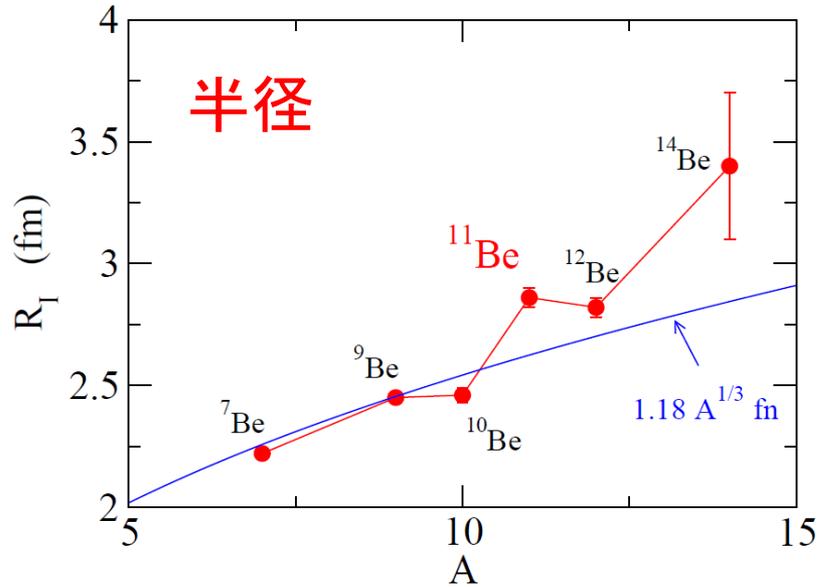


# 1 粒子ハロ一核の性質

- 一 束縛状態
- 一 角運動量の効果
- 一 クーロン励起

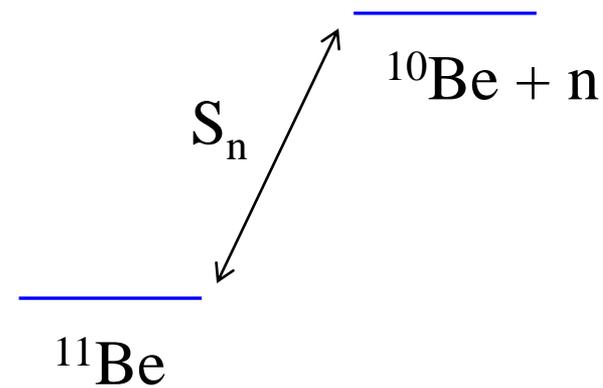
# 1中性子ハロ一核とは何か

典型的な例： $^{11}_4\text{Be}_7$



I. Tanihata et al.,  
PRL55('85)2676; PLB206('88)592

1中性子分離エネルギー



$$S_n = 504 \pm 6 \text{ keV}$$

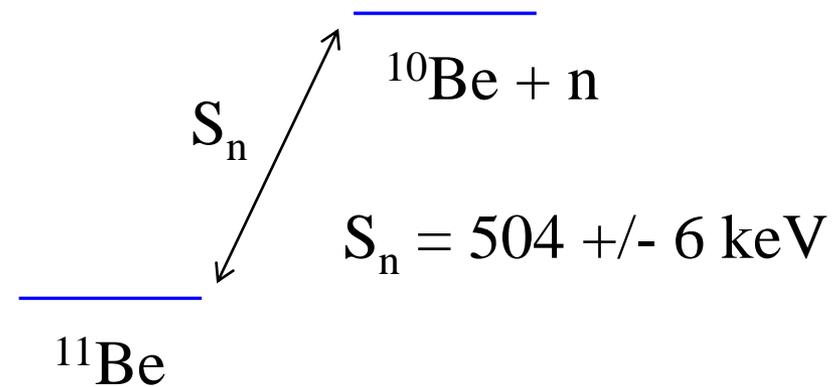
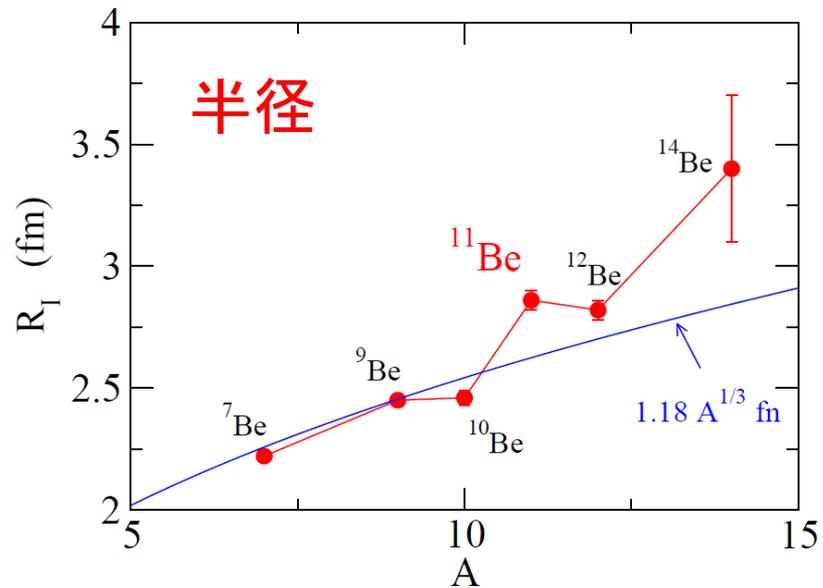
非常に小さい

ちなみに  $^{13}\text{C}$  では、  
 $S_n = 4.95 \text{ MeV}$

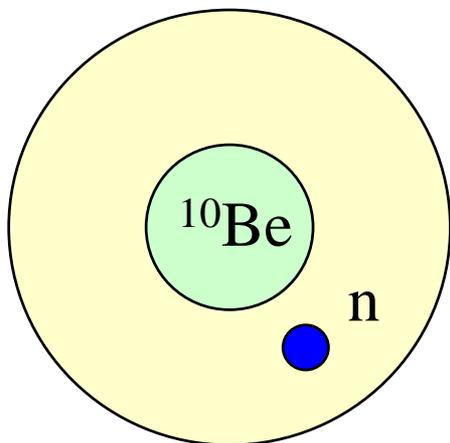
# 1 中性子ハロー核

# 1 中性子分離エネルギー

典型的な例： $^{11}_4\text{Be}_7$



解釈： $^{10}\text{Be}$  のまわりに1つの中性子が弱く束縛され薄く広がっている



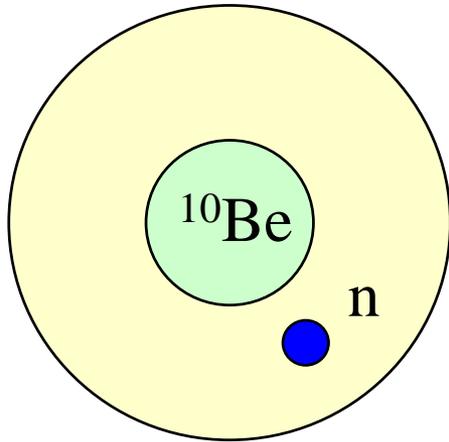
$$\psi(r) \sim \exp(-\kappa r) \quad \kappa = \sqrt{2m|\epsilon|/\hbar^2}$$

弱く束縛された系



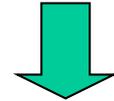
密度分布の空間的広がり(ハロー構造)

解釈： $^{10}\text{Be}$  のまわりに1つの中性子が弱く束縛され薄く広がっている



$$\psi(r) \sim \exp(-\kappa r) \quad \kappa = \sqrt{2m|\epsilon|/\hbar^2}$$

弱く束縛された系

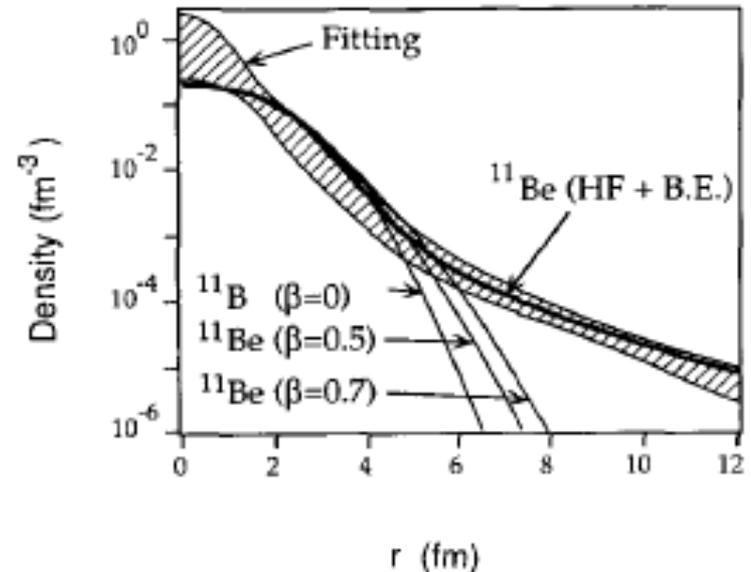


密度分布の空間的広がり(ハロー構造)

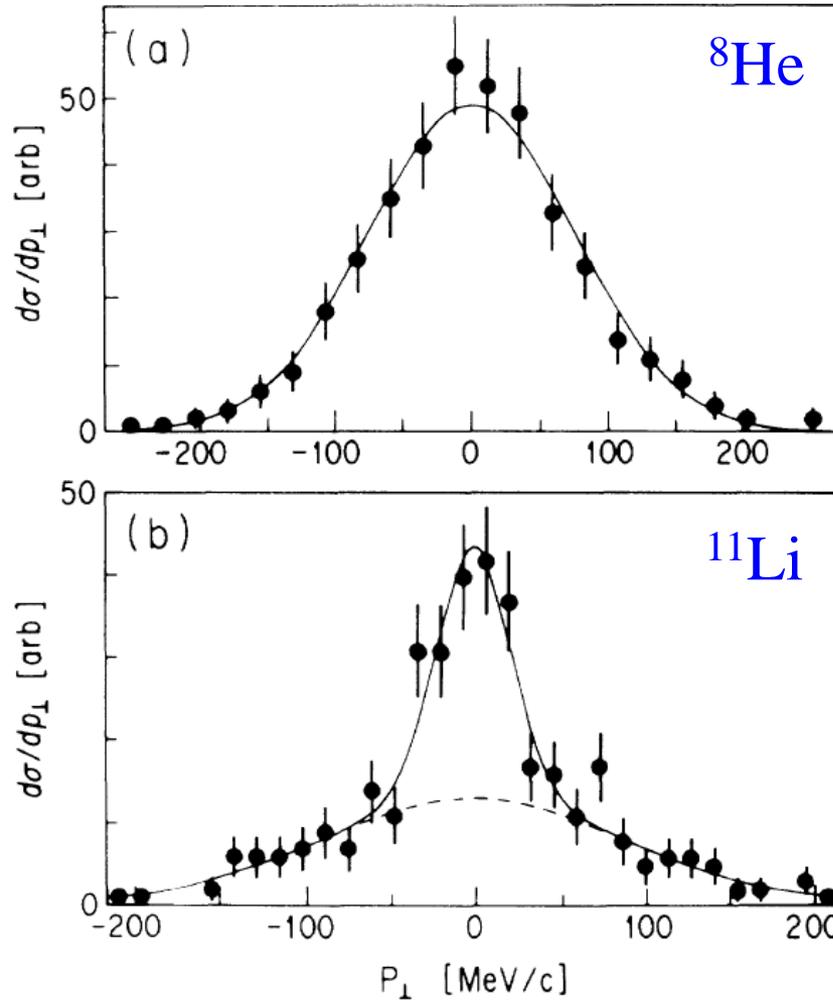
反応断面積の実験値を説明する  
密度分布



月暈(月のまわりに広がる  
薄い輪。ハロー。)



# 運動量分布



$S_{2n} \sim 2.1 \text{ MeV}$

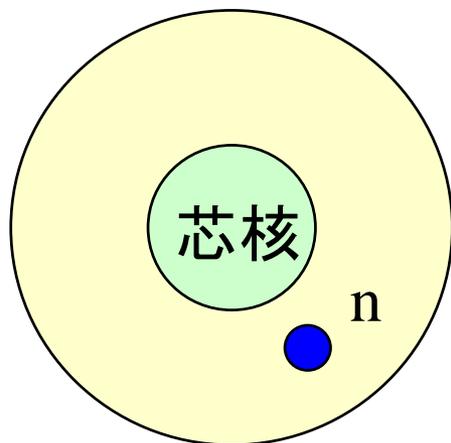
$S_{2n} \sim 300 \text{ keV}$

束縛が弱くなり空間的に広がると運動量分布が狭くなる

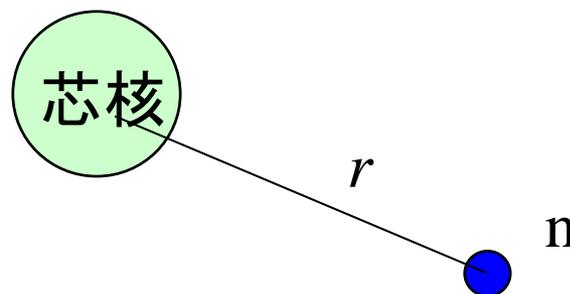
↔ 中性子ハロー

FIG. 1. Transverse-momentum distributions of (a)  ${}^6\text{He}$  fragments from reaction  ${}^8\text{He}+\text{C}$  and (b)  ${}^9\text{Li}$  fragments from reaction  ${}^{11}\text{Li}+\text{C}$ . The solid lines are fitted Gaussian distributions. The dotted line is a contribution of the wide component in the  ${}^9\text{Li}$  distribution.

