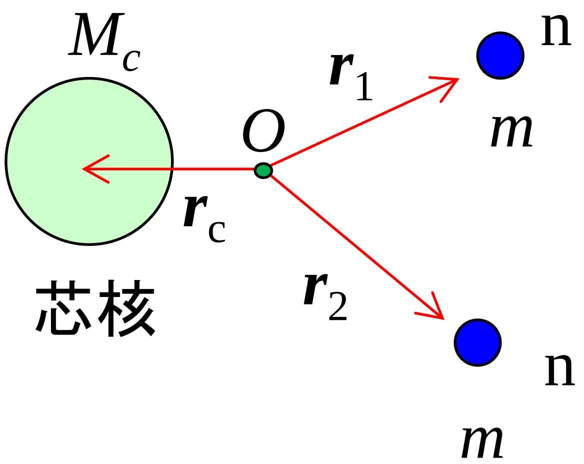
３体模型による記述

－どのような模型か
－密度に依存するゼロレンジ相互作用
－ダイ･ニュートロン相関
－クーロン励起

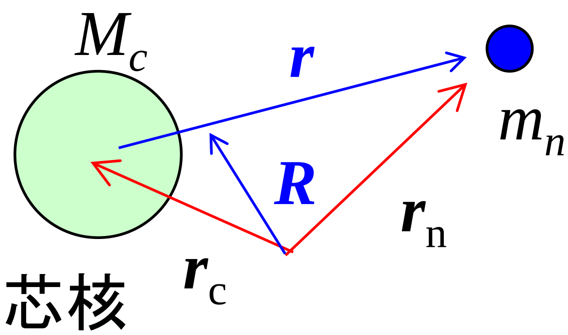
３体模型



$$H = \frac{\boldsymbol{p}_1^2}{2m} + \frac{\boldsymbol{p}_2^2}{2m} + \frac{\boldsymbol{p}_c^2}{2M_c} + V_{nc}(\boldsymbol{r}_{1c}) + V_{nc}(\boldsymbol{r}_{2c}) + v_{nn}(\boldsymbol{r}_{12})$$

３体模型

(note) ２体系では重心運動と相対運動に分離可能



$$\boldsymbol{R} = \frac{m_n \boldsymbol{r}_n + M_c \boldsymbol{r}_c}{m_n + M_c}, \qquad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_n - \boldsymbol{r}_c$$

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_n + \boldsymbol{p}_c, \qquad \boldsymbol{p} = \frac{M_c \boldsymbol{p}_n - m_n \boldsymbol{p}_c}{m_n + M_c}$$

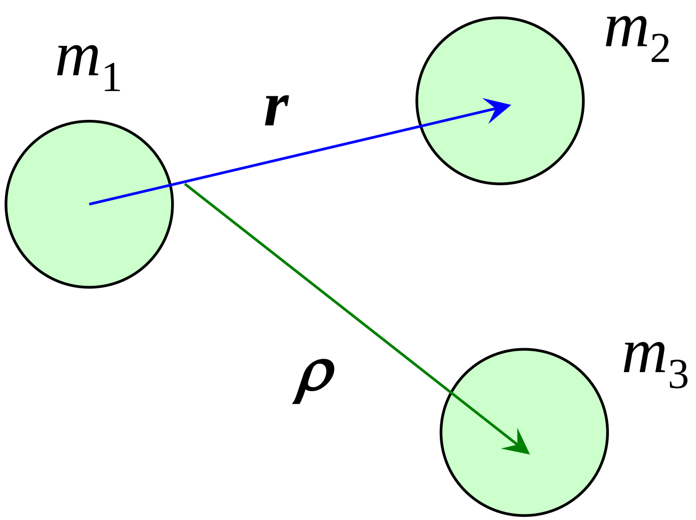
$$\Longrightarrow \quad H = \frac{\boldsymbol{p}_n^2}{2m_n} + \frac{\boldsymbol{p}_c^2}{2M_c} + V_{nc}(\boldsymbol{r}_{nc})$$

$$= \frac{\boldsymbol{P}^2}{2(m_n + M_c)} + \frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu} + V_{nc}(\boldsymbol{r})$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_n} + \frac{1}{M_c}$$

$\longrightarrow$ 3体系だと?

ヤコビ座標(一般論)



$\boldsymbol{r}$: 1 と 2 の間の相対座標
$\boldsymbol{\rho}$: (1 と 2 の重心)から測った3の座標
$\boldsymbol{R}$: 全体の重心

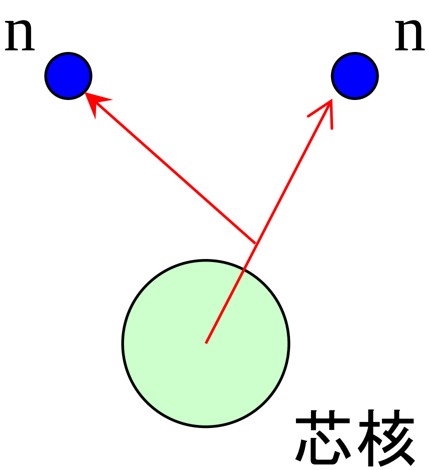
$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 \\
\boldsymbol{\rho} &= \boldsymbol{r}_3 - \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2} \\
\boldsymbol{R} &= \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + m_3\boldsymbol{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
T &= \frac{\boldsymbol{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\boldsymbol{p}_2^2}{2m_2} + \frac{\boldsymbol{p}_3^2}{2m_3} \\
&= \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + \frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu_{12}} + \frac{\boldsymbol{p}_\rho^2}{2\mu_{12-3}}
\end{aligned}
}
$$

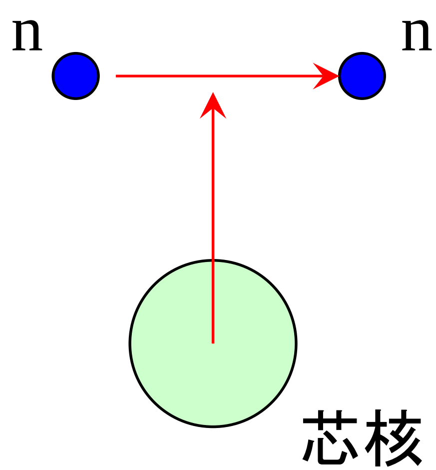
$$
\begin{aligned}
M &= m_1 + m_2 + m_3 \\
\frac{1}{\mu_{12}} &= \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \\
\frac{1}{\mu_{12-3}} &= \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_1 + m_2}
\end{aligned}
$$

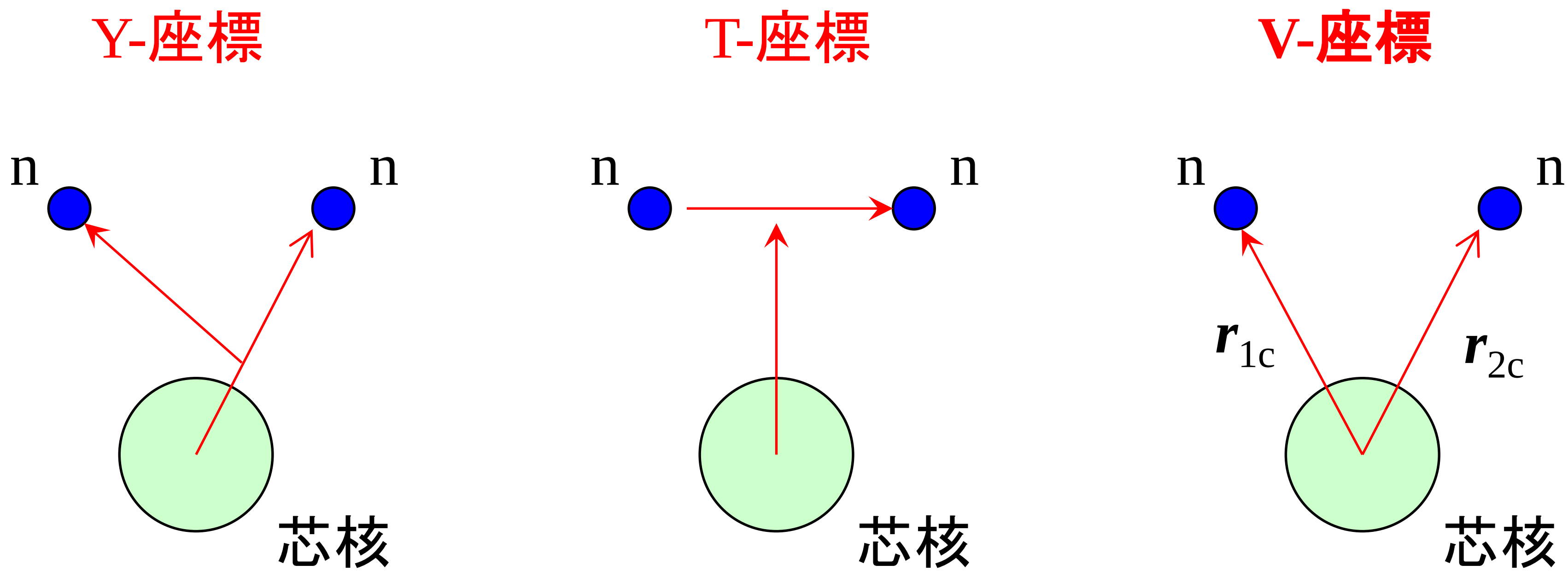
core + n + n　系だと、(12+3) = (nc+n) と (nn+c) で2通りの可能性

Y-座標



T-座標





$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{1c} &= \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_c \\ \boldsymbol{r}_{2c} &= \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_c \\ \boldsymbol{R} &= \frac{m\boldsymbol{r}_1 + m\boldsymbol{r}_2 + M_c\boldsymbol{r}_c}{2m + M_c}\end{aligned}$$

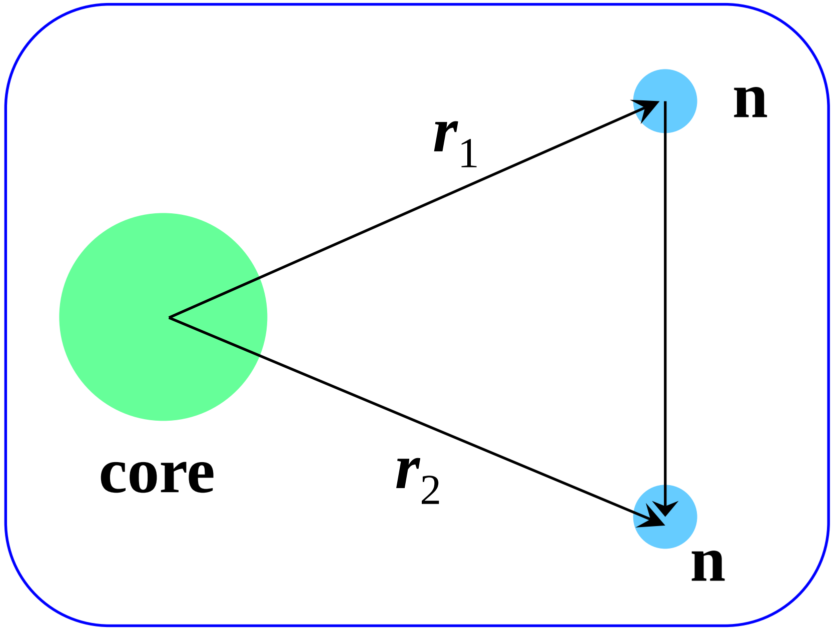
$$\boxed{\begin{aligned}T &= \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + \frac{\boldsymbol{p}_{1c}^2}{2m} + \frac{\boldsymbol{p}_{2c}^2}{2m} \\ &\quad + \frac{(\boldsymbol{p}_{1c} + \boldsymbol{p}_{2c})^2}{2M_c}\end{aligned}}$$

Bertsch-Esbensenの３体模型

G.F. Bertsch and H. Esbensen,
Ann. of Phys. 209('91)327
H. Esbensen, G.F. Bertsch, K. Hencken,
Phys. Rev. C56('99)3054
K.H. and H. Sagawa, PRC72('05)044321

$^{11}Li = {}^{9}Li + n + n$

$^{6}He = {}^{4}He + n + n$



密度に依存する接触型相互作用

$$v_{nn}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = v_0(1 + \alpha\rho_c(r)) \times\delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)$$

V-座標

$$\boxed{H = \frac{\boldsymbol{p}_1^2}{2m} + \frac{\boldsymbol{p}_2^2}{2m} + V_{nC}(r_1) + V_{nC}(r_2) + v_{nn} + \frac{(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)^2}{2A_c m}}$$

接触型相互作用

H. Esbensen, G.F. Bertsch, K. Hencken, Phys. Rev. C56('99)3054

$$\boxed{v_{nn}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = v_0\,\delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)}$$

この相互作用で *nn* 散乱の s 波の散乱長を計算すると:

$$a_{nn} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\alpha}{1 + \alpha k_c} \qquad \left(\alpha = \frac{v_0}{2\pi^2}\frac{m}{\hbar^2}, \quad E_{\rm cut} = \frac{\hbar^2 k_c^2}{m}\right)$$

（ゼロレンジの相互作用 $\longleftrightarrow$ カットオフ $E_{\rm cut}$ の導入）

cf. $\tilde{v}_{nn}(\boldsymbol{p}) = v_0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_0 = \frac{2\pi^2\hbar^2}{m} \cdot \frac{2a_{nn}}{\pi - 2k_c\, a_{nn}}}$$

（証明）

nn 散乱：
$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + v_0\delta(\boldsymbol{r}) - E\right)\psi(\boldsymbol{r}) = 0$$

Lippmann-Schwinger 方程式：
$$|\psi\rangle = |\phi\rangle - \frac{1}{-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 - E - i\eta} v_{nn}|\psi\rangle$$

$$\longrightarrow \quad f(\boldsymbol{k}', \boldsymbol{k}) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int d\boldsymbol{r}'\, e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'} v_{nn}(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')$$

部分波展開

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{k}', \boldsymbol{k}) &= \sum_l (2l+1)\frac{S_l - 1}{2ik}\frac{4\pi}{2l+1}\sum_m Y_{lm}(\hat{\boldsymbol{k}})Y^*_{lm}(\hat{\boldsymbol{k}}') \\ &\sim \frac{S_0 - 1}{2ik} = \frac{e^{2i\delta_0} - 1}{2ik} \qquad (E \to 0) \\ &\sim -a_{nn} \end{aligned}$$

これらを
組み合わせると

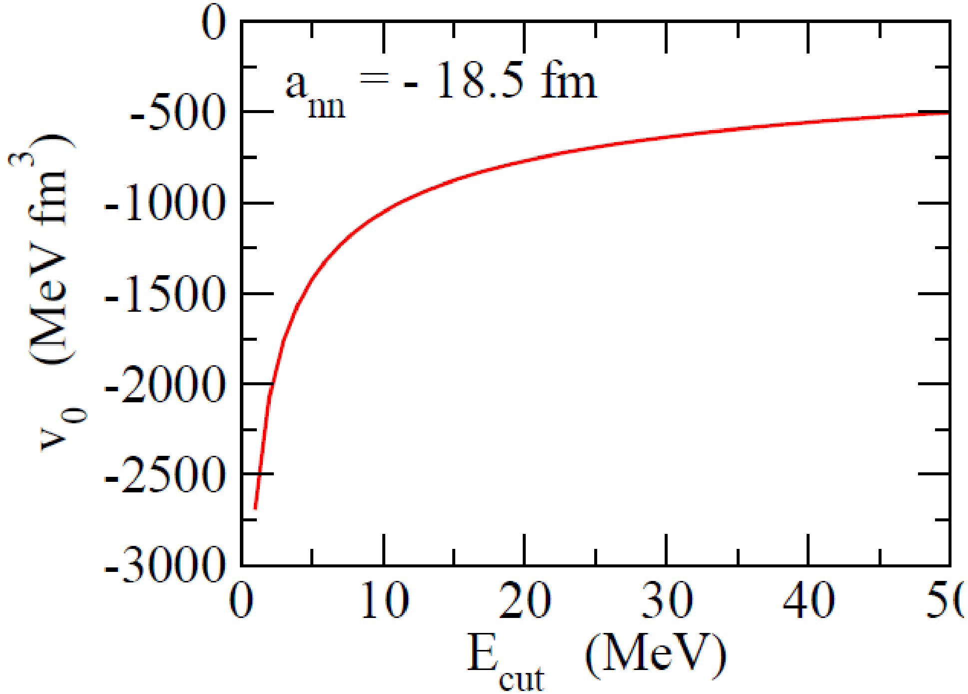
$$\Longrightarrow \quad \boxed{v_0 = \frac{2\pi^2\hbar^2}{m}\cdot\frac{2a_{nn}}{\pi - 2k_c\, a_{nn}}}$$

