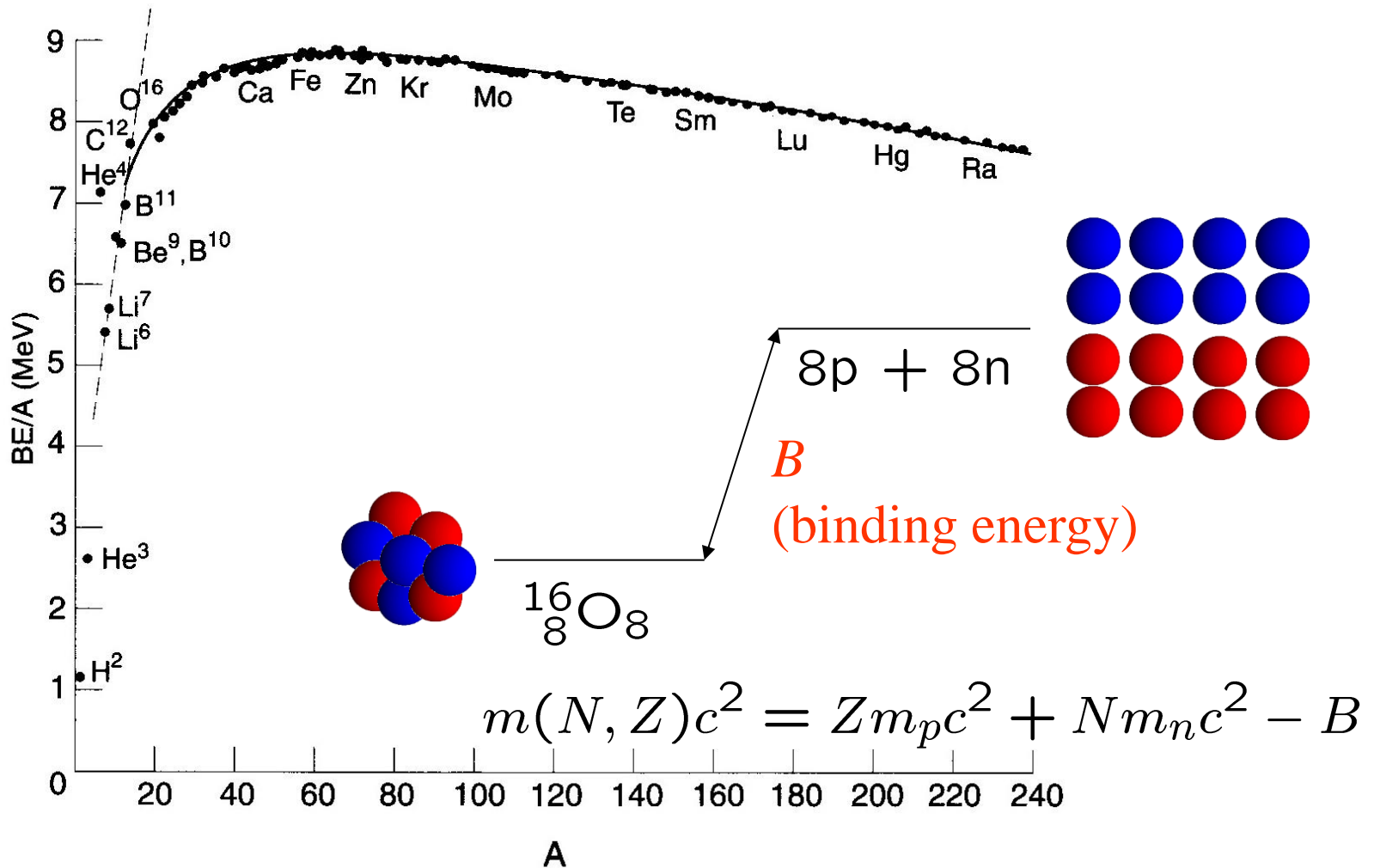
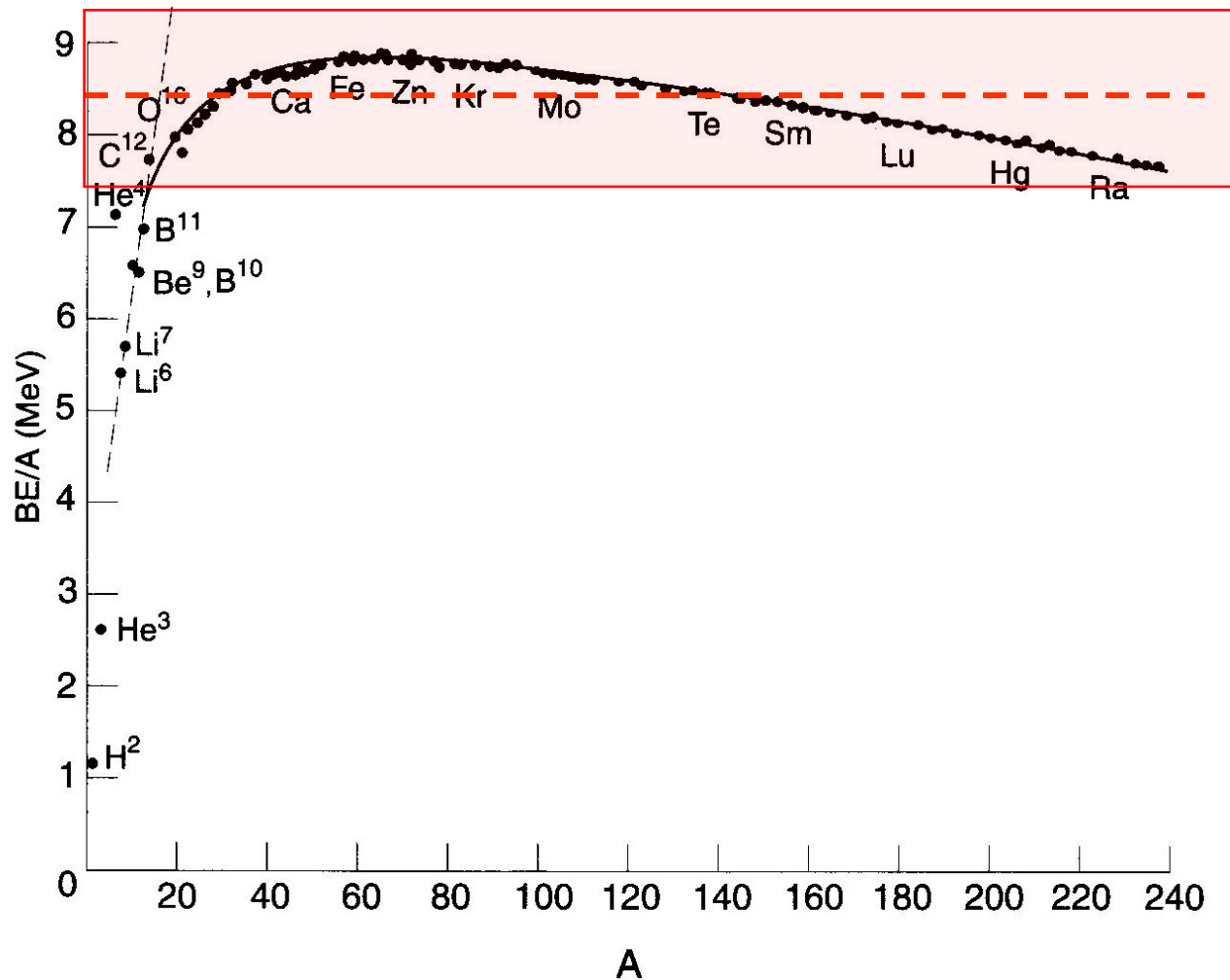


2. 原子核の平均場近似と魔法数

原子核の質量

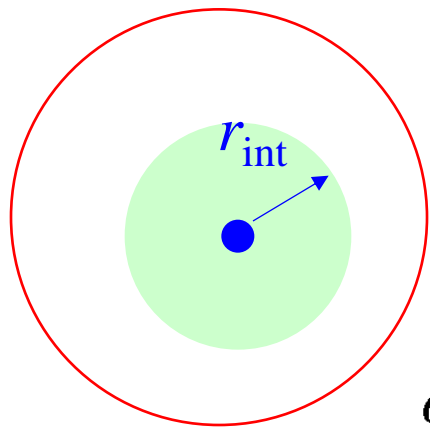




1. $B(N,Z)/A \sim 8.5 \text{ MeV} (A > 12) \iff$ 短距離力 (核子間相互作用)
 (ほぼ一定)

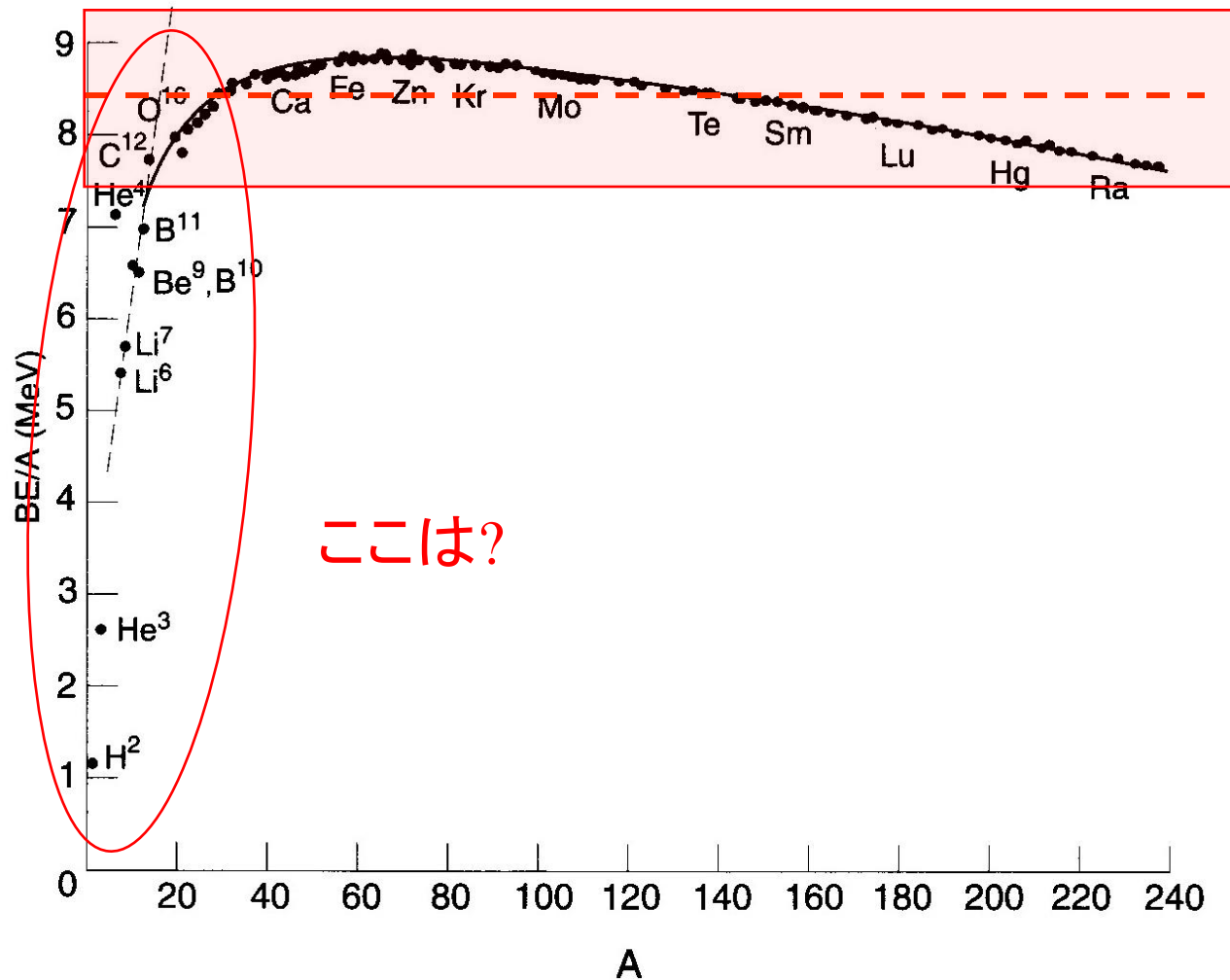
もし、それぞれの核子が近くの α 個の粒子とだけ相互作用するとしたら:

$$B \sim \alpha A/2 \longrightarrow B/A \sim \alpha/2 \text{ (const.)}$$



$$\alpha = \frac{4\pi}{3} r_{\text{int}}^3 \cdot \rho$$

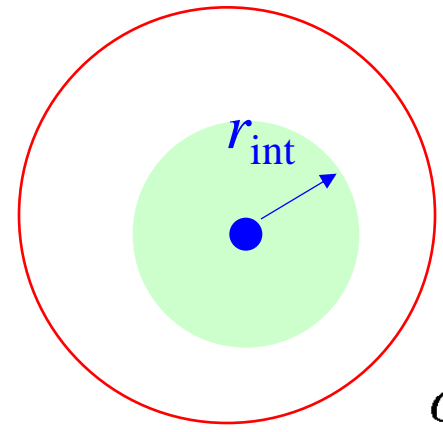




1. $B(N,Z)/A \sim 8.5 \text{ MeV} (A > 12) \iff$ 短距離力 (核子間相互作用)
 (ほぼ一定)