# 一粒子運動の性質: 束縛状態



芯核と中性子でできる2体問題と近似



相対距離  $r$  の関数として球対称ポテンシャル  $V(r)$  を仮定。

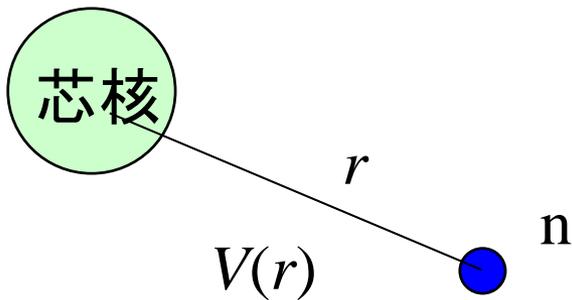
cf. 平均場ポテンシャル:

$$V(r) \sim \int v(r, r') \rho(r') dr'$$

相対運動のハミルトニアン

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V(r)$$

# 相対運動のハミルトニアン



$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(r)$$

簡単のためスピン軌道相互作用はないとすると  
( $ls$  力がなくても本質は変わらない)

$$\Psi_{lmm_s}(\mathbf{r}) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \chi_{m_s}$$


$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V(r) - \epsilon_l \right] u_l(r) = 0$$

境界条件(束縛状態):

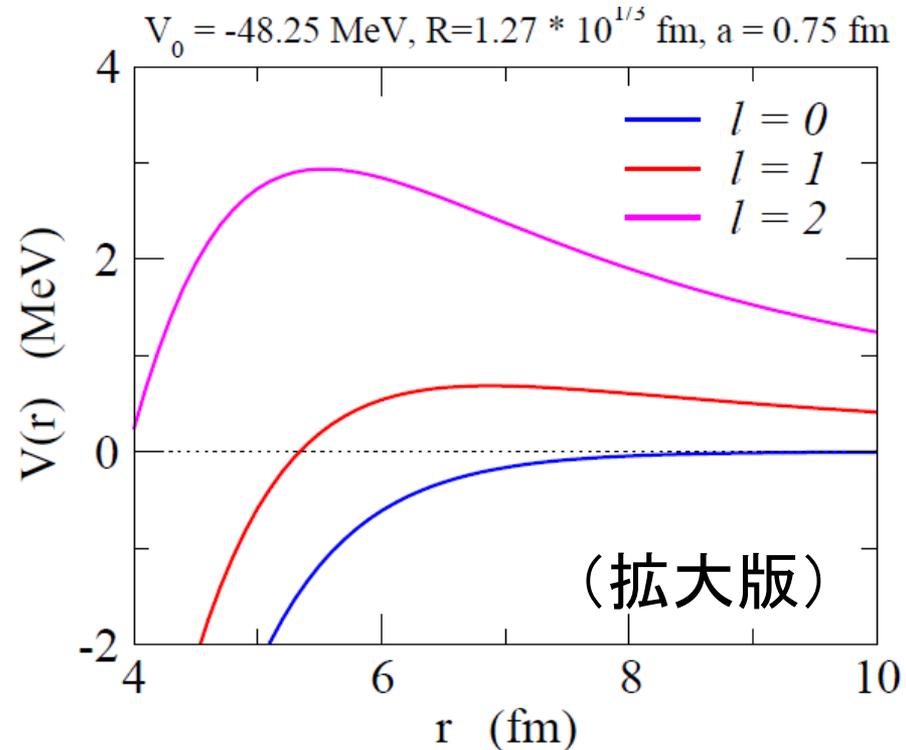
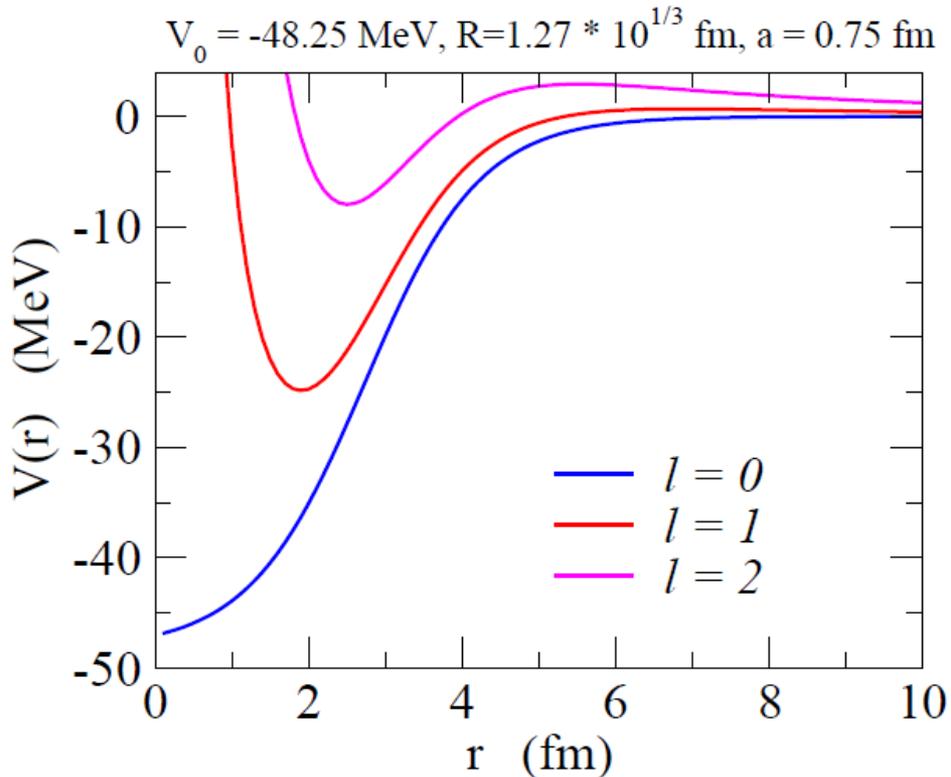
$$\begin{aligned} u_l(r) &\sim r^{l+1} && (r \sim 0) \\ &\rightarrow e^{-\kappa r} && (r \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

正確には modified 球ベッセル関数  
(球ハンケル関数)

# 角運動量とハロー現象

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V(r) - \epsilon_l \right] u_l(r) = 0$$

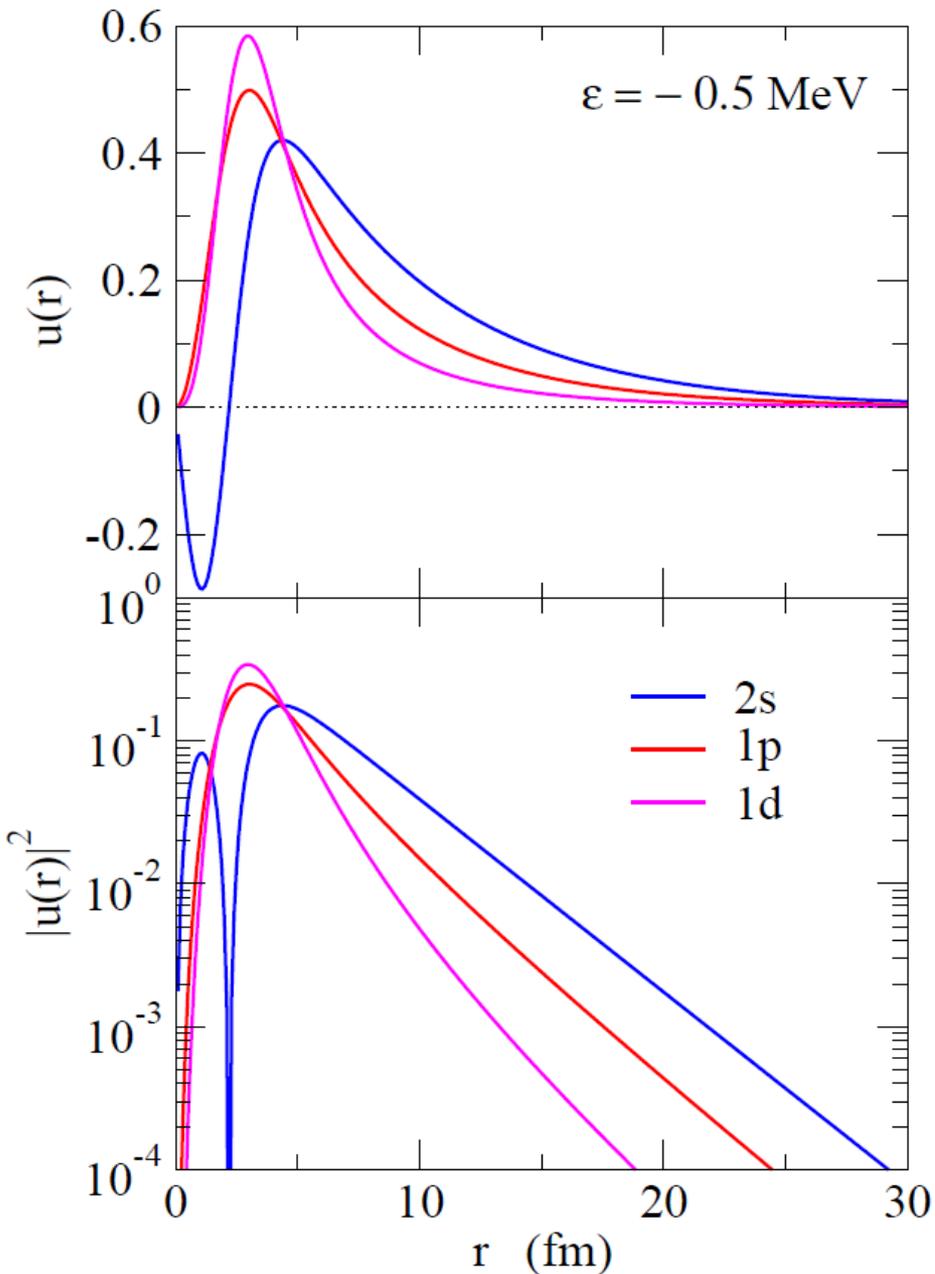
## 遠心力ポテンシャル



遠心力障壁の高さ: 0 MeV ( $l = 0$ ), 0.69 MeV ( $l = 1$ ), 2.94 MeV ( $l = 2$ )

# 波動関数

$\varepsilon = -0.5 \text{ MeV}$  となるように各  $l$  ごとに  $V_0$  を調整



$l = 0$  : 長いテール

$l = 2$  : 局在

$l = 1$  : その中間

平均2乗半径:

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{\int_0^\infty dr r^2 u_l(r)^2}$$

7.17 fm ( $l = 0$ )

5.17 fm ( $l = 1$ )

4.15 fm ( $l = 2$ )

## ゼロ・エネルギーにおける振る舞い

K. Riisager, A.S. Jensen, and P. Moller, NPA548 ('92) 393

$$I_n \equiv \int_0^\infty dr r^{n+2} |R_l(r)|^2$$

$$R_l(r) = \frac{u_l(r)}{r}$$

が  $\kappa \rightarrow 0$  でどのように振舞うのか?

$$\kappa = \sqrt{2\mu|\epsilon|/\hbar^2}$$

$r > R$  で  $R_l(r) \sim B h_l^{(+)}(i\kappa r)$  とすると、

$$I_n \sim B^2 \int_R^\infty dr r^{n+2} |h_l^{(+)}(i\kappa r)|^2 = \dots$$

# ゼロ・エネルギーにおける振る舞い

K. Riisager, A.S. Jensen, and P. Moller, NPA548 ('92) 393

$$I_n \equiv \int_0^\infty dr r^{n+2} |R_l(r)|^2 \quad R_l(r) = \frac{u_l(r)}{r}$$

$r > R$  で  $R_l(r) \sim B h_l^{(+)}(i\kappa r)$  とすると、  $B = R_l(R) / h_l^{(+)}(i\kappa R)$

$z$  が小さい時、  $h_l^{(+)}(z) \propto z^{-l-1}$  であることを使うと、

$$I_n = \underbrace{\int_R^{\epsilon/\kappa} dr r^{n+2} |R_l(r)|^2}_{\text{有限}} + \underbrace{\left( \int_0^R + \int_{\epsilon/\kappa}^\infty \right) dr r^{n+2} |R_l(r)|^2}_{\text{有限}}$$
$$\sim |R_l(R)|^2 (\kappa R)^{2l+2} \times \kappa^{-(n+3)} \left( \frac{\epsilon^{n-2l+1} - (\kappa R)^{n-2l+1}}{n-2l+1} + \dots \right)$$