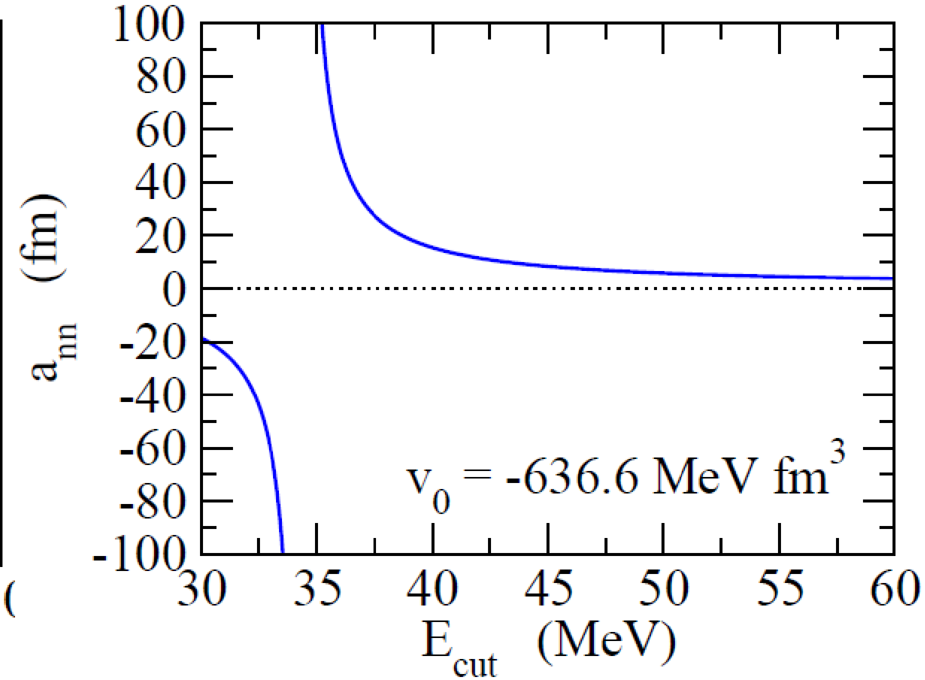
＊詳しくは Appendix に

$$v_0 = \frac{2\pi^2\hbar^2}{m}\cdot\frac{2a_{nn}}{\pi - 2k_c\,a_{nn}}$$

$$a_{nn} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\alpha}{1+\alpha k_c}$$

$$\alpha = \frac{v_0}{2\pi^2}\frac{m}{\hbar^2}$$





a_{nn} を一定のまま
E_{cut} を大きくすると
v_0 の絶対値は小さくなる

v_0 を一定のまま単純に
E_{cut} を大きくすると引力
が強くなる

接触型相互作用

H. Esbensen, G.F. Bertsch, K. Hencken, Phys. Rev. C56('99)3054

$$\boxed{v_{nn}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) = v_0\,\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)}$$

$$v_0 = \frac{2\pi^2\hbar^2}{m}\cdot\frac{2a_{nn}}{\pi-2k_c\,a_{nn}}$$

* この相互作用は有限核では強すぎる

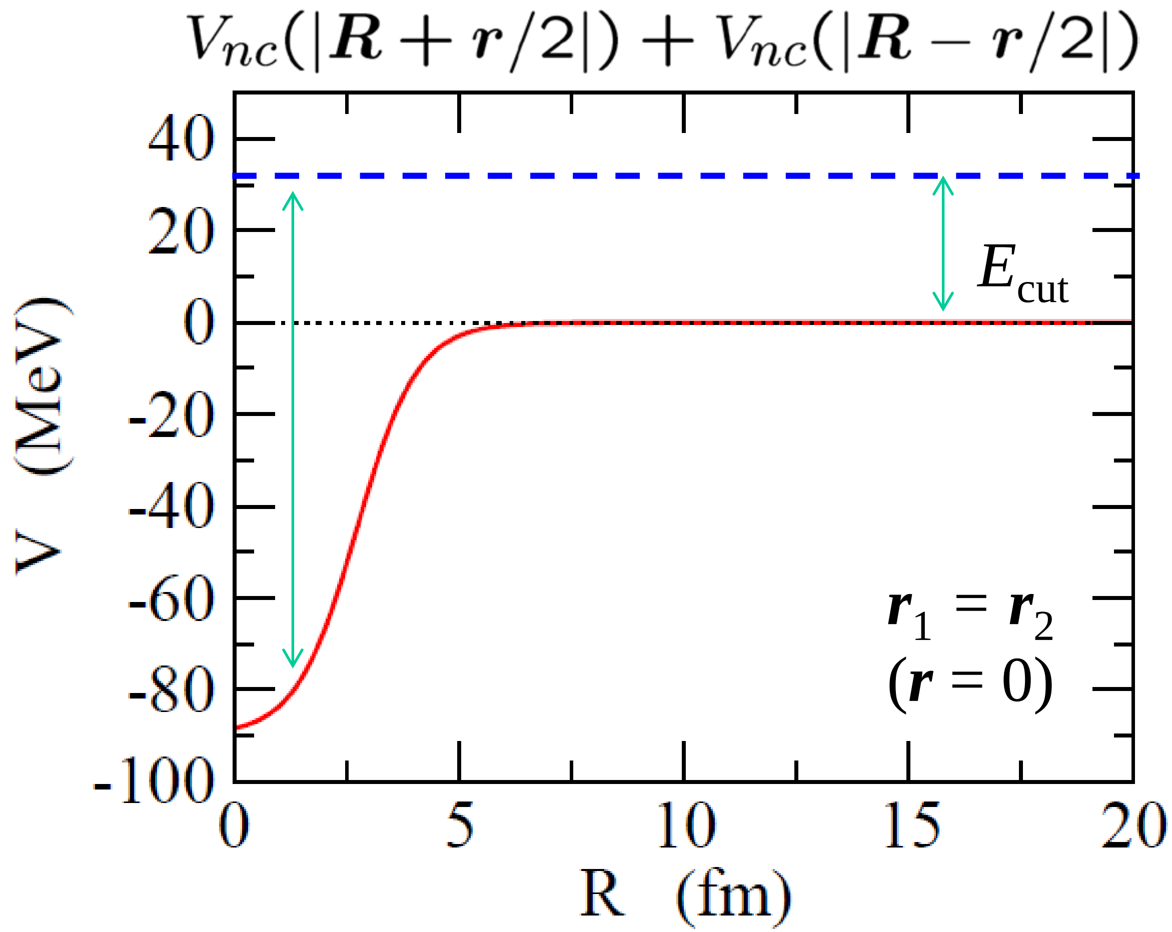
cf. ^{18}O の3体計算: E= -28.1 MeV (実験値は -12.2 MeV)

$\longrightarrow$ 核内で引力を弱める(斥力項を密度依存型として導入)

$$v_{nn}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) = \delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\left(v_0+\frac{v_\rho}{1+\exp[(r_1-R_\rho)/a_\rho]}\right)$$

(密度依存性の詳細はよく分からないので、ここでは WS 型にする)

密度依存項の起源



核内（小さい R）では E_{cut} が実効的に大きくなる

→相互作用が実効的に強くなる

→核内で相互作用を弱める必要がある

（密度依存項の導入）

基底状態の構造 ($J^\pi = 0^+$)

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{\boldsymbol{p}_1^2}{2m} + \frac{\boldsymbol{p}_2^2}{2m} + V_{nC}(r_1) + V_{nC}(r_2) + v_{nn} + \frac{(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)^2}{2A_c m} \\
&= \frac{\boldsymbol{p}_1^2}{2\mu} + \frac{\boldsymbol{p}_2^2}{2\mu} + V_{nC}(r_1) + V_{nC}(r_2) + v_{nn} + \frac{\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2}{A_c m}
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{A_c m}
$$

波動関数を適当な基底で展開して対角化する

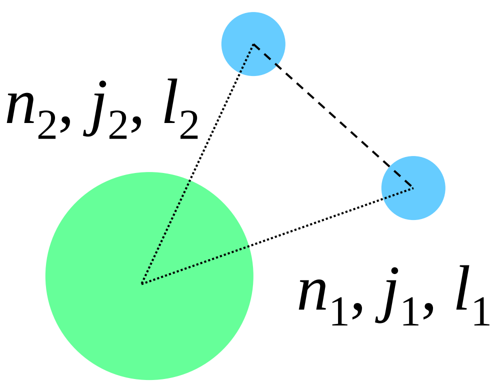
$$
\Psi_{\mathrm{gs}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \sum_k \alpha_k \Phi_k(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')
$$

$$
\longrightarrow \quad \sum_{k'} \langle \Phi_k | H | \Phi_{k'} \rangle \alpha_{k'} = E \alpha_k
$$

基底状態の構造 ($J^\pi = 0^+$)

$$H = \frac{\boldsymbol{p}_1^2}{2\mu} + \frac{\boldsymbol{p}_2^2}{2\mu} + V_{nC}(r_1) + V_{nC}(r_2) + v_{nn} + \frac{\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2}{A_c m}$$

v_{nn} 及び $\dfrac{\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2}{A_c m}$ がないときの解:



$$\boxed{\Phi_{nn'lj}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \mathcal{A}[\psi_{njl}(\boldsymbol{r})\psi_{n'jl}(\boldsymbol{r}')]^{(00)}}$$

$$\left[\frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu} + V_{nC}(r)\right]\psi_{njlm_j}(\boldsymbol{r}) = \epsilon_{njl}\,\psi_{njlm_j}(\boldsymbol{r})$$

$* \; J = 0 \longrightarrow j_1 = j_2, \;\; \pi = + \longrightarrow l_1 = l_2$

この基底で波動関数を展開する:

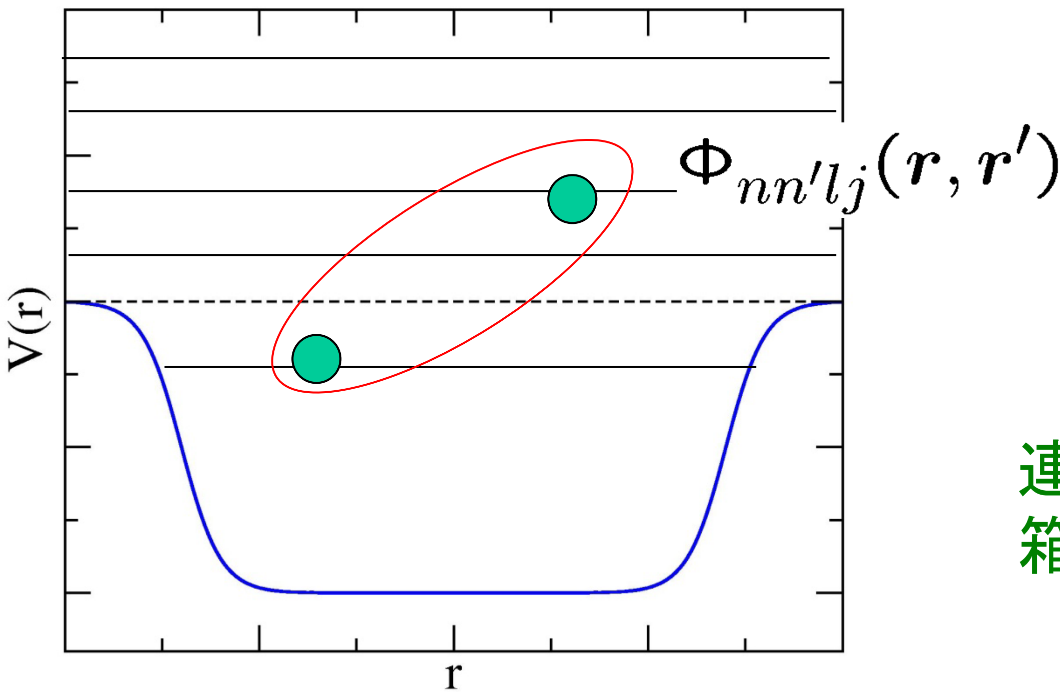
$$\boxed{\Psi_{\mathrm{gs}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \sum_{nn'lj} \alpha_{nn'lj}\, \Phi_{nn'lj}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}$$

パウリ原理:芯核の軌道は展開の基底から除外

基底状態の構造 ($J^\pi = 0^+$)

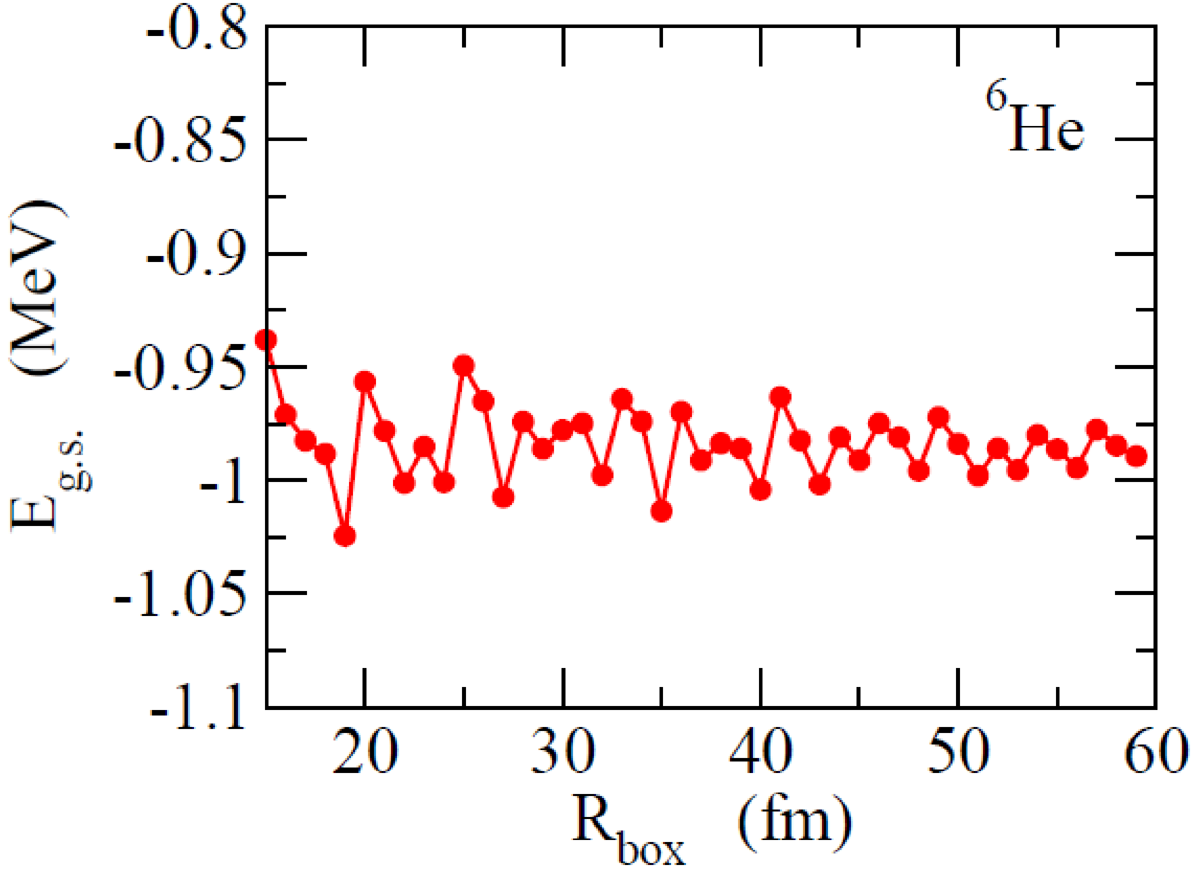
$$H = \frac{\boldsymbol{p}_1^2}{2\mu} + \frac{\boldsymbol{p}_2^2}{2\mu} + V_{nC}(r_1) + V_{nC}(r_2) + v_{nn} + \frac{\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2}{A_c m}$$

$$\boxed{\Psi_{\rm gs}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \mathcal{A}\sum_{nn'lj} \alpha_{nn'lj}\,[\psi_{njl}(\boldsymbol{r})\psi_{n'jl}(\boldsymbol{r}')]^{(00)}}$$



連続状態(散乱状態)は
箱の中に入れて離散化

離散化の影響



E_{cut} = 40 MeV として R_{box} = 30 fm のときに S_{2n} = 975 keV を再現するように密度依存項のパラメーターを調整

⟶ 結果は R_{box} にあまり依存しないが、R_{box} ごとにパラメーターの微調整が必要

ファデーエフ法との比較

H. Esbensen, G.F. Bertsch, K. Hencken, Phys. Rev. C56('99)3054

^{11}Li 核に対する三体模型計算：

$$V_{nc}(r) = -7.8 \exp[-(r/2.55)^2] \quad \mathrm{MeV}$$

ファデーエフ計算：

$$v_{nn}(r_{12}) = -31 \exp[-(r_{12}/1.8)^2] \quad \mathrm{MeV}$$

Bertsch-Esbensen： v_{nn} = 密度に依存するゼロレンジ相互作用 (DDDI)

	S_{2n} (keV)	$r_{c\text{-}2n}^2$ (fm)	r_{nn}^2 (fm)
Faddeev	318	28.1	62.4
DDDI	318	27.6	62.9
DDDI (no-rec.)	569	20.3	49.0

^{11}Li及び ^{6}He 核におけるダイニュートロン相関

K. H. and H. Sagawa, Phys. Rev. C72 ('05) 044321

$$\Psi_{\mathrm{gs}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \sum_{nn'lj} \alpha_{nn'lj}\,\Phi_{nn'lj}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$$

Nucleus	S_{2n} (MeV)	$\langle r^2_{nn}\rangle$ (fm^2)	$\langle r^2_{c-2n}\rangle$ (fm^2)	dominant config.	fraction (%)	S=0 (%)
^{6}He	0.975	21.3	13.2	$(p_{3/2})^2$	83.0	87.0
^{11}Li	0.295	41.4	26.3	$(p_{1/2})^2$	59.1	60.6

* n-^{9}Li 系にバーチャル状態（s波の散乱長: a = - 30 $^{+12}_{-31}$ fm)
* n-^{4}He 系にはバーチャル状態なし（a = +4.97 +/- 0.12 fm ）

^{11}Li及び ^{6}He 核におけるダイニュートロン相関

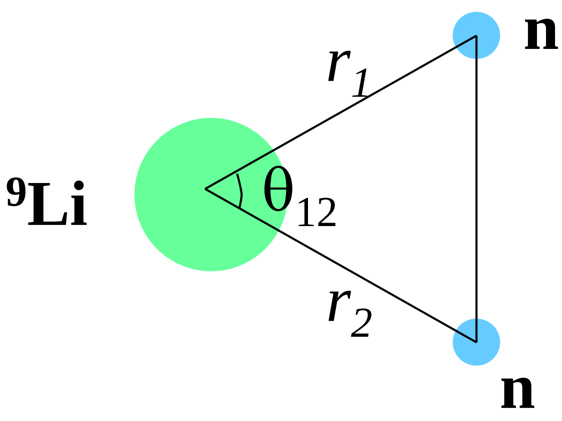
K. H. and H. Sagawa, Phys. Rev. C72 ('05) 044321

$$\Psi_{\rm gs}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \sum_{nn'lj} \alpha_{nn'lj}\,\Phi_{nn'lj}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$$

密度分布

$$\longrightarrow \quad \rho(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \sum_{m_1,m_2} |\langle\chi_{m_1}\chi_{m_2}|\Psi_{\rm gs}\rangle|^2$$

$$= \rho_{S=0}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') + \rho_{S=1}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$$



