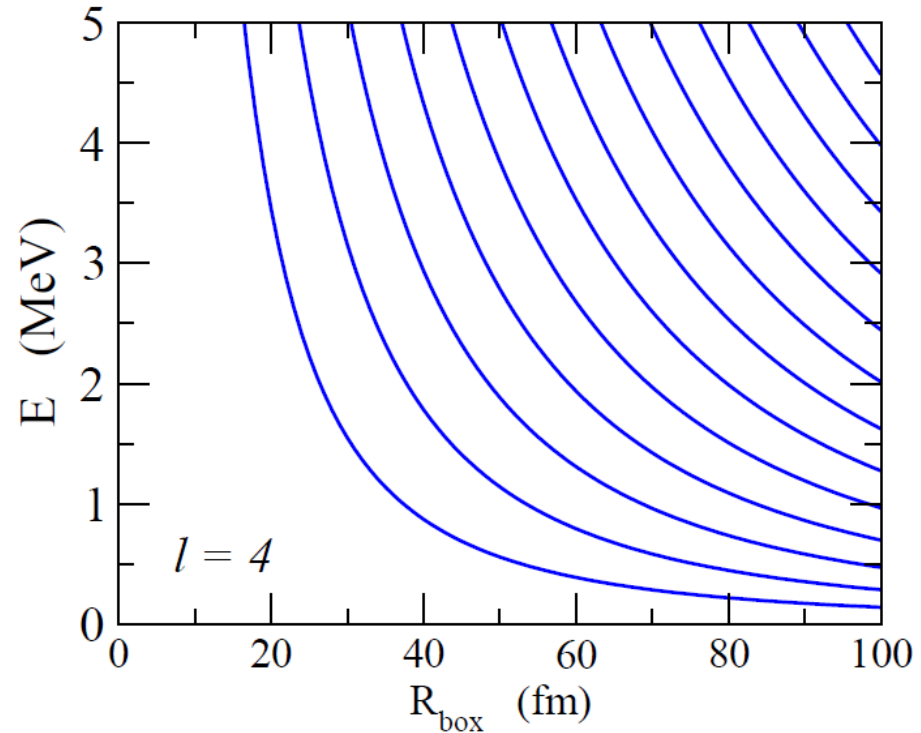
stabilization method

box 境界条件 = 散乱状態の離散化

$$u_{jl}(R_{\text{box}}) = 0$$



R_{box} を変えるとどうなるか?

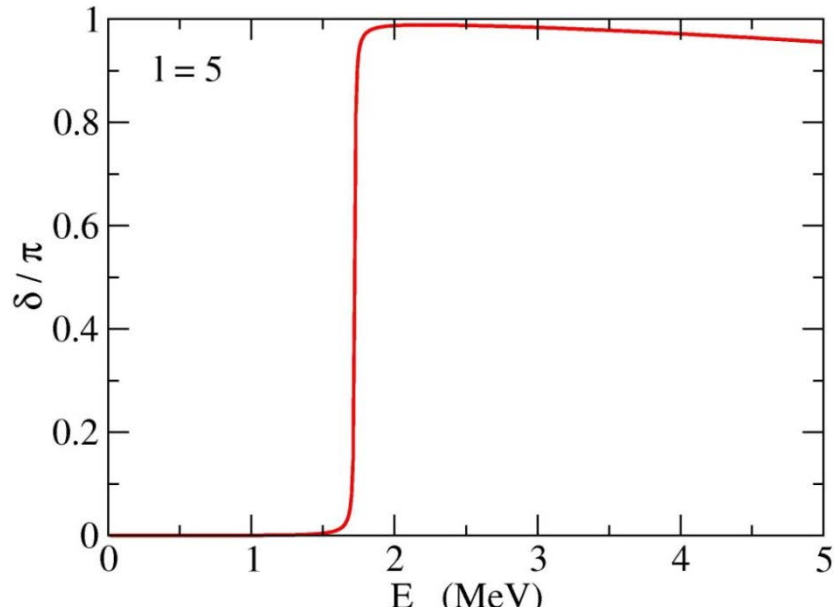


$V_0 = -50$ MeV
 $R_0 = 1.27 * 200^{1/3}$ fm
 $a = 0.67$ fm
 $\mu = 200 m_N / 201$

\uparrow
 R_{box}

- ✓ R_{box} の関数として単調に減少
- ✓ R_{box} が大きい方が dk が小

共鳴がある場合

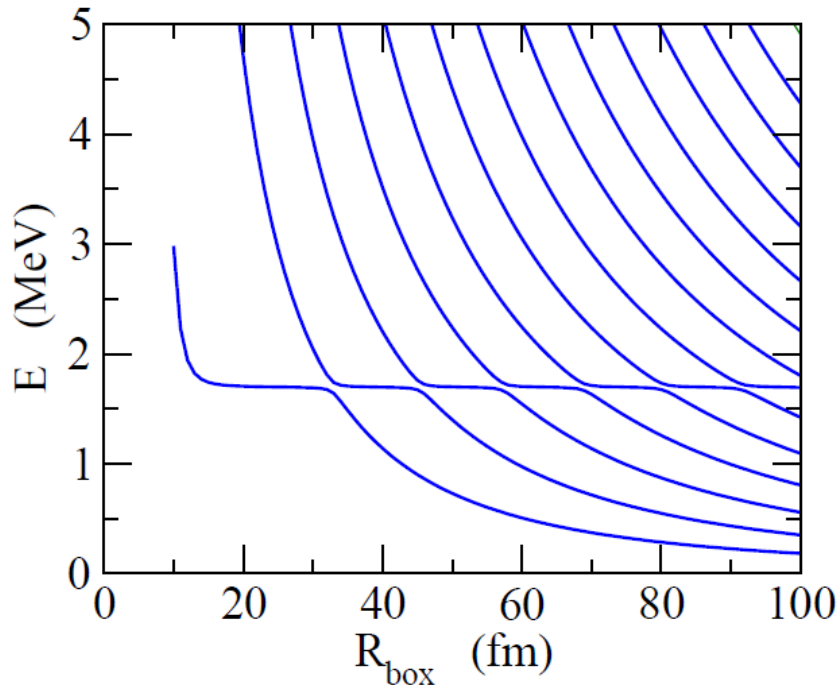


共鳴のエネルギーで離散化されたエネルギーが安定化

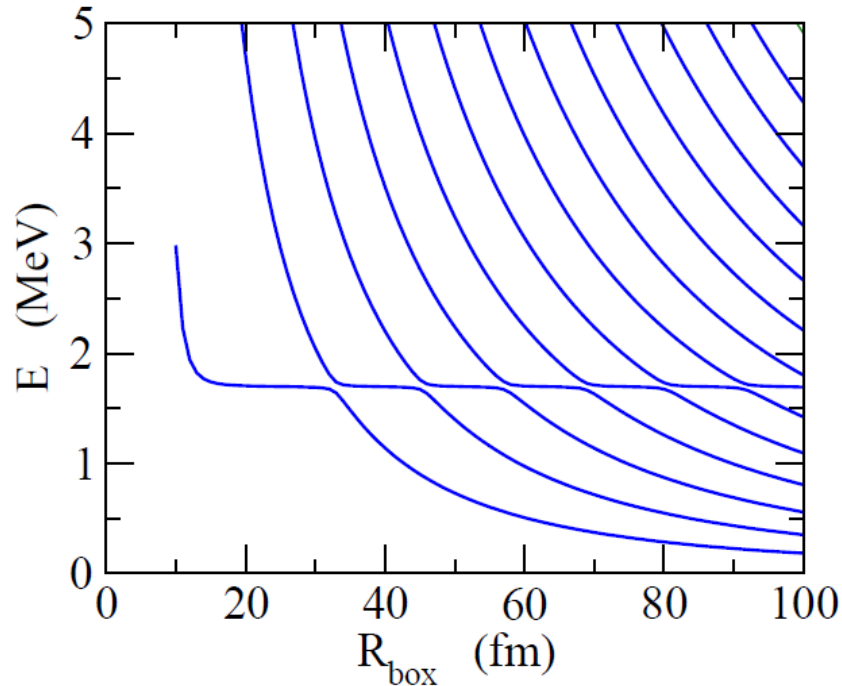
“stabilization method”