\*  $\epsilon (> \kappa R)$  は  $h_l^{(+)}(\epsilon)$  の漸近形が使えるくらい小さい量

# ゼロ・エネルギーにおける振る舞い

K. Riisager, A.S. Jensen, and P. Moller, NPA548 ('92) 393



$$\langle r^2 \rangle = \frac{I_2}{I_0} \sim \frac{\kappa^{-5} \left( \frac{\epsilon^{-2l+3} - (\kappa R)^{-2l+3}}{-2l+3} + \dots \right)}{\kappa^{-3} \left( \frac{\epsilon^{-2l+1} - (\kappa R)^{-2l+1}}{-2l+1} + \dots \right)}$$

$$l = 0$$

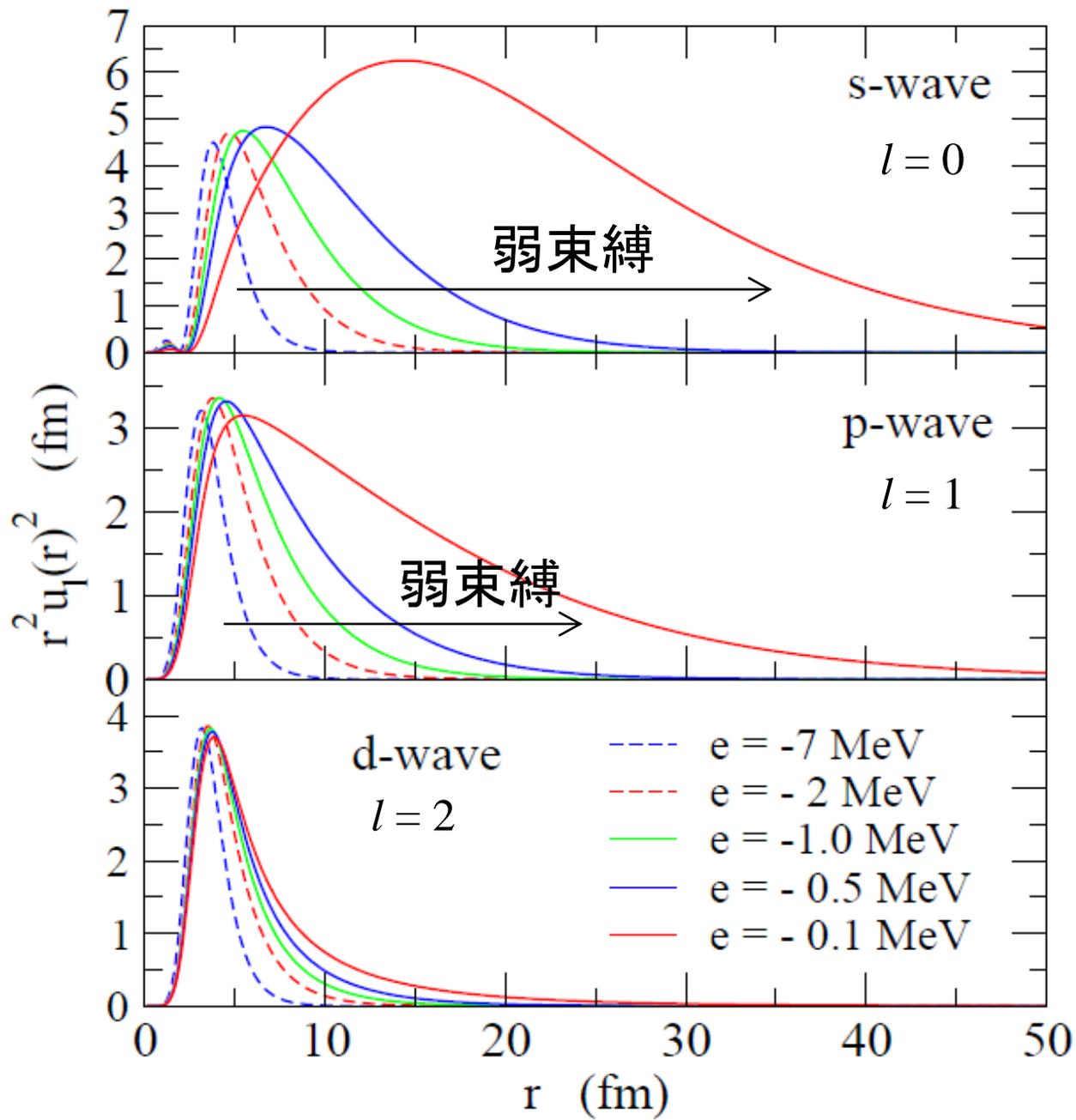
$$\langle r^2 \rangle \sim \frac{\kappa^{-5} \left( \frac{\epsilon^3}{3} + \dots \right)}{\kappa^{-3} (\epsilon + \dots)} \propto \kappa^{-2} \rightarrow \infty$$

$$l = 1$$

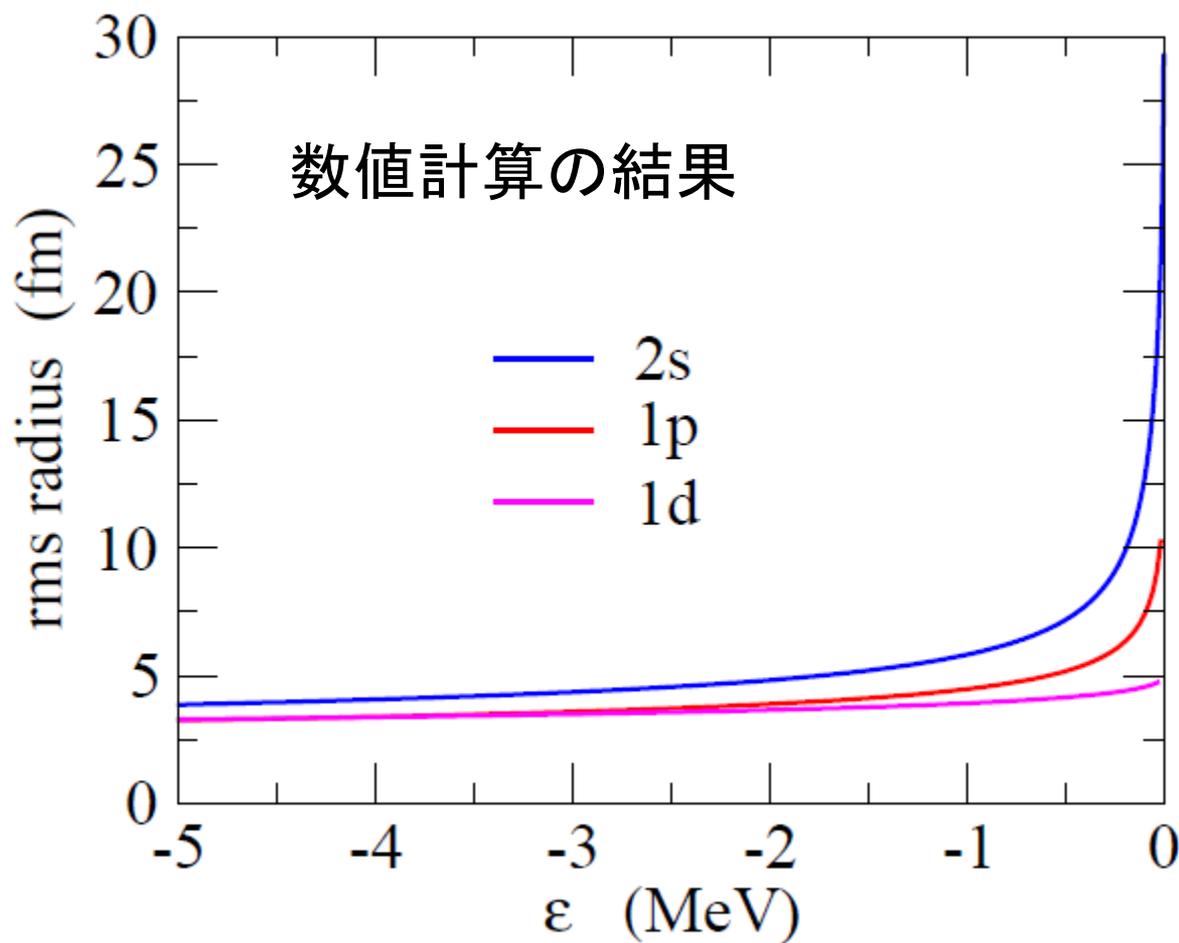
$$\langle r^2 \rangle \sim \frac{\kappa^{-5} (\epsilon + \dots)}{\kappa^{-3} \left( \frac{-(\kappa R)^{-1}}{-1} + \dots \right)} \propto \kappa^{-1} \rightarrow \infty$$

$$l \geq 2$$

$$\langle r^2 \rangle \sim \frac{\kappa^{-5} \left( \frac{-(\kappa R)^{-2l+3}}{-2l+3} + \dots \right)}{\kappa^{-3} \left( \frac{-(\kappa R)^{-2l+1}}{-2l+1} + \dots \right)} \propto \kappa^0 \rightarrow \text{finite}$$



$$\langle r^2 \rangle \propto \begin{cases} 1/|\epsilon_0| & (l=0) \\ 1/\sqrt{|\epsilon_1|} & (l=1) \\ \text{finite} & (l=2) \end{cases}$$



↓

半径は  $l=0,1$  では発散  
(ゼロ・エネルギー極限)

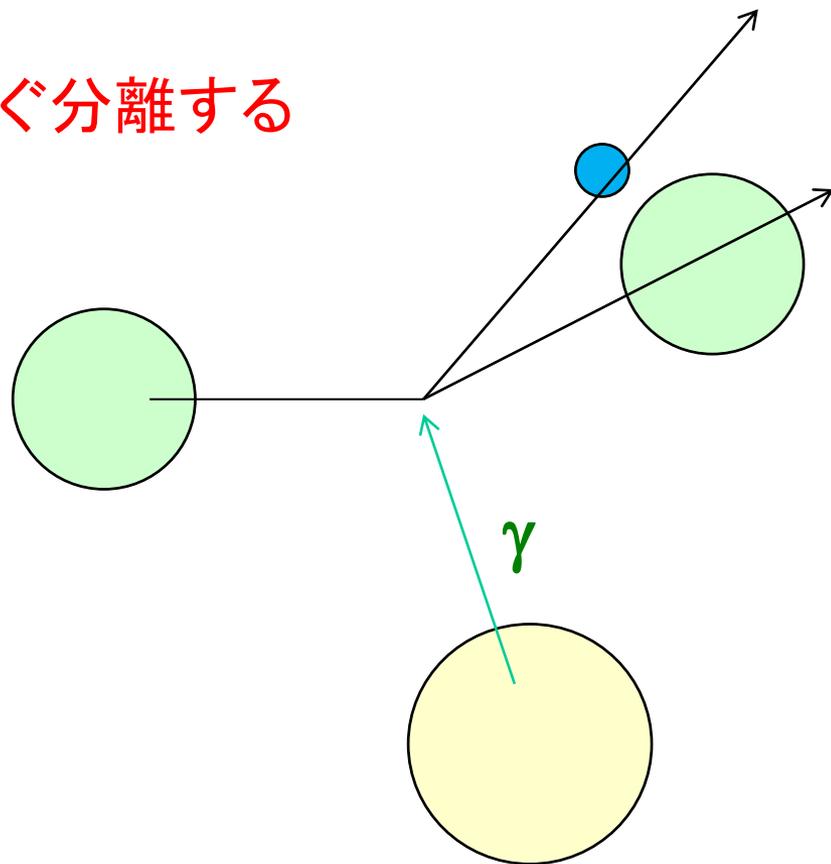
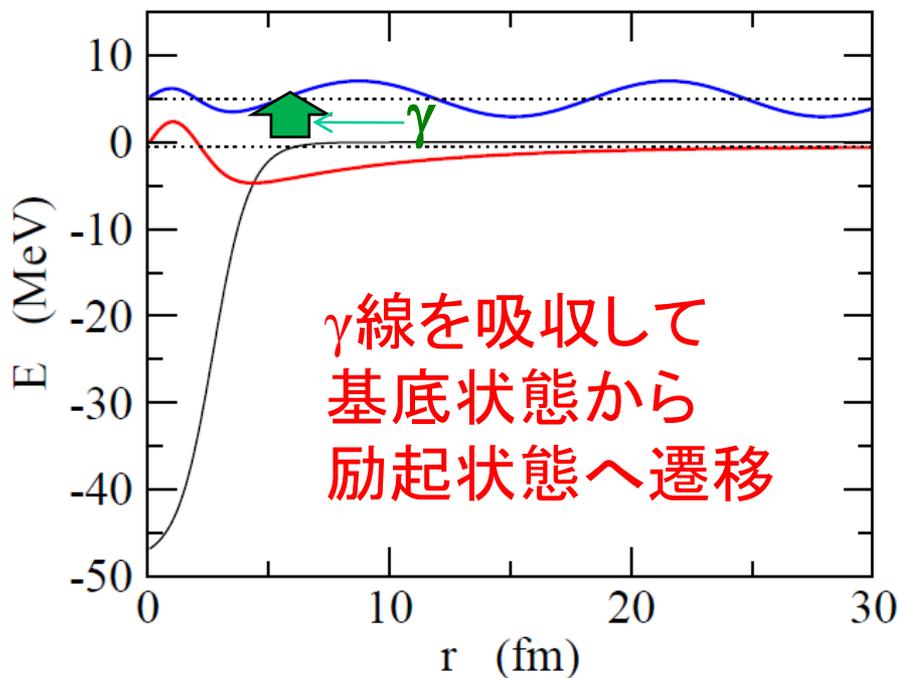
↓

ハロー(異常に大きい  
半径)は  $l=0$  or  $1$   
かつ弱束縛の場合  
のみ起きる

# 1 中性子ハロー核のクーロン励起

ハロー核: 弱束縛がキーワード

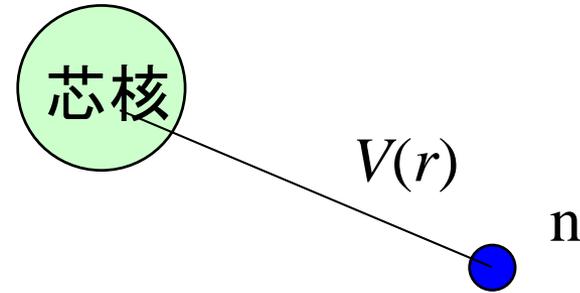
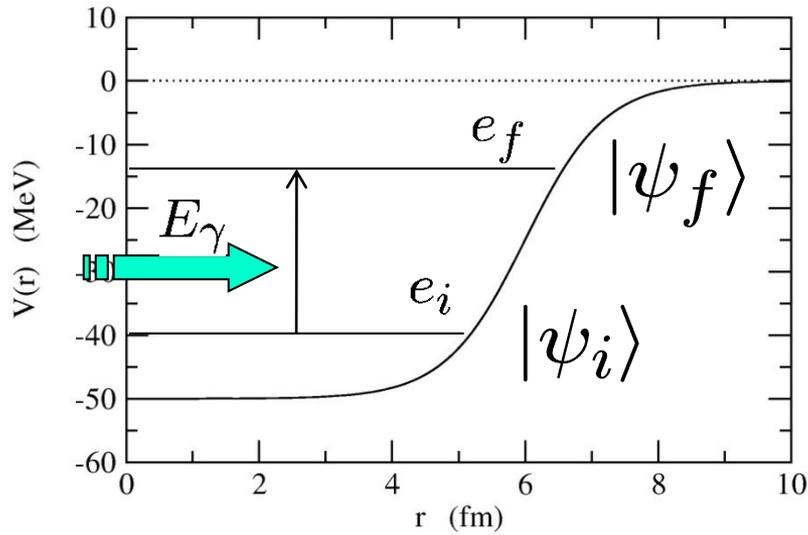
→ 刺激を与えると中性子がすぐ分離する