$\rho(r_1, r_2, \theta_{12})$

（密度分布を見やすくするために）

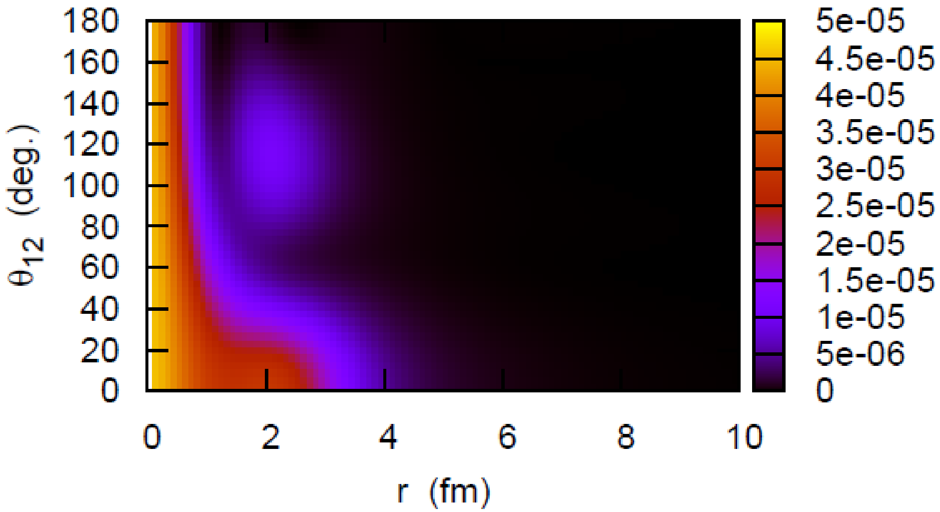
$r_1 = r_2 = r$ ととり、r と θ_{12} の関数としてプロットする

さらに $8\pi^2 r^4 \sin\theta_{12}$ の重みをかける

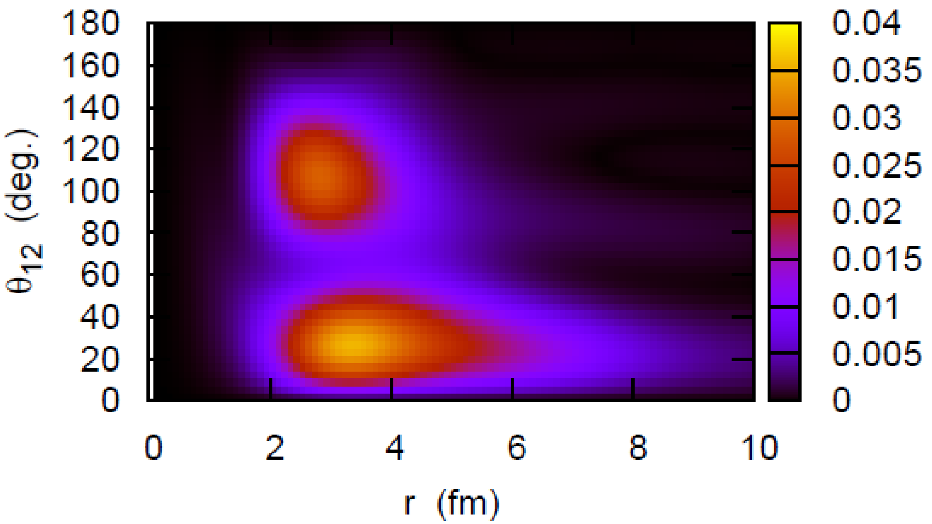
(note)

$$\int_0^\infty 4\pi r_1^2\, dr_1 \int_0^\infty r_2^2\, dr_2 \int_0^\pi 2\pi \sin\theta_{12}\, d\theta_{12}\, \rho(r_1, r_2, \theta_{12}) = 1$$

重みなし



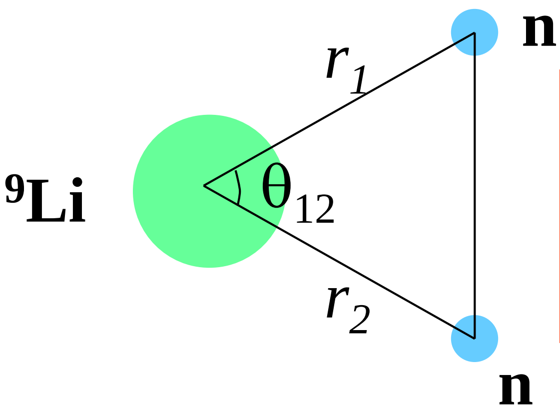
重みあり



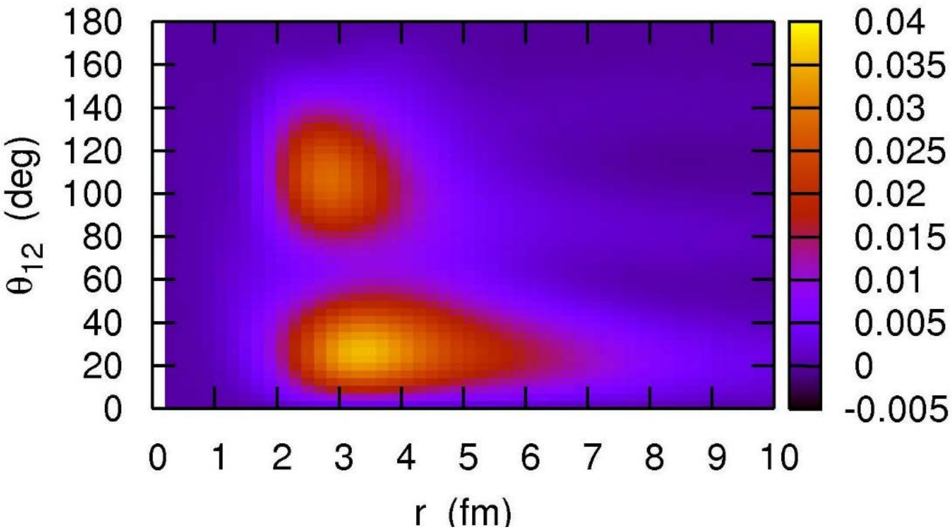
- ふた山構造
- 長いテール（ハロー構造）

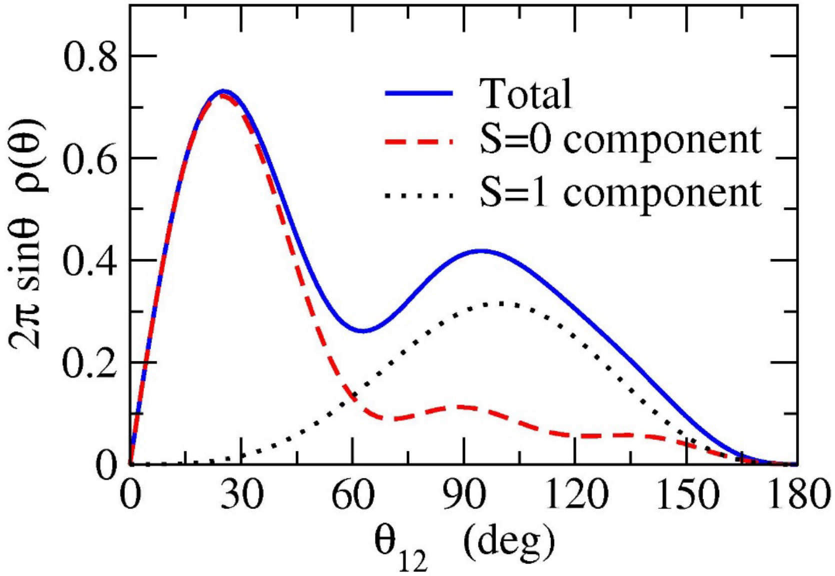
重みをかけた方が構造を見やすい

角度分布：相補的なプロット

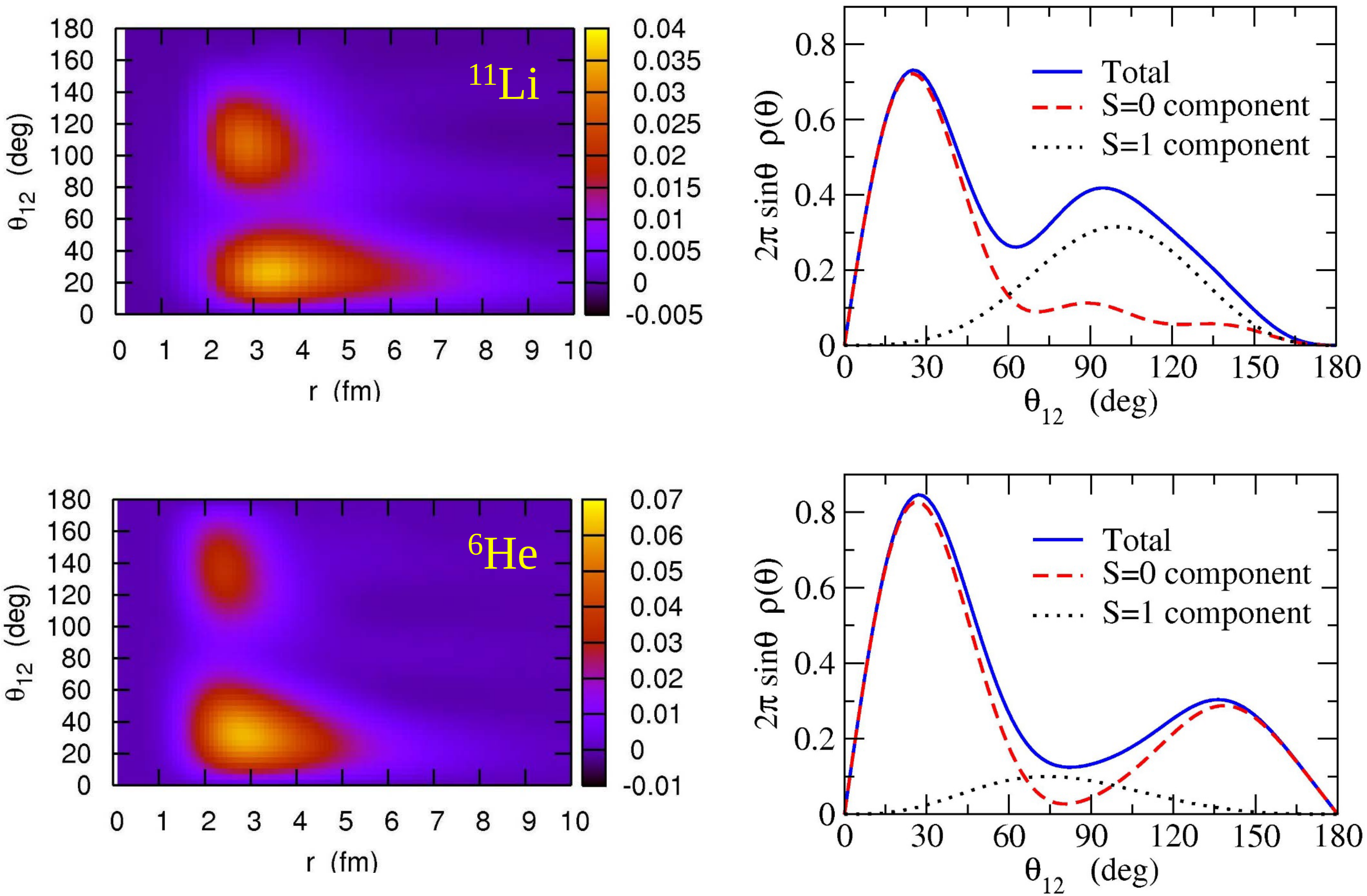


$$\rho(\theta_{12}) \equiv 4\pi \int_0^\infty r_1^2\, dr_1 \int_0^\infty r_2^2\, dr_2 \rho(r_1, r_2, \theta_{12})$$

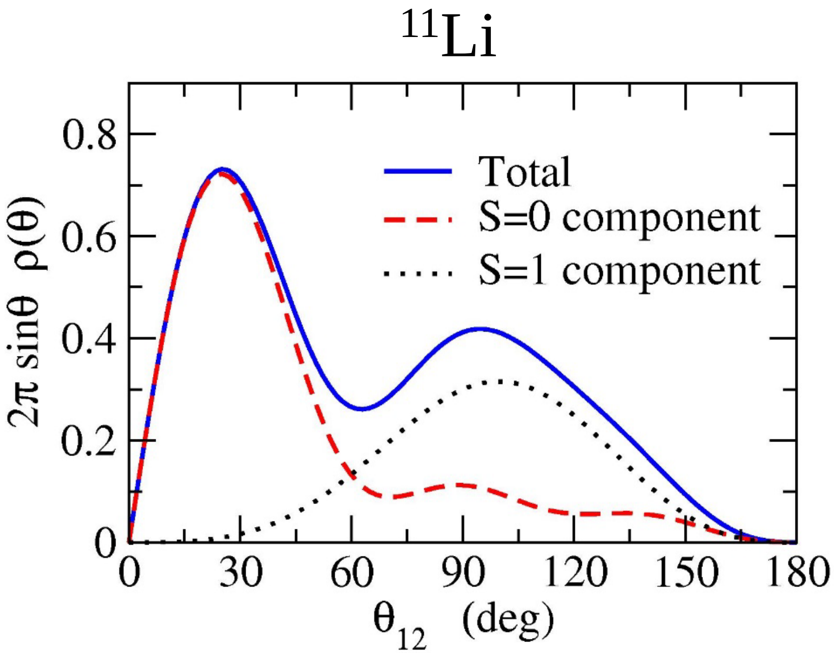


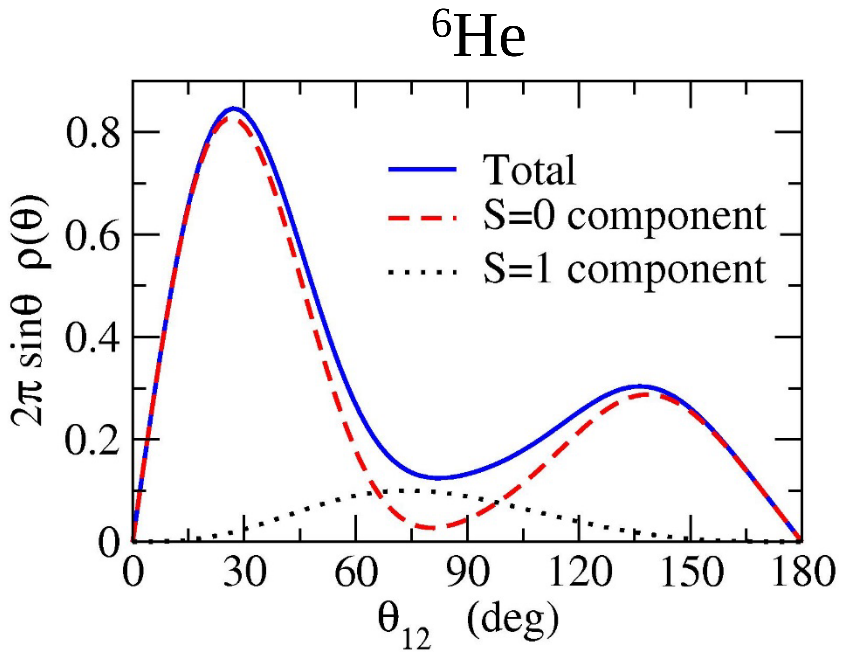


^{11}Li と ^{6}He の比較



^{11}Li と ^{6}He の比較





$(p_{1/2})^2$:59.1%
$(s_{1/2})^2$:22.7% $(d_{5/2})^2$:11.5%

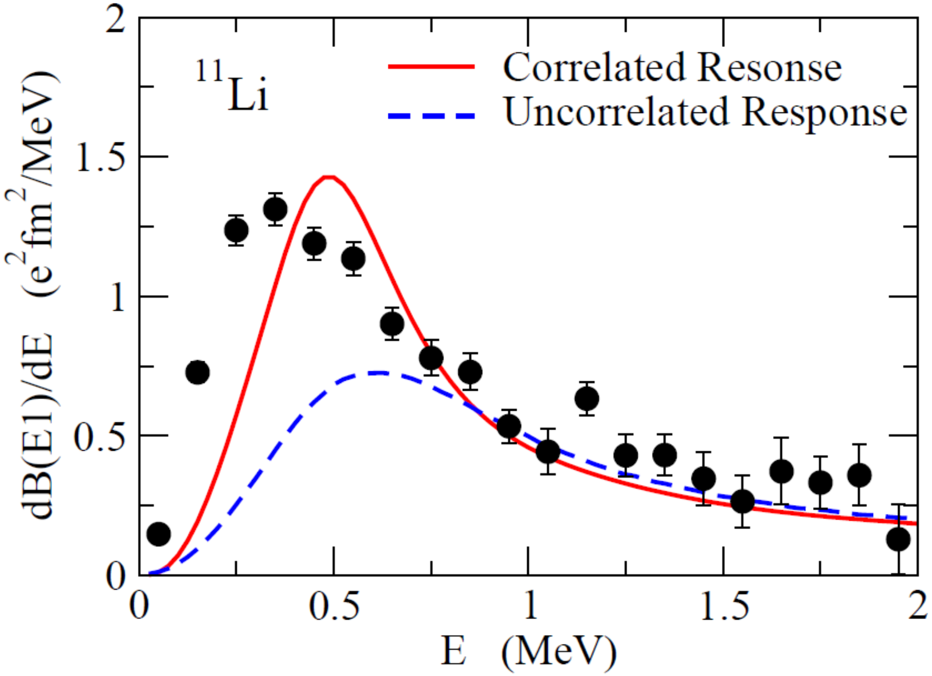
$(p_{3/2})^2$:83.0 %
$(d_{5/2})^2$:6.11 %, $(p_{1/2})^2$:4.85 %
$(s_{1/2})^2$:3.04 %, $(d_{3/2})^2$:1.47 %