A.U. Hazi and H.S. Taylor,
PRA 1 ('70) 1109

L^2 基底で共鳴エネルギーと
共鳴幅を計算する



共鳴がある場合



共鳴のエネルギーで離散化されたエネルギーが安定化

“stabilization method”

A.U. Hazi and H.S. Taylor,
PRA 1 ('70) 1109

L^2 基底で共鳴エネルギーと
共鳴幅を計算する

何故共鳴準位が安定するのか?

$$u_l(r) \rightarrow \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l(E)\right) \quad \Rightarrow \quad kR - \frac{l\pi}{2} + \delta_l(E) = n\pi$$

$$R \text{ で微分すると: } \frac{\partial k}{\partial R} R + k + \frac{\partial \delta_l}{\partial R} = 0 \quad \longrightarrow \quad R \frac{\partial k}{\partial E} \cdot \frac{\partial E}{\partial R} + k + \frac{\partial \delta_l}{\partial E} \cdot \frac{\partial E}{\partial R} = 0$$

$$\text{共鳴準位: } \frac{\partial \delta_l}{\partial E} = \text{large} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial E}{\partial R} = \text{small}} \quad \frac{\partial E}{\partial R} \sim -k \left(\frac{\partial \delta_l}{\partial E}\right)^{-1} < 0$$

何故共鳴準位が安定するのか?(もう少し数学的な説明)

$$u_l(r) \rightarrow \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l(E)\right) \implies kR - \frac{l\pi}{2} + \delta_l(E) = n\pi$$

Rで微分すると: $\frac{\partial k}{\partial R}R + k + \frac{\partial \delta_l}{\partial R} = 0 \implies R \frac{\partial k}{\partial E} \cdot \frac{\partial E}{\partial R} + k + \frac{\partial \delta_l}{\partial E} \cdot \frac{\partial E}{\partial R} = 0$

共鳴準位: $\delta(E) = \tan^{-1} \frac{\Gamma}{2(E_R - E)} + \delta_0(E)$ (Breit-Wignerの式)

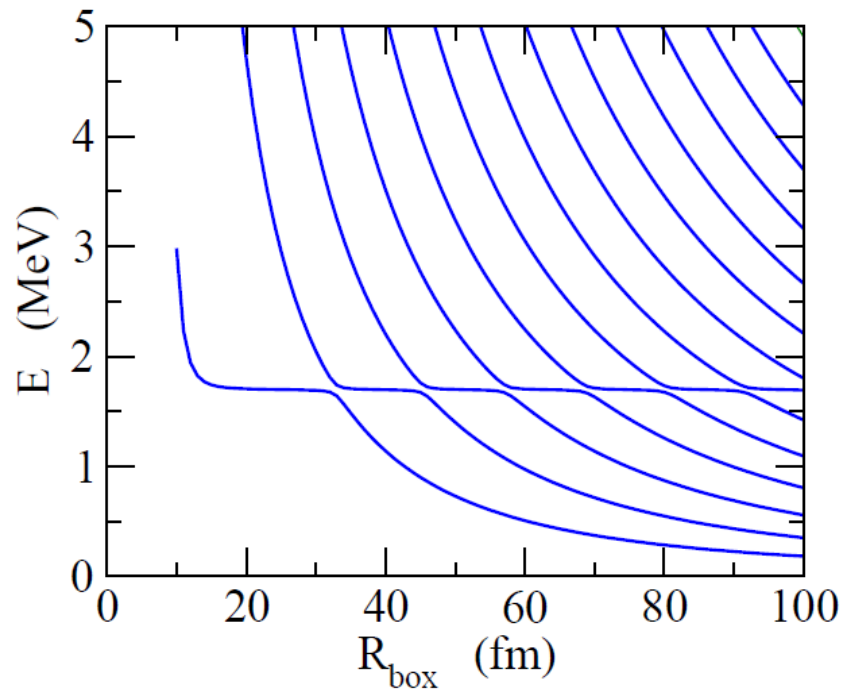
$$\implies \frac{\partial \delta_l}{\partial E} = \frac{2}{\Gamma} \quad (E = E_R)$$

$$\implies \left(\frac{\partial E}{\partial R}\right)_{E=E_R} = -\frac{2E_R}{R + \frac{2}{\Gamma} \frac{k_R \hbar^2}{m}} \sim -\frac{1}{2} k_R \Gamma \quad \left(R \ll \frac{\hbar^2}{m} \frac{2k_R}{\Gamma}\right)$$

非共鳴準位: $\frac{\partial \delta_l}{\partial E} \sim 0 \implies \left(\frac{\partial E}{\partial R}\right)_{E=E_R} = -\frac{2E_R}{R} = -\frac{\hbar^2}{m} \frac{k_R^2}{R}$

$$\curvearrowright \boxed{\left(\frac{\partial E}{\partial R}\right)_{\text{res}} \ll \left(\frac{\partial E}{\partial R}\right)_{\text{non-res}} \quad \left(R \ll \frac{\hbar^2}{m} \frac{2k_R}{\Gamma}\right)}$$

共鳴がある場合



共鳴のエネルギーで離散化されたエネルギーが安定化

“stabilization method”

A.U. Hazi and H.S. Taylor,
PRA 1 ('70) 1109

L^2 基底で共鳴エネルギーと
共鳴幅を計算する

$$\left(\frac{\partial E}{\partial R}\right)_{E=E_R} = -\frac{2E_R}{R + \frac{2}{\Gamma} \frac{k_R \hbar^2}{m}}$$

← Breit-Wigner

$$\Rightarrow \Gamma = \frac{2k_R \hbar^2}{m} \cdot \frac{1}{-R - 2E_R \left[\left(\frac{\partial E}{\partial R}\right)_{E=E_R} \right]^{-1}}$$

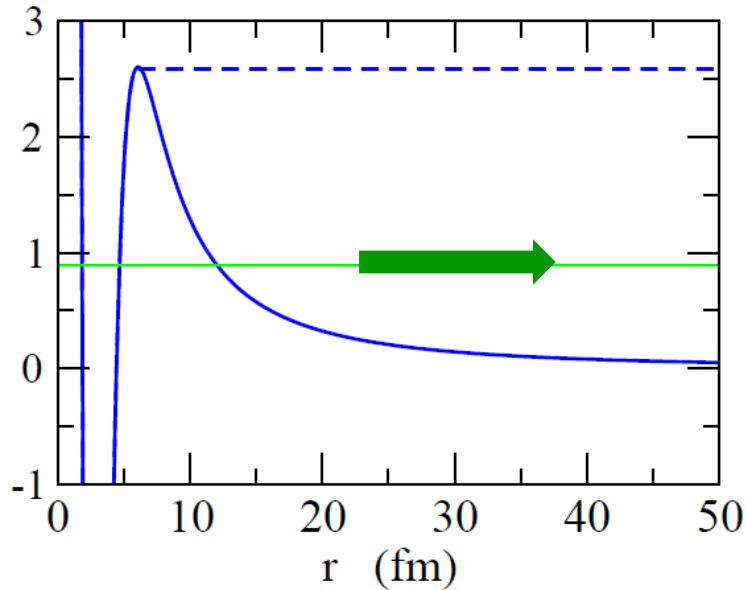
C.H. Maier, L.S. Cederbaum, and W. Domcke, J. of Phys. B13 ('80) L119
L. Zhang et al., PRC77 ('08) 014312

ガモフ状態と散乱状態の関係

- ◆ よく、「共鳴状態 = S行列の極 (ポール)」という言い方を聞くけど、それはどういう意味?
- ◆ どうしてS行列のポールが共鳴状態と関係しているの?