連続状態へ励起されれば  
分解が起きる

← 標的核の作るクーロン場による励起

# 電磁遷移の計算



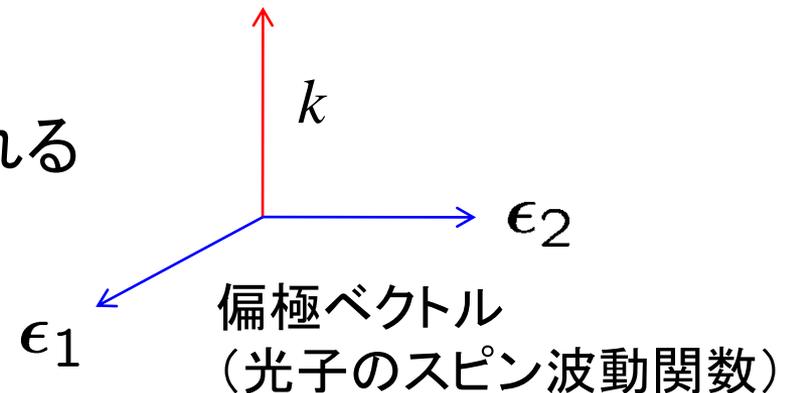
簡単のため、離散的な状態から  
離散的な状態への遷移を考える。

- $\psi_i, \psi_f$  はハミルトニアン固有状態:

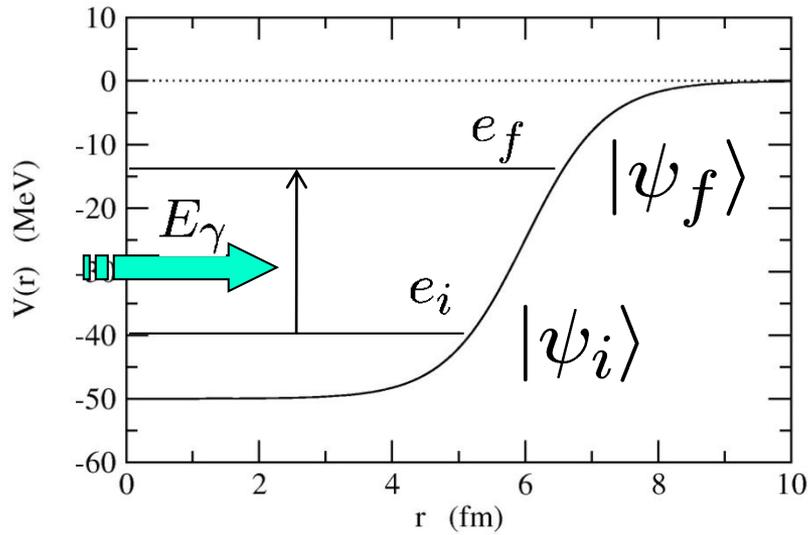
$$H\psi_i = e_i\psi_i$$

$$H\psi_f = e_f\psi_f$$

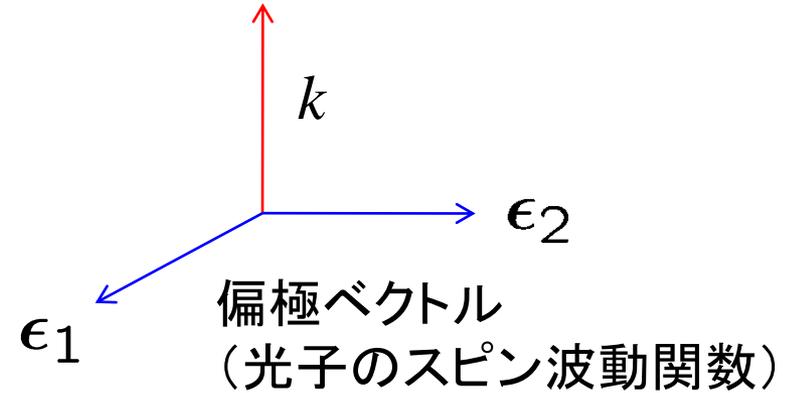
- 光子の状態は運動量と偏極で指定される



# 電磁遷移の計算



光子



初期状態:  $|\psi_i\rangle |n_{k\alpha} = 1\rangle$



原子核の状態が  $\Psi_i$ ,  
運動量  $k$ , 偏極  $\alpha$  を持つ  
1個のフォトン ( $\alpha = 1$  or  $2$ )

遷移



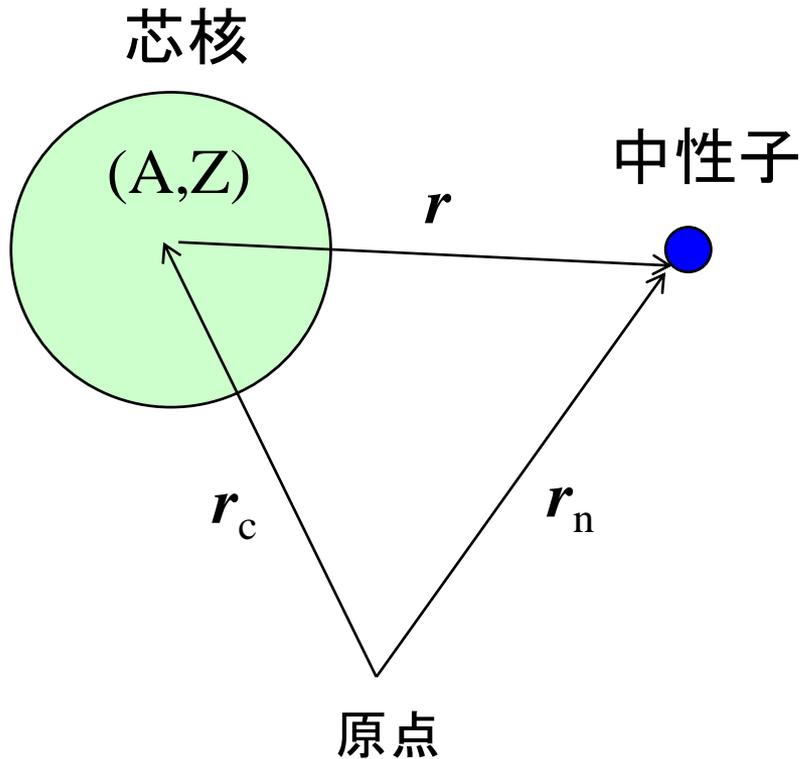
$H_{\text{int}}$   
(原子核と電磁場  
の相互作用)



フェルミの黄金則  
(1次の摂動論)

終状態:  $|\psi_f\rangle |n_{k\alpha} = 0\rangle$

# 原子核と電磁場の相互作用



$$H = \frac{p_c^2}{2Am} + \frac{p_n^2}{2m} + V(r)$$

電磁場との相互作用:

$$p_c \rightarrow p_c - \frac{Ze}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_c, t)$$

と置き換え。

重心固定系 ( $\mathbf{P} = 0$ ) では

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{Am} \cdot \frac{Ze}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}$$

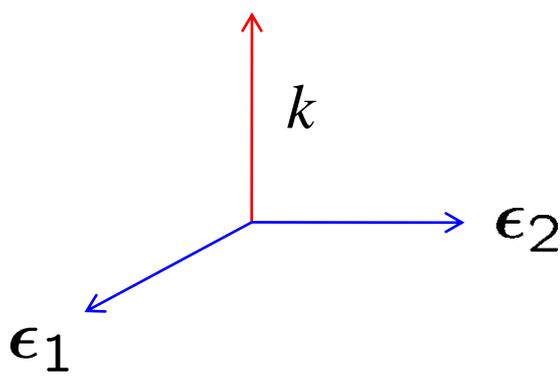
$$\mathbf{p} = \frac{1}{A+1} (A\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_c)$$

# 原子核と電磁場の相互作用

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{Am} \cdot \frac{Ze}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} \int \frac{d\mathbf{k}}{2\pi} \frac{\hbar c}{\sqrt{\hbar\omega}} \left[ a_{\mathbf{k}\alpha} \epsilon_{\alpha} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t} + a_{\mathbf{k}\alpha}^{\dagger} \epsilon_{\alpha} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + i\omega t} \right]$$

$\omega = kc$



## E1近似 (E1フォトンの吸収)

$$e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \sim 1$$

\* 一般の多重極は Ring-Schuck の Appendix B を見よ

$$E_{\gamma} = 1 \text{ MeV} \rightarrow k = \hbar\omega/\hbar c \sim 1/200 \text{ fm}^{-1}$$

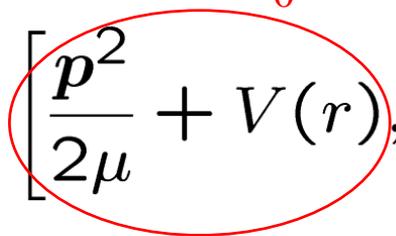


フェルミの黄金則より

$$\Gamma_{i \rightarrow f} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{Ze}{A} \right)^2 \frac{1}{m^2\omega} \left| \langle \psi_f | p_z | \psi_i \rangle \right|^2 \delta(e_f - e_i - \hbar\omega)$$

(フォトンの偏極の向きを  $z$  軸に取った)

(note)  $[p^2, r] = -2i\hbar p$


$$\begin{aligned}\langle \psi_f | p_z | \psi_i \rangle &= \left\langle \psi_f \left| \frac{1}{-2i\hbar} \cdot 2\mu \left[ \frac{p^2}{2\mu} + V(r), z \right] \right| \psi_i \right\rangle \\ &= \frac{i\mu}{\hbar} \langle \psi_f | H_0 z - z H_0 | \psi_i \rangle \\ &= \frac{i\mu}{\hbar} (e_f - e_i) \langle \psi_f | z | \psi_i \rangle\end{aligned}$$


$H_0$



$$\Gamma_{i \rightarrow f} = \frac{1}{2\pi\hbar} \left( \frac{Ze}{A+1} \right)^2 (e_f - e_i) |\langle \psi_f | z | \psi_i \rangle|^2 \delta(e_f - e_i - \hbar\omega)$$

(参考)これをフォトンのフラックス  $c/(2\pi)^3$ で割れば、光吸収断面積:

$$\sigma_\gamma = \frac{4\pi^2}{\hbar c} \left( \frac{Ze}{A+1} \right)^2 (e_f - e_i) |\langle \psi_f | z | \psi_i \rangle|^2 \delta(e_f - e_i - \hbar\omega)$$

## E1 有効電荷 (effective charge)

$$\sigma_\gamma = \frac{4\pi^2}{\hbar c} \left( \frac{Ze}{A+1} \right)^2 (e_f - e_i) |\langle \psi_f | z | \psi_i \rangle|^2 \delta(e_f - e_i - \hbar\omega)$$

$$z = r \cos \theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} r Y_{10}(\theta) \quad \text{を用いて書き直すと}$$

$$\sigma_\gamma = \frac{16\pi^3}{3\hbar c} \left( \frac{Ze}{A+1} \right)^2 (e_f - e_i) |\langle \psi_f | r Y_{10} | \psi_i \rangle|^2 \delta(e_f - e_i - \hbar\omega)$$

dipole operator:

$$\hat{D}_\mu = e_{E1} \cdot r Y_{1\mu}(\theta, \phi)$$

E1 有効電荷:

$$e_{E1} = \frac{Z}{A+1} e$$

(重心から測った電荷の分布)

$$\text{一般には} \quad e_{E1} = \frac{Z_1 A_2 - Z_2 A_1}{A_1 + A_2} e$$

# Wigner-Eckart の定理と換算遷移確率

$$\sigma_\gamma = \frac{16\pi^3}{3\hbar c} \left( \frac{Ze}{A+1} \right)^2 E_\gamma |\langle \psi_f | r Y_{10} | \psi_i \rangle|^2 \delta(e_f - e_i - E_\gamma)$$

$$E_\gamma = e_f - e_i = \hbar\omega$$

実際には

$$\begin{cases} \psi_i(\mathbf{r}) = \psi_{lm}(\mathbf{r}) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \\ \psi_f(\mathbf{r}) = \psi_{l'm'}(\mathbf{r}) = \frac{u_{l'}(r)}{r} Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{r}}) \end{cases}$$

角運動量の  
固有状態


$$\begin{aligned} |\langle \psi_f | r Y_{10} | \psi_i \rangle|^2 &\rightarrow \frac{1}{2l+1} \sum_{m,m'} |\langle \psi_{l'm'} | r Y_{10} | \psi_{lm} \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2l+1} |\langle \psi_{l'} || r Y_1 || \psi_l \rangle|^2 \end{aligned}$$