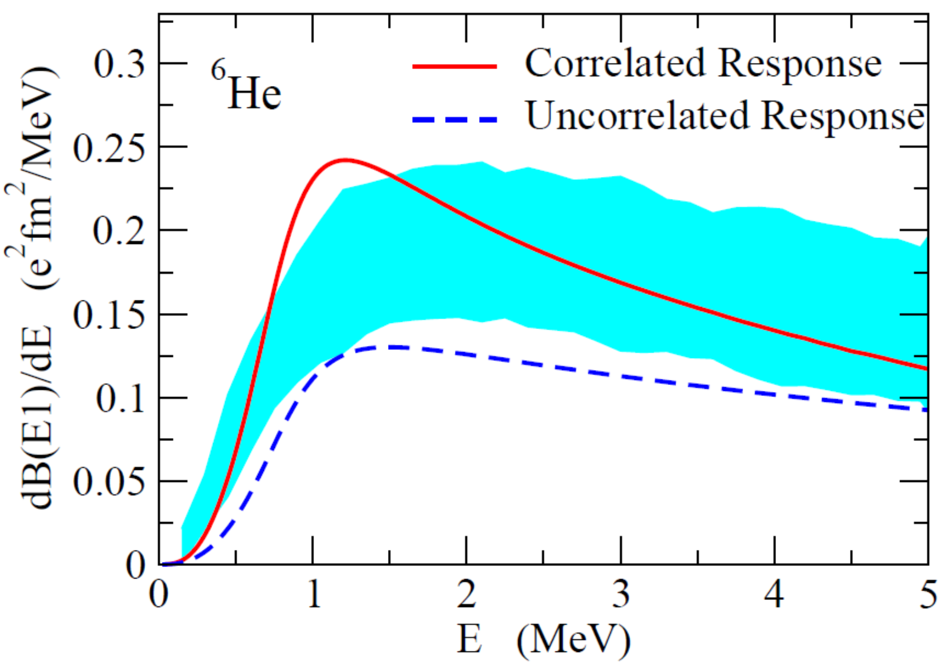
$$\rho^{S=0}(\theta) \propto \cos^2\theta$$
$$\rho^{S=1}(\theta) \propto \sin^2\theta$$

for $(p_{1/2})^2$ or $(p_{3/2})^2$

2中性子ハロー核のクーロン分解

外的刺激を与えて放出2粒子（2中性子）を観測する ⟶ クーロン分解



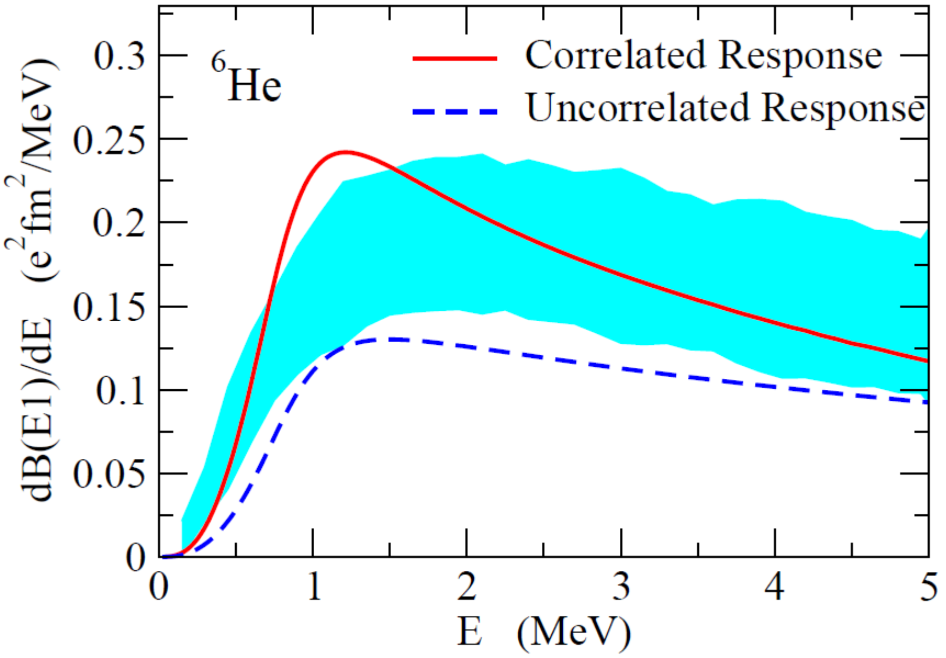


実験：

T. Nakamura et al., PRL96('06)252502

T. Aumann et al., PRC59('99)1252

(ちなみに) 赤線と青線は同じ基底状態の波動関数で計算したもの



$E > 5$ MeV で両者はどのように振る舞う?

ヒント: 和則

$$B_{\text{tot}}(E1) \sim \frac{3}{\pi}\left(\frac{Z_c e}{A_c + 2}\right)^2 \langle R^2_{\text{c}-2\text{n}}\rangle$$

E1励起

E1 の外場に対するレスポンス:

$$\boxed{B_k(E1) = 3\,|\langle\Psi^k_{1^-}|\hat{D}_0|\Psi_{\rm gs}\rangle|^2}$$

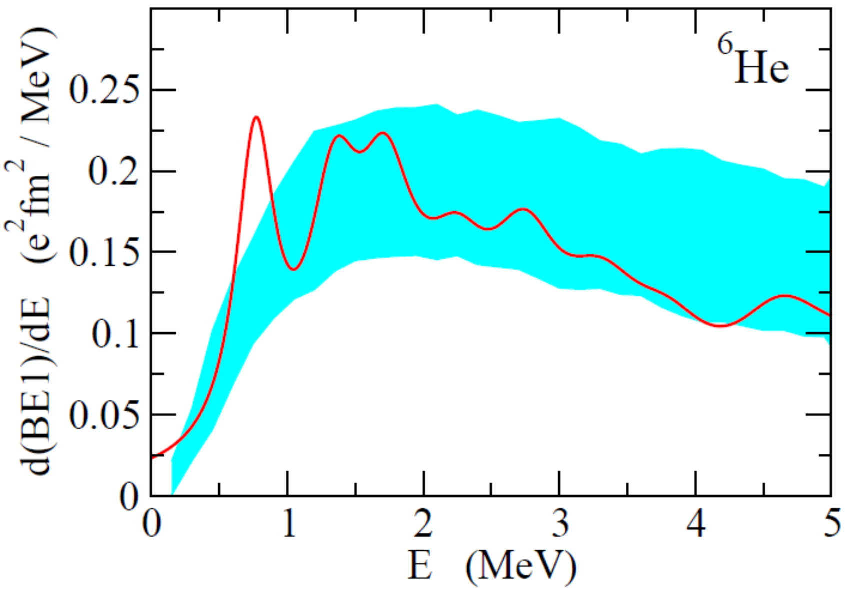
$$\hat{D}_M = -\frac{Z_c e}{A_c+2}\sum_{i=1,2} r_i Y_{1M}(\hat{\boldsymbol{r}}_i)$$

$$\Psi_{\rm gs}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \mathcal{A}\sum_{nn'lj}\alpha_{nn'lj}\,[\psi_{njl}(\boldsymbol{r})\psi_{n'jl}(\boldsymbol{r}')]^{(00)}$$

$$\Psi_{\rm 1M}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \mathcal{A}\sum_{nlj,n'l'j'}\beta_{nljn'l'j'}\,[\psi_{njl}(\boldsymbol{r})\psi_{n'j'l'}(\boldsymbol{r}')]^{(1M)}$$

離散的な強度分布→平滑化:

$$\boxed{B(E1) = \sum_k \frac{\Gamma}{\pi}\frac{B_k(E1)}{(E-E_k)^2+\Gamma^2}}$$

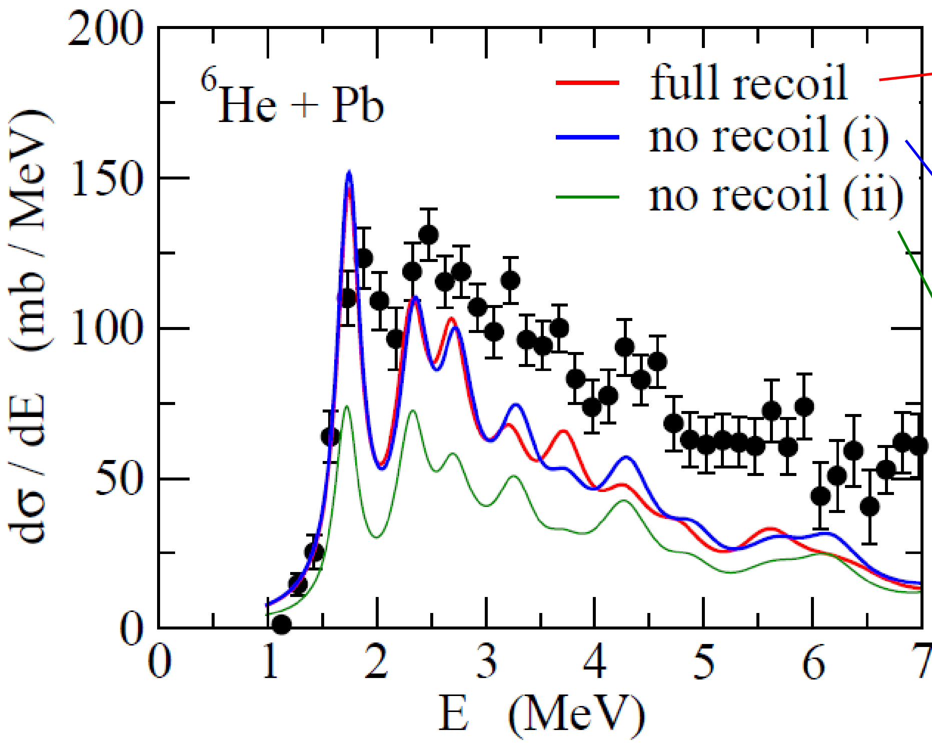


K.H. and H. Sagawa,PRC76('07)047302

E1励起：反跳項の効果

$$H = \frac{\boldsymbol{p}_1^2}{2\mu} + \frac{\boldsymbol{p}_2^2}{2\mu} + V_{nC}(r_1) + V_{nC}(r_2) + v_{nn} + \frac{\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2}{A_c m}$$

反跳項
（の非対角要素）



基底状態、励起状態の両方に反跳項

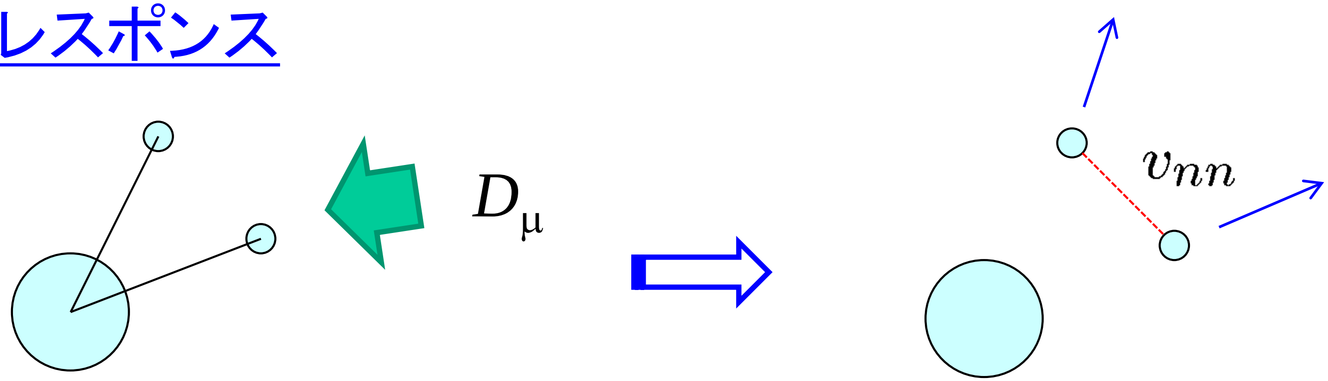
基底状態のみに反跳項、励起状態は反跳無視

基底状態、励起状態の両方とも反跳項を無視

⇒ 反跳項は E1 励起にはあまり寄与しない

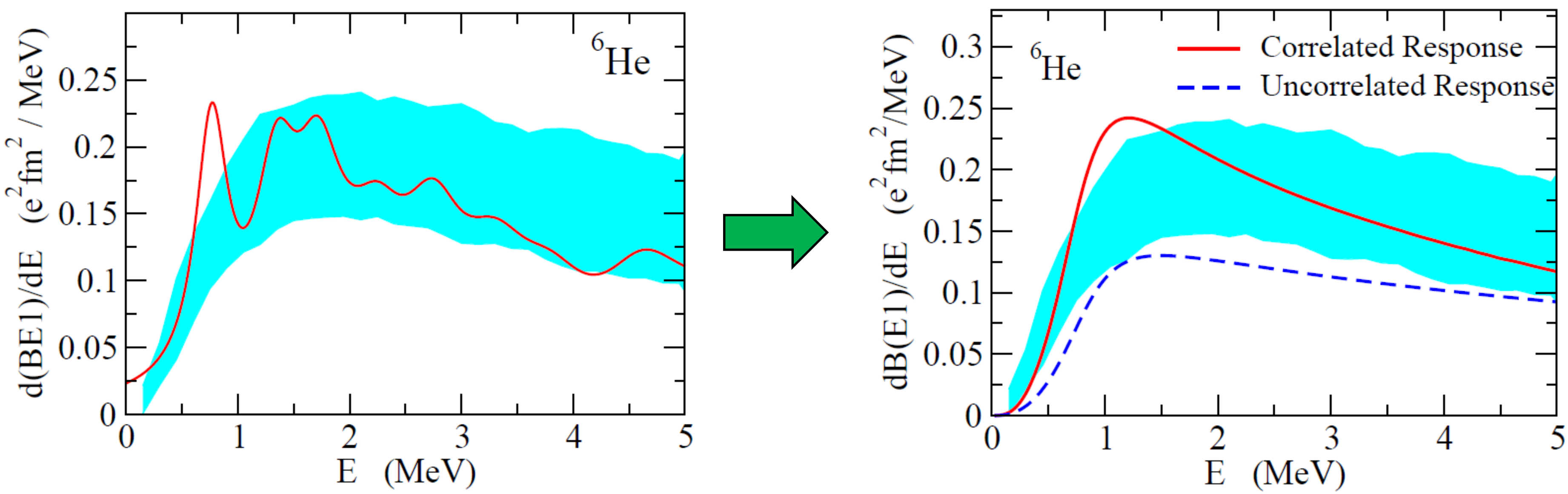
K.H. and H. Sagawa,PRC76(’07)047302

連続状態レスポンス



$$H=\frac{\boldsymbol{p}_1^2}{2\mu}+\frac{\boldsymbol{p}_2^2}{2\mu}+V_{nC}(r_1)+V_{nC}(r_2)+v_{nn}+\cancel{\frac{\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2}{A_c m}}$$

終状態で反跳項が無視できれば、ゼロレンジ相互作用の場合
連続強度分布を求めるのが容易



連続状態レスポンス

H. Esbensen and G.F. Bertsch, NPA542 ('92) 310

$$\frac{d}{dE}B(E1) \;=\; 3\sum_f \left|\langle\Psi_{10}(E_f)|\hat{D}_0|\Psi_{\mathrm{gs}}\rangle\right|^2 \delta(E-E_f)$$

連続状態レスポンス

H. Esbensen and G.F. Bertsch, NPA542 ('92) 310

$$\frac{d}{dE}B(E1) = 3\sum_f \left|\langle\Psi_{10}(E_f)|\hat{D}_0|\Psi_{\rm gs}\rangle\right|^2 \delta(E-E_f)$$

$$= \frac{3}{\pi} Im \sum_f \left|\langle\Psi_{10}(E_f)|\hat{D}_0|\Psi_{\rm gs}\rangle\right|^2 \frac{1}{E_f - E - i\eta}$$

$$\longleftarrow \quad \lim_{\eta\to 0}\frac{1}{x-i\eta} = P\frac{1}{x} + i\pi\delta(x)$$

連続状態レスポンス

H. Esbensen and G.F. Bertsch, NPA542 ('92) 310

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dE}B(E1) &= 3\sum_f \left|\langle\Psi_{10}(E_f)|\hat{D}_0|\Psi_{\rm gs}\rangle\right|^2 \delta(E-E_f) \\
&= \frac{3}{\pi}Im\sum_f \left|\langle\Psi_{10}(E_f)|\hat{D}_0|\Psi_{\rm gs}\rangle\right|^2 \frac{1}{E_f-E-i\eta} \\
&= \frac{3}{\pi}Im\underline{\sum_f}\langle\Psi_{\rm gs}|\hat{D}_0^\dagger|\Psi_{10}(E_f)\rangle \frac{1}{H-E-i\eta}\langle\Psi_{10}(E_f)|\hat{D}_0|\Psi_{\rm gs}\rangle
\end{aligned}$$

連続状態レスポンス

H. Esbensen and G.F. Bertsch, NPA542 ('92) 310

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dE}B(E1) &= 3\sum_f \left|\langle\Psi_{10}(E_f)|\hat{D}_0|\Psi_{gs}\rangle\right|^2 \delta(E-E_f) \\
&= \frac{3}{\pi} Im \sum_f \left|\langle\Psi_{10}(E_f)|\hat{D}_0|\Psi_{gs}\rangle\right|^2 \frac{1}{E_f - E - i\eta} \\
&= \frac{3}{\pi} Im \underline{\sum_f} \langle\Psi_{gs}|\hat{D}_0^\dagger|\underline{\Psi_{10}(E_f)\rangle \frac{1}{H-E-i\eta}\langle\Psi_{10}(E_f)|}\hat{D}_0|\Psi_{gs}\rangle \\
&= \frac{3}{\pi} Im \langle\Psi_{gs}|\hat{D}_0^\dagger G(E)\hat{D}_0|\Psi_{gs}\rangle
\end{aligned}
$$

連続状態レスポンス

H. Esbensen and G.F. Bertsch, NPA542 ('92) 310

$$\frac{d}{dE}B(E1) = 3\sum_f \left|\langle\Psi_{10}(E_f)|\hat{D}_0|\Psi_{\rm gs}\rangle\right|^2 \delta(E-E_f)$$
$$= \frac{3}{\pi} Im\,\langle\Psi_{\rm gs}|\hat{D}_0^\dagger G(E)\hat{D}_0|\Psi_{\rm gs}\rangle$$

$H = H_0 + v_{nn}$ のとき、

$$G = G_0 - G_0\, v_{nn}(1+G_0 v_{nn})^{-1}G_0, \qquad G_0(E) = \frac{1}{H_0 - E - i\eta}$$

$v_{nn}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = v_0(r)\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ とすると $v_{nn}(1+G_0 v_{nn})^{-1}$

は簡単に求められる:

座標表示をとると、v_{nn} のゼロレンジのため、

$$\langle\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'|v_{nn}(1+G_0 v_{nn})^{-1}|\tilde{\boldsymbol{r}}\tilde{\boldsymbol{r}}'\rangle$$

のうち $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}',\ \tilde{\boldsymbol{r}}=\tilde{\boldsymbol{r}}'$ のみが必要。