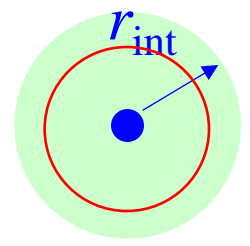
もし、それぞれの核子が近くの α 個の粒子とだけ相互作用するとしたら:

$$B \sim \alpha A/2 \longrightarrow B/A \sim \alpha/2 \text{ (const.)}$$

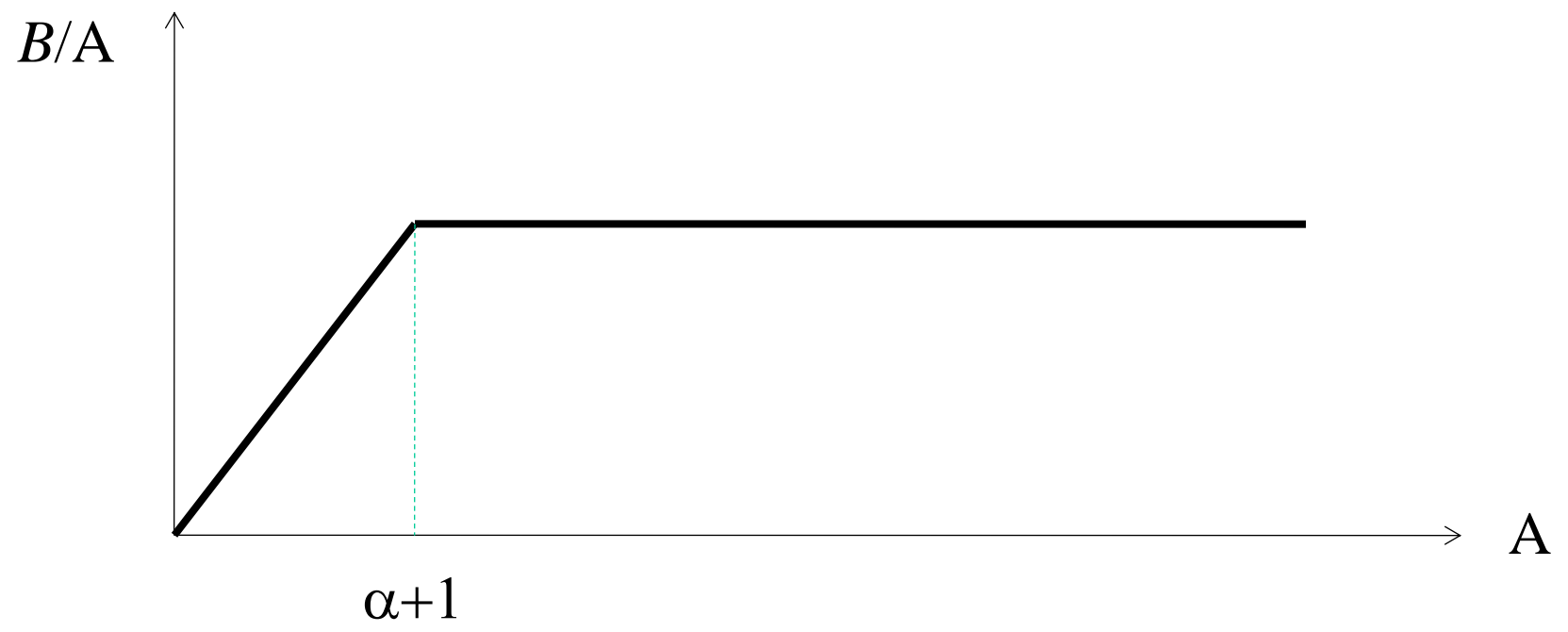


$$\alpha = \frac{4\pi}{3} r_{\text{int}}^3 \cdot \rho$$

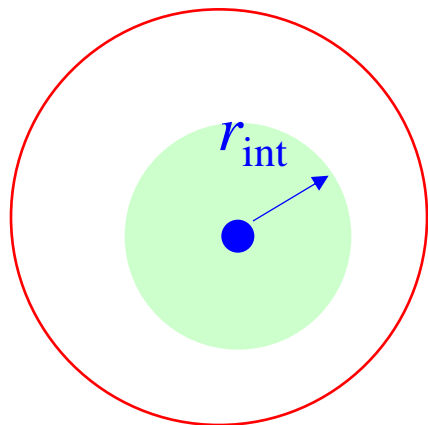
小さな原子核だと



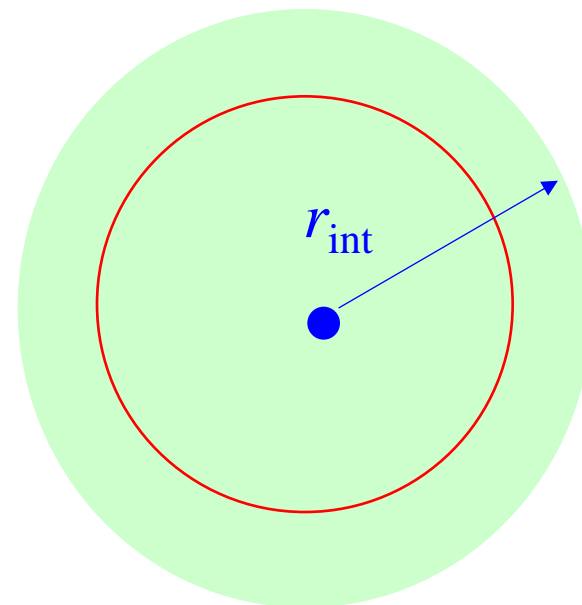
$$\rightarrow B/A \propto A - 1$$



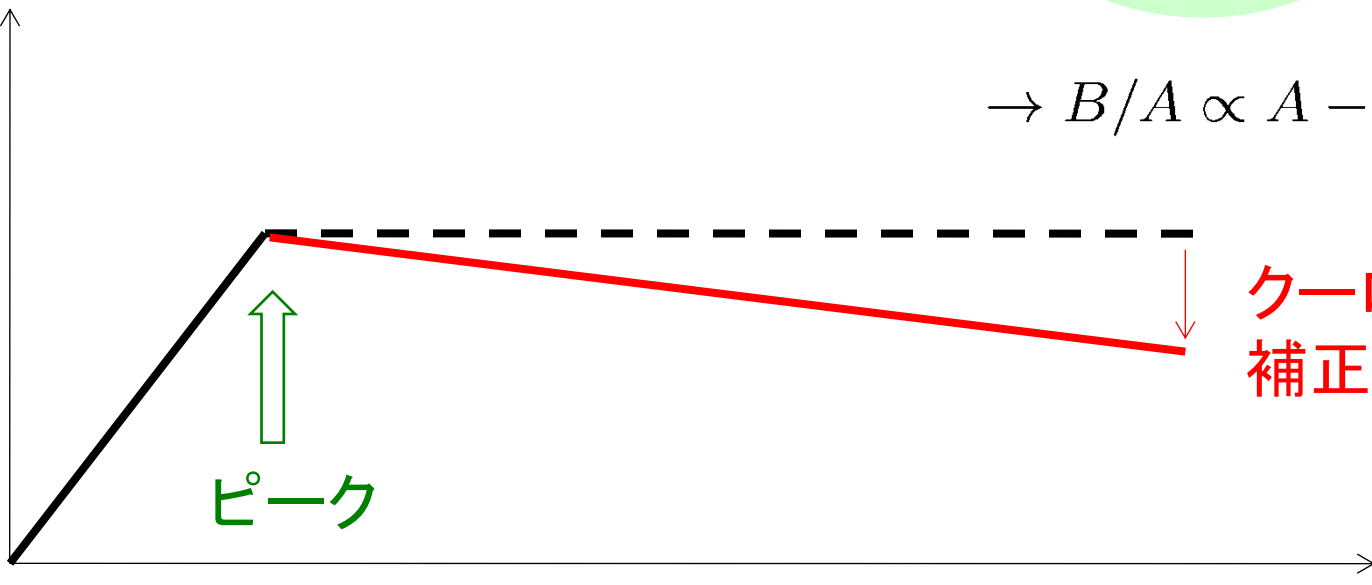
核力



クーロン力



B/A



$\rightarrow B/A \propto A - 1$

クーロンによる補正

ピーク

A

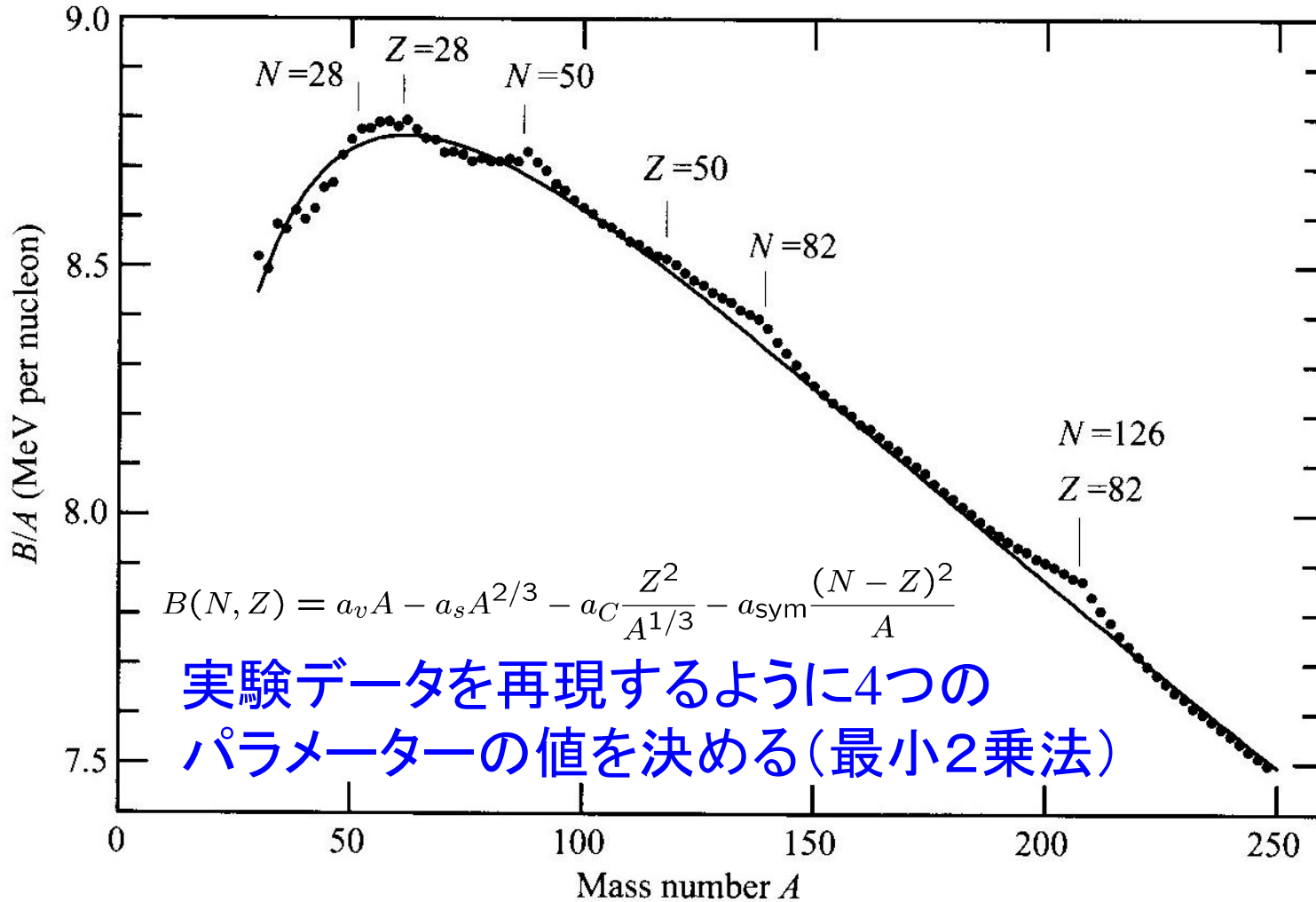
Semi-empirical mass formula

(Bethe-Weizacker formula: Liquid-drop model)

$$B(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}$$

- Volume energy: $a_v A$
- Surface energy: $-a_s A^{2/3}$
- Coulomb energy: $-a_C Z^2 / A^{1/3}$
- Symmetry energy: $-a_{\text{sym}} (N - Z)^2 / A$

どのくらい実験を再現するか？



✓ 大体OK、だけど所々にずれ

✓ $N, Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$ (魔法数)に対して束縛エネルギー大

→ 「殻構造」

生命誕生のための幸運な偶然

原子の魔法数

電子の数が 2, 10, 18, 36, 54, 86

元素の周期表

二重閉殻核

不活性ガス: He, Ne, Ar, Kr, Xe, Rn

Legend:

- 典型金属元素 (Typical metal element)
- 半金属元素 (Metalloid element)
- 非金属元素 (Non-metal element)
- 遷移金属元素 (Transition metal element)
- 希ガス (Noble gas)

原子核の魔法数

陽子または中性子の数が
2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 の時安定

→ 例えば $^{16}_8\text{O}_8$ (二重閉殻核)

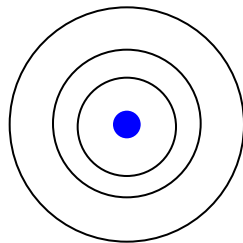
→ 酸素元素は元素合成の過程で数多く生成された

→ しかし、酸素は化学的には「活性」

→ 化学反応により様々な複雑な物質をつくり生命に至った

(note) 原子の魔法数 (貴ガス・希ガス)