↑  
Wigner-Eckart の定理

$$\begin{aligned} \sigma_\gamma &= \frac{16\pi^3}{9\hbar c} E_\gamma \cdot \frac{1}{2l+1} |\langle \psi_f || e_{E1} r Y_1 || \psi_i \rangle|^2 \delta(e_f - e_i - E_\gamma) \\ &= \frac{16\pi^3}{9\hbar c} E_\gamma \cdot \frac{dB(E1)}{dE_\gamma} \end{aligned}$$

換算遷移確率

## (復習) Wigner-Eckart の定理

$$\begin{aligned}\langle \psi_{l'm'} | rY_{10} | \psi_{lm} \rangle &= (-1)^{l'-m'} \begin{pmatrix} l' & 1 & l \\ -m' & 0 & m \end{pmatrix} \langle \psi_{l'} || rY_1 || \psi_l \rangle \\ &= \underbrace{\frac{(-1)^{l-m}}{\sqrt{3}} \langle l'm' | l-m | 10 \rangle}_{m, m' \text{ の依存性は単純な Clebsch}} \underbrace{\langle \psi_{l'} || rY_1 || \psi_l \rangle}_{m, m' \text{ に依存しない量}}\end{aligned}$$

$m, m'$  の依存性は単純な Clebsch  $m, m'$  に依存しない量



$$\begin{aligned}|\langle \psi_f | rY_{10} | \psi_i \rangle|^2 &\rightarrow \frac{1}{2l+1} \sum_{m, m'} |\langle \psi_{l'm'} | rY_{10} | \psi_{lm} \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2l+1} |\langle \psi_{l'} || rY_1 || \psi_l \rangle|^2 \\ &\quad \times \sum_{m, m'} \langle l'm' | l-m | 10 \rangle^2 = 1 \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2l+1} |\langle \psi_{l'} || rY_1 || \psi_l \rangle|^2\end{aligned}$$

## E1 電磁遷移強度分布の簡単な見積もり(解析的な模型)

$l=0$  状態から  $l=1$  状態への遷移:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{初期状態の波動関数: } \psi_i(\mathbf{r}) = \sqrt{2\kappa} \frac{e^{-\kappa r}}{r} Y_{00}(\hat{\mathbf{r}}) \\ \text{終状態の波動関数: } \psi_f(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{2\mu k}{\pi \hbar^2}} j_1(kr) Y_{1m}(\hat{\mathbf{r}}) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \kappa = \sqrt{\frac{2\mu |E_b|}{\hbar^2}} \\ j_1(kr) \text{ は球ベッセル関数} \end{array}$$

$$k = \sqrt{\frac{2\mu E_c}{\hbar^2}}$$

とすると、

$$\frac{dB(E1)}{dE} = \frac{3}{4\pi} e_{E1}^2 \left| \int_0^\infty r^2 dr r \cdot \frac{\sqrt{2\kappa} e^{-\kappa r}}{r} \cdot \sqrt{\frac{2\mu k}{\pi \hbar^2}} j_1(kr) \right|^2$$

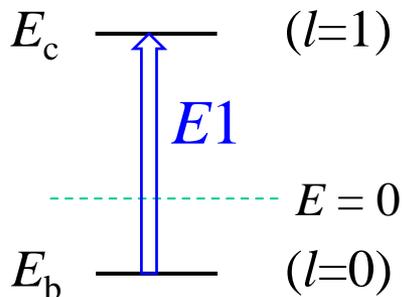
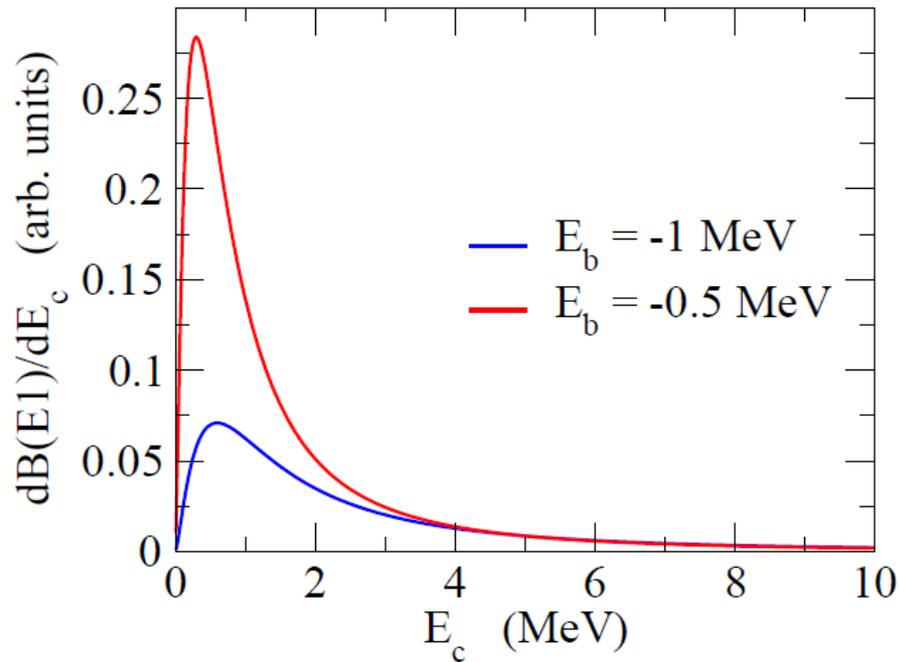
積分は解析的に実行可能


$$\frac{dB(E1)}{dE} = \frac{3\hbar^2}{\pi^2 \mu} e_{E1}^2 \frac{\sqrt{|E_b|} E_c^{3/2}}{(|E_b| + E_c)^4}$$

Refs. (一般的な  $l_i, l_f$  の場合の式も)

- M.A. Nagarajan, S.M. Lenzi, A. Vitturi, Eur. Phys. J. A24('05)63
- S. Typel and G. Baur, NPA759('05)247

$$\frac{dB(E1)}{dE} = \frac{3\hbar^2}{\pi^2\mu} e_{E1}^2 \frac{\sqrt{|E_b|} E_c^{3/2}}{(|E_b| + E_c)^4}$$

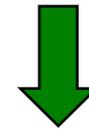


ピーク的位置:  $E_c = \frac{3}{5} |E_b|$   
 $(E_x = E_c - E_b = \frac{8}{5} |E_b|)$

ピークの高さ:  $\propto 1/|E_b|^2$

全遷移確率:

$$B(E1) = S_0 = \frac{3\hbar^2 e_{E1}^2}{16\pi^2 \mu |E_b|}$$

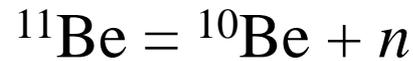
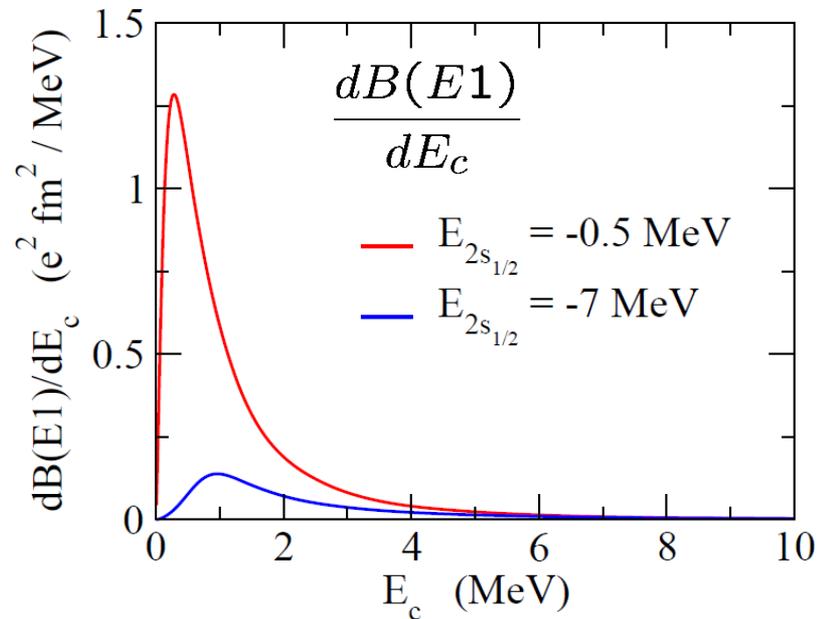


➤ 束縛状態のエネルギーが小さくなると鋭くて高いピーク

➤ 束縛状態のエネルギーが小さくなるとピークのエネルギーが小さくなる

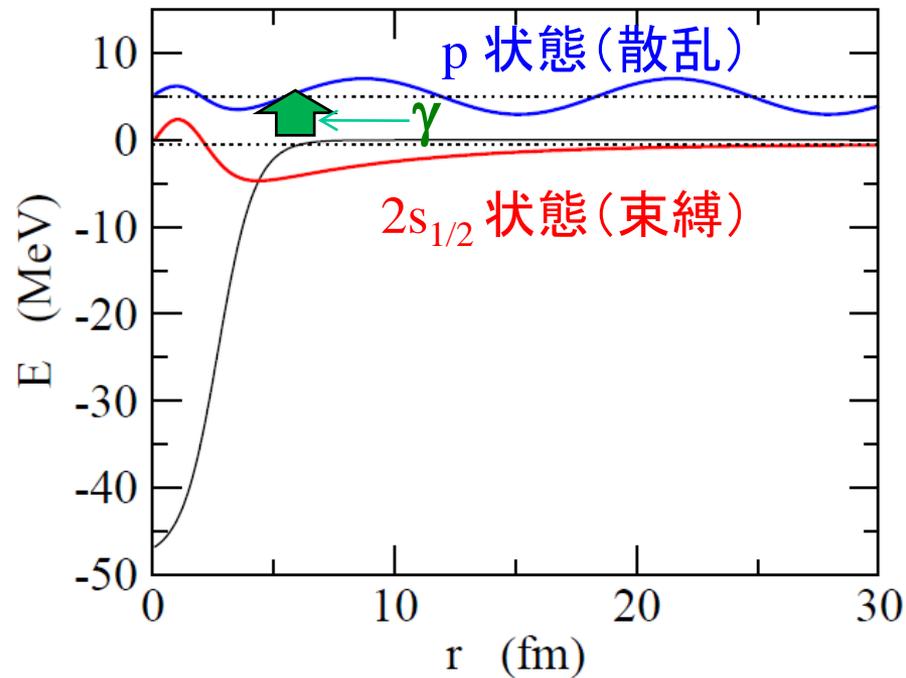
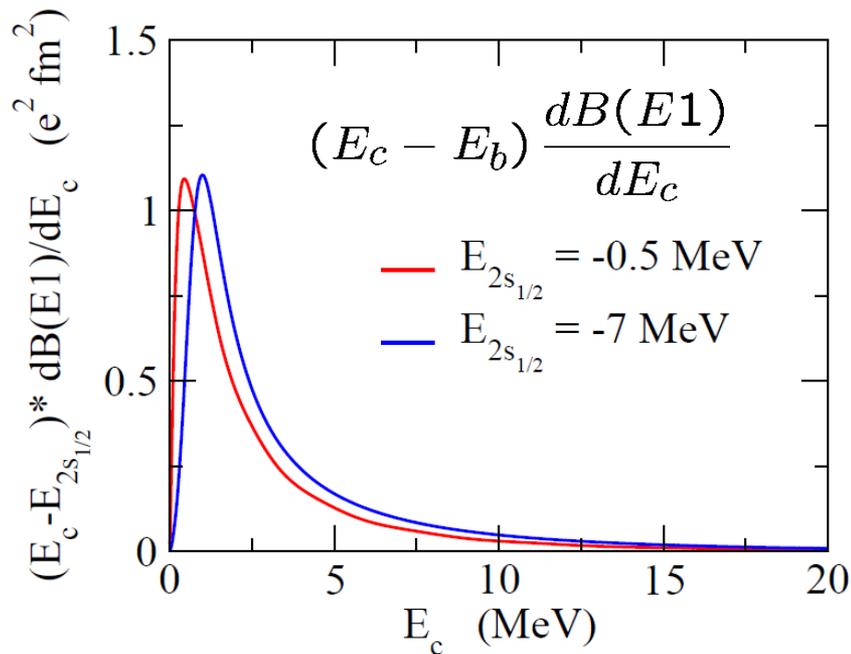
$$E_{\text{peak}} = 0.3 \text{ MeV } (E_b = -0.5 \text{ MeV})$$