$\longrightarrow$ 座標表示で簡単に逆行列を求められる

連続状態レスポンス

H. Esbensen and G.F. Bertsch, NPA542 ('92) 310

座標表示をとると、v_{nn} のゼロレンジのため、

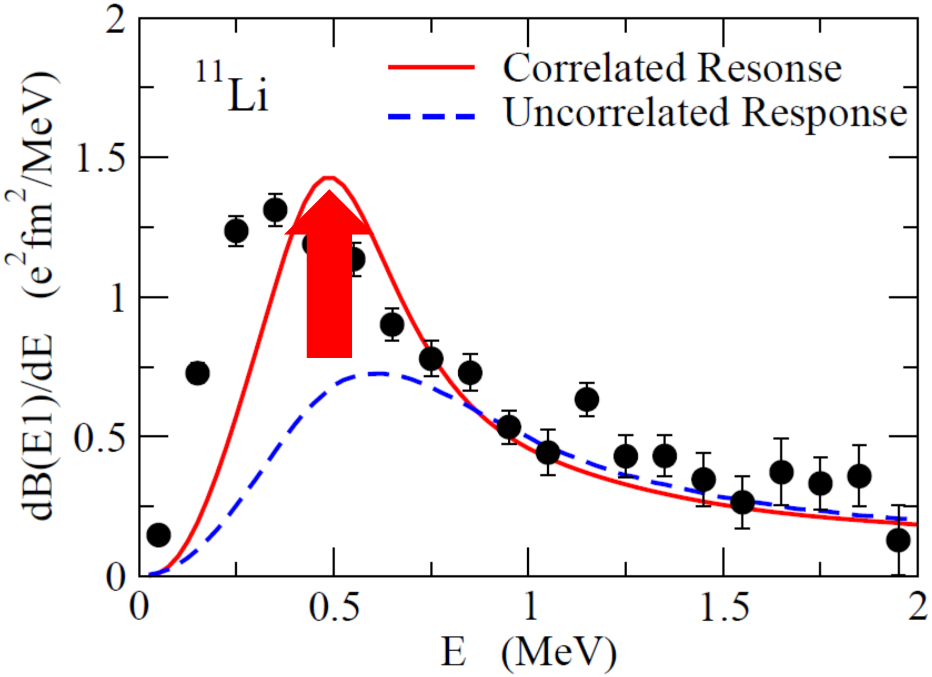
$$\langle \boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'|v_{nn}(1+G_0v_{nn})^{-1}|\tilde{\boldsymbol{r}}\tilde{\boldsymbol{r}}'\rangle$$

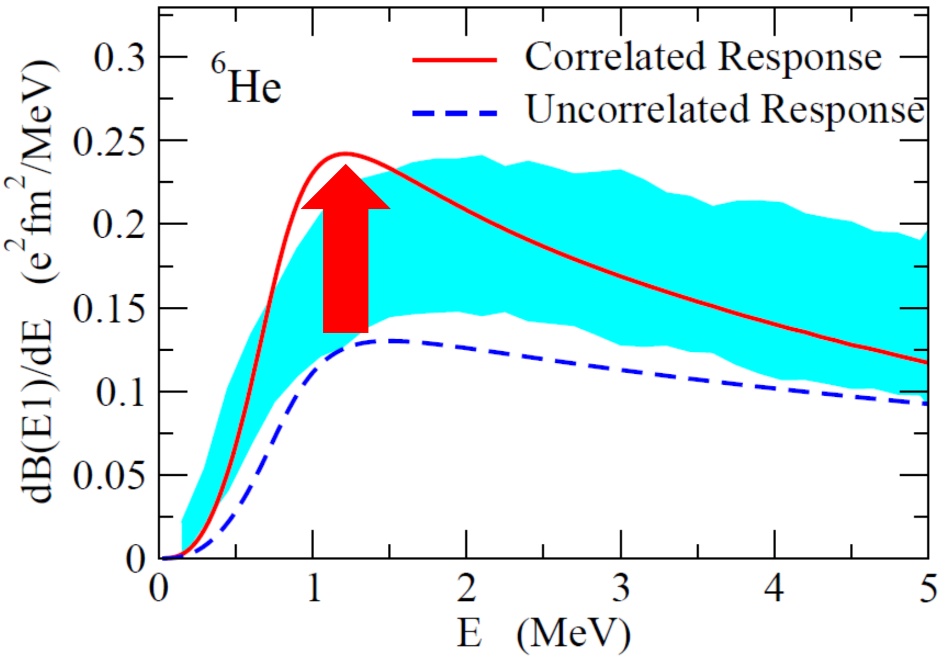
のうち $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}',\ \tilde{\boldsymbol{r}}=\tilde{\boldsymbol{r}}'$ のみが必要。

$$\begin{aligned} G_0(E,\boldsymbol{r},\tilde{\boldsymbol{r}}) &= \sum_{1,2}\frac{\langle \boldsymbol{r}\boldsymbol{r}|(j_1j_2)^{(10)}\rangle\langle(j_1j_2)^{(10)}|\tilde{\boldsymbol{r}}\tilde{\boldsymbol{r}}\rangle}{e_1+e_2-E-i\eta} \\ &= \sum_{l_1j_1}\sum_{l_2j_2}(\text{angularpart})\times g_0(E,r,\tilde{r}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_0(E,r,\tilde{r}) &= \int_0^{k_c}dk_1\int_0^{\sqrt{k_c^2-k_1^2}}dk_2 \\ &\times\frac{\phi_{k_1l_1j_1}(r)\phi_{k_2l_2j_2}(r)\phi_{k_1l_1j_1}(\tilde{r})\phi_{k_2l_2j_2}(\tilde{r})}{k_1^2+k_2^2-k_E^2-i\eta} \end{aligned}$$

クーロン分解における核子相関の効果



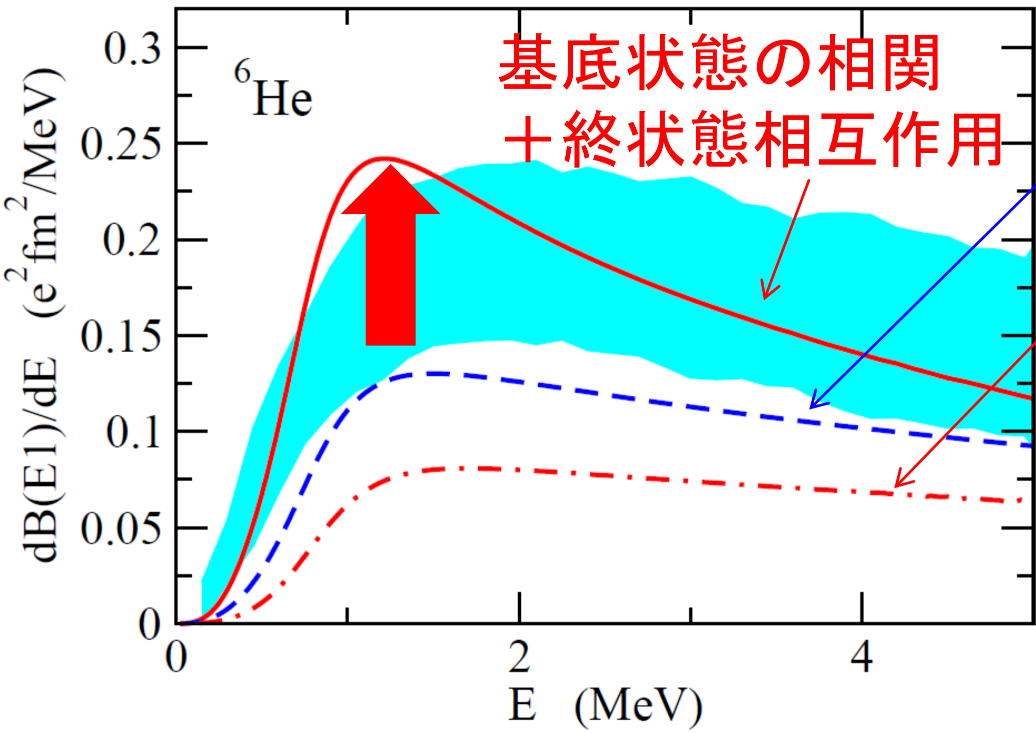


- 基底状態:相関ありの波動関数
- 励起状態:相関あり(赤線)、相関なし(青点線)

相関の効果で E1 強度が増大する

→　基底状態における相関の果たす役割は?

基底状態の相関の果たす役割

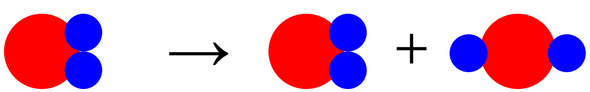


cf. クラスター和則

$$B_{\rm tot}(E1) \sim \frac{3}{\pi}\left(\frac{Z_c e}{A_c+2}\right)^2 \langle R^2_{\rm c-2n}\rangle$$

✓基底状態のdi-neutron相関を切ると E1 強度は小さくなる

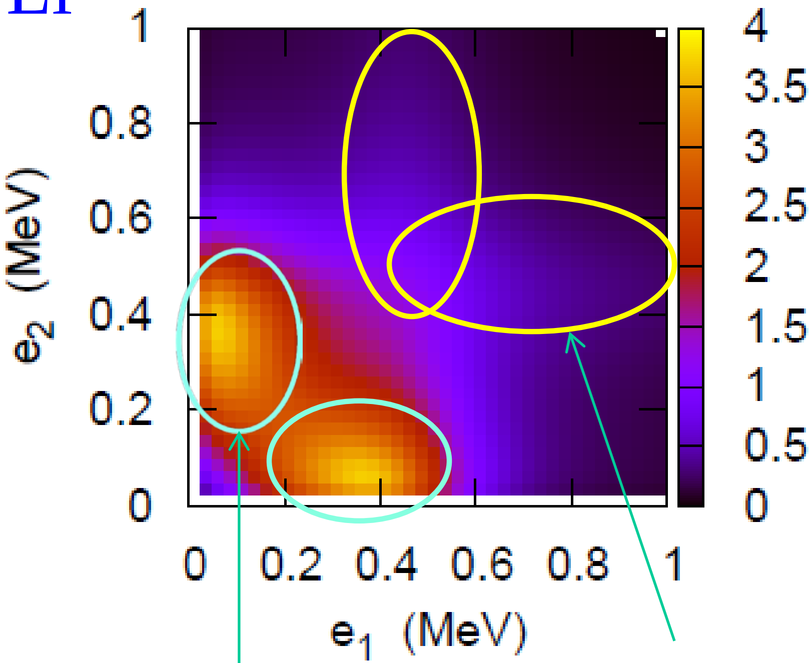
← $R_{c\text{-}2n}$ が小さくなるため (3.63 → 2.61 fm)



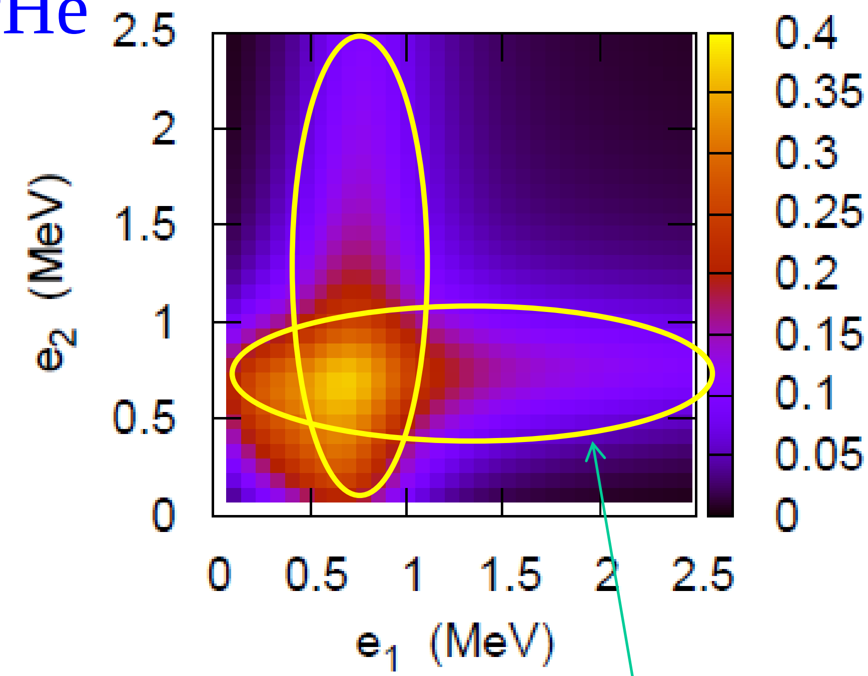
E1励起には基底状態の相関と励起状態の相関の両方が重要

部分系のバーチャル状態の役割：放出2中性子のエネルギー分布

^{11}Li



^{6}He



s波のバーチャル状態 ^{10}Li

(s波の散乱長:
a = - 30 $^{+12}_{-31}$ fm)

^{10}Liの$p_{1/2}$共鳴状態（0.54 MeV）

^{5}He の $p_{3/2}$ 共鳴状態（0.91 MeV）

(cf. s波の散乱長:
a = +4.97 +/- 0.12 fm)

K.H., H. Sagawa, T. Nakamura, S. Shimoura, PRC80(‘09)031301(R)

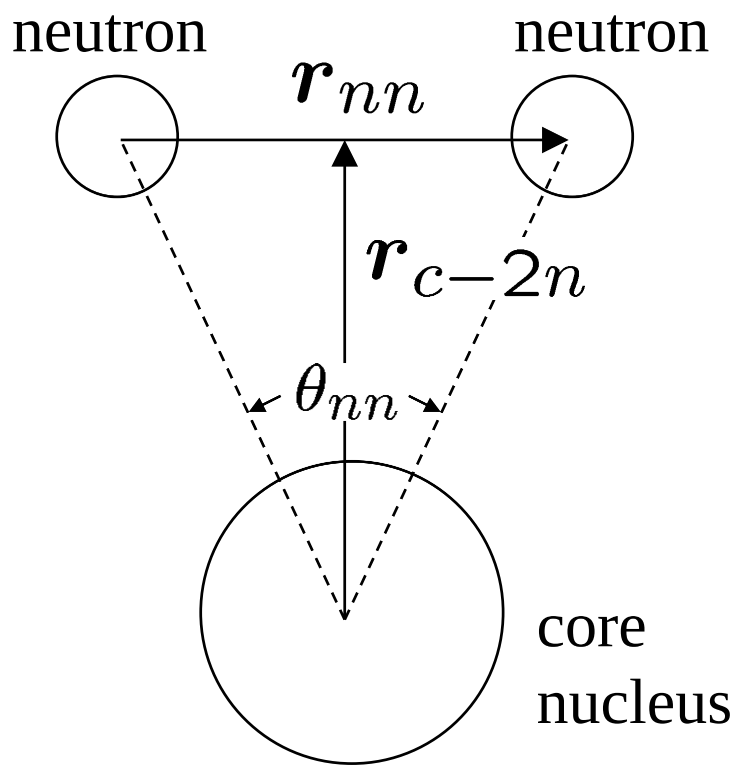
ボロミアン原子核の幾何学

実験データから2中性子の空間的配位を決められないか?

$r_{\text{c-2n}}$ と r_{nn} の情報があれば、
2中性子の間の角度は

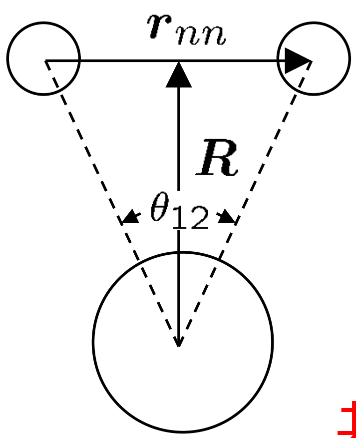
$$\cos\frac{\theta_{\rm nn}}{2} \sim \frac{r_{\rm c-2n}}{\sqrt{r_{\rm c-2n}^2 + \frac{r_{\rm nn}^2}{4}}}$$

と見積もることができる。



C.A. Bertulani and M.S. Hussein, PRC76(‘07)051602(R)
K. Hagino and H. Sagawa, PRC76(‘07)047302

ボロミアン原子核の幾何学

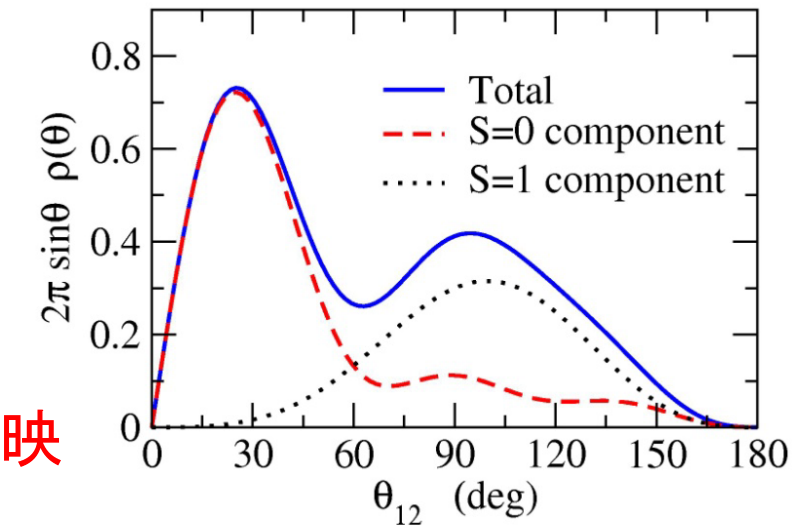


クラスター和則

$$B_{\rm tot}(E1) \sim \frac{3}{\pi}\left(\frac{Z_c e}{A_c+2}\right)^2 \langle R^2\rangle$$

基底状態の相関のみが反映

3体模型計算 (^{11}Li)



$\langle\theta_{12}\rangle = 65.29$ deg.

nn 間角度の「実験値」

$\sqrt{\langle R^2\rangle} \longleftarrow$ $B_{\rm tot}$(E1)

$\sqrt{\langle r_{\rm nn}^2\rangle} \longleftarrow$ 物質半径

$$\begin{aligned}\langle\theta_{12}\rangle &= 65.2 \pm 12.2 \quad (^{11}\text{Li}) \\ &= 74.5 \pm 12.1 \quad (^{6}\text{He})\end{aligned}$$