He (Z=2), Ne (Z=10), Ar (Z=18), Kr (Z=36), Xe (Z=54), Rn (Z=86)



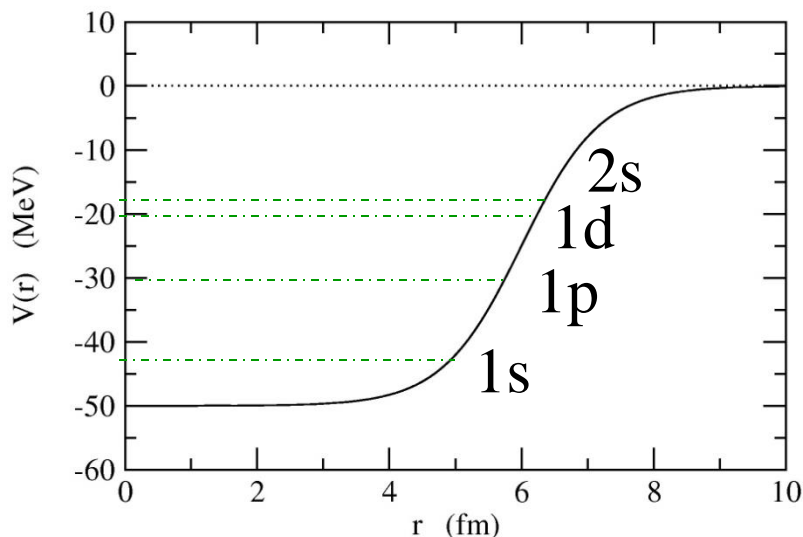
殻構造

原子核の周りを回る電子の軌道が埋まると安定になる

原子核物理における似た試み: ポテンシャル中の独立粒子運動

Woods-Saxon ポテンシャル

$$V(r) = -V_0/[1 + \exp((r - R_0)/a)]$$

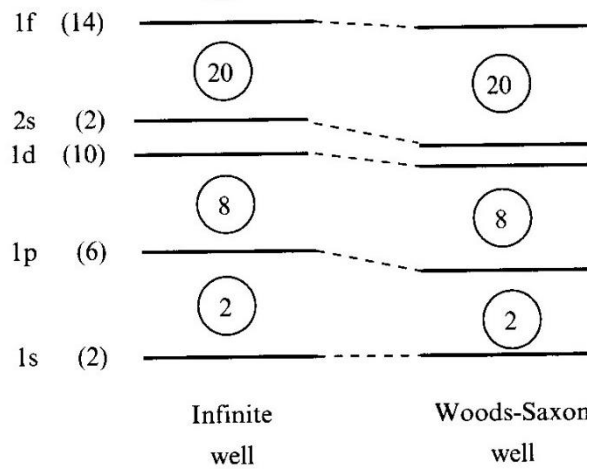


$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) - \epsilon \right] \psi(\mathbf{r}) = 0$$

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \chi_{m_s}$$

縮退度に応じて下のレベルから核子を順番につめていく

Nuclear magic numbers: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126



彦坂忠義

世界に先駆けて原子核の殻模型を提唱
原子力に関する先駆的な研究（原子炉の彦坂模型の提案）



写真提供：彦坂工務店

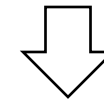
あまりにも研究の時期が「早すぎた」ため
偉大な業績が歴史に埋もれてしまった悲運の科学者 *Hidesaburo Hiyama*

- 1902 愛知県瀬戸郡（現豊橋市）に生まれる *1902-1989*
- 1920 旧制第二高等学校（仙台）入学
- 1926 東北帝国大学理学部物理学科卒業
東北帝国大学助手
- 1934 原子核の殻模型の提唱
- 1939 旧制山口高等学校教授
- 1941 大阪大学秦池正士研究室に内地留学
- 1943 旧制第二高等学校教授
- 1944 原子核の彦坂模型の提案
- 1945 旅順工科大学教授
- 1949 岩手大学教授
- 1951 新潟大学理学部教授
- 1968 東北学院大学教授（～1977）
- 1989 薨去

彦坂忠義(1902 – 1989)

1934 年

殻模型の考えに基づき
計算を行う



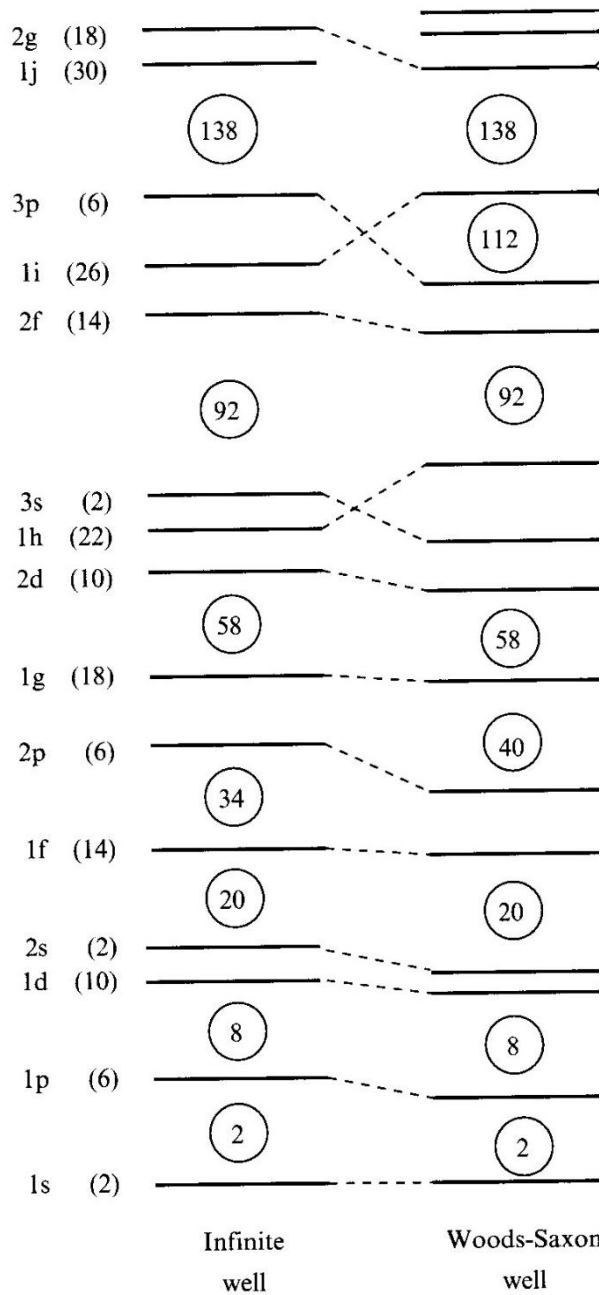
中性子の分離エネルギー、
原子核の安定領域、
磁気モーメント

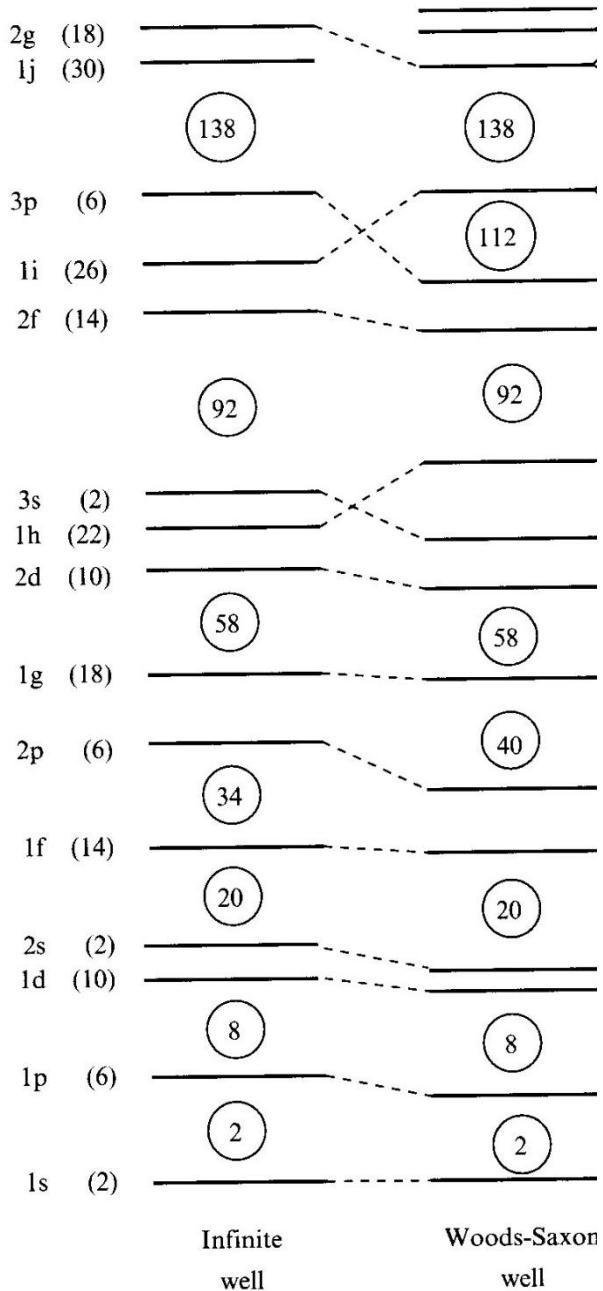
など当時測定されていた
実験データをきれいに説明

（ただし、当時、殻模型の
考えは受け入れられなかつた。）

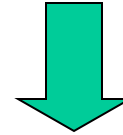
Phys. Rev. に論文を reject をされる。
独語に書き直し、東北大紀要に発表。

Nuclear magic numbers:
2, 8, 20, 28, 50, 82, 126

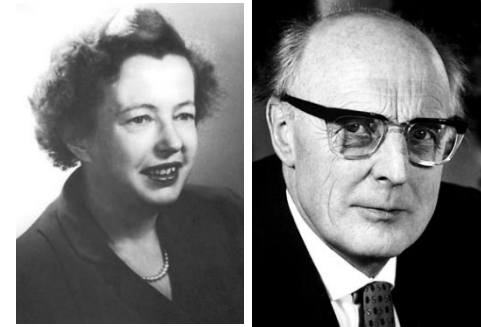




Woods-Saxon itself does not provide the correct magic numbers (2,8,20,28, 50,82,126).



