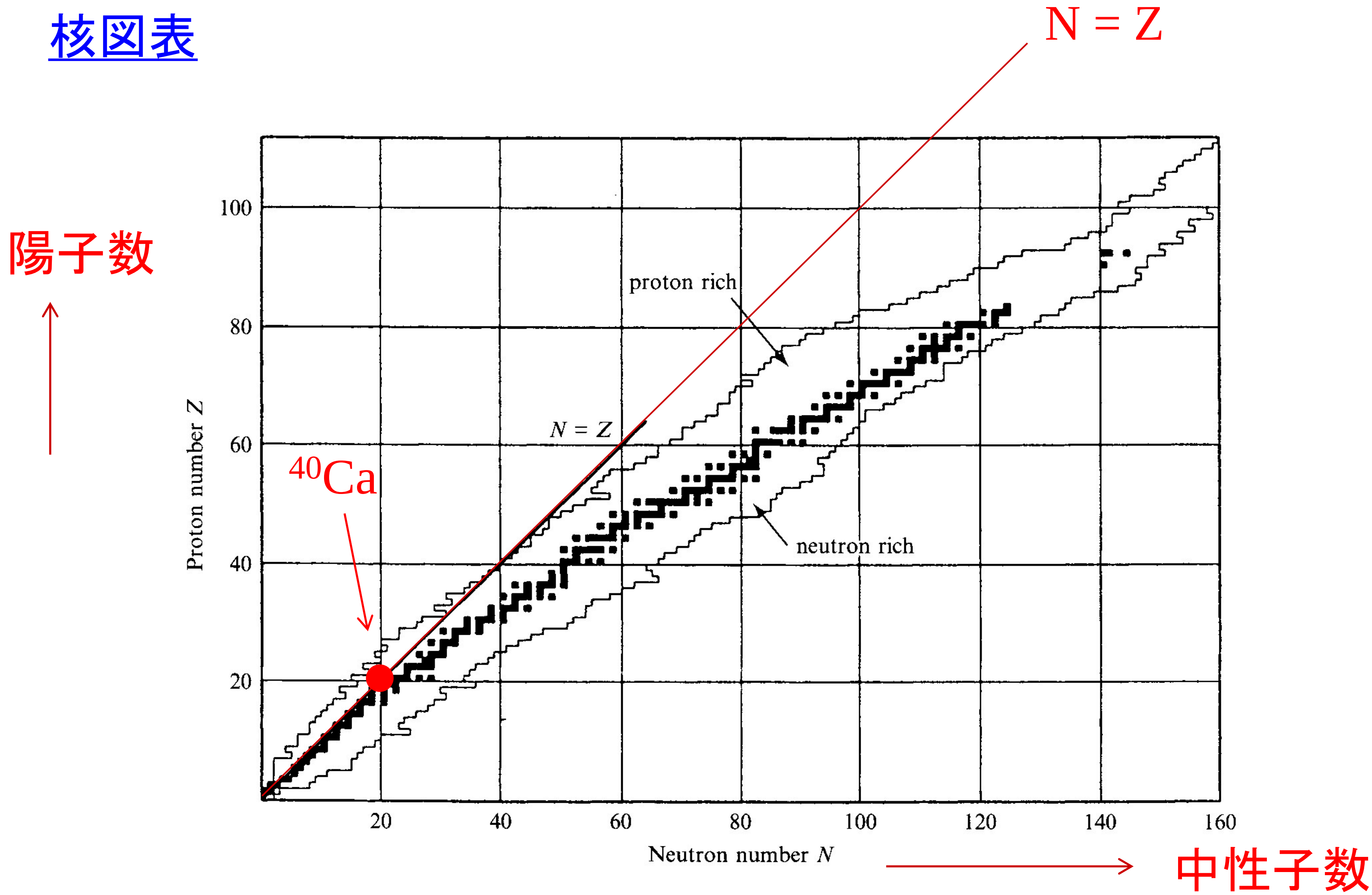
ドリップ線の外側の原子核:
一粒子共鳴状態の性質

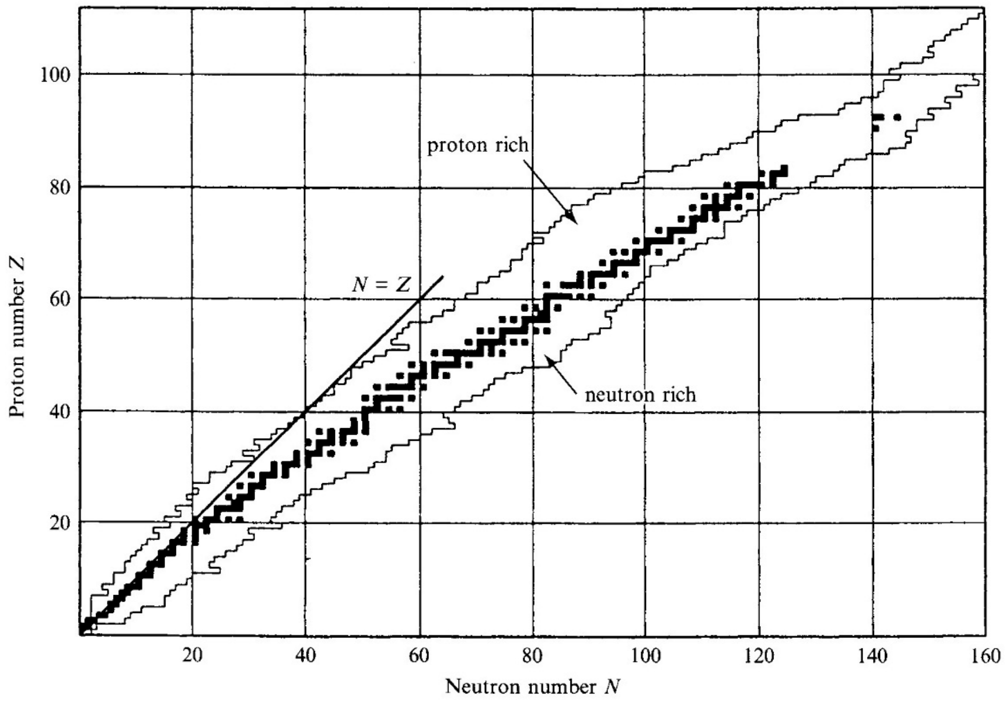
－ドリップ線の外側の原子核
－共鳴状態の一般論
－共鳴状態の様々な記述法
－陽子放出崩壊

核図表



横軸を中性子の数、縦軸を陽子の数にとった2次元マップ
（■は地球上に存在する安定な原子核）

核図表



横軸を中性子の数、縦軸を陽子の数にとった2