ガモフ状態と散乱状態の関係

ガモフ状態

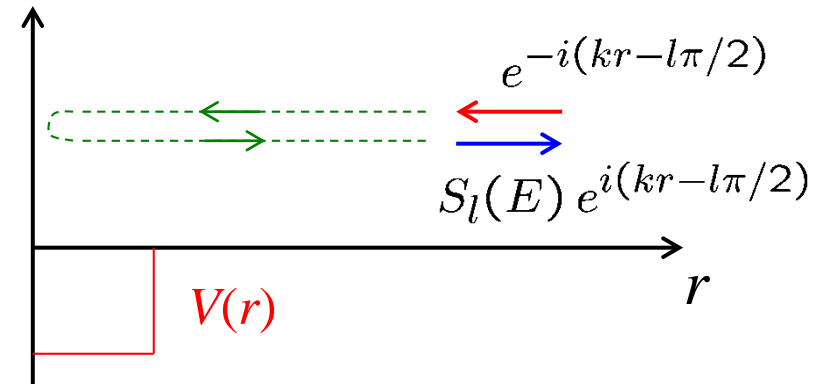


外向波境界条件

$$u_l(r) \rightarrow \mathcal{N} e^{i(kr - l\pi/2)}$$

$$E \rightarrow E_R - i\frac{\Gamma}{2}$$

散乱状態



散乱の境界条件

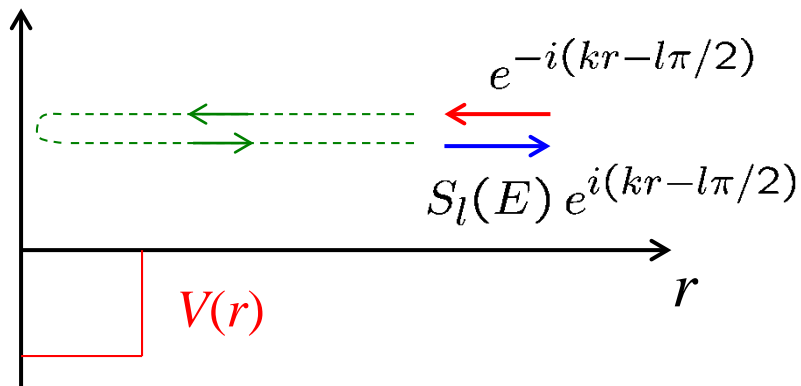
$$u_l(r) \rightarrow \mathcal{N} \left(e^{-i(kr - l\pi/2)} - S_l(E) e^{i(kr - l\pi/2)} \right)$$

$$S_l(E) = e^{2i\delta_l(E)}$$

E : real

ガモフ状態と散乱状態の関係

散乱状態



散乱の境界条件

$$u_l(r) \rightarrow \mathcal{N} \left(e^{-i(kr-l\pi/2)} - S_l(E) e^{i(kr-l\pi/2)} \right)$$

$$S_l(E) = e^{2i\delta_l(E)}$$

E : real

もし、 $S_l(E)$ が発散するような E があれば、

$$u_l(r) \sim \tilde{\mathcal{N}} e^{i(kr-l\pi/2)} \quad (\text{外向波})$$

ただし、エネルギー E を複素平面へ解析接続しなければならない:

$$E \rightarrow E_R - i\frac{\Gamma}{2}$$

➡ ガモフ状態 \longleftrightarrow S 行列の極 (ポール)

Breit-Wigner の公式

S-行列が $\epsilon = E_R - i\frac{\Gamma}{2}$ で極を持つとすると、

$$S(E) = e^{2i\delta_0(E)} \cdot \frac{E - \epsilon^*}{E - \epsilon} \quad \leftarrow |S(E)| = 1$$

$\delta_0(E)$ は E のゆるやかな関数 (background phase shift)

$E - \epsilon^* = c e^{i\delta_r(E)}$ とすると、

$$S(E) = e^{2i\delta_0(E)} \cdot \frac{c e^{i\delta_r(E)}}{c e^{-i\delta_r(E)}} = e^{2i\delta_0(E)} e^{2i\delta_r(E)}$$

$$E - \epsilon^* = E - E_R - i\Gamma/2 = c e^{i\delta_r} = c(\cos \delta_r + i \sin \delta_r)$$

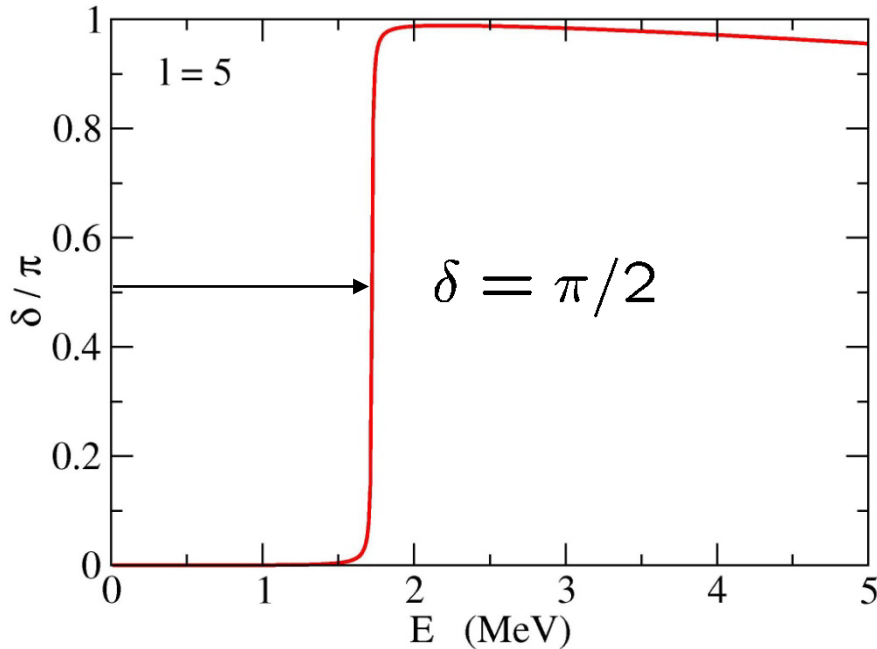
$$\rightarrow \tan \delta_r = \frac{\sin \delta_r}{\cos \delta_r} = \frac{-\Gamma/2}{E - E_R}$$



$$\delta(E) = \delta_r(E) + \delta_0(E) = \tan^{-1} \left(\frac{\Gamma}{2(E_R - E)} \right) + \delta_0(E)$$

Breit-Wigner の公式

幅が狭ければ、位相のずれが $\pi/2$ を切る時に共鳴



Breit-Wigner formula:

$$\delta(E) = \tan^{-1} \frac{\Gamma}{2(E_R - E)} + \delta_0(E)$$

$$\Rightarrow \delta(E_R) \sim \pi/2$$

$$\Gamma = \frac{2}{\delta'(E_R)}$$

$$V_0 = -50 \text{ MeV}$$

$$R_0 = 1.27 * 200^{1/3} \text{ fm}$$

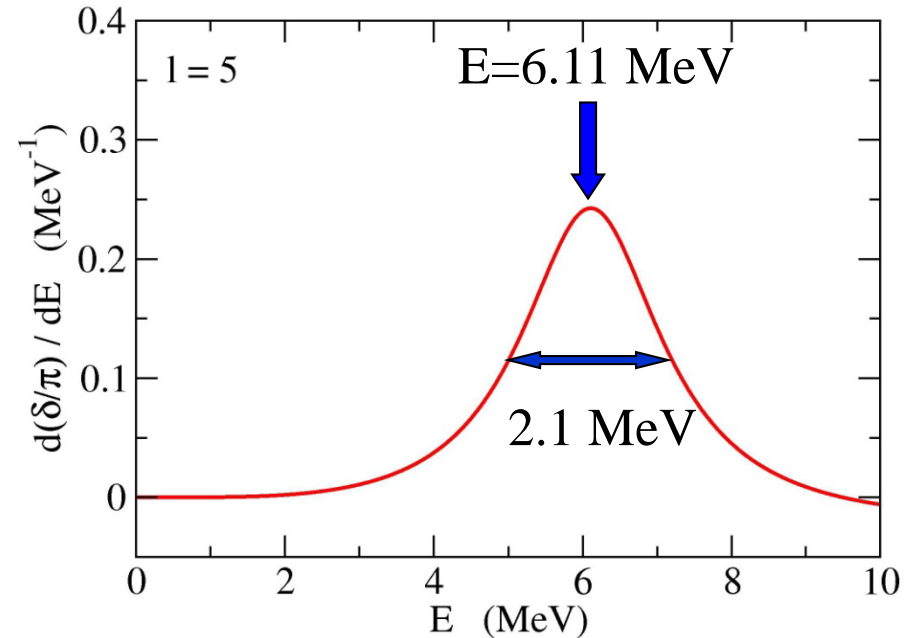
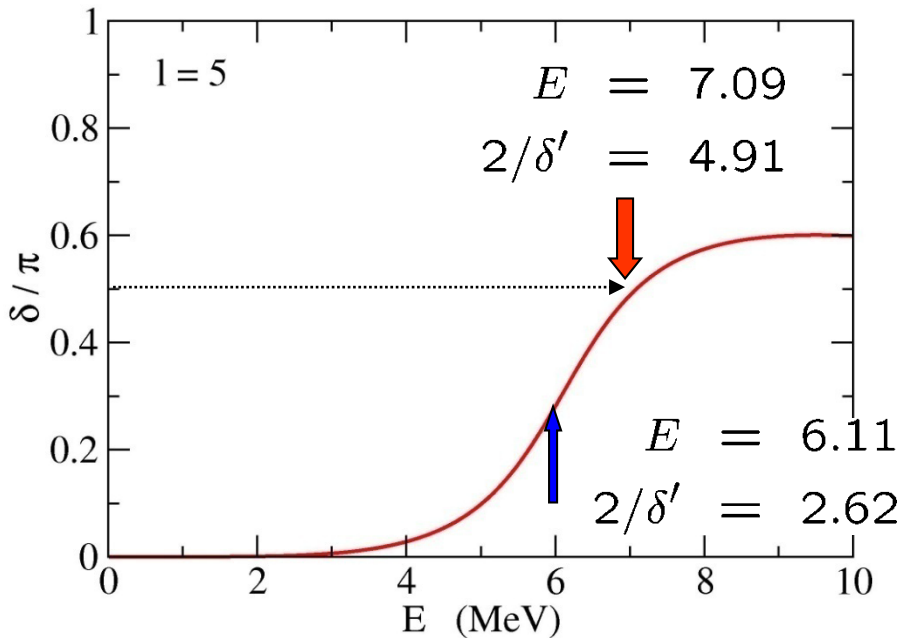
$$a = 0.67 \text{ fm}$$

$$\mu = 200 m_N / 201$$

(note) ただし、幅が広いと $\pi/2$ とは限らない

$$\delta(E) = \tan^{-1} \frac{\Gamma}{2(E_R - E)} + \delta_0(E)$$

background phase shift



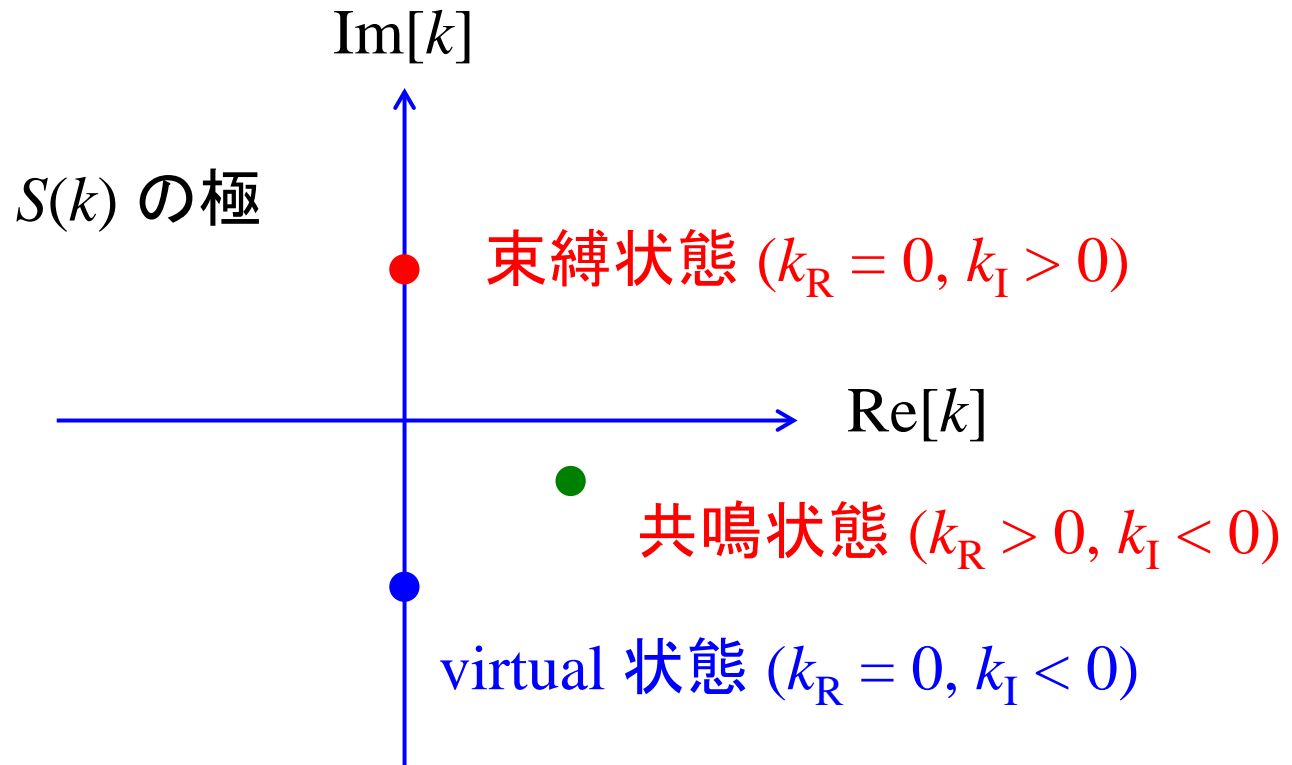
Gamow state: $E = 6.01$ MeV
 $\Gamma = 2.22$ MeV

virtual state について

散乱問題: 正の実数エネルギー (これが物理的な観測量)



複素エネルギー (または複素運動量) 平面で実軸の近くの
S 行列の極



virtual state について

極低エネルギーでの散乱を考える(従って s-wave のみ)

effective range expansion: $k \cot \delta(k) \sim -\frac{1}{a} + \frac{1}{2}r_e k^2 + \dots$

このとき、

$$\begin{aligned} S(k) &= \frac{e^{i\delta}}{e^{-i\delta}} = \frac{\cos \delta + i \sin \delta}{\cos \delta - i \sin \delta} \\ &= \frac{\cot \delta + i}{\cot \delta - i} \\ &\sim \frac{-1/a + ik}{-1/a - ik} \end{aligned}$$

極は $k = i \frac{1}{a}$

$a < 0$ なら virtual 状態、 $a > 0$ なら(浅い)束縛状態

← eff. range 展開が成り立つためには $|a|$ が大である必要

virtual state について

極低エネルギーでの散乱を考える(従って s-wave のみ)

effective range expansion: $k \cot \delta(k) \sim -\frac{1}{a} + \frac{1}{2}r_e k^2 + \dots$