K.H. and H. Sagawa,PRC76('07)047302

$\langle\theta_{12}\rangle$ が90度より著しく小

↓

di-neutron 相関を示唆

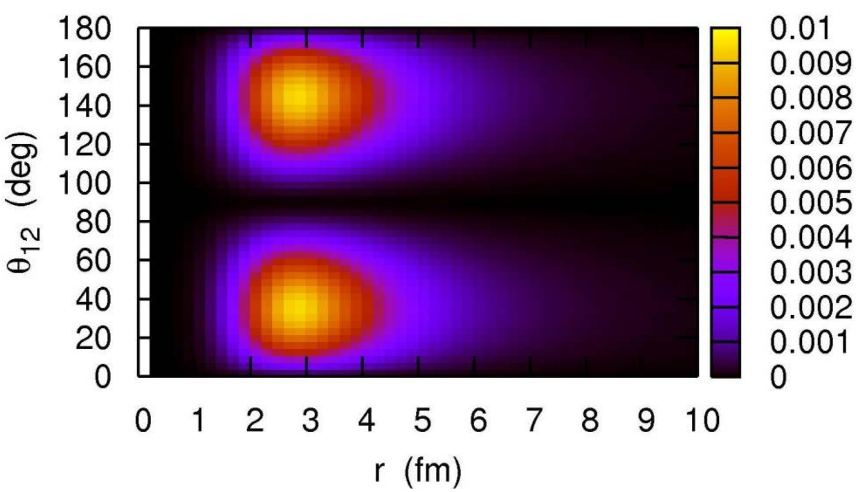
（ただし、大きい角度の成分が混ざって見えている）

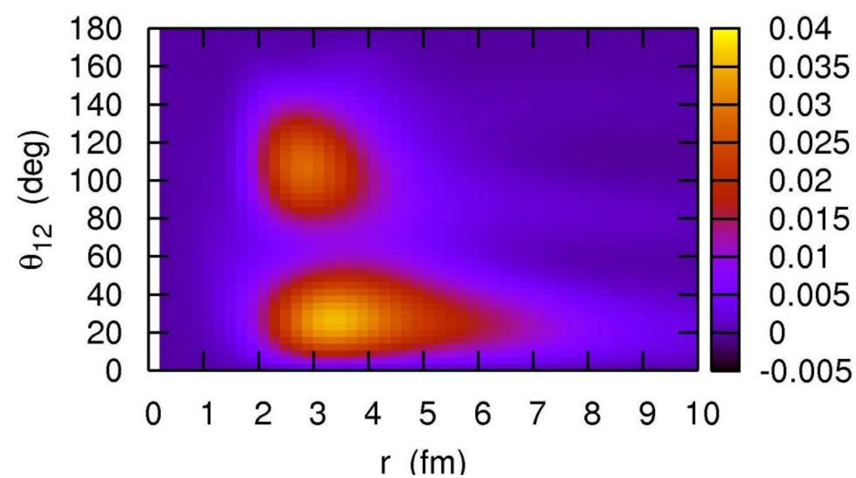
cf. T. Nakamura et al., PRL96('06)252502
C.A. Bertulani and M.S. Hussein, PRC76('07)051602

（注意点）

nn 間角度の「実験値」

$$\langle\theta_{12}\rangle = 65.2^{+11.4}_{-13.0} \quad (^{11}\mathrm{Li})$$
$$= 74.5^{+11.2}_{-13.1} \quad (^{6}\mathrm{He})$$





相関がなければ $<\theta_{12}> = 90$ 度

ここからのずれが相関の強さの度合いを反映する

$<\theta_{12}> = 65$ 度は dineutron 相関とは矛盾しない（2つのピークの平均となっているため）

Appendix

Appendix:ゼロレンジ相互作用による散乱長

nn 散乱: $$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\boldsymbol{\nabla}^2 + v_0\delta(\boldsymbol{r}) - E\right)\psi(\boldsymbol{r}) = 0$$

Lippmann-Schwinger 方程式: $$|\psi\rangle = |\phi\rangle - \frac{1}{-\frac{\hbar^2}{2\mu}\boldsymbol{\nabla}^2 - E - i\eta} v_{nn}|\psi\rangle$$

座標表示だと:

$$\psi(\boldsymbol{r}) = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \int d\boldsymbol{r}'\, G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\, v_{nn}(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')$$

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') &= \left\langle \boldsymbol{r} \left| \frac{1}{-\frac{\hbar^2}{2\mu}\boldsymbol{\nabla}^2 - E - i\eta} \right| \boldsymbol{r}' \right\rangle \\ &= \int \frac{d\boldsymbol{k}'}{(2\pi)^3}\, e^{i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}} \cdot \frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{1}{k'^2 - k^2 - i\eta}\, e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'} \\ &= \frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \end{aligned}$$

Appendix:ゼロレンジ相互作用による散乱長

nn 散乱:
$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + v_0\delta(\boldsymbol{r}) - E\right)\psi(\boldsymbol{r}) = 0$$

Lippmann-Schwinger 方程式:
$$\psi(\boldsymbol{r}) = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \int d\boldsymbol{r}'\, G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\, v_{nn}(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')$$

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

$r \to \infty$

$$\begin{aligned} k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| &= k\sqrt{r^2 - 2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}' + r'^2} \\ &\sim kr - k\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{r}' = kr - \boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}' \quad (\boldsymbol{k}' \equiv k\hat{\boldsymbol{r}}) \end{aligned}$$

$$\psi(\boldsymbol{r}) \to e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \underbrace{- \frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int d\boldsymbol{r}'\, e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'} v_{nn}(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')}_{= f(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k})} \cdot \frac{e^{ikr}}{r}$$

(散乱振幅)

$$f(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k}) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int d\boldsymbol{r}'\, e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'} v_{nn}(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}') = -\frac{\mu v_0}{2\pi\hbar^2}\psi(0)$$

ここに Lippmann-Schwinger 方程式の解を代入すると:

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k}) &= -\frac{\mu v_0}{2\pi\hbar^2}\left(1 - \int d\boldsymbol{r}' G(0,\boldsymbol{r}') v_{nn}(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')\right) \\
&= -\frac{\mu v_0}{2\pi\hbar^2}\left(1 - v_0 G(0,0)\psi(0)\right) \\
&= -\frac{\mu v_0}{2\pi\hbar^2}\left(1 - v_0\psi(0)\int \frac{d\boldsymbol{k}'}{(2\pi)^3}\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{1}{k'^2 - k^2 - i\eta}\right) \\
&= -\frac{\mu v_0}{2\pi\hbar^2} - \frac{2\mu v_0}{\hbar^2}\int \frac{d\boldsymbol{k}'}{(2\pi)^3}\frac{f(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k})}{k'^2 - k^2 - i\eta}
\end{aligned}$$

部分波展開

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{k}', \boldsymbol{k}) &= \sum_l (2l+1) \frac{S_l - 1}{2ik} \frac{4\pi}{2l+1} \sum_m Y_{lm}(\widehat{\boldsymbol{k}}) Y^*_{lm}(\widehat{\boldsymbol{k}'}) \\
&\sim \frac{S_0 - 1}{2ik} = \frac{e^{2i\delta_0} - 1}{2ik} \qquad (E \to 0) \\
&= \frac{e^{i\delta_0}}{2ik}(e^{i\delta_0} - e^{-i\delta_0}) \\
&= \frac{1}{k}(\cos\delta_0 + i \sin\delta_0) \sin\delta_0 \sim \frac{\delta_0}{k}
\end{aligned}
$$

散乱長: $k \cot\delta_0 \sim \frac{k}{\delta_0} \sim -\frac{1}{a}$

$$f(\boldsymbol{k}', \boldsymbol{k}) \sim -a$$

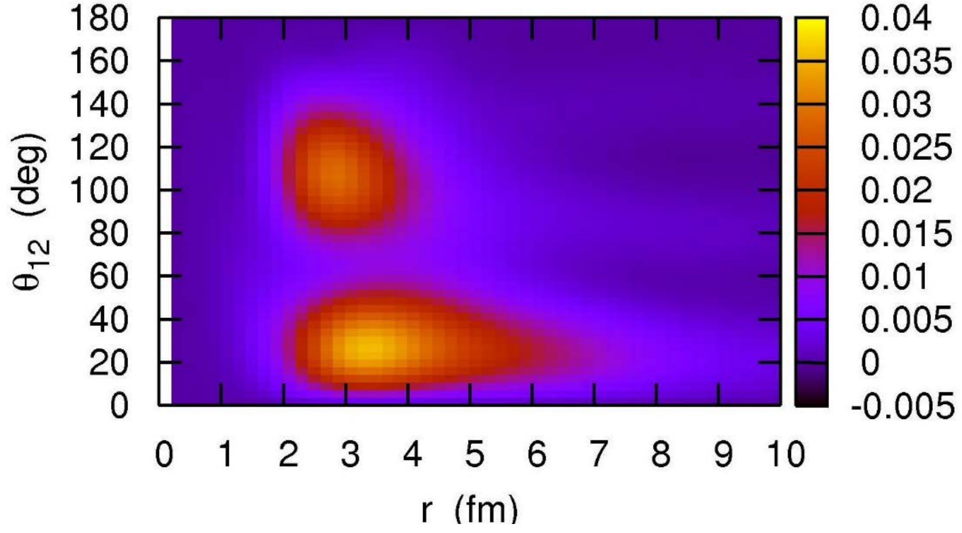
$$f(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k}) = -\frac{\mu v_0}{2\pi\hbar^2} - \frac{2\mu v_0}{\hbar^2}\int \frac{d\boldsymbol{k}'}{(2\pi)^3}\frac{f(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k})}{k'^2 - k^2 - i\eta}$$

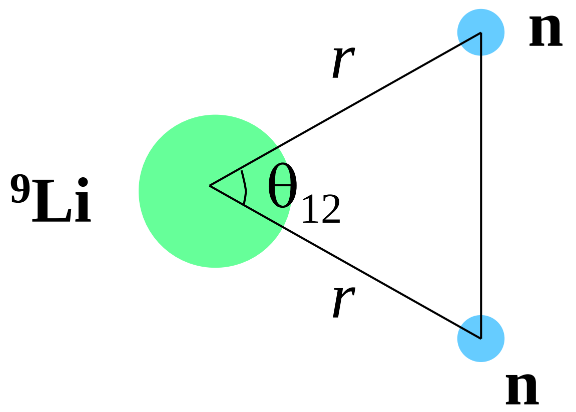
$$\begin{aligned}
-a &= -\frac{\mu v_0}{2\pi\hbar^2} - \frac{2\mu v_0}{\hbar^2}\int \frac{d\boldsymbol{k}'}{(2\pi)^3}\frac{-a}{k'^2 - k^2 - i\eta} \\
&\sim -\frac{\mu v_0}{2\pi\hbar^2} - \frac{2\mu v_0}{\hbar^2}\cdot 4\pi\int_0^{k_c}\frac{k'^2 dk'}{(2\pi)^3}\frac{-a}{k'^2} \\
&= -\frac{\mu v_0}{2\pi\hbar^2} + a\frac{2\mu v_0}{\hbar^2}\cdot\frac{k_c}{2\pi^2} \\
&= -\frac{\pi}{2}\alpha + a\alpha k_c \qquad \left(\alpha = \frac{v_0}{2\pi^2}\frac{2\mu}{\hbar^2}\right)
\end{aligned}$$

$$a = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\alpha}{1+\alpha k_c}$$

^{11}Liの密度分布

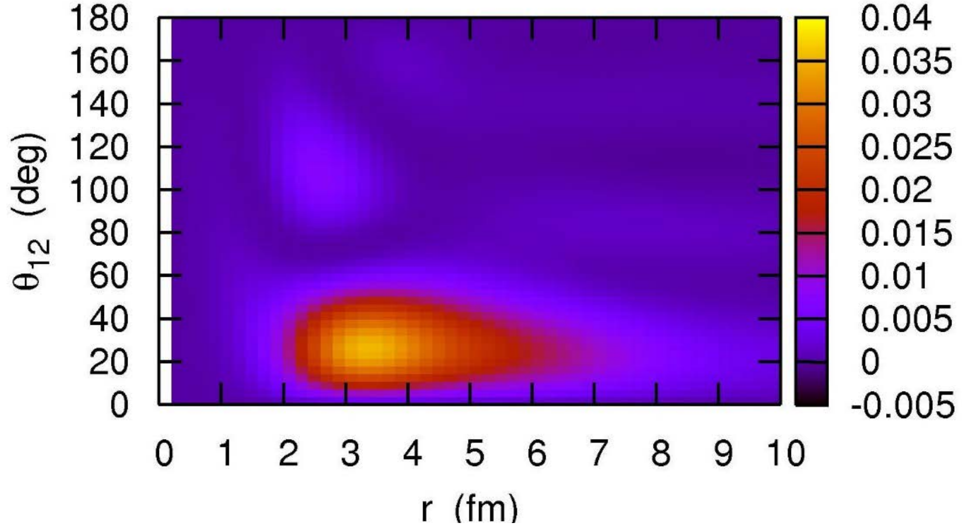
Total



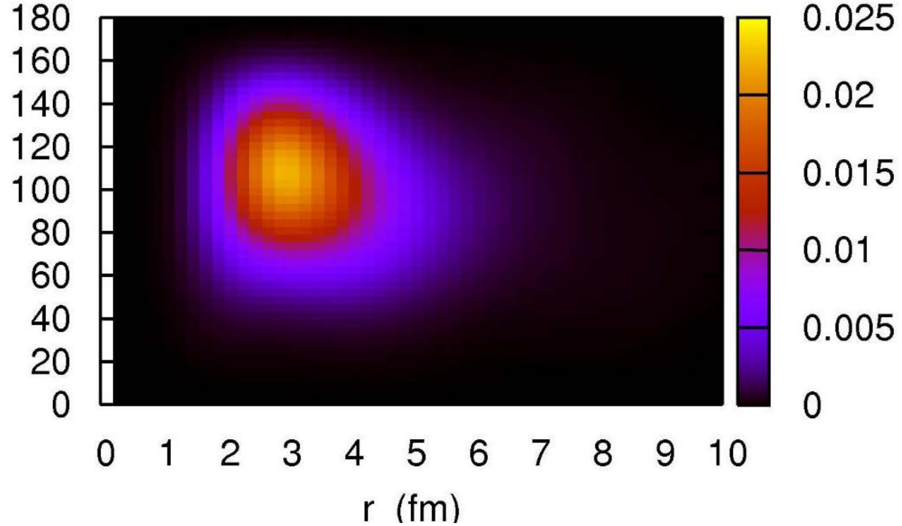


$$4\pi r^2 \cdot 2\pi r^2 \sin\theta_{12}$$
$$\times \rho_2(r, r, \theta_{12})$$

S=0 $|\uparrow\downarrow\rangle$



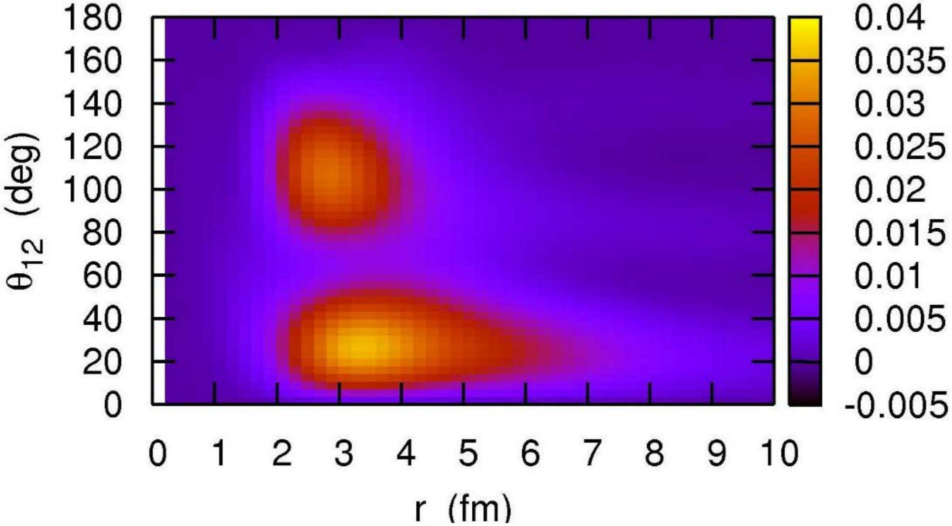
S=1 $|\uparrow\uparrow\rangle$ or $|\downarrow\downarrow\rangle$