# Woods-Saxon ポテンシャルを用いた実際の数値計算



$2s_{1/2}$  状態 (束縛) から p 状態 ( $l=1$ ) への遷移強度

弱く束縛されている場合と強く束縛されている場合の比較





➤ 束縛状態のエネルギーが小さくなると  
鋭くて高いピーク

$$S_0 = \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c}$$

$$= 1.53 \text{ e}^2\text{fm}^2 \quad (E_b = -0.5 \text{ MeV})$$

$$0.32 \text{ e}^2\text{fm}^2 \quad (E_b = -7 \text{ MeV})$$

➤ 束縛状態のエネルギーが小さくなると  
ピークのエネルギーが小さくなる

$$E_{\text{peak}} = 0.28 \text{ MeV} \quad (E_b = -0.5 \text{ MeV})$$

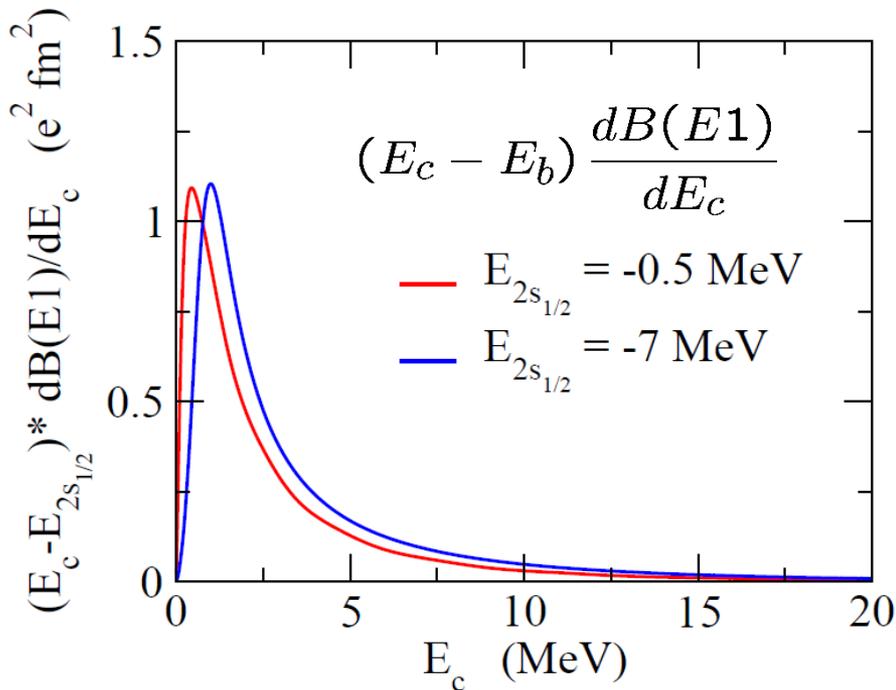
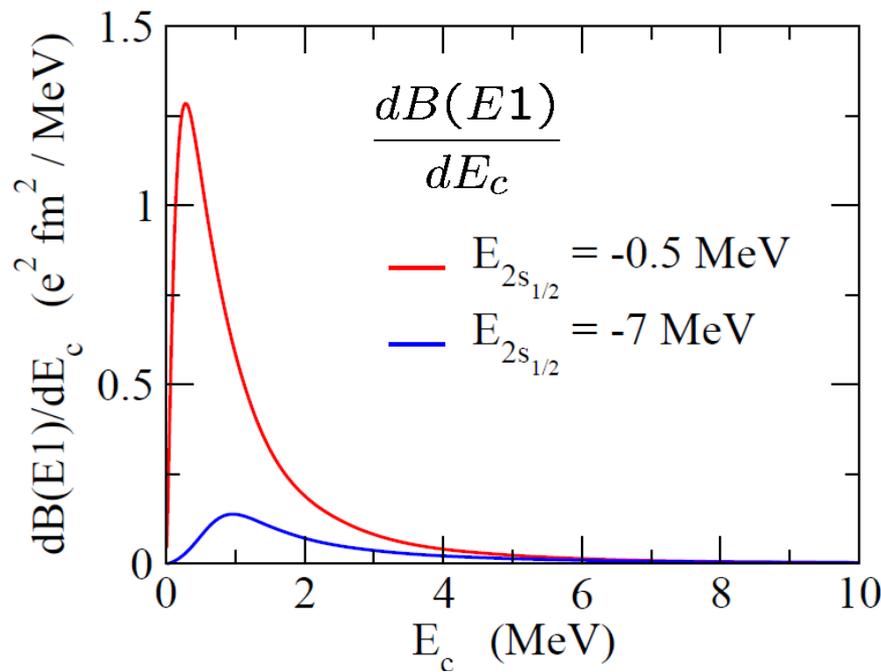
$$0.96 \text{ MeV} \quad (E_b = -7 \text{ MeV})$$

➤ 遷移強度に  $(E_c - E_b)$  を掛けたものは  
あまり  $E_b$  に依らない

$$S_1 = \int_0^\infty dE_c (E_c - E_b) \frac{dB(E1)}{dE_c}$$

$$= 2.79 \text{ e}^2\text{fm}^2 \text{ MeV} \quad (E_b = -0.5 \text{ MeV})$$

$$3.18 \text{ e}^2\text{fm}^2 \text{ MeV} \quad (E_b = -7 \text{ MeV})$$



$$S_0 \sim \sum_f |\langle \psi_f | z | \psi_i \rangle|^2 \quad \text{は } E_i \text{ に大きく依存}$$

$$S_1 \sim \sum_f (E_f - E_i) |\langle \psi_f | z | \psi_i \rangle|^2 \quad \text{は } E_i \text{ に依存しない}$$

自明ですか?

## 和則 (Sum Rule)

$$\left\{ \begin{array}{l} S_0 = \int_0^{\infty} dE_c \frac{dB(E_1)}{dE_c} \\ S_1 = \int_0^{\infty} dE_c (E_c - E_b) \frac{dB(E_1)}{dE_c} \end{array} \right.$$

は簡単な式で表わすことができる。

## 和則(わそく) : Sum Rule

まず  $S_0 = \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c}$  から:

$$\begin{aligned} \text{基本的な考え方: } \sum_f |\langle f | \hat{F} | \psi_i \rangle|^2 &= \sum_f \langle \psi_i | F | f \rangle \langle f | \hat{F} | \psi_i \rangle \\ &= \langle \psi_i | \hat{F}^2 | \psi_i \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\uparrow \\ \text{(完全系)} \quad \sum_f |f\rangle \langle f| &= 1 \end{aligned}$$

## 和則(わそく): Sum Rule

まず  $S_0 = \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c}$  から:

$$\begin{aligned} \text{基本的な考え方: } \sum_f |\langle f | \hat{F} | \psi_i \rangle|^2 &= \sum_f \langle \psi_i | F | f \rangle \langle f | \hat{F} | \psi_i \rangle \\ &= \langle \psi_i | \hat{F}^2 | \psi_i \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{(完全系)} \quad \sum_f |f\rangle \langle f| = 1 \end{array}$$

$$S_0 = \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c} \sim \sum_f \frac{1}{2l_i + 1} |\langle \psi_f | \hat{D} | \psi_i \rangle|^2$$

$$\hat{D}_\mu = e_{E1} r Y_{1\mu}(\hat{r})$$

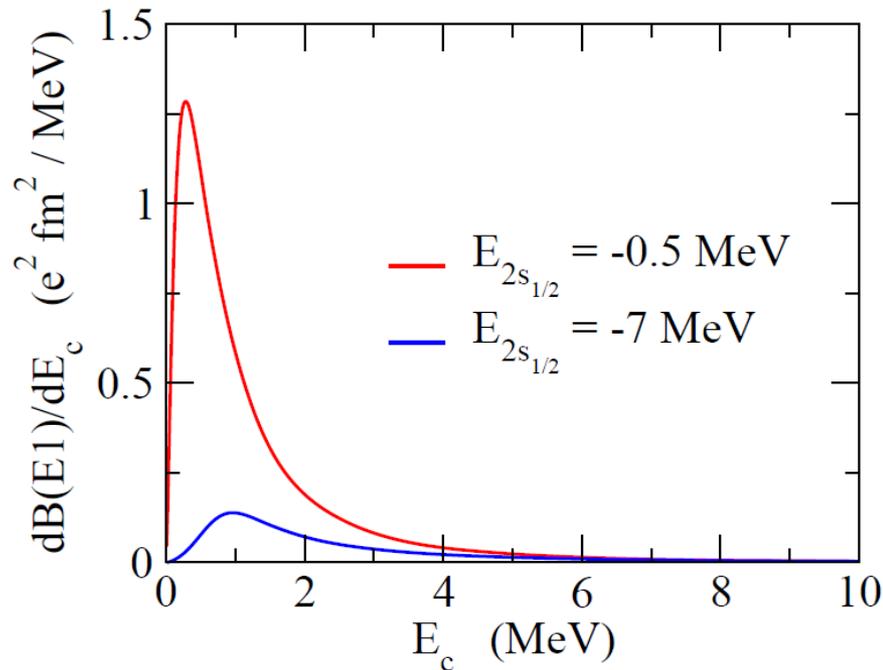
$$= \frac{3}{4\pi} e_{E1}^2 \langle r^2 \rangle_i$$

## 和則(わそく) : Sum Rule

$$S_0 = \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c} = \frac{3}{4\pi} e_{E1}^2 \langle r^2 \rangle_i$$



全E1遷移確率は  $r^2$  の(基底状態)期待値に比例



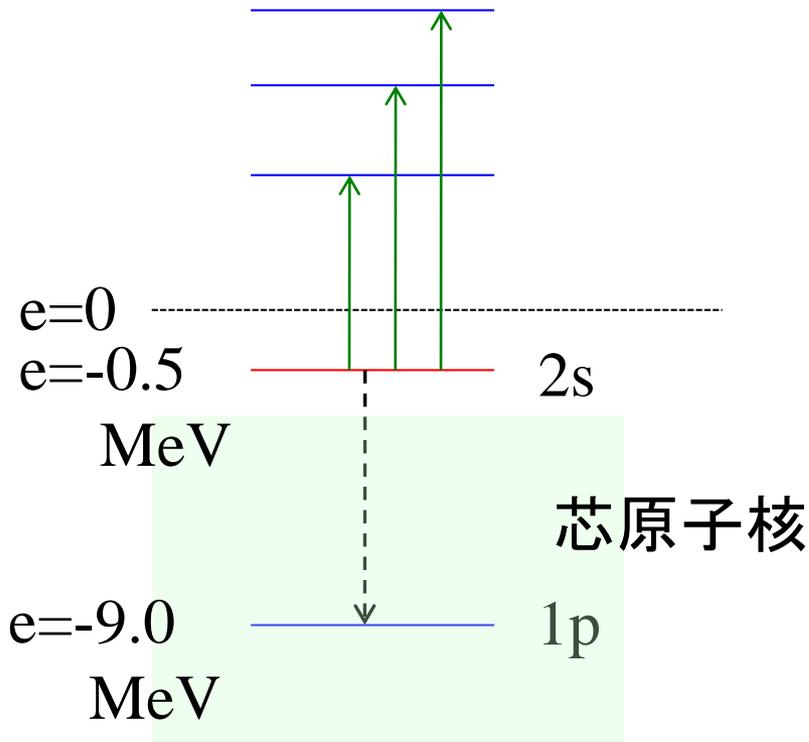
$$\begin{aligned} S_0 &= \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c} \\ &= 1.53 \text{ e}^2\text{fm}^2 \quad (E_b = -0.5 \text{ MeV}) \\ &\quad 0.32 \text{ e}^2\text{fm}^2 \quad (E_b = -7 \text{ MeV}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{3}{4\pi} e_{E1}^2 \langle r^2 \rangle_i \\ &= 1.62 \text{ e}^2\text{fm}^2 \quad (E_b = -0.5 \text{ MeV}) \\ &\quad 0.41 \text{ e}^2\text{fm}^2 \quad (E_b = -7 \text{ MeV}) \end{aligned}$$

\* ほぼ一致。

少しずれているのはパウリ禁止遷移 (2sから1pへの遷移)のため

# (補足)パウリ禁止遷移



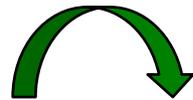
$$S_0 = \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c} = \frac{3}{4\pi} e_{E1}^2 \langle r^2 \rangle_i$$

$$S_0 = \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c} = 1.5275 \text{ e}^2\text{fm}^2$$

$$B(E1: 2s \rightarrow 1p) = 0.0967 \text{ e}^2\text{fm}^2$$

$$\frac{3}{4\pi} e_{E1}^2 \langle r^2 \rangle_i$$

$$= 1.6244 \text{ e}^2\text{fm}^2$$



$$\underbrace{1.5275}_{\text{physical transition}} + \underbrace{0.0967}_{\text{forbidden transition}} = 1.6242$$

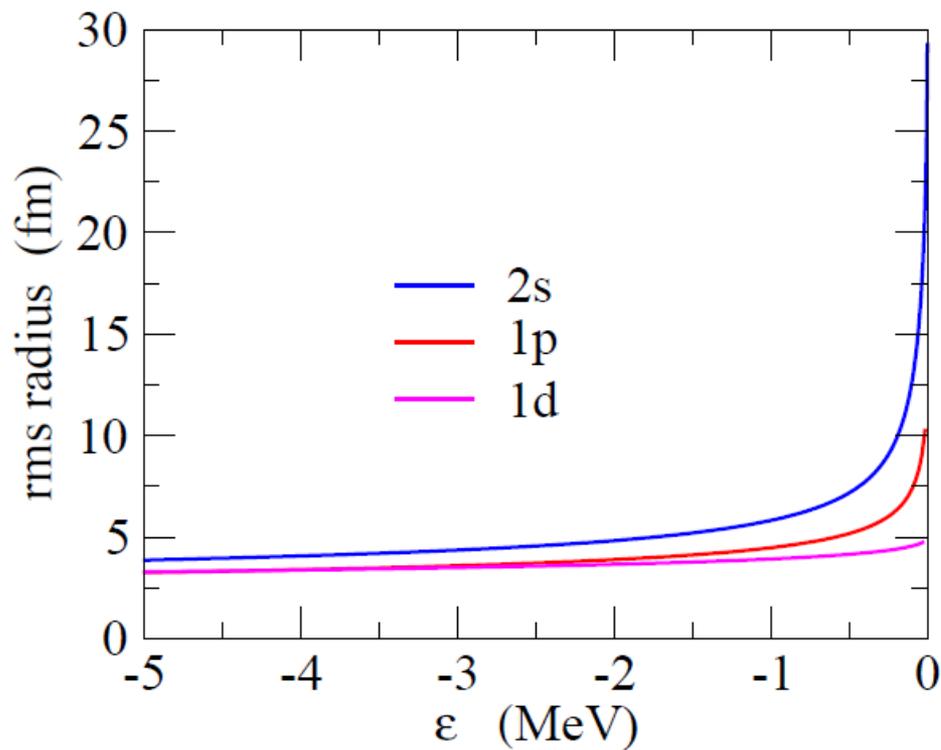
physical transition + forbidden transition = 1.6242