Mayer and Jensen (1949):
Strong spin-orbit interaction



$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) + V_{ls}(r) \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} - \epsilon \right] \psi(\mathbf{r}) = 0$$

$$V_{ls}(r) \sim -\lambda \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \quad (\lambda > 0)$$

Infinite well Woods-Saxon well

jj 結合殻模型

軌道運動とスピンは独立の自由度

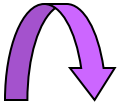
$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) - \epsilon \right] \psi(\mathbf{r}) = 0 \implies \psi_{lm m_s}(\mathbf{r}) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \chi_{m_s}$$

スピン・軌道力

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) + V_{ls}(r) \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} - \epsilon \right] \psi(\mathbf{r}) = 0$$

(note) $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s} \implies \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} = (j^2 - l^2 - s^2)/2$

l と s を結合して j を組む。


$$\begin{aligned} \psi_{jlm}(\mathbf{r}) &= \frac{u_{jl}(r)}{r} \mathcal{Y}_{jlm}(\hat{\mathbf{r}}) \\ \mathcal{Y}_{jlm}(\hat{\mathbf{r}}) &= \sum_{m_l, m_s} \langle l \ m_l \ 1/2 \ m_s | j \ m \rangle Y_{lm_l}(\hat{\mathbf{r}}) \chi_{m_s} \end{aligned}$$

$$j^2 |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = j(j+1) |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle$$

$$j_z |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = m |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle$$

$$l^2 |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = l(l+1) |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle$$

$$s^2 |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = 3/4 |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle$$

jj 結合殻模型

l と s を結合して j を組む。

$$\psi_{jlm}(\mathbf{r}) = \frac{u_{jl}(r)}{r} \mathcal{Y}_{jlm}(\hat{\mathbf{r}})$$

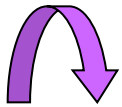
$$j^2 |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = j(j+1) |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle$$

$$j_z |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = m |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle$$

$$l^2 |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = l(l+1) |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle$$

$$s^2 |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = \frac{3}{4} |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle$$

(note) $j = l + s \implies l \cdot s = (j^2 - l^2 - s^2)/2$



$$l \cdot s |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = \frac{1}{2} \left(j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right) |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle$$

$$l \cdot s |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = \frac{l}{2} |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle \quad (j = l + 1/2)$$

$$l \cdot s |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = -\frac{l+1}{2} |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle \quad (j = l - 1/2)$$

符号が逆！

jj 結合殻模型

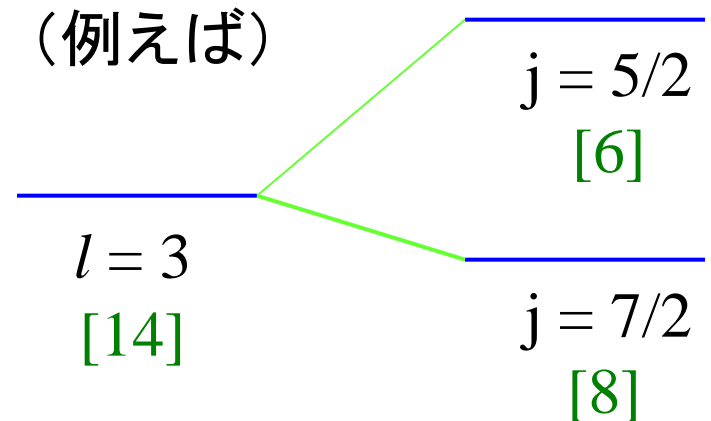
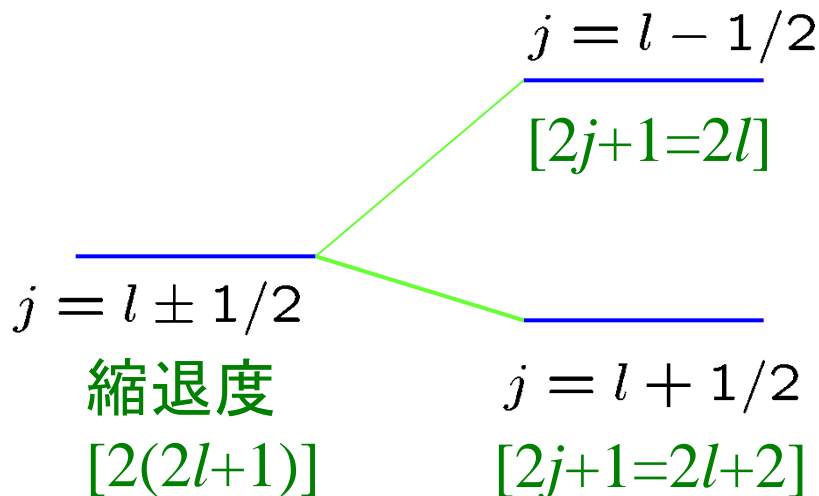
$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) + V_{ls}(r) \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} - \epsilon \right] \psi(\mathbf{r}) = 0$$

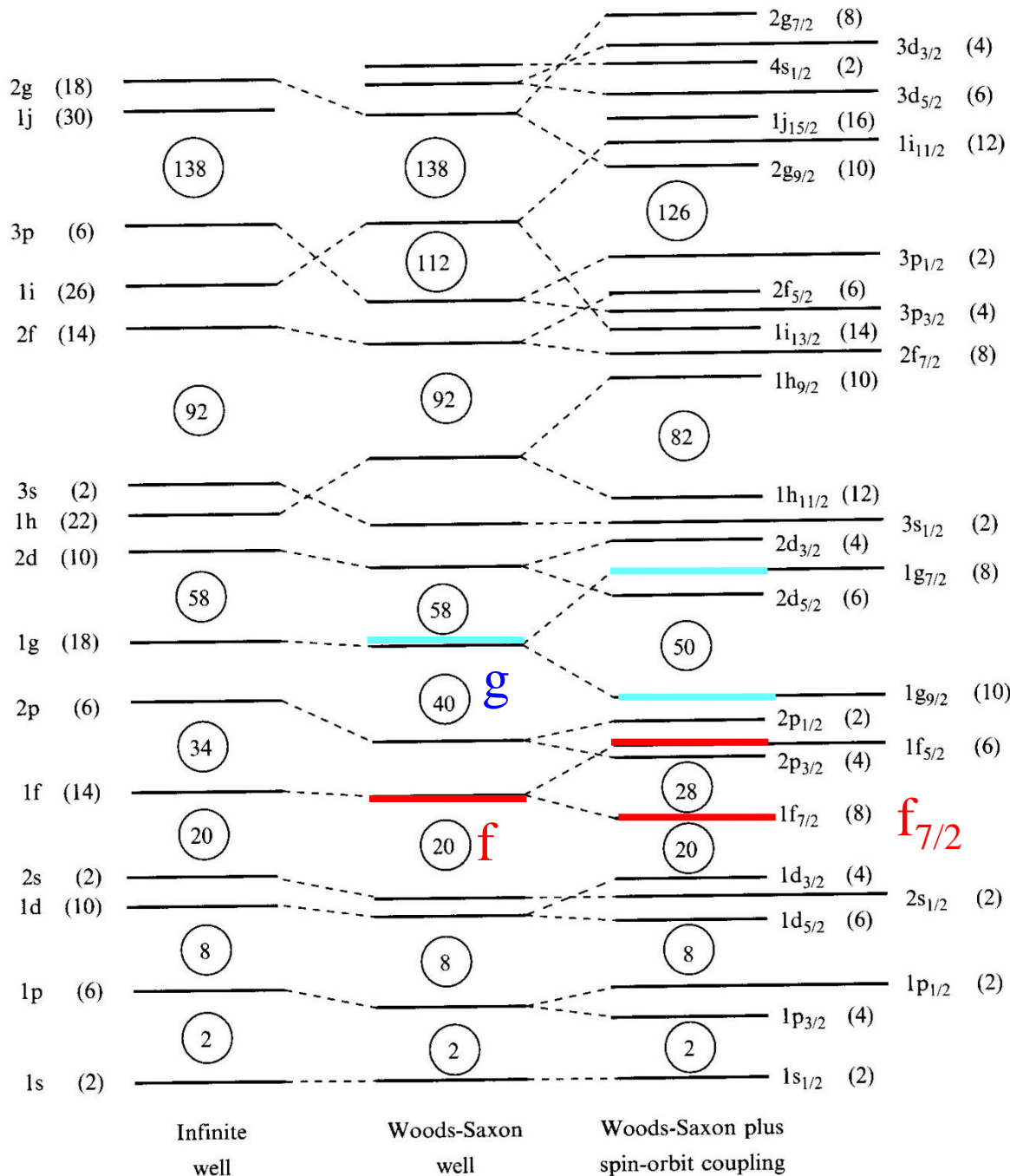
$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{s} |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = \frac{l}{2} |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle \quad (j = l + 1/2)$$

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{s} |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = -\frac{l+1}{2} |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle \quad (j = l - 1/2)$$

符号が逆！

$j = l \pm 1/2$ で準位が分離





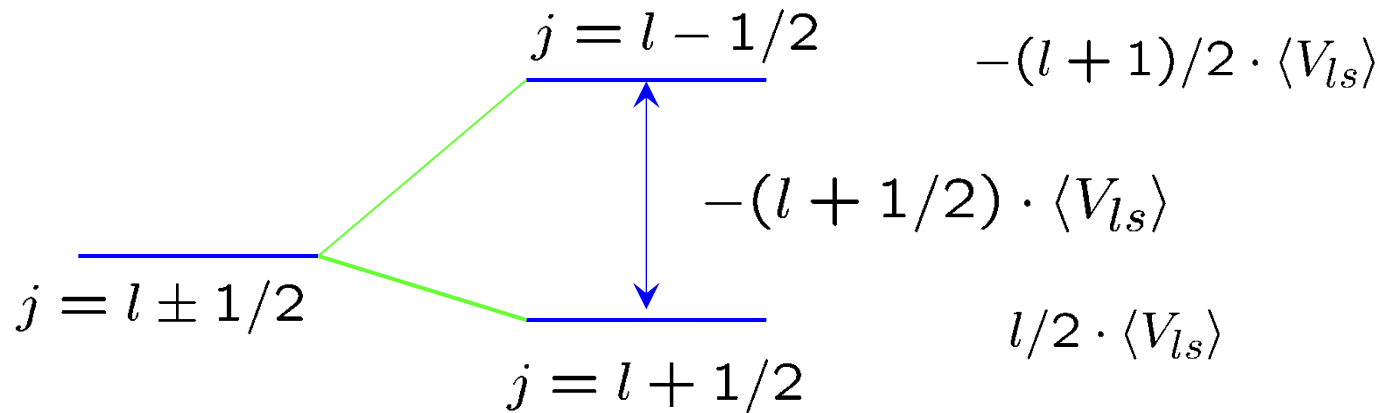
g [18] → g_{7/2} [8]
 → g_{9/2} [10]

f [14] → f_{5/2} [6]
 → f_{7/2} [8]

jj 結合殻模型

$$l \cdot s |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = \frac{l}{2} |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle \quad (j = l + 1/2)$$

$$l \cdot s |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = -\frac{l+1}{2} |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle \quad (j = l - 1/2)$$