このとき、

$$S(k) \sim \frac{-1/a + ik}{-1/a - ik}$$

極は $k = i \frac{1}{a}$

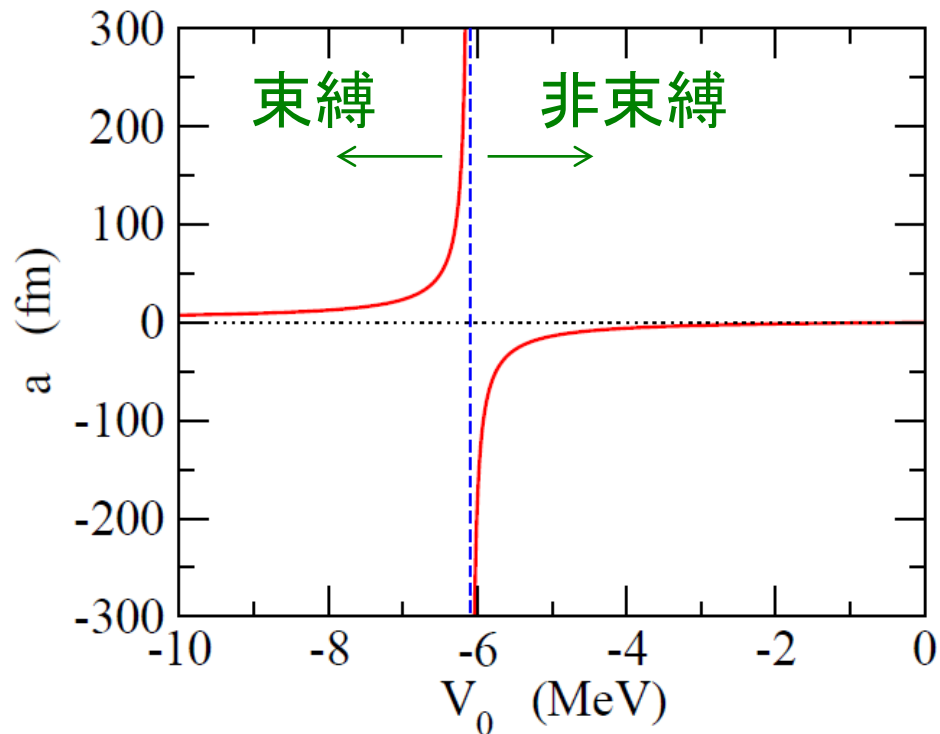
← eff. range 展開が成り立つためには $|a|$ が大である必要

弾性散乱の全断面積:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta = \frac{4\pi}{(k \cot \delta)^2 + k^2} \sim 4\pi a^2 \quad : \text{large}$$

virtual state について

散乱長は $E = 0$ の束縛状態を作るときに正で発散



Woods-Saxon ポテンシャルで
ポテンシャルの深さを変える

($R = 2.736$ fm, $a_0 = 0.67$ fm)

散乱長の物理的意味

半径 R の井戸型ポテンシャル:

$$a = R \left(1 - \frac{\tan \kappa R}{\kappa R} \right)$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}$$

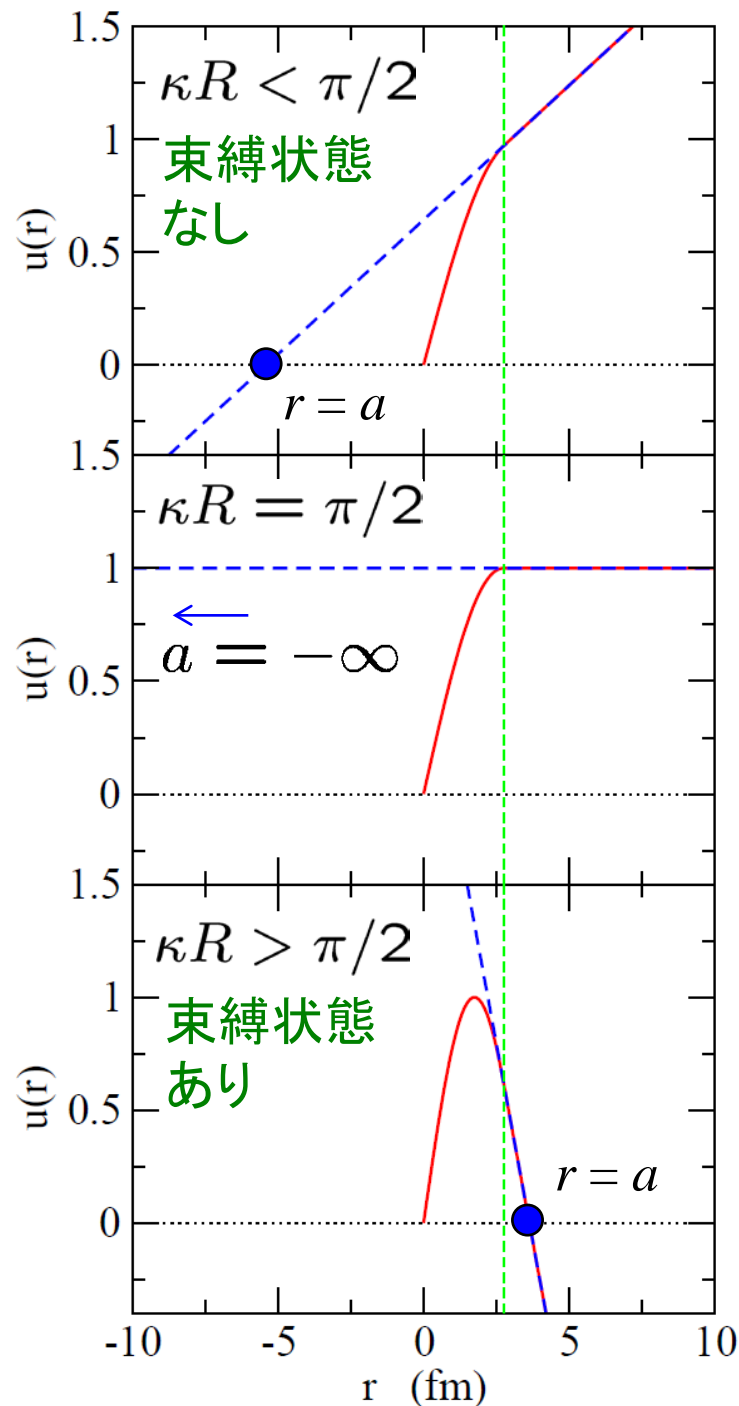
$$u(r) = A \sin(\kappa r) \quad (r < R)$$