## 和則(わそく): Sum Rule

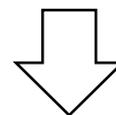
$$S_0 = \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c} = \frac{3}{4\pi} e_{E1}^2 \langle r^2 \rangle_i$$



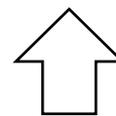
全E1遷移確率は  $r^2$  の(基底状態)期待値に比例



初期状態が  $l=0$  または  $l=1$  だと  
束縛が弱くなるほど半径は増大



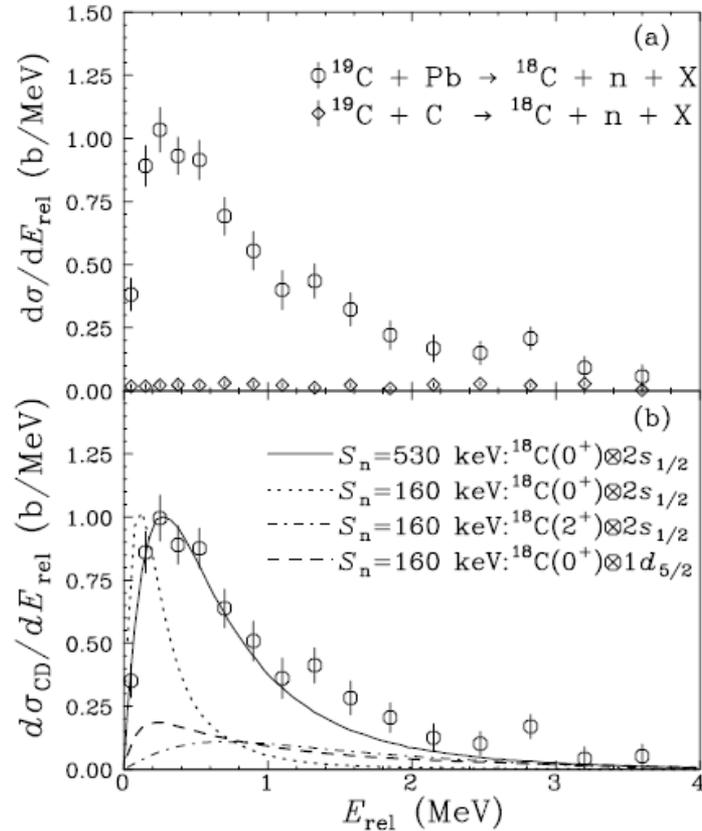
全E1遷移確率も増大



逆に大きな全E1遷移確率  
(またはクーロン分解断面積)  
が観測されたら  $l=0$  or  $l=1$  が示唆  
される → ハロー構造

# 1n ハロ一核の他の候補

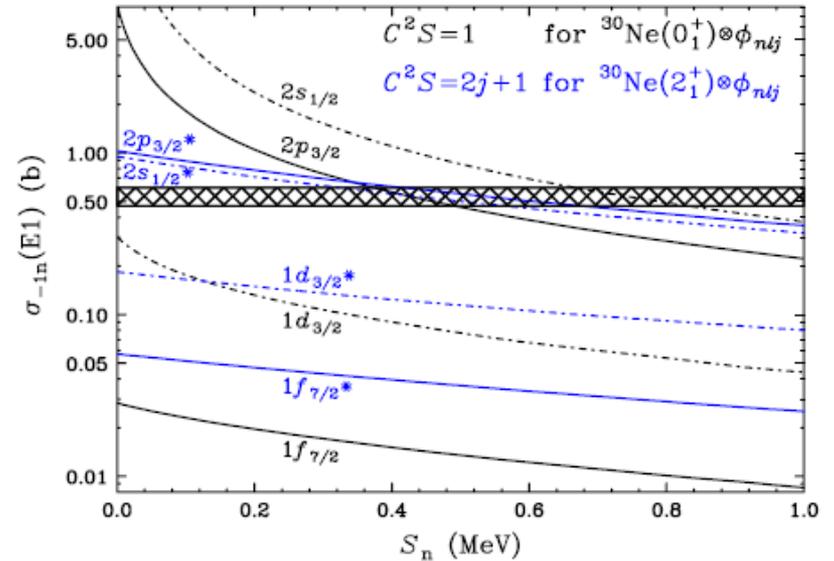
$^{19}\text{C}$ :  $S_n = 0.58(9)$  MeV



$^{19}\text{C}$  のクーロン分解反応

T. Nakamura et al., PRL83('99)1112

$^{31}\text{Ne}$ :  $S_n = 0.29 \pm 1.64$  MeV



大きなクーロン分解反応の  
断面積

T. Nakamura et al.,  
PRL103('09)262501

## 和則(わそく) : Sum Rule

$$\text{次に } S_1 = \int_0^\infty dE_c (E_c - E_b) \frac{dB(E_1)}{dE_c} \quad (\text{Energy Weighted Sum Rule})$$

基本的な考え方:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle \psi_i | [\hat{F}, [H, \hat{F}]] | \psi_i \rangle &= \frac{1}{2} \langle \psi_i | \hat{F} (H\hat{F} - \hat{F}H) - (H\hat{F} - \hat{F}H) \hat{F} | \psi_i \rangle \\ &= \langle \psi_i | \hat{F} H \hat{F} - E_i \hat{F}^2 | \psi_i \rangle \\ &= \sum_f E_f |\langle \psi_i | \hat{F} | f \rangle|^2 - E_i \langle \psi_i | \hat{F}^2 | \psi_i \rangle \\ &= \sum_f (E_f - E_i) |\langle f | \hat{F} | \psi_i \rangle|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_i | \hat{F} H \hat{F} | \psi_i \rangle &\uparrow \\ &= \sum_f \langle \psi_i | \hat{F} H | f \rangle \langle f | \hat{F} | \psi_i \rangle \\ &= \sum_f E_f \langle \psi_i | \hat{F} | f \rangle \langle f | \hat{F} | \psi_i \rangle \\ &\quad (\text{完全系}) \quad \sum_f |f\rangle \langle f| = 1 \end{aligned}$$

## 和則(わそく) : Sum Rule

$$\sum_f (E_f - E_i) |\langle f | \hat{F} | \psi_i \rangle|^2 = \frac{1}{2} \langle \psi_i | [\hat{F}, [H, \hat{F}]] | \psi_i \rangle$$

$$S_1 = \int_0^\infty dE_c (E_c - E_b) \frac{dB(E1)}{dE_c} \sim \sum_f \frac{E_f - E_i}{2l_i + 1} |\langle \psi_f | \hat{D} | \psi_i \rangle|^2$$

$$\begin{aligned} \hat{D}_0 &= e_{E1} r Y_{10}(\hat{r}) \\ &= e_{E1} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} z \end{aligned}$$

$$[H_0, \hat{D}_0] = \left[ \frac{p^2}{2\mu} + V(r), \hat{D}_0 \right] = \left[ \frac{p_z^2}{2\mu}, \hat{D}_0 \right] = \frac{1}{2\mu} \cdot e_{E1} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot (-i\hbar p_z)$$

$$[\hat{D}_0, [H_0, \hat{D}_0]] = \frac{-i\hbar}{\mu} \cdot \left( e_{E1} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \right)^2 [z, p_z] = \frac{\hbar^2}{\mu} \cdot \left( e_{E1} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \right)^2$$

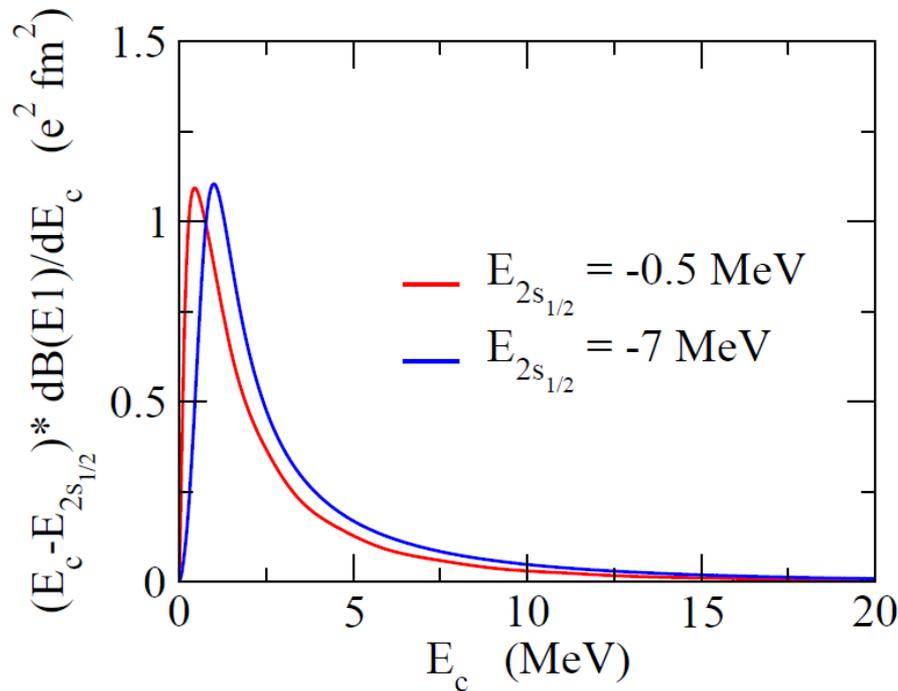

$$S_1 = \frac{9}{8\pi} e_{E1}^2 \frac{\hbar^2}{\mu}$$

モデル(ポテンシャル、束縛エネルギー、角運動量など)に依らない定数

[TRK (Thomas-Reiche-Kuhn) Sum Rule]

## 和則(わそく) : Sum Rule

$$S_1 = \int_0^{\infty} dE_c (E_c - E_b) \frac{dB(E1)}{dE_c} = \frac{9}{8\pi} e_{E1}^2 \frac{\hbar^2}{\mu}$$



$$S_1 = \int_0^{\infty} dE_c (E_c - E_b) \frac{dB(E1)}{dE_c}$$

$$= 2.79 e^2 \text{ fm}^2 \text{ MeV} (E_b = -0.5 \text{ MeV})$$

$$3.18 e^2 \text{ fm}^2 \text{ MeV} (E_b = -7 \text{ MeV})$$

$$\frac{9}{8\pi} e_{E1}^2 \frac{\hbar^2}{\mu} = 1.97 e^2 \text{ fm}^2 \text{ MeV}$$

\* ほぼ一致。

少しずれているのはパウリ禁止遷移 (2sから1pへの遷移) のため

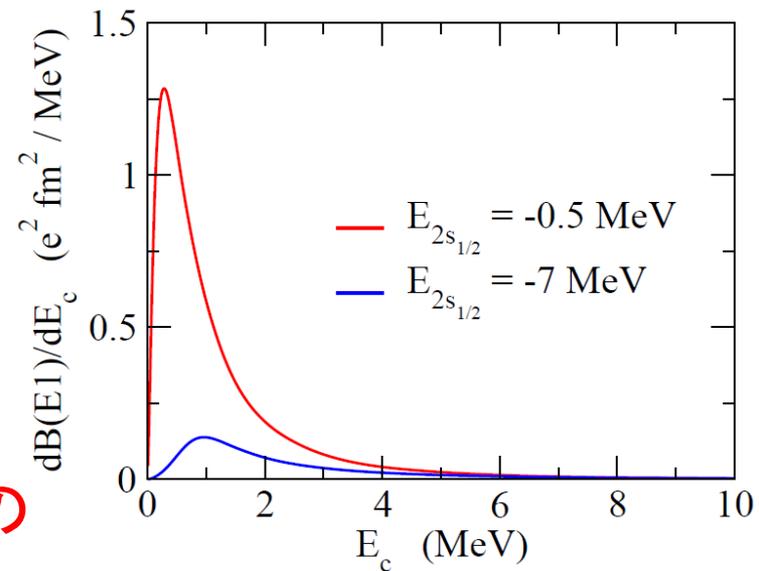
## 和則の利点

$$S_0 = \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c} = \frac{3}{4\pi} e_{E1}^2 \langle r^2 \rangle_i$$

$$S_1 = \frac{9}{8\pi} e_{E1}^2 \frac{\hbar^2}{\mu}$$

和則:

励起状態の(ある種の)情報が基底状態の性質のみによって表わされる  
(励起状態の情報を知っている必要がない)。



- 実験で強度分布が測られた時、測られた範囲外にも強度があるかどうか (missing strength) 判断できる。
- 強度分布を測ることによって原子核の半径などの情報を得られる。
- 実験データや数値計算のチェックになる。  
(和則の値よりとても大きくなると何かがおかしい)。

## Giant Multipole Resonances in $^{90}\text{Zr}$ Observed by Inelastic Electron Scattering

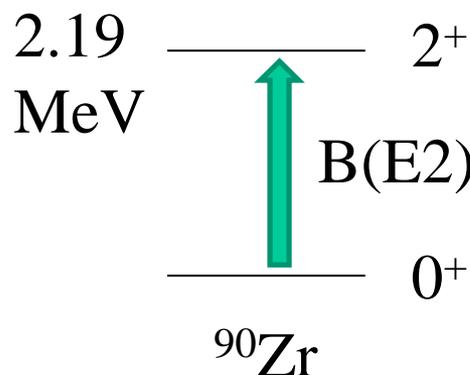
S. Fukuda and Y. Torizuka

*Laboratory of Nuclear Science, Tohoku University, Tomizawa, Sendai, Japan*

(Received 24 August 1972)

Inelastic electron scattering from the giant dipole resonance region in  $^{90}\text{Zr}$  was measured. In addition to the usual dipole resonance we have found new resonances at 14.0 MeV and around 28 MeV. The spins and parities and transition strengths of these states are discussed.