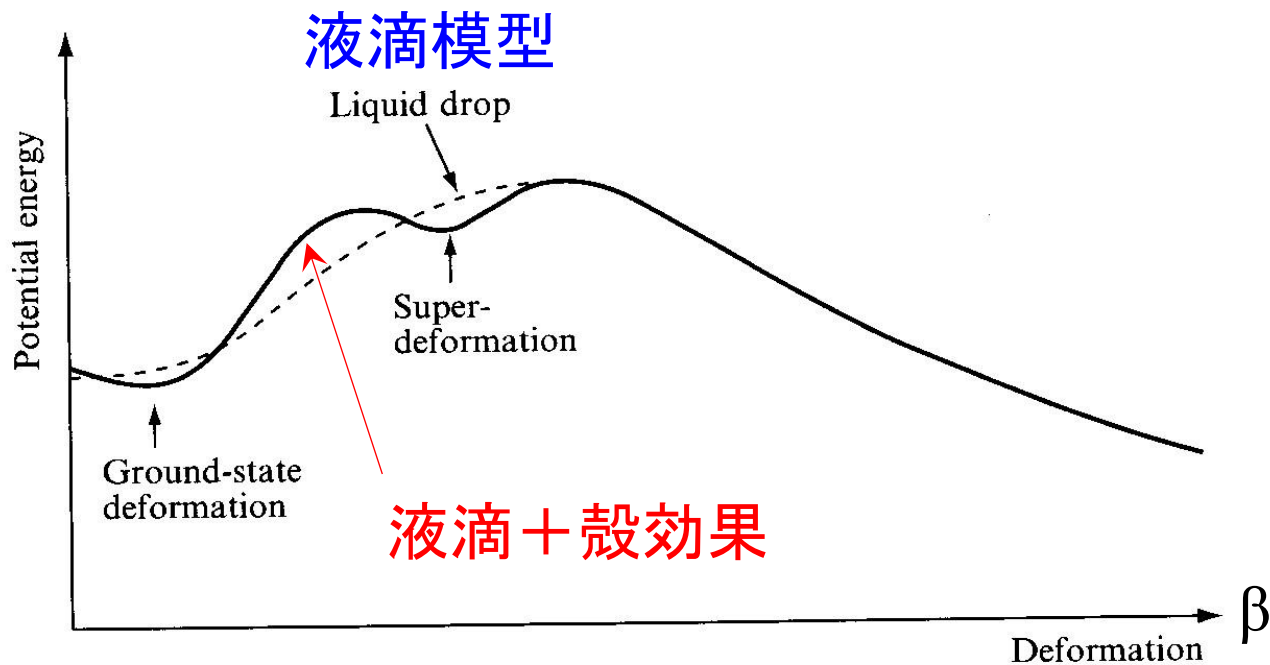


$j = l \pm 1/2$ で準位が分離: l が大きくなればなるほど
分離は大

* ただし、スピン平均はゼロ:

$$+\frac{l}{2} (2(l+1/2) + 1) - \frac{l+1}{2} (2(l-1/2) + 1) = 0$$

殻構造の帰結：原子核の変形



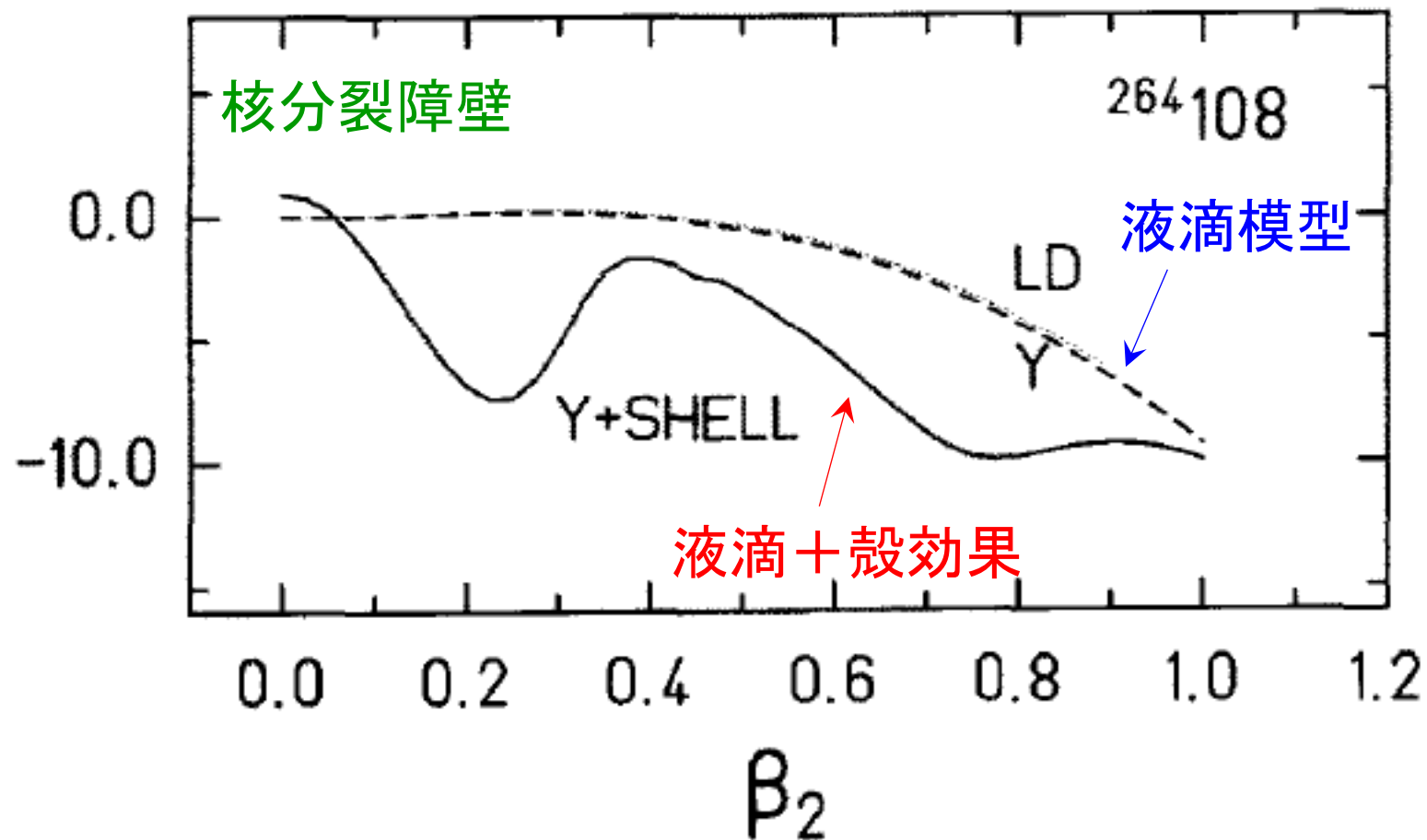
液滴模型
殻効果



必ず球形

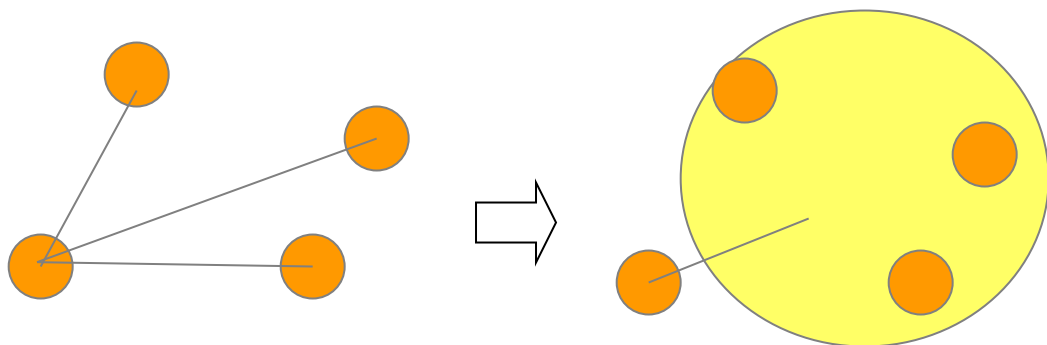
変形状態が基底状態になる場合あり

殻構造の帰結：超重核の安定化



殻効果により核分裂障壁が高くなり原子核が安定化する

平均場理論



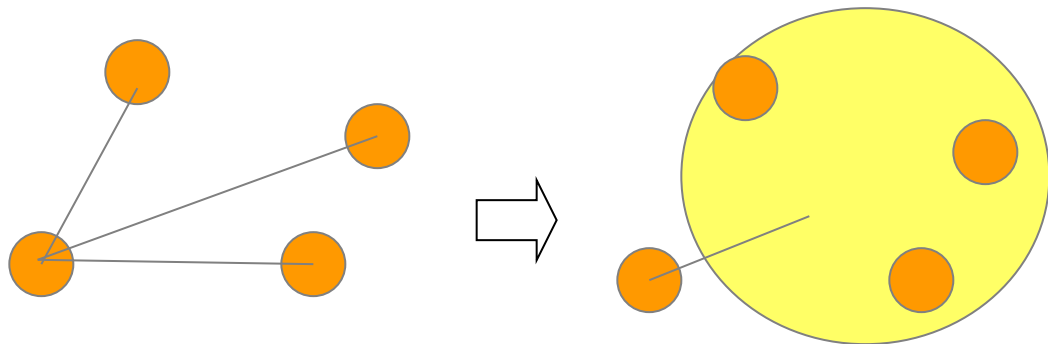
他の核子との相互作用を平均的に取り扱う

無視する

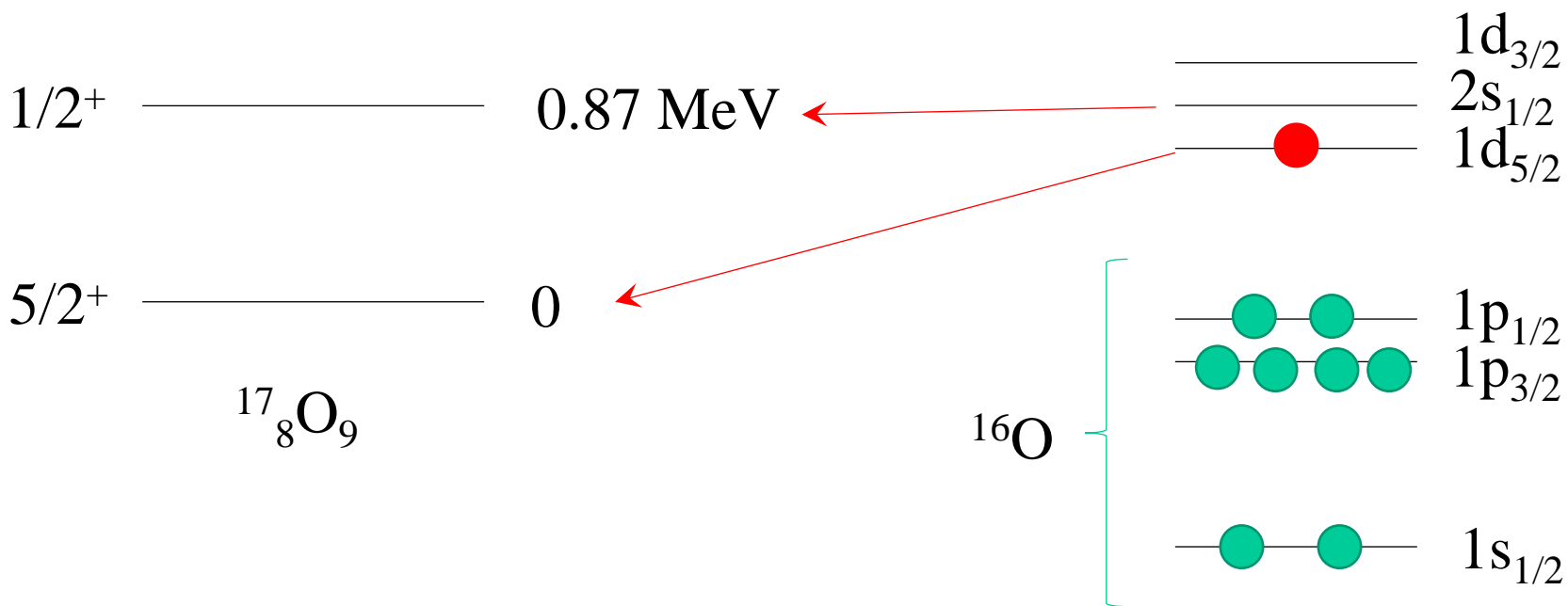
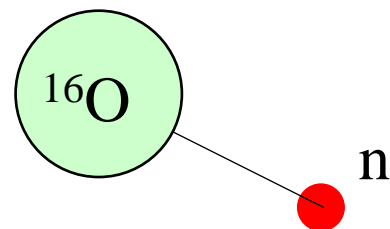
$$H = \sum_i T_i + \sum_{i < j} v_{ij} \rightarrow H = \sum_i (T_i + V_i) + \underbrace{\sum_{i < j} v_{ij} - \sum_i V_i}_{\text{平均からのずれ (残留相互作用)}}$$

平均からのずれ
(残留相互作用)

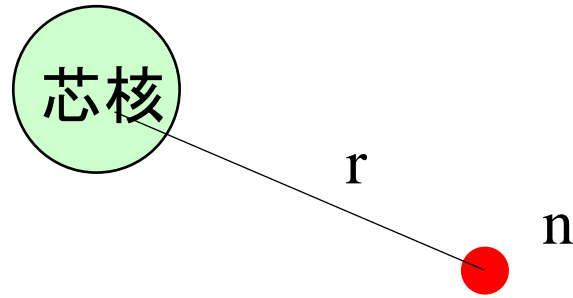
平均場理論



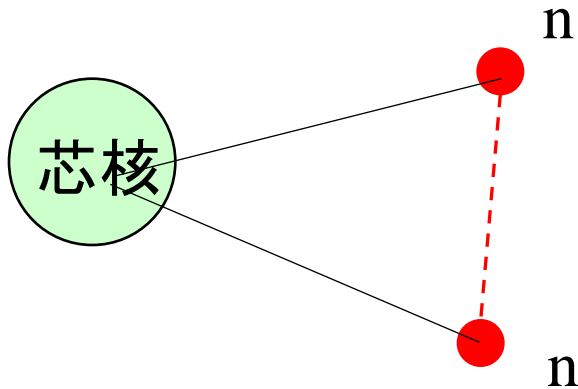
他の核子との相互作用を平均的に取り扱う



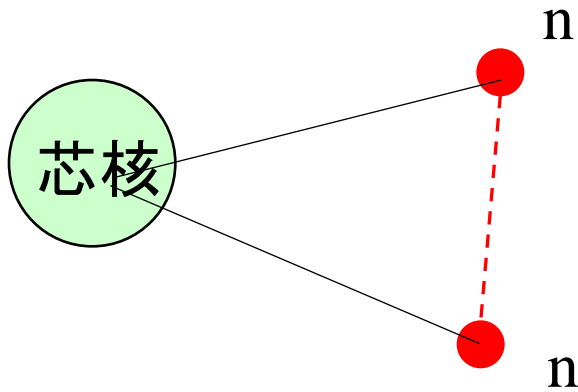
対相関



芯核のまわりに中性子が2個あるとどうなる？

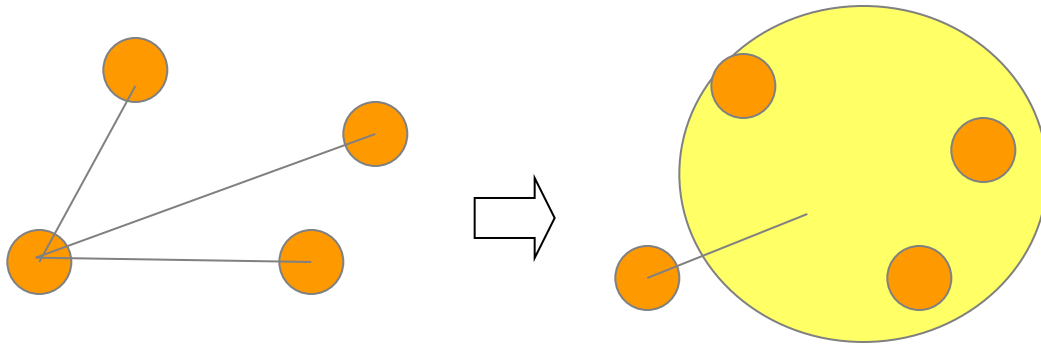


2中性子間に働く相互作用の影響は？



2中性子間に働く相互作用の影響は？

平均場理論

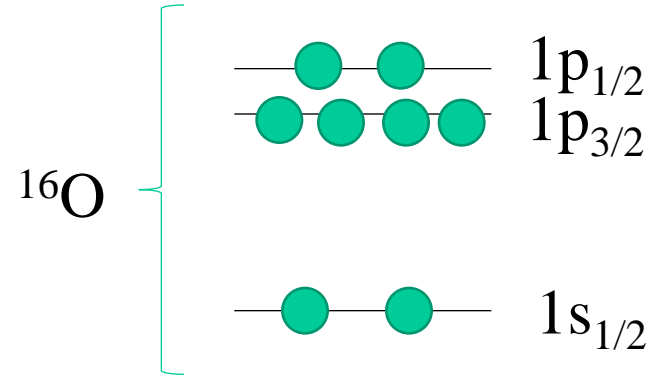
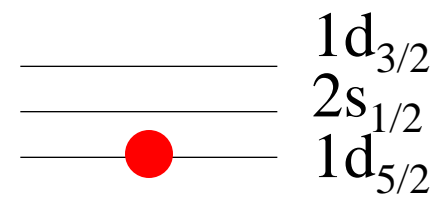


他の核子との相互作用を平均的に取り扱う

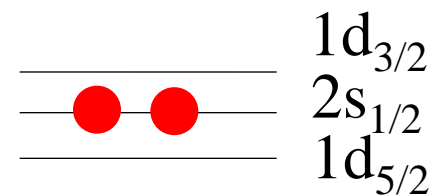
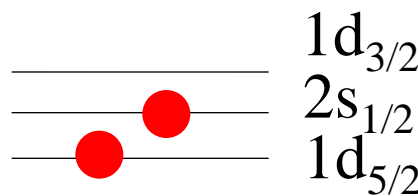
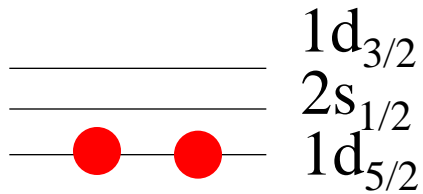
単純な平均場近似 → 2中性子が独立に運動
(2中性子間の相互作用は平均ポテンシャル
にのみ反映される)

$1/2^+$ ————— 0.87 MeV

$5/2^+$ ————— 0
 $^{17}_8\text{O}_9$



→ ^{18}O の状態を予想すると。。。



$E = 0$

$I^\pi = d_{5/2} \times d_{5/2}$
 $= 0^+, 2^+, 4^+$

$E = 0.87 \text{ MeV}$

$I^\pi = d_{5/2} \times s_{1/2}$
 $= 2^+, 3^+$

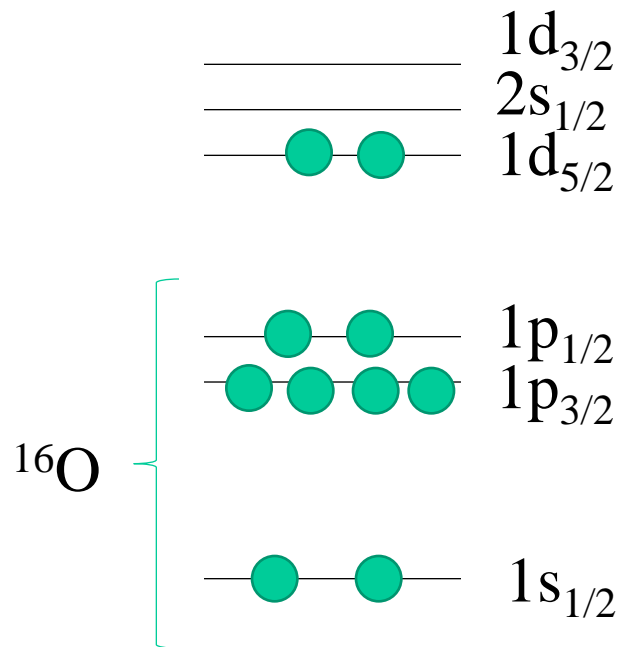
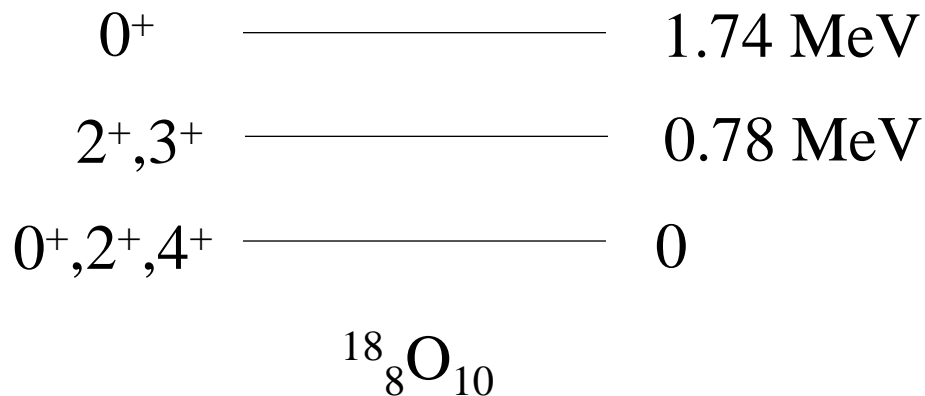
$E = 0.87 \times 2 = 1.74 \text{ MeV}$

$I^\pi = s_{1/2} \times s_{1/2} = 0^+$

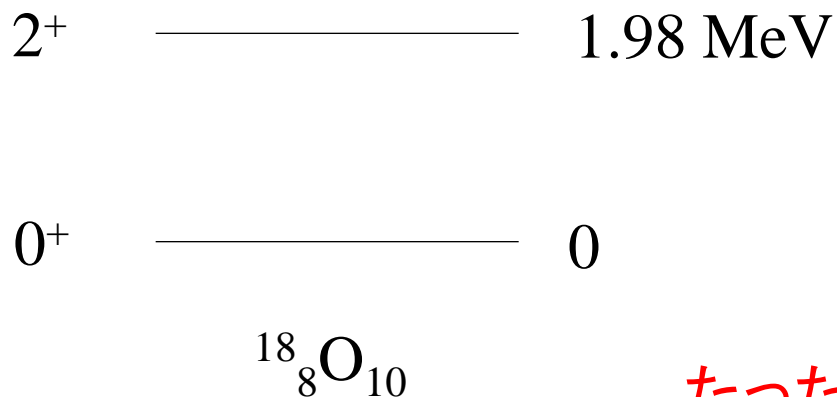
2 MeV 以下に少なくとも6本の状態(?)