↪

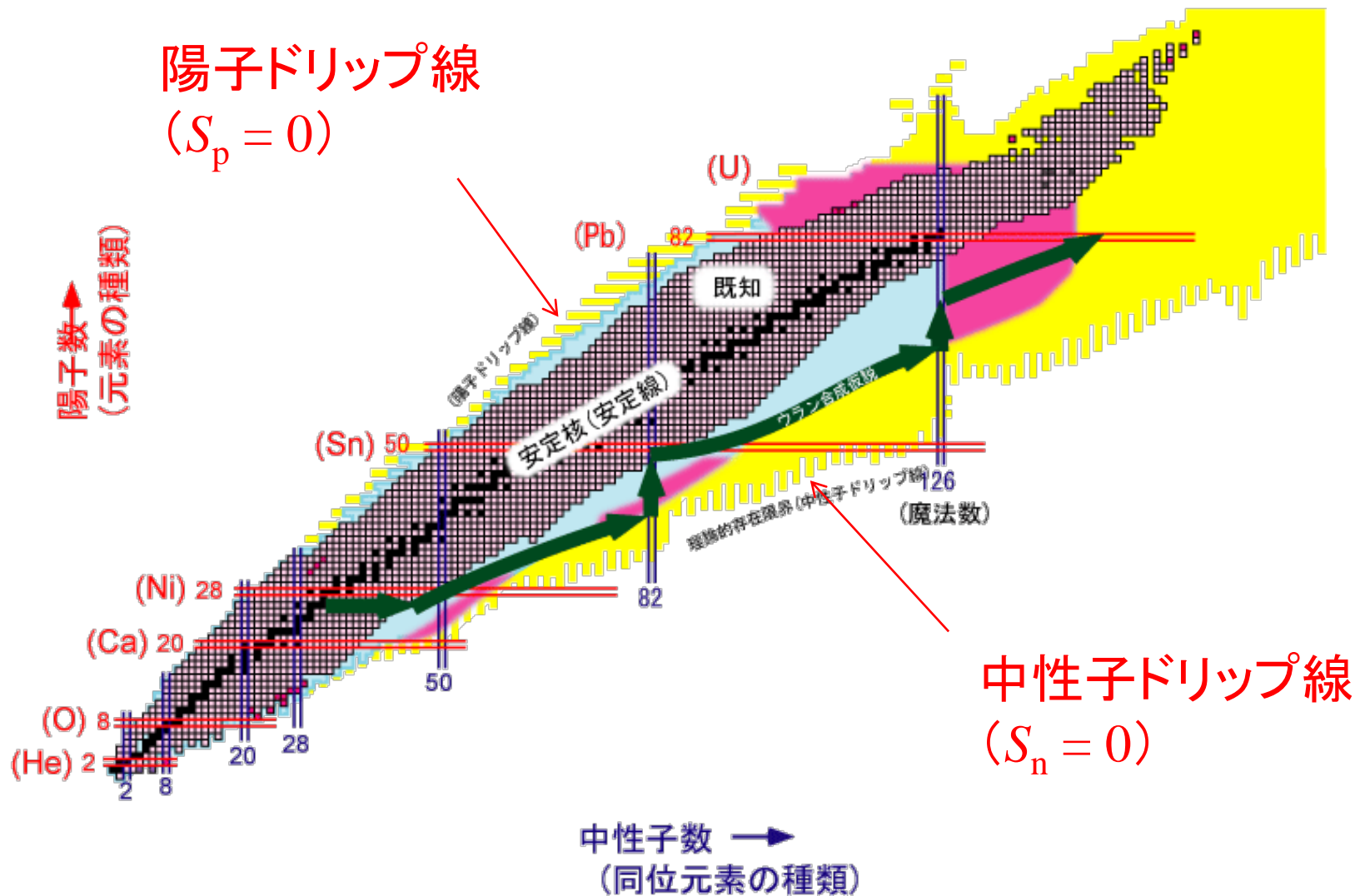
$$f(r) \equiv u(R) + u'(R)(r - R)$$

は $r = a$ で $f(a) = 0$ 。

すなわち、散乱長は $r = R$ で波動関数を一次近似したときに、その直線が x 軸を切る点。

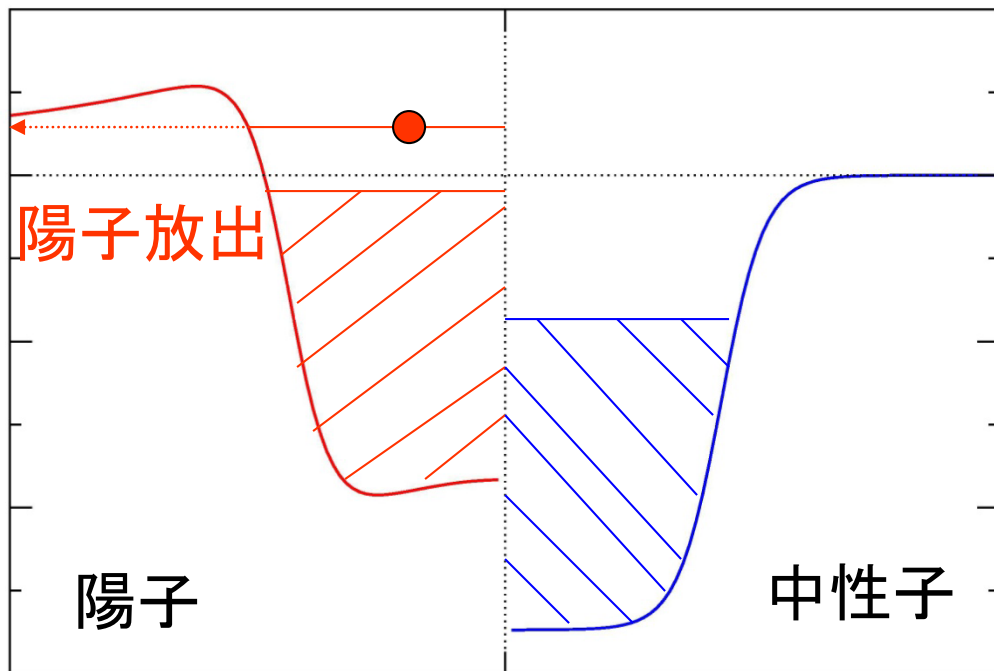


陽子ドリップ線を越えた原子核の陽子放出崩壊



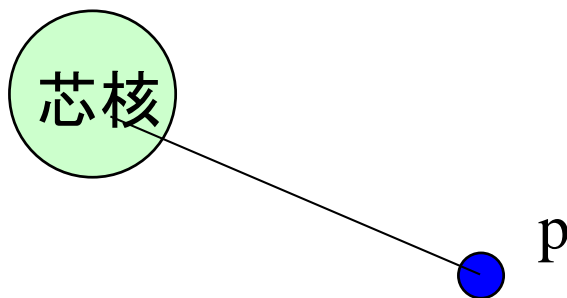
陽子放出崩壊

陽子ドリップ線を超えた原子核



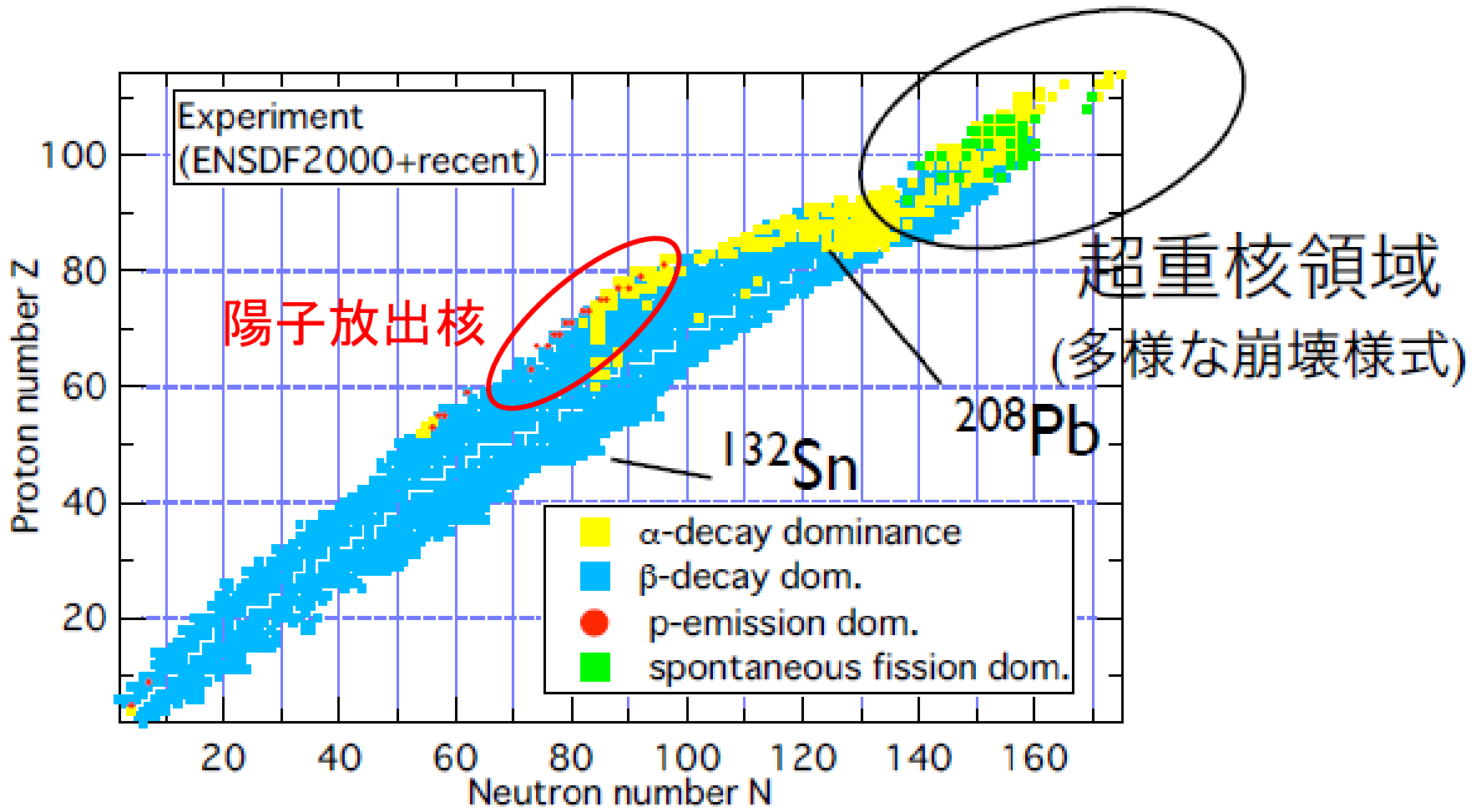
陽子: クーロン障壁にトラップ
(障壁をトンネルしなければならない)

→ 非常に幅の狭い
(長寿命な) 共鳴状態



多くの(基底状態)陽子放出核が発見

実験の観測量: 陽子の放出エネルギー E_p と崩壊半減期 $T_{1/2}$



小浦寛之氏 (JAEA)
のスライドより

A ~ 150-160 領域における 典型的な値

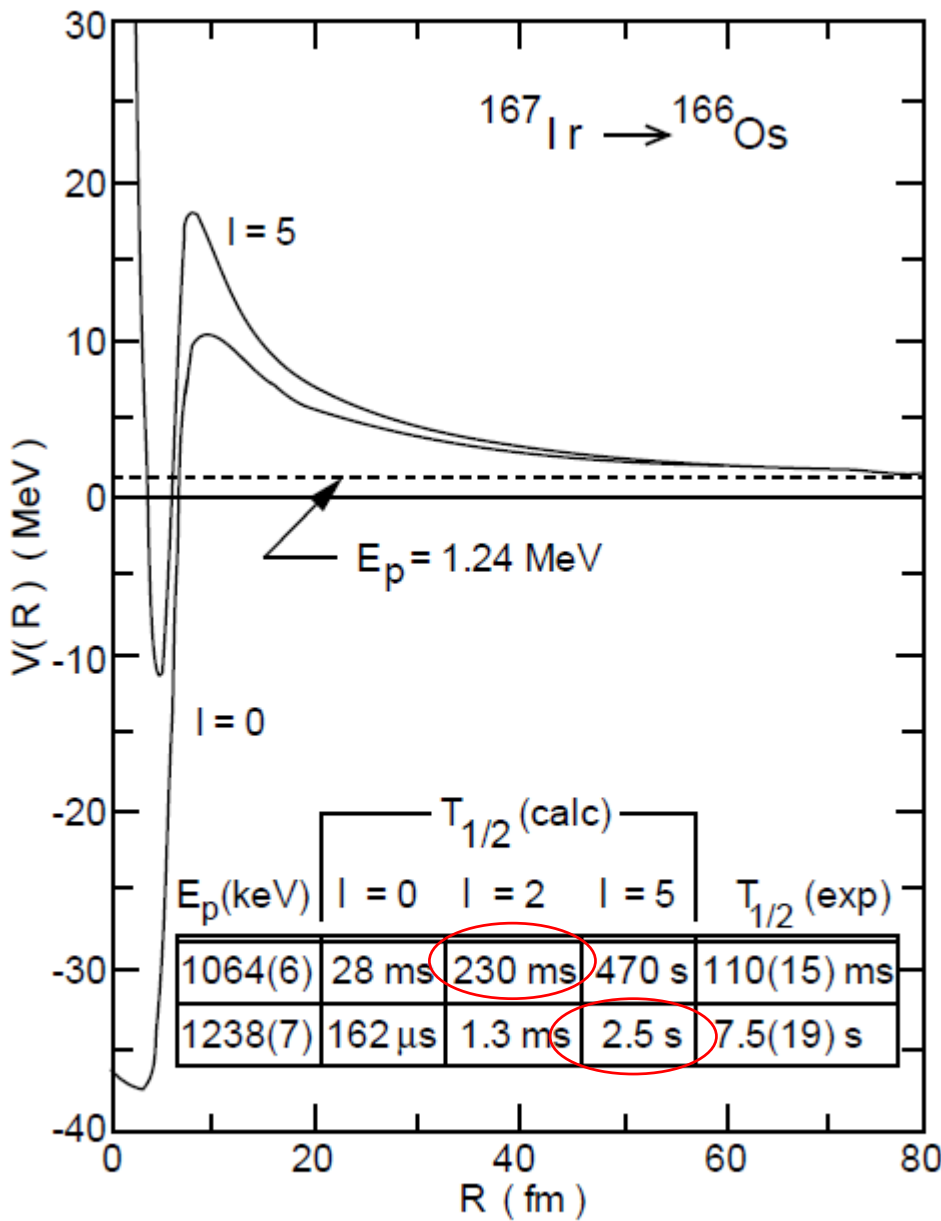
$$V_b \sim 10 \text{ MeV } (l=0)$$

$$E_p \sim 1 \text{ MeV}$$

$$R_{\text{turn}}: 80 \sim 100 \text{ fm}$$

$$\Gamma: 10^{-18} \sim 10^{-22} \text{ MeV}$$

$$T_{1/2}: 100 \mu\text{s} \sim 1 \text{ sec}$$



陽子放出崩壊の一つの特徴：
半減期が l に敏感



陽子崩壊を通じて陽子過剰核
の陽子一粒子状態の l を決定
できる

Figure 3 Proton-nucleus potential calculated for the proton emitter ^{167}Ir . The inset shows the proton-decay half-lives calculated using the WKB approximation for three values of the angular momentum ℓ , compared to the experimental values for the ground and isomeric transitions.