GQRの発見以前は、低エネルギー  $2^+$  状態のみが知られていた



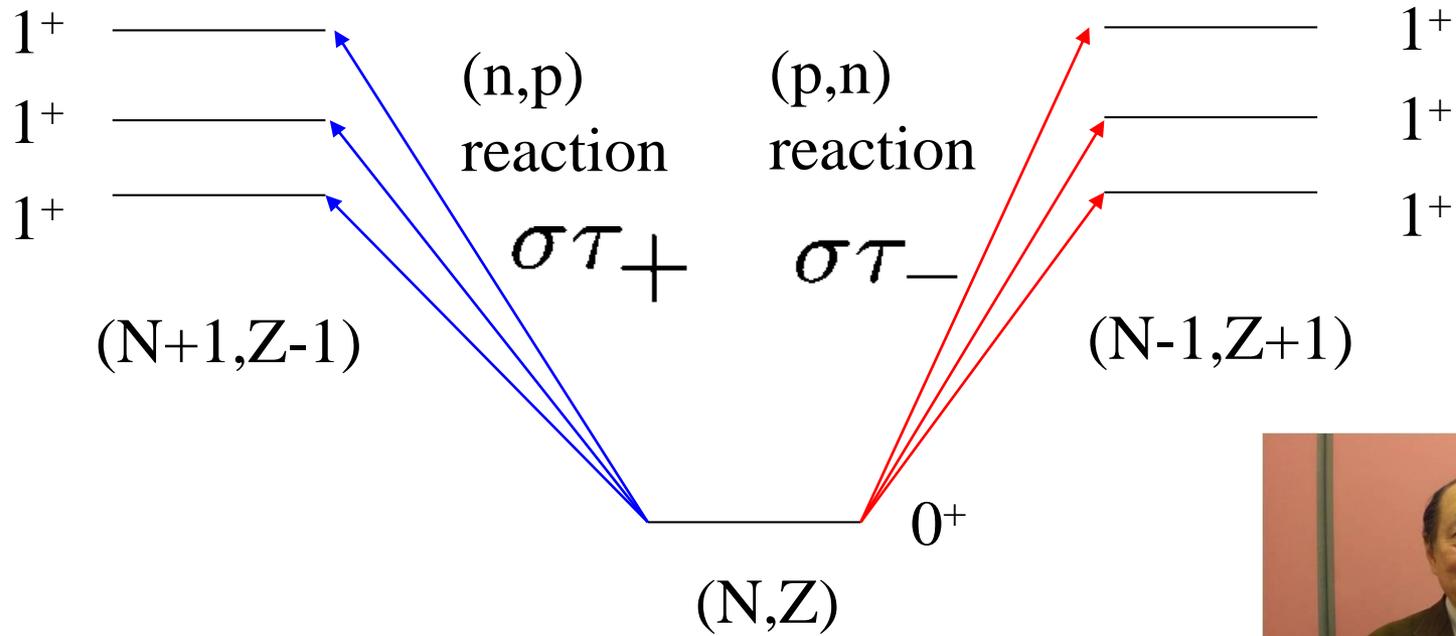
$$B(E2) = 26.85 \text{ W.u.} \longrightarrow$$

EWSR の 2.5% 程度  
残りはどこに?

→ GQR ( $\sim 14 \text{ MeV}$ ) が  
発見され解決

(参考) 和則の利点が活かされた例: 池田和則

荷電交換反応: ガモフ・テラー遷移

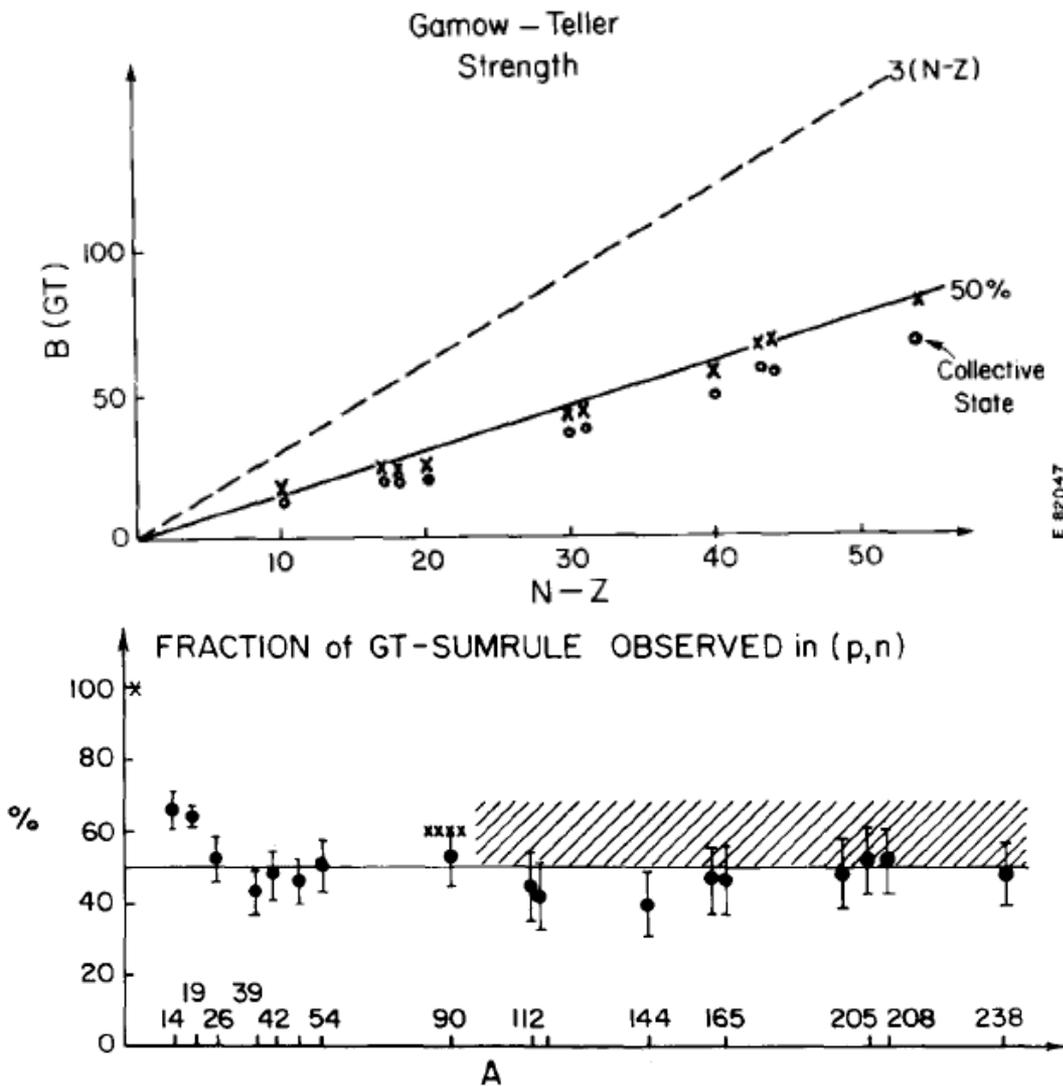
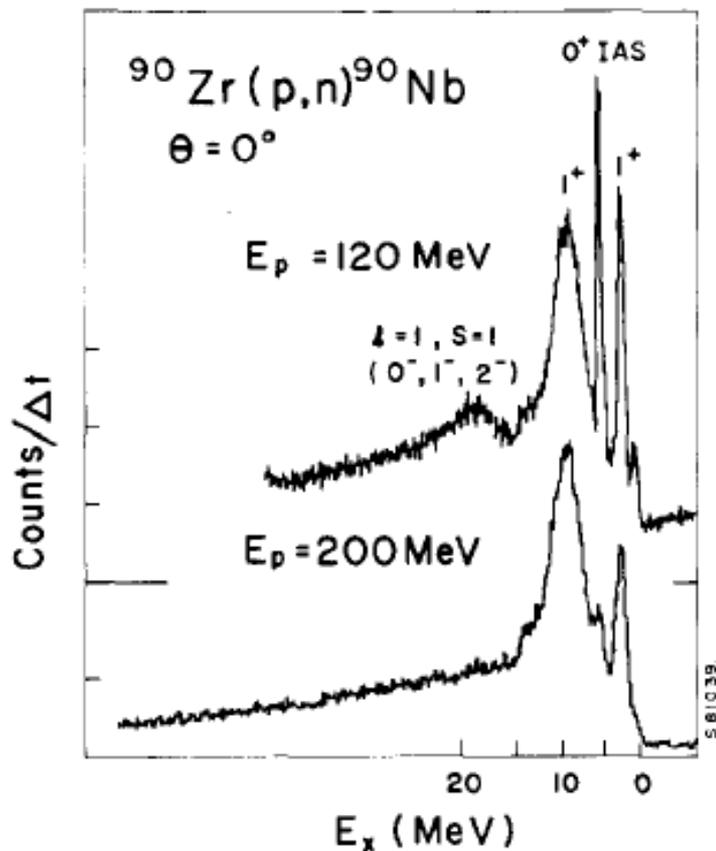


池田和則 (Ikeda Sum Rule)

$$S_0(\sigma\tau_-) - S_0(\sigma\tau_+) = 3(N - Z)$$

cf. 藤田佳孝さん

# 1997年以前の状況



全強度が和則の50%程度  
 しか観測されない

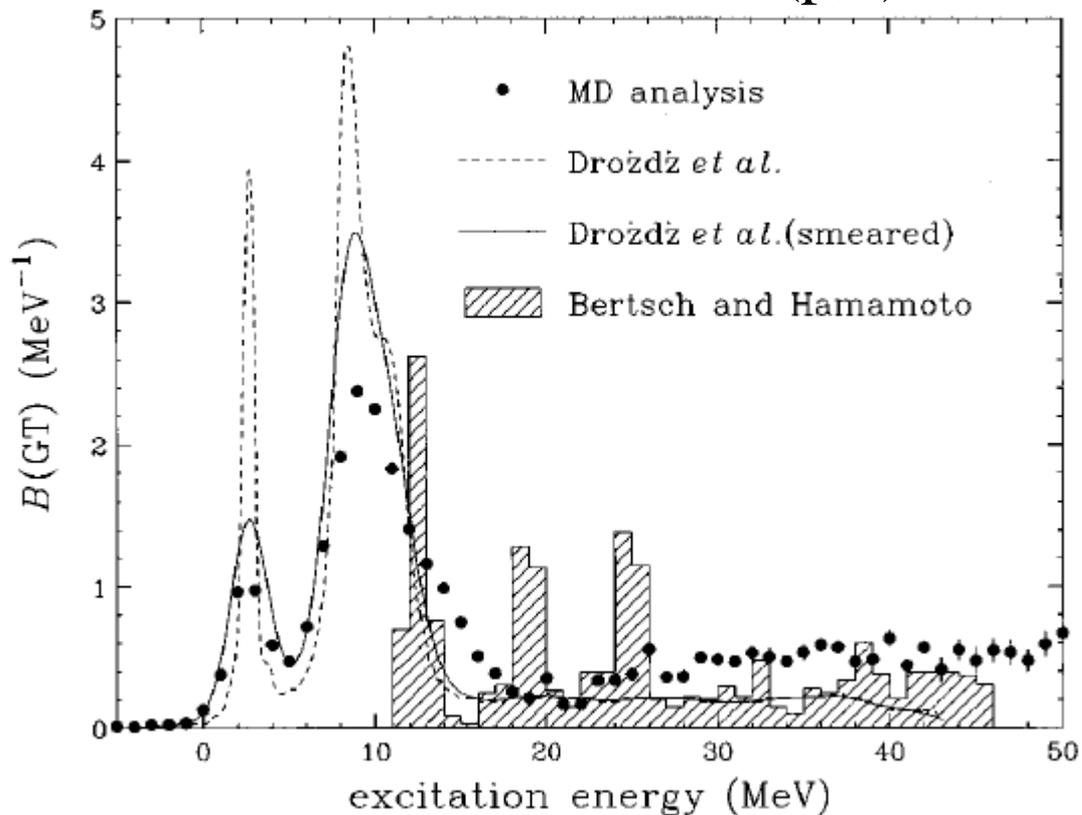
「GT強度のクエンチ問題」

クォークの自由度( $\Delta$ 共鳴)のためか?

C. Gaarde, Nucl. Phys. A396('83)127c

# 若狭智嗣氏、酒井英行氏らによる実験 (1997)

$^{90}\text{Zr} (p,n) ^{90}\text{Nb}$



T. Wakasa *et al.*,  
PRC55 ('97) 2909

$$S_- - S_+ = 27.0 \pm 1.6 = (90 \pm 5)\% \text{ of Ikeda sum rule}$$

→ クォークの寄与: 小

current-current correlation tensor:

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}(q) &= i \int dx^4 e^{iqx} \langle 0 | T[j_\mu(x), j_\nu(0)] | 0 \rangle \\ &= (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) \Pi(q^2)\end{aligned}$$

dispersion relation

$$\Pi(q^2) = \int \frac{ds}{2\pi} \frac{\rho(s)}{s - q^2 - i\epsilon}$$

スペクトラル関数



$$\int_0^\infty \frac{ds}{2\pi} s \rho(s) = -\frac{1}{3} \int d^3x \langle 0 | [[j_\mu(0, \mathbf{x}), H], j^\mu(0)] | 0 \rangle \text{ など}$$

例)

$$\int_0^\infty \frac{ds}{2\pi} s (\rho_A(s) - \rho_V(s)) = \left\langle 0 \left| \frac{4m_u}{3} \bar{u}u + \frac{4m_d}{3} \bar{d}d \right| 0 \right\rangle$$

cf. 有限密度でのハドロンの性質

(Hatsuda-Lee, 1992; Asakawa-Ko, 1993)