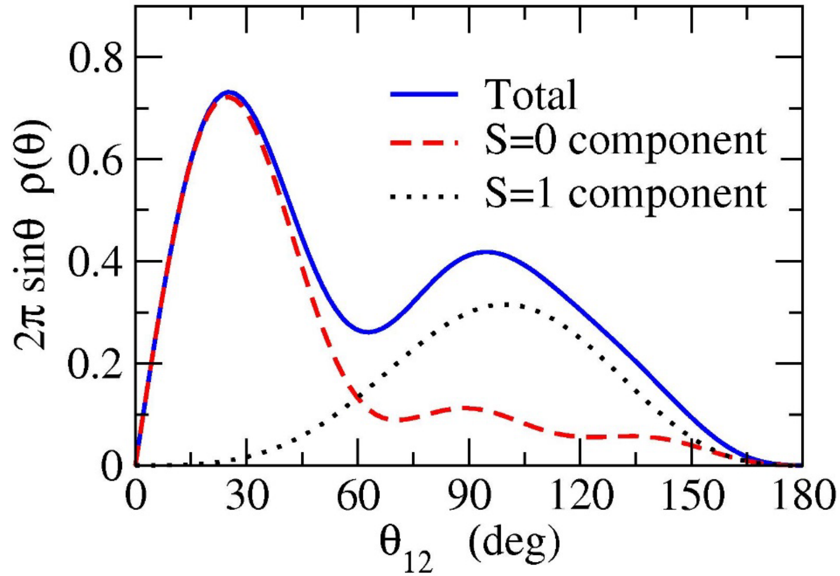


S=0 の分布に長いテール（ハロー構造）

Two-particle density for ^{11}Li

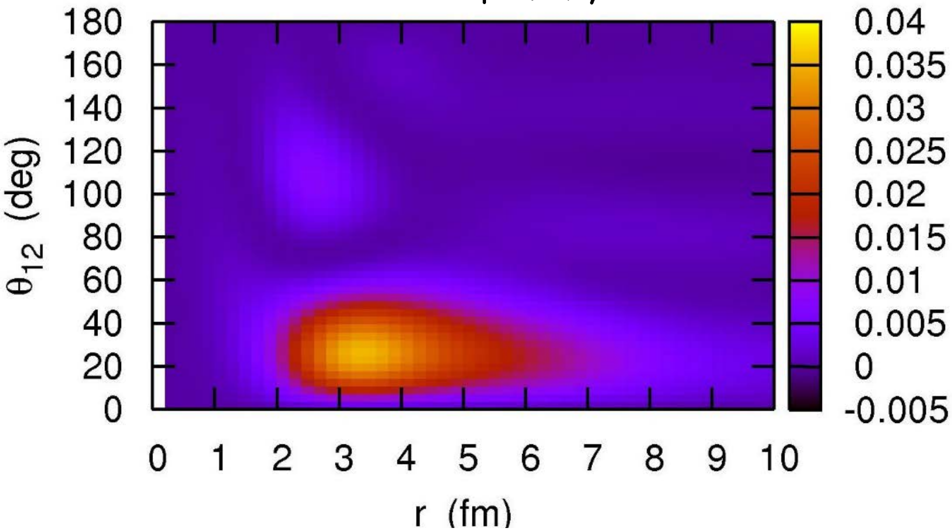
Total



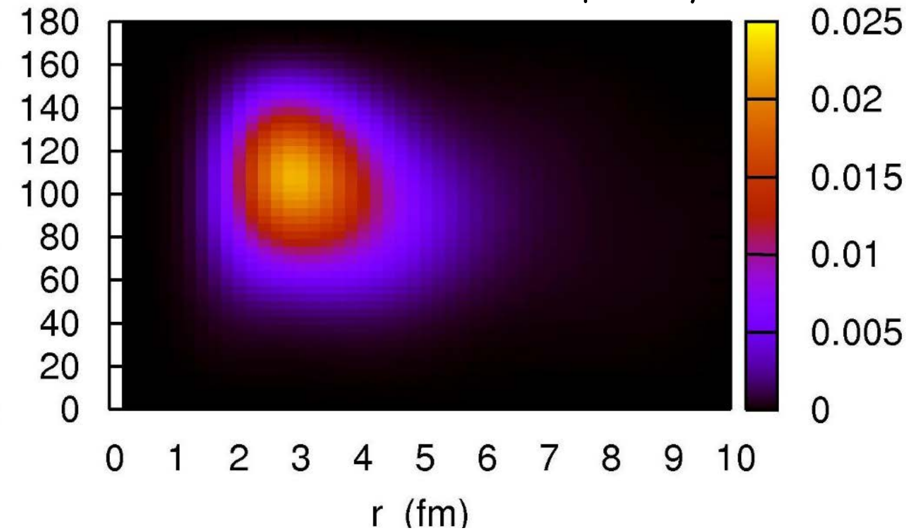


$$\rightarrow \langle \theta_{12} \rangle = 65.29 \quad \text{deg.}$$

S=0 $\quad |\uparrow\downarrow\rangle$

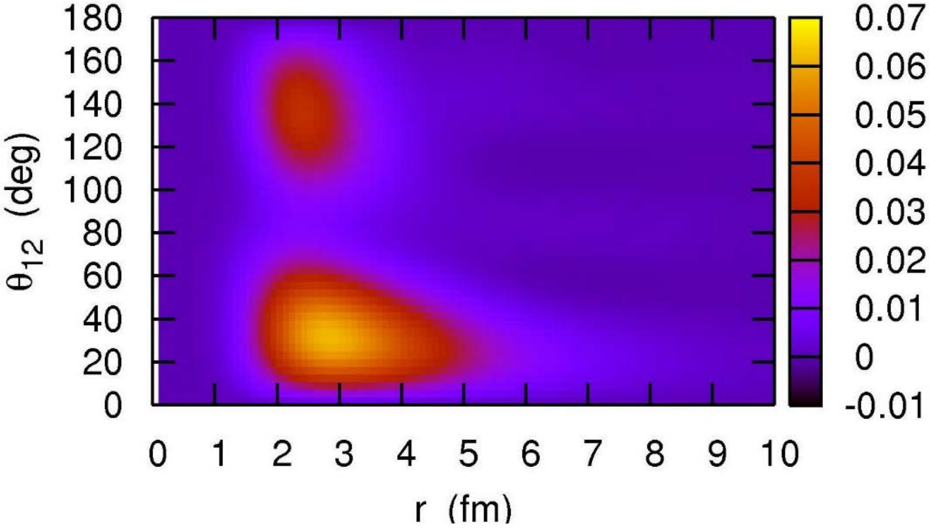


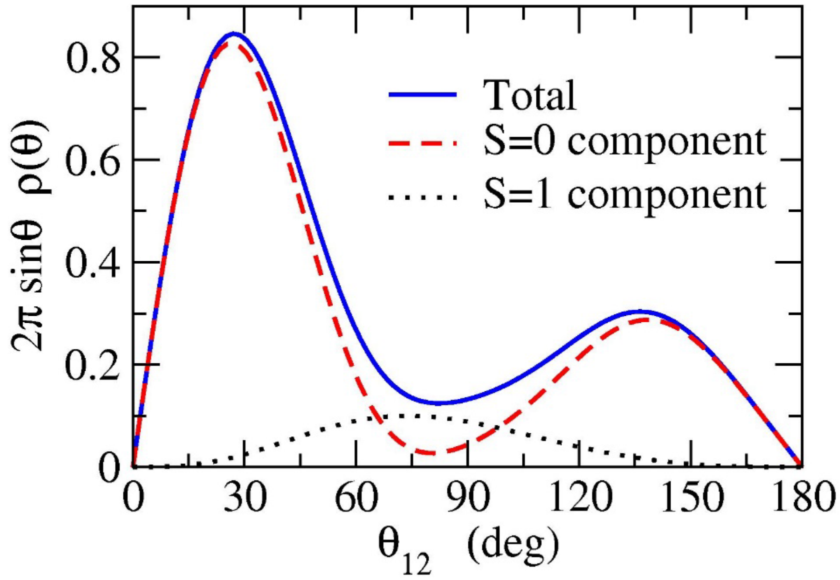
S=1 $\quad |\uparrow\uparrow\rangle$ or $|\downarrow\downarrow\rangle$



Two-particle density for ^{6}He

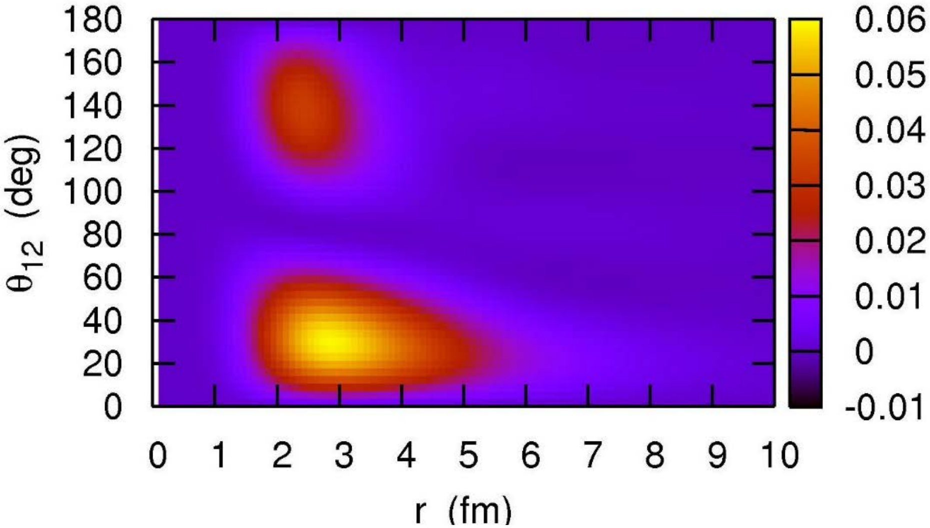
Total



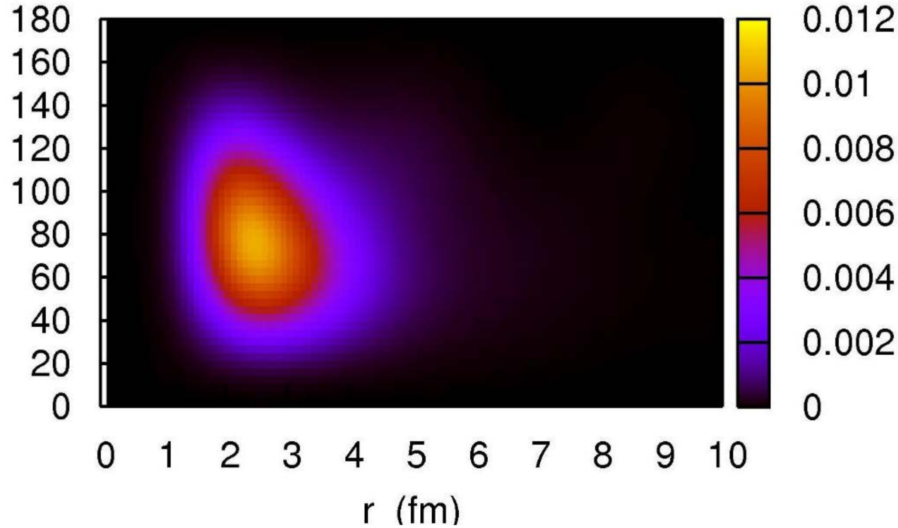


$$\langle \theta_{12} \rangle = 66.33 \ \text{deg.}$$

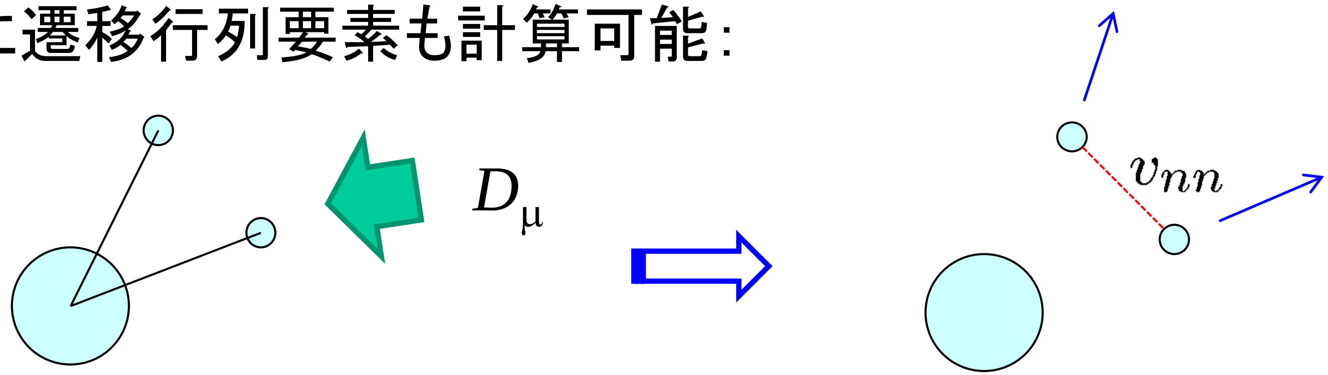
S=0 $|\uparrow\downarrow\rangle$



S=1 $|\uparrow\uparrow\rangle$ or $|\downarrow\downarrow\rangle$



同じように遷移行列要素も計算可能:



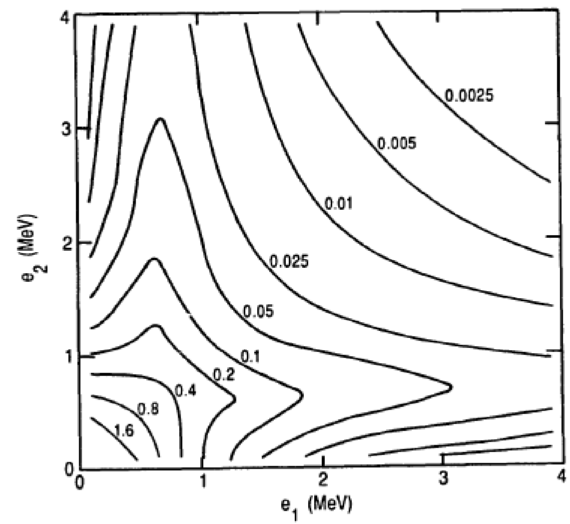
$$
\begin{aligned}
M(E1) &= \langle (j_1 j_2)^1_\mu | (1 - vG_0 + vG_0 vG_0 - \cdots) D_\mu | \Psi_{gs} \rangle \\
&= \langle (j_1 j_2)^1_\mu | \underbrace{(1 + vG_0)^{-1}}_{\text{FSI}} D_\mu | \Psi_{gs} \rangle
\end{aligned}
$$

双極子オペレーター

非相関wf

$$
G_0(E) = \sum_{\mu, f.st.} \frac{\left| (j_1 j_2)^1_\mu \right\rangle \left\langle (j_1 j_2)^1_\mu \right|}{e_1 + e_2 - E - i\eta}
$$

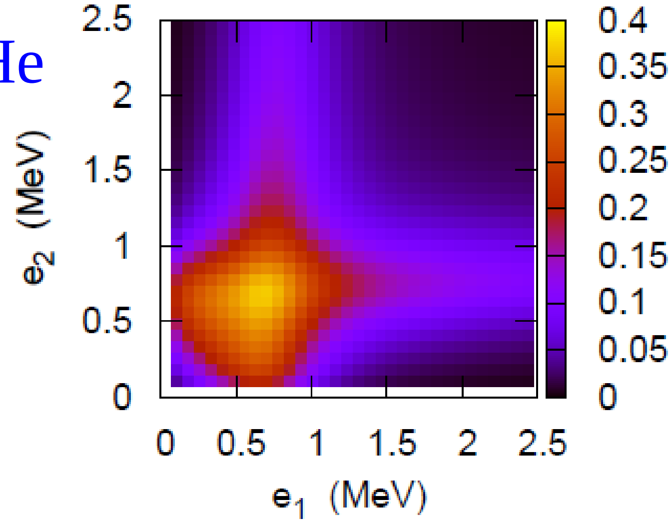
$$
\boxed{\frac{d^2 B(E1)}{de_1 de_2} = 3 \sum_{l_1 j_2 l_2 j_2} |M(E1)|^2 \frac{dk_1}{de_1} \frac{dk_2}{de_2}}
$$



H. Esbensen and G.F. Bertsch, NPA542('92)310

放出2中性子のエネルギー分布

^{6}He



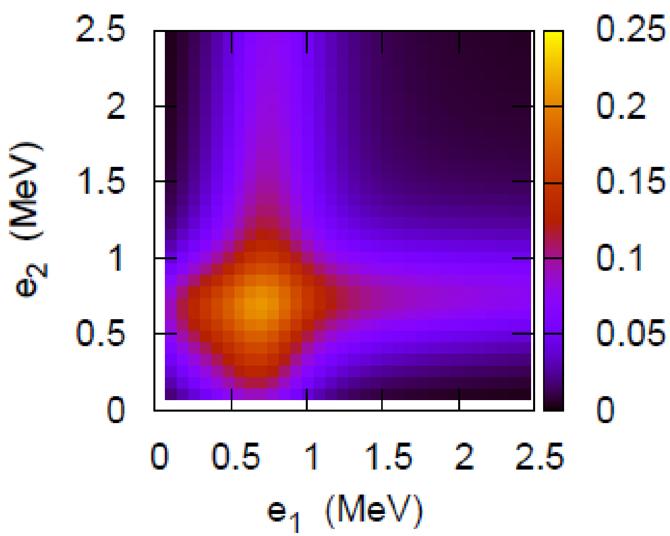
✓分布の仕方は nn 相関にあまり依らない（ただし絶対値は変化）

✓V_{nC} の性質に大きく依存

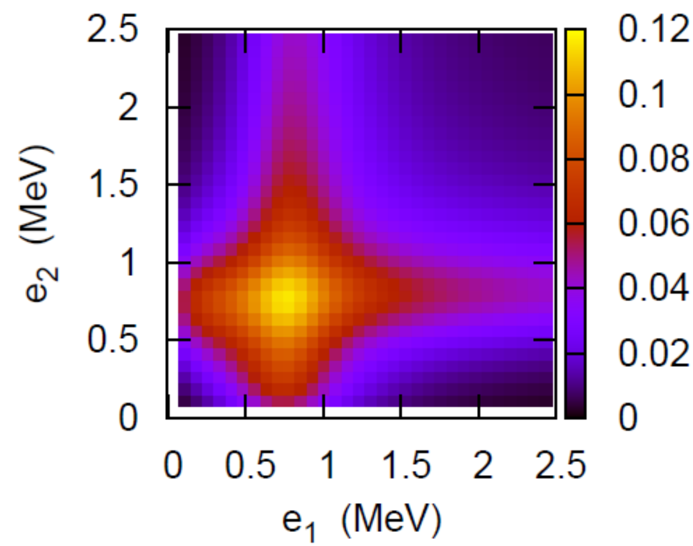
✓^{11}Li でも ^{6}He でも同様

クーロン分解は2段階過程

$v_{nn} = 0$

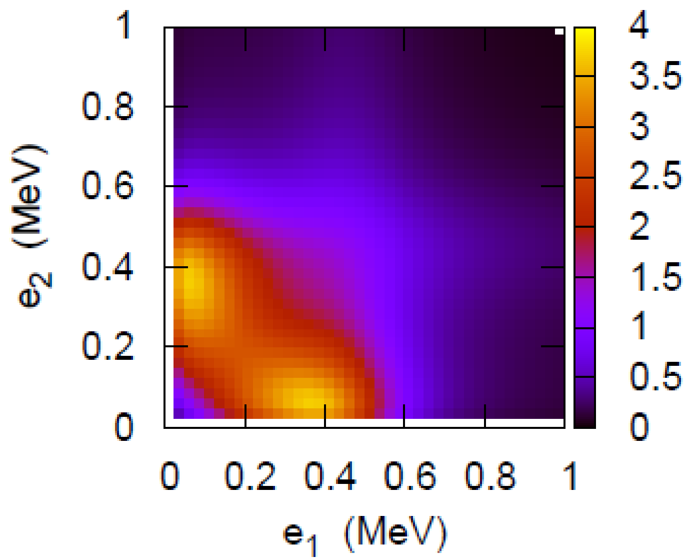


基底状態：di-neutron 相関なし（odd-l のみ）の場合

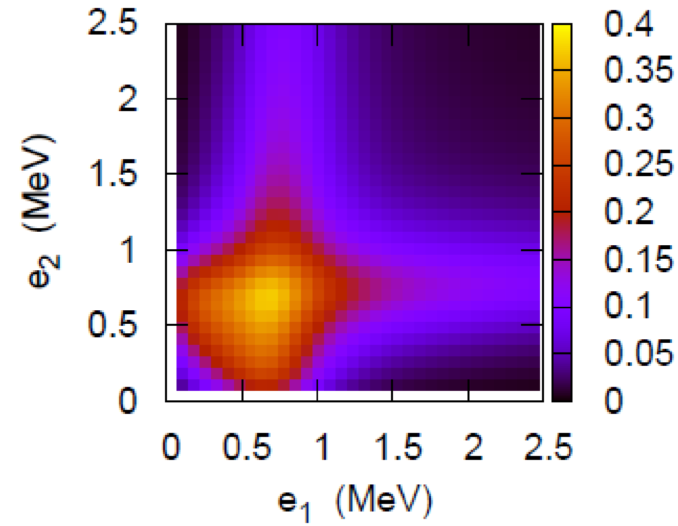


K.H., H. Sagawa, T. Nakamura, S. Shimoura, PRC80('09)031301(R)