単純な平均場近似:

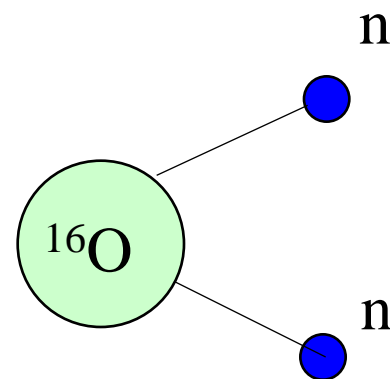
6 levels



実際には:



たったの2本!



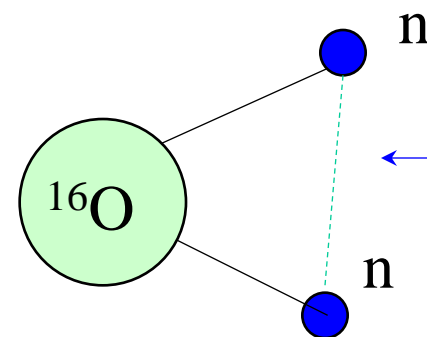
$$H = \sum_i T_i + \sum_{i < j} v_{ij} \rightarrow H = \sum_i (T_i + V_i) + \underbrace{\sum_{i < j} v_{ij} - \sum_i V_i}_{\text{平均からのずれ (残留相互作用)}}$$

平均からのずれ
(残留相互作用)

残留相互作用は完全に無視してもよいのか?

答え: no

開殻原子核では重要な役割を果たす
ことが知られている(ペアリング)



(note) 摂動論がよい条件

$$H = H_0 + \Delta V$$

$$H_0 |\phi_n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)} |\phi_n^{(0)}\rangle$$

$$\rightarrow |\phi_n\rangle = |\phi_n^{(0)}\rangle + \sum_{m \neq n} \frac{\langle \phi_m^{(0)} | \Delta V | \phi_n^{(0)} \rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} |\phi_m^{(0)}\rangle$$



$$|\langle \phi_m^{(0)} | \Delta V | \phi_n^{(0)} \rangle| \ll |E_n^{(0)} - E_m^{(0)}|$$

なら ΔV を無視できる

$$H = H_0 + \Delta V$$

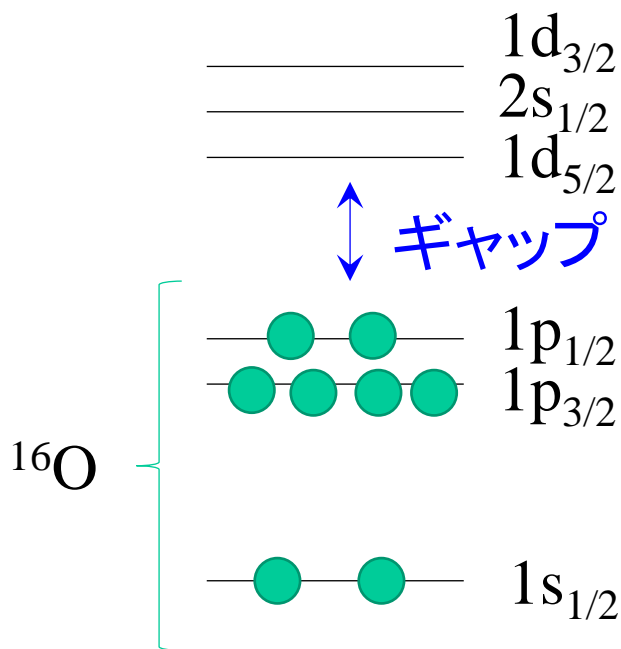


$$|\langle \phi_m^{(0)} | \Delta V | \phi_n^{(0)} \rangle| \ll |E_n^{(0)} - E_m^{(0)}|$$

なら ΔV を無視できる

$$H = \sum_i T_i + \sum_{i < j} v_{ij} \rightarrow H = \sum_i (T_i + V_i) + \underbrace{\sum_{i < j} v_{ij} - \sum_i V_i}_{\text{平均からのずれ (残留相互作用)}}$$

平均からのずれ
(残留相互作用)



閉殻核:

ギャップのために ΔE が大きい
→ 残留相互作用を無視できる

開殻核: ΔE が小さい

→ 残留相互作用を無視できない

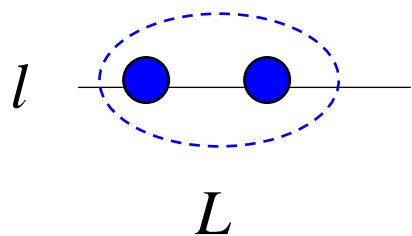
対相関(ペアリング)

$$H = \sum_{i=1}^A \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + V_{\text{HF}}(i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} v(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) - \sum_i V_{\text{HF}}(i)$$

簡単のために、残留相互作用としてデルタ関数を仮定してみる
(超短距離力)

$$v_{\text{res}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sim -g \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

摂動論で残留相互作用の効果を見積もってみる:



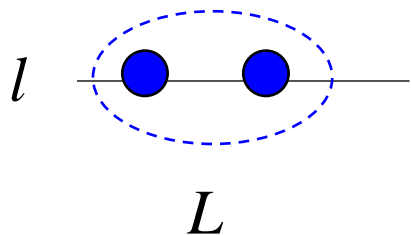
非摂動な波動関数:

角運動量 l の状態に中性子2個、それが
全角運動量 L を組んでいる

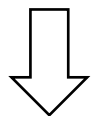
$$|(ll)LM\rangle = \sum_{m,m'} \langle lmlm' | LM \rangle \psi_{lm}(\mathbf{r}) \psi_{lm'}(\mathbf{r}')$$

対相関(ペアリング)

$$v_{\text{res}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sim -g \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$



$$|(ll)LM\rangle = \sum_{m,m'} \langle lmlm'|LM\rangle \psi_{lm}(\mathbf{r}) \psi_{lm'}(\mathbf{r}')$$



残留相互作用によるエネルギー変化:

$$\begin{aligned} \Delta E_L &= \langle (ll)LM | v_{\text{res}} | (ll)LM \rangle \\ &= -g I_r^{(l)} \frac{(2l+1)^2}{4\pi} \begin{pmatrix} l & l & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \end{aligned}$$

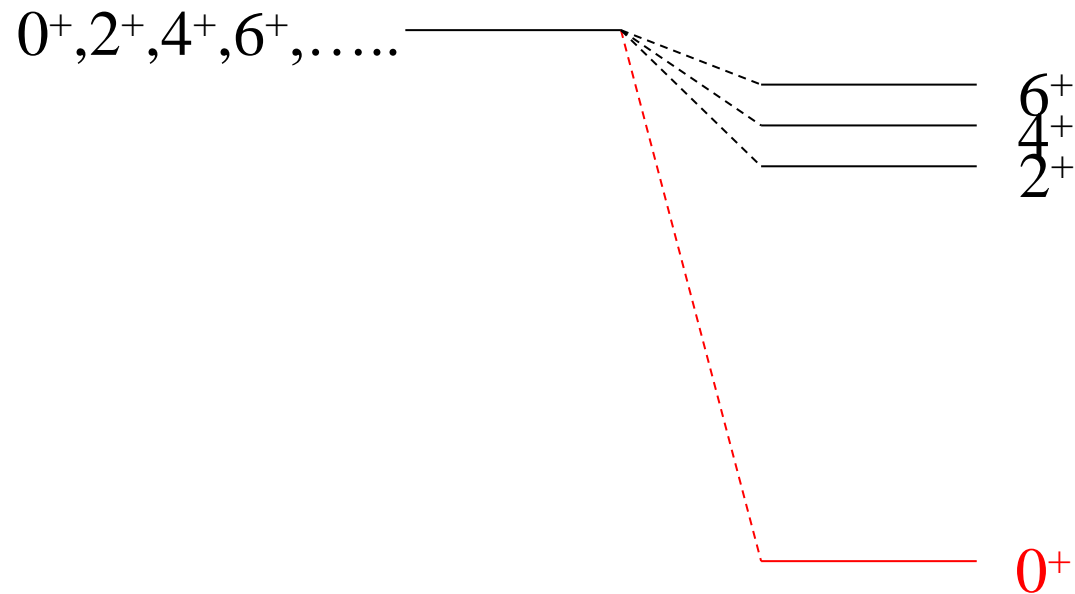
$$I_r^{(l)} = \int_0^\infty r^2 dr (R_l(r))^4$$

$$\Delta E_L = -g I_r^{(l)} \frac{(2l+1)^2}{4\pi} \begin{pmatrix} l & l & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \equiv -g I_r^{(l)} \frac{A(l; L)}{4\pi}$$

$A(l; L)$	$L=0$	$L=2$	$L=4$	$L=6$	$L=8$
$l=2$	5.00	1.43	1.43	---	---
$l=3$	7.00	1.87	1.27	1.63	---
$l=4$	9.00	2.34	1.46	1.26	1.81

$$\Delta E_L = -g I_r^{(l)} \frac{(2l+1)^2}{4\pi} \begin{pmatrix} l & l & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \equiv -g I_r^{(l)} \frac{A(l; L)}{4\pi}$$

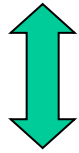
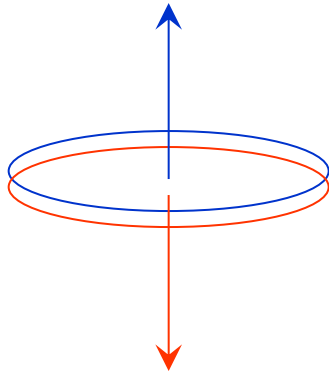
$A(l; L)$	$L=0$	$L=2$	$L=4$	$L=6$	$L=8$
$l=2$	5.00	1.43	1.43	---	---
$l=3$	7.00	1.87	1.27	1.63	---
$l=4$	9.00	2.34	1.46	1.26	1.81



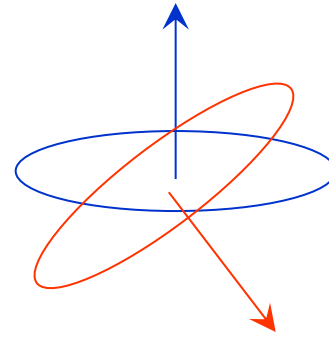
残留相互
作用なし

残留相互
作用あり

簡単な解釈:



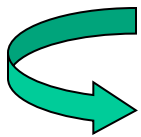
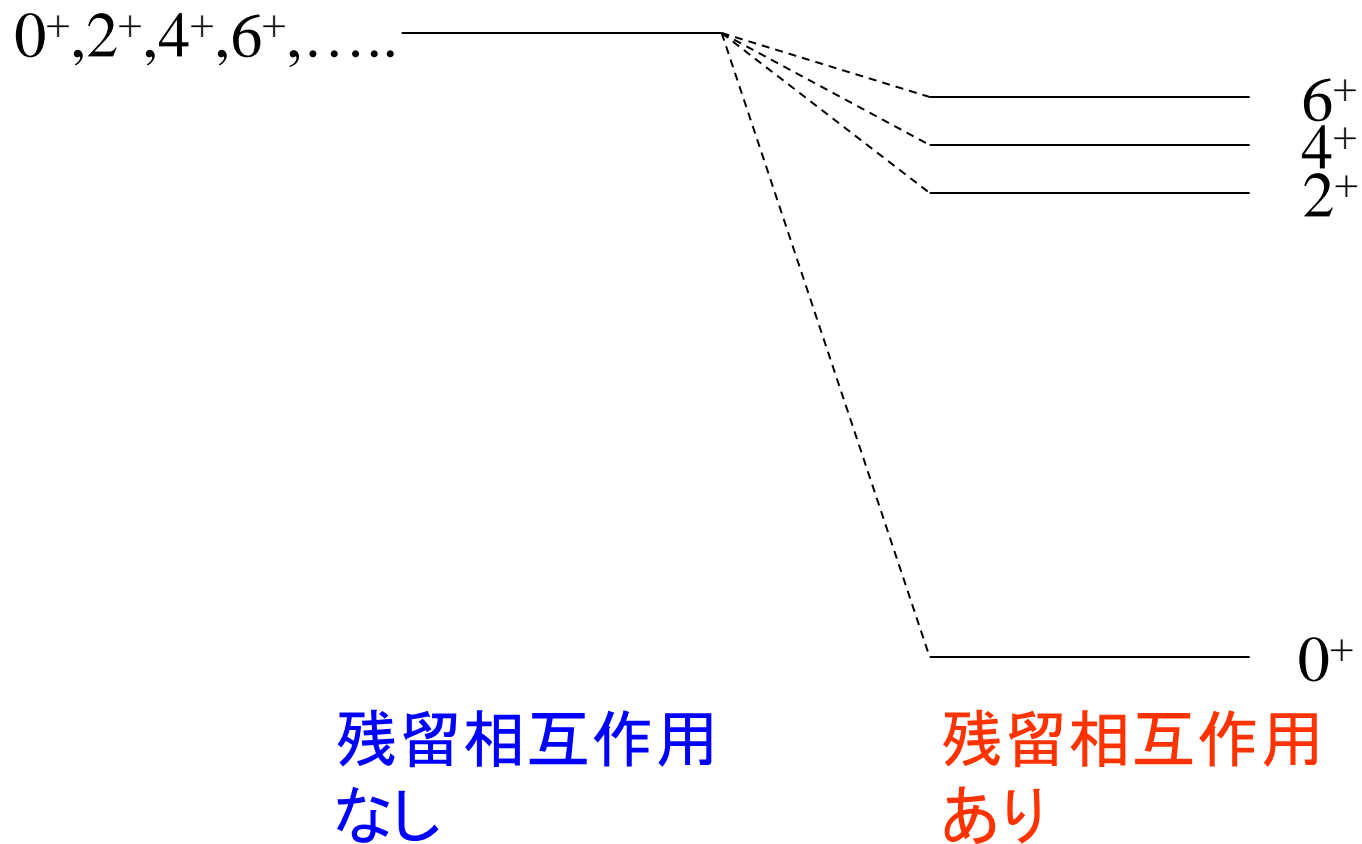
$L=0$ 対



$L \neq 0$ 対

$L=0$ 対に対して空間的重なりが最大(エネルギー的に得)

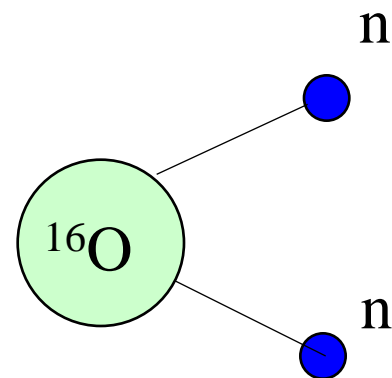
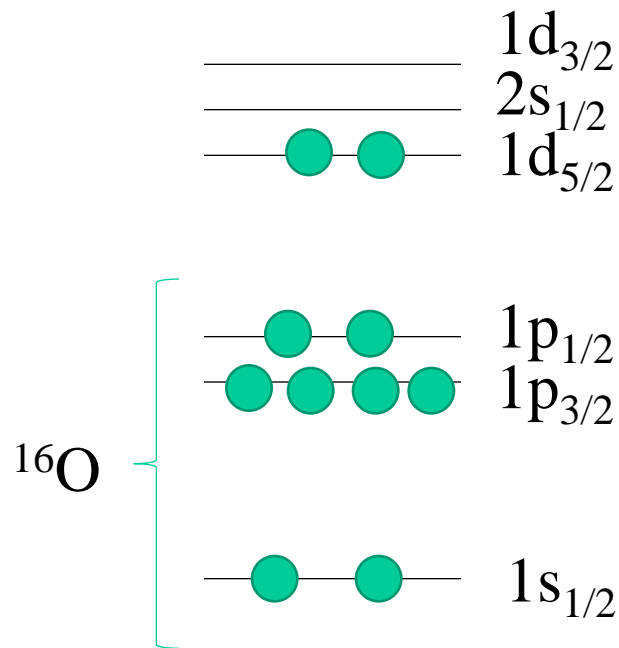
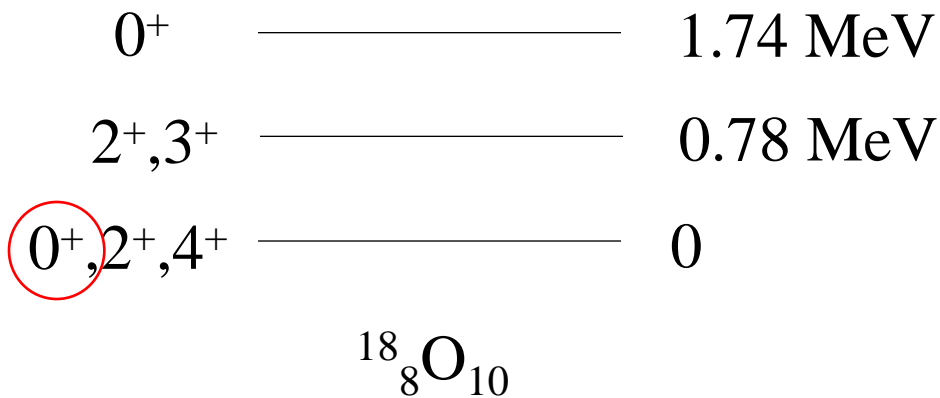
“対相関”



原子核の基底状態のスピ

- 偶々核: 例外なしに 0^+
- 奇核: 最外殻核子の角運動量と一致

単純な平均場近似:



単純な平均場近似:

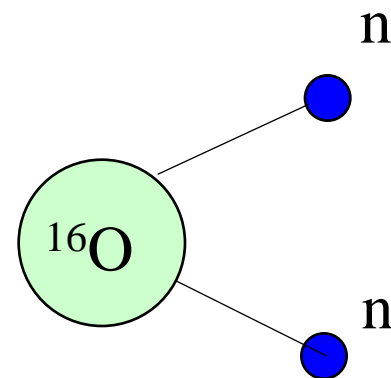
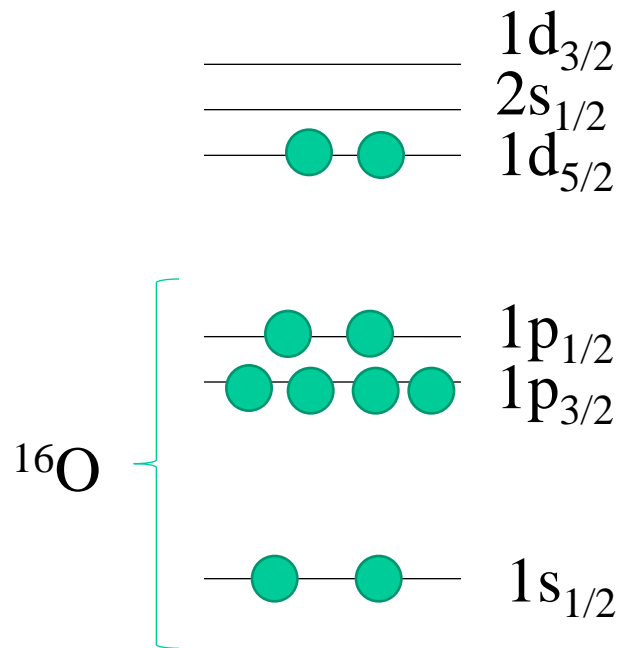
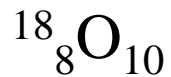
0^+ ————— 1.74 MeV

$2^+, 3^+$ ————— 0.78 MeV

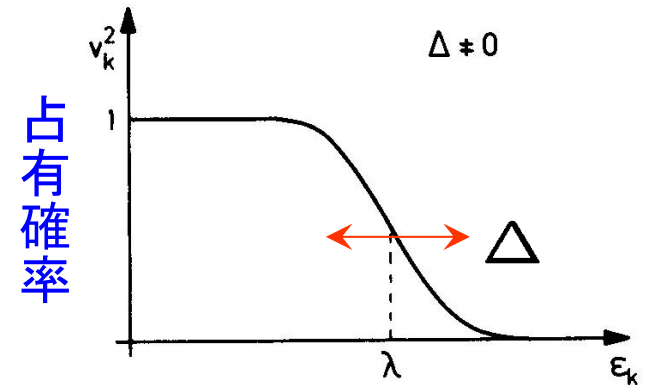
4^+

2^+

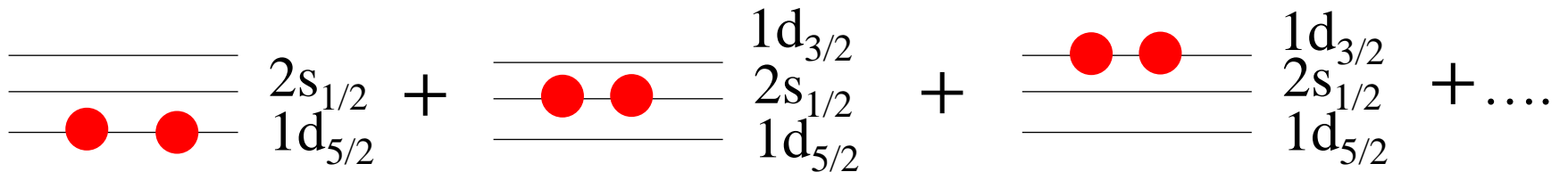
0^+



波動関数:



$$|\Psi_{\text{g.s.}}\rangle =$$



いろいろな配位を混ぜることによって対相関エネルギーを稼ぐ

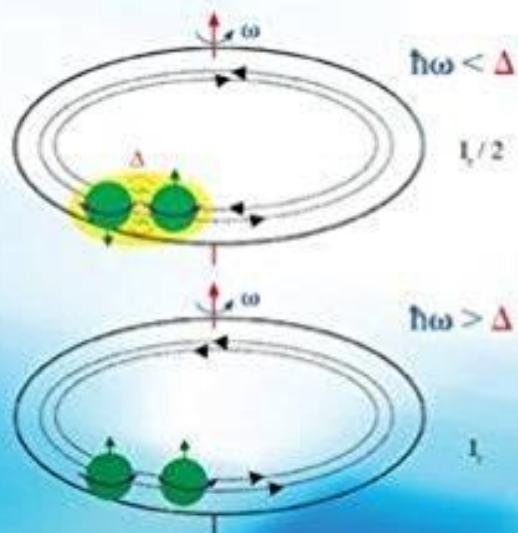
→ 各軌道は部分的にのみ占有されることになる

占有確率はエネルギーを最小化するように決定
cf. BCS 理論

超流動状態

Fifty Years of Nuclear BCS

Pairing in Finite Systems



Ricardo A Broglia
Vladimir Zelevinsky
editors

 World Scientific

Nuclear Superfluidity

Pairing in Finite Systems

D. M. BRINK
R. A. BROGLIA

CAMBRIDGE MONOGRAPHS
ON PARTICLE PHYSICS, NUCLEAR PHYSICS
AND COSMOLOGY

24