グリーン関数法 (非常に幅の狭いガモフ状態の幅を求める方法)

S.G. Kadmensky et al., Sov. J. Nucl. Phys. 14 ('72) 193

C.N. Davids and H. Esbensen, PRC61 ('00) 054302

K.H., PTP Suppl. 146 ('02) 348

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + V_{\text{cent}}(r) + V(r) - \left(E - \frac{i}{2}\Gamma_0 \right) \right] u(r) = 0$$

$$V(r) \rightarrow \frac{Ze^2}{r} \quad (r \rightarrow \infty)$$

まず $\Gamma_0 = 0$ とし位相のずれが $\delta = \pi/2$ となる散乱状態を求める:

$$\begin{aligned} \phi(r) &\sim r^{l+1} && (r \rightarrow 0) \\ &\rightarrow \tilde{N}G_l(kr) && (r \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

このときのエネルギー E が共鳴のエネルギー。

グリーン関数法 (非常に幅の狭いガモフ状態の幅を求める方法)

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + V_{\text{cent}}(r) + V(r) - \left(E - \frac{i}{2}\Gamma_0 \right) \right] u(r) = 0$$

まず $\Gamma_0 = 0$ とし位相のずれが $\delta = \pi/2$ となる散乱状態を求める:

$$\begin{aligned} \phi(r) &\sim r^{l+1} && (r \rightarrow 0) \\ &\rightarrow \widetilde{N}G_l(kr) && (r \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

このときのエネルギー E が共鳴のエネルギー。幅は次のように求める。

Gell-Mann-Goldberger 変換

cf. DWBA

$$[\hat{T} + V - E]\psi = 0$$

$$\hookrightarrow \left[\hat{T} + \frac{Ze^2}{r} - E \right] \psi = \left(\frac{Ze^2}{r} - V \right) \psi$$

$$\hookrightarrow \psi \sim \frac{1}{\hat{T} + \frac{Ze^2}{r} - E - i\eta} \left(\frac{Ze^2}{r} - V \right) \Phi \quad \uparrow$$

$\Gamma_0 = 0$ として求めた
定常波

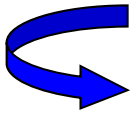
$$\psi \sim \frac{1}{\hat{T} + \frac{Ze^2}{r} - E - i\eta} \left(\frac{Ze^2}{r} - V \right) \phi$$

外向波

原点正則

(note)

$$\left\langle r \left| \left(\hat{T} + \frac{Ze^2}{r} - E - i\eta \right)^{-1} \right| r' \right\rangle = \frac{2\mu}{k\hbar^2} \frac{O_l(kr_>)}{r_>} \mathcal{Y}_{jl}(\hat{r}_>) \cdot \mathcal{Y}_{jl}^*(\hat{r}_<) \frac{F_l(kr_<)}{r_<}$$



$u(r)$

$$\rightarrow \mathcal{N} O_l(kr) = \mathcal{N} (G_l(kr) + iF_l(kr)) \quad (r \rightarrow \infty)$$

$$\mathcal{N} = -\frac{2\mu}{\hbar^2 k} \int_0^\infty r^2 dr F_l(kr) \left(V(r) - \frac{Ze^2}{r} \right) \phi(r)$$

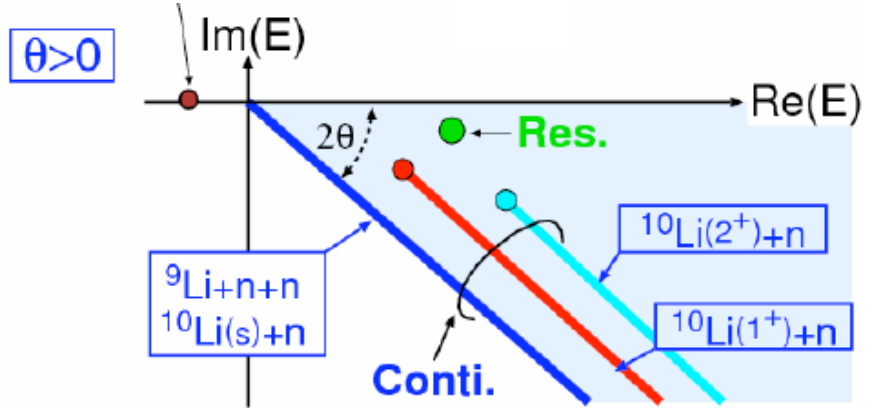
$\Gamma_0 =$ (outgoing flux) / (normalization):

$$= \frac{\hbar^2 k \mathcal{N}^2}{\mu} \frac{1}{\int_0^\infty r^2 |\phi(r)|^2 r^2 dr}$$

共鳴状態に対する他の計算法

✓ 複素座標スケーリング法 (北大グループ)

$$r \rightarrow r e^{i\theta}, p \rightarrow p e^{-i\theta}$$



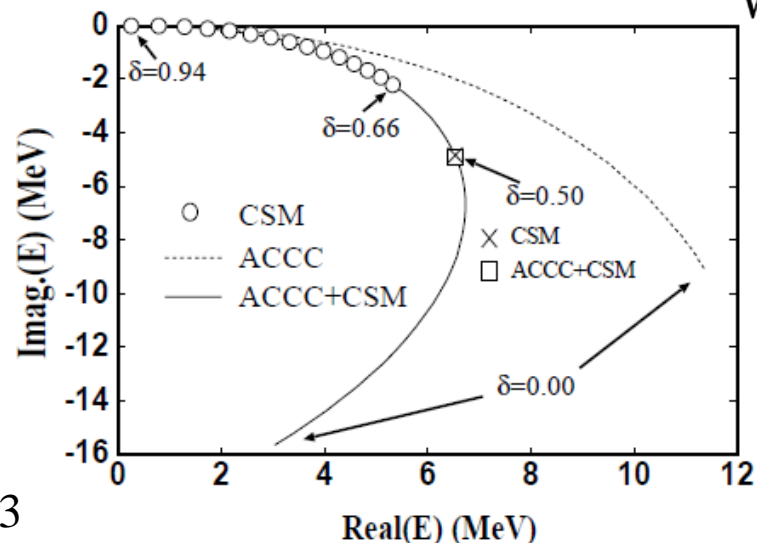
として $H(q)$ を対角化。

✓ ACCC (Analytic Continuation in the Coupling Constant) 法

$$H \rightarrow H + \delta \cdot V$$

スライド: 明孝之氏

として $\delta \sim 1$ で求めた束縛レベルのエネルギーを $x = \sqrt{\delta - \delta_0}$ の関数として $\delta=0$ に外挿 (δ_0 はゼロ束縛となる δ)



共鳴状態に対する他の計算法

✓ R-行列法

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + V(r) - E \right] \psi(r) = 0$$

波動関数 $\psi(r)$ を基底展開: $\psi(r) = \sum_n A_n w_n(r)$

ここで、 $\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + V(r) - \epsilon_n \right] w_n(r) = 0; \quad \frac{w'_n(a)}{w_n(a)} = \beta$

シュレーディンガー方程式より $A_n = \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{w_n(a)}{\epsilon_n - E} (\psi'(a) - \beta\psi(a))$



$$\psi(a) = \sum_n A_n w_n(a) = \sum_n \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{w_n(a)^2}{\epsilon_n - E} (\psi'(a) - \beta\psi(a))$$



$$\frac{1}{a} \frac{\psi(a)}{\psi'(a) - \beta\psi(a)} = \sum_n \frac{\gamma_n^2}{\epsilon_n - E} \equiv R$$

$$\gamma_n^2 \equiv \frac{\hbar^2}{2\mu a} w_n(a)^2$$

共鳴状態に対する他の計算法

$$\frac{1}{a} \frac{\psi(a)}{\psi'(a) - \beta\psi(a)} = \sum_n \frac{\gamma_n^2}{\epsilon_n - E} \equiv R$$

$$\gamma_n^2 \equiv \frac{\hbar^2}{2\mu a} w_n(a)^2 \quad \leftarrow$$

$$R \sim \frac{\gamma^2}{e - E} \quad \text{として (single pole approximation)}$$

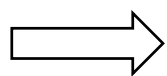
$$\psi(a) \propto H_l^{(-)}(ka) - S_l(E)H_l^{(+)}(ka) \quad \text{を用いると、}$$

$$S_l(E) = \frac{E - (e - \gamma^2(S - a\beta) + i\gamma^2P)}{E - (e - \gamma^2(S - a\beta) - i\gamma^2P)} e^{2i\phi_l}$$

$$S = a \frac{F_l'(ka)F_l(ka) + G_l'(ka)G_l(ka)}{F_l(ka)^2 + G_l(ka)^2}$$

$$P = \frac{ka}{F_l(ka)^2 + G_l(ka)^2} \quad \leftarrow$$

$$\phi_l = -\tan^{-1} \frac{F_l(ka)}{G_l(ka)}$$



$$\Gamma = 2\gamma^2 P$$

核構造の計算でよく使われる