^{11}Li

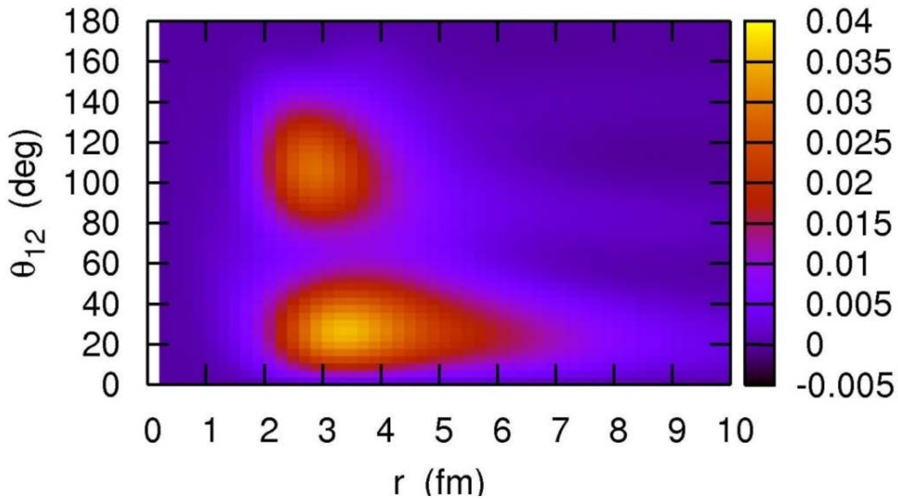


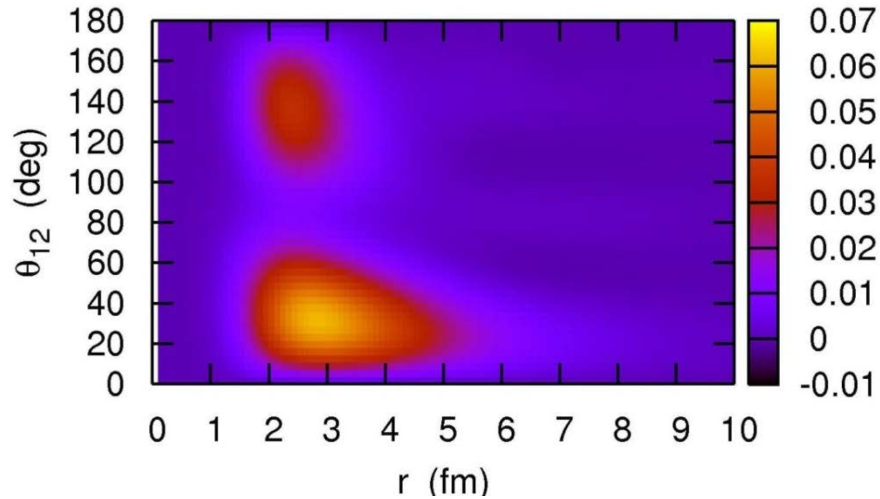
^{6}He



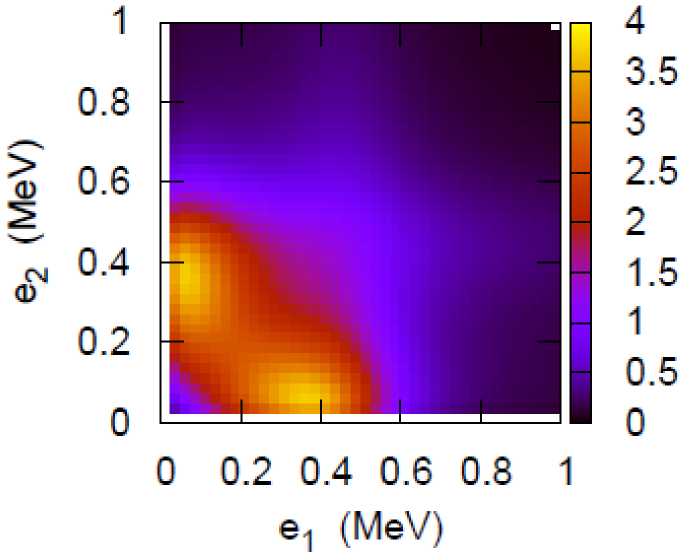
K.H., H. Sagawa, T. Nakamura, S. Shimoura, PRC80('09)031301(R)

cf. 基底状態の密度

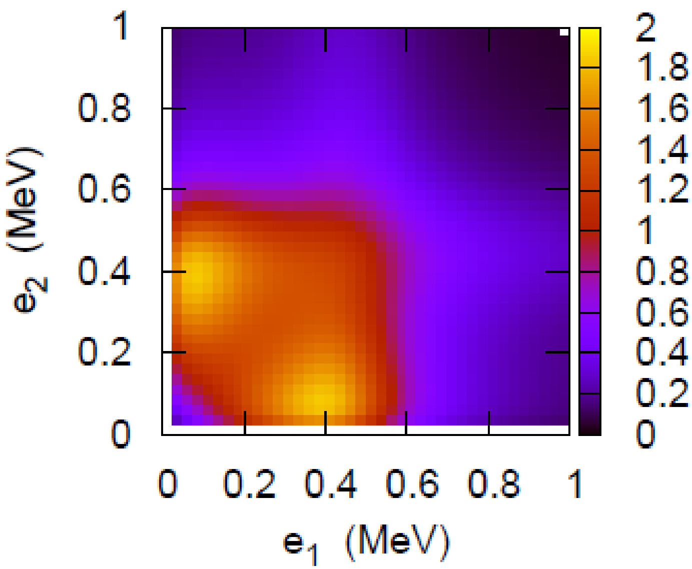




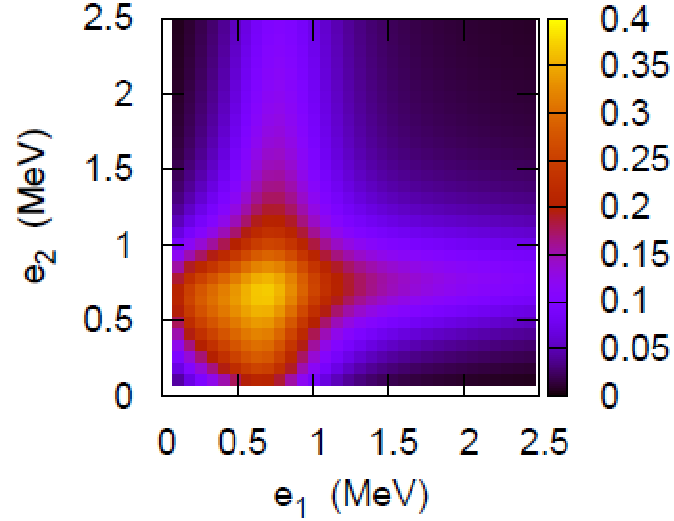
^{11}Li



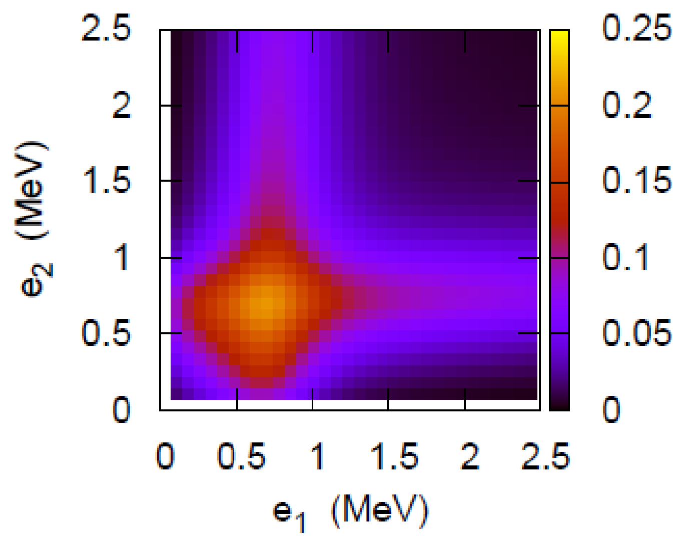
$v_{nn} = 0$



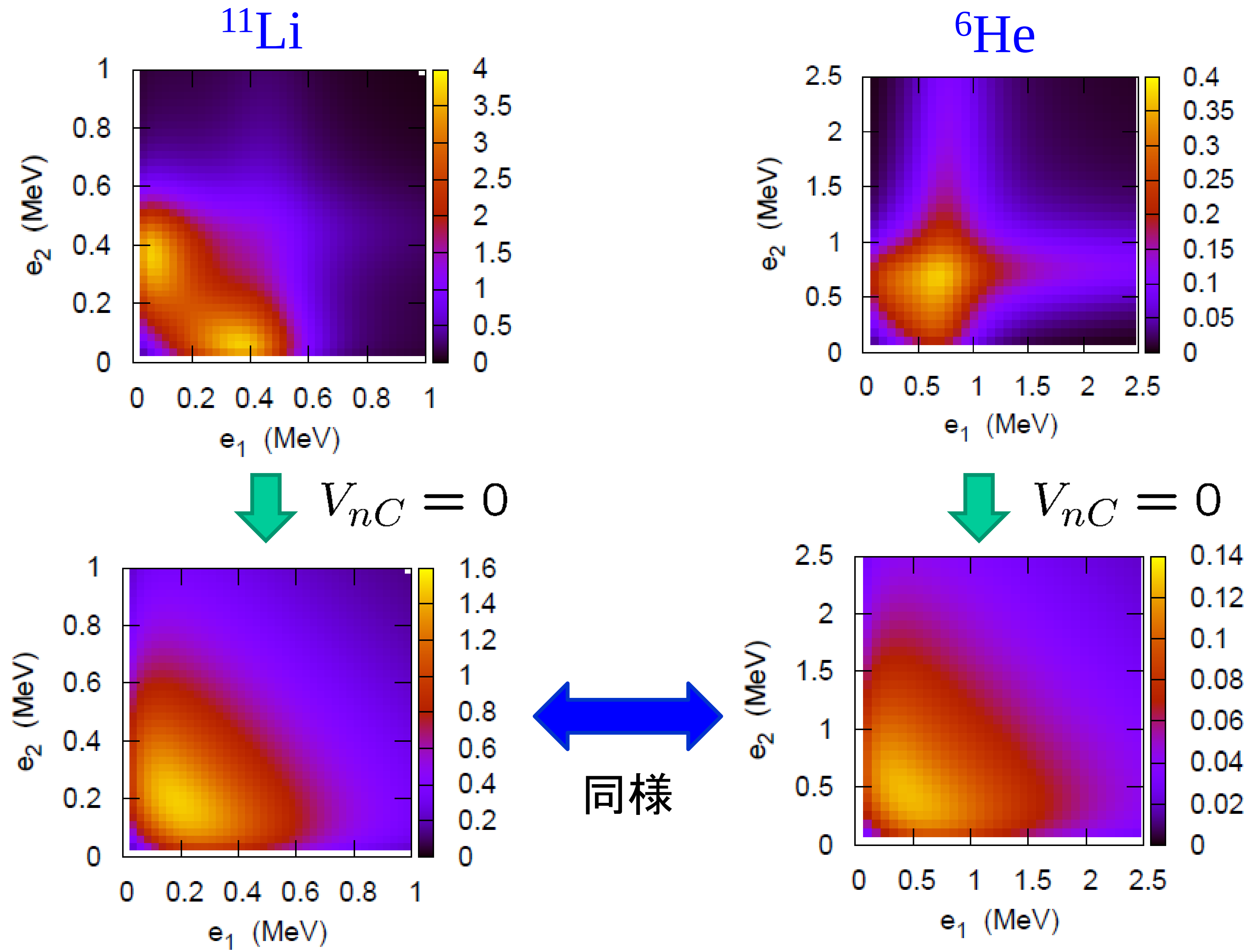
^{6}He



$v_{nn} = 0$



K.H., H. Sagawa, T. Nakamura, S. Shimoura, PRC80('09)031301(R)



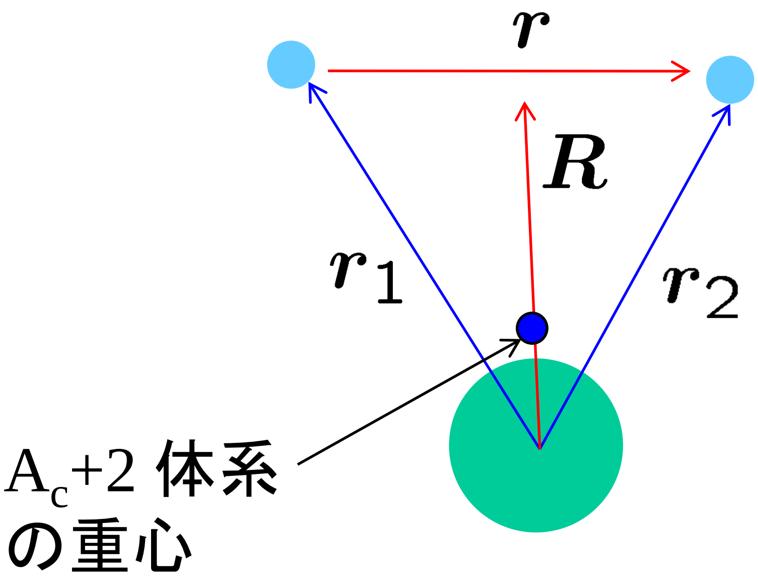
K.H., H. Sagawa, T. Nakamura, S. Shimoura, PRC80('09)031301(R)

3体模型に基づく matter radius の式

芯原子核の重心を原点にとる。

A_c+2 体系の重心は、

$$\boldsymbol{R}_{\rm cm} = \frac{A_c \boldsymbol{R}_{\rm core} + \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2}{A_C + 2} = \frac{\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2}{A_C + 2}$$



$$\langle r^2 \rangle_{A_c+2} = \frac{1}{A_c+2} \cdot \left\langle \sum_{i=1}^{A_c+2} (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R}_{\rm cm})^2 \right\rangle$$

$$= \frac{1}{A_c+2} \cdot \left\langle \left(\boldsymbol{r}_1 - \frac{\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2}{A_c+2} \right)^2 + \left(\boldsymbol{r}_2 - \frac{\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2}{A_c+2} \right)^2 + \sum_{i=3}^{A_c+2} (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R}_{\rm cm})^2 \right\rangle$$

(note)

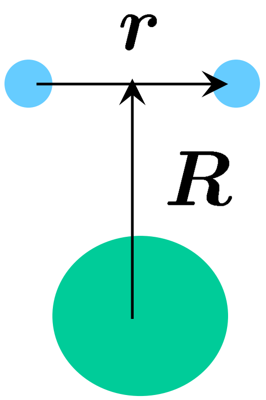
$$
\left\langle \sum_{i=3}^{A_c+2} (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R}_{\rm cm})^2 \right\rangle = \left\langle \sum_{i=3}^{A_c+2} \boldsymbol{r}_i^2 - 2\boldsymbol{R}_{\rm cm}\cdot \cancelto{0}{\sum_{i=3}^{A_c+2} \boldsymbol{r}_i} + A_c \cdot \boldsymbol{R}_{\rm cm}^2 \right\rangle
$$

$$
= A_c \langle r^2 \rangle_{A_c} + \frac{A_c}{(A_c+2)^2} \langle (\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)^2 \rangle
$$

$$
\begin{aligned}
\langle r^2 \rangle_{A_c+2} &= \frac{A_c}{A_c+2} \langle r^2 \rangle_{A_c} \\
&\quad + \frac{1}{(A_c+2)^3} \Big\langle (A_c^2 + 2A_c + 2)(r_1^2 + r_2^2) \\
&\quad -4(A_c+1)\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 + A_c(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)^2 \Big\rangle \\
&= \cdots \\
&= \frac{A_c}{A_c+2} \langle r^2 \rangle_{A_c} + \frac{2A_c}{(A_c+2)^2} \langle R^2 \rangle + \frac{1}{2(A_c+2)} \langle r^2 \rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R} &= (\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)/2 \\
\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2
\end{aligned}
$$

ボロミアン原子核の幾何学



$\boxed{\sqrt{\langle R^2 \rangle}}$ は、$B_{tot}(E1)$ から見積もることができる:

和則 $$\boxed{B_{\rm tot}(E1) \sim \frac{3}{\pi}\left(\frac{Z_c e}{A_c+2}\right)^2 \langle R^2 \rangle}$$

$\boxed{\sqrt{\langle r^2 \rangle}}$ は、物質密度半径から見積もることができる:

$$\boxed{\langle r_m^2 \rangle = \frac{A_c}{A_c+2}\langle r_m^2 \rangle_{A_c} + \frac{2A_c}{(A_c+2)^2}\langle R^2 \rangle + \frac{1}{2(A_c+2)}\langle r^2 \rangle}$$

または、2n 分解反応のHBT解析より見積もれる:

$$C(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) = \frac{P_2(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)}{P_1(\boldsymbol{p}_1)P_1(\boldsymbol{p}_2)}$$

(C.A. Bertulani and M.S. Hussein, PRC76('07)051602)

（参考）

Nucleus	Method	$\sqrt{\langle r_{nn}^2 \rangle}$ (fm)	$\sqrt{\langle r_{c-2n}^2 \rangle}$ (fm)	$\langle \theta_{nn} \rangle$ (deg.)
^{6}He	Matter radii	3.75+/-0.93	3.88+/-0.32	$51.6^{+11.2}_{-12.4}$
	HBT	5.9+/-1.2		$74.5^{+11.2}_{-13.1}$
	3body calc.	4.65	3.63	66.33
^{11}Li	Matter radii	5.50+/-2.24	5.15+/-0.33	$56.2^{+17.8}_{-21.3}$
	HBT	6.6+/-1.5		$65.2^{+11.4}_{-13.0}$
	3body calc.	6.43	5.13	65.29

K.H. and H. Sagawa,PRC76('07)047302

Nucleus	Method	$\sqrt{\langle r_{nn}^2 \rangle}$	$\sqrt{\langle r_{c-2n}^2 \rangle}$	$\langle \theta_{nn} \rangle$
^{6}He	HBT	5.9+/-1.2	3.36+/-0.39	83^{+20}_{-10}
^{11}Li	HBT	6.6+/-1.5	5.01+/-0.32	66^{+22}_{-18}

C.A. Bertulani and M.S. Hussein, PRC76('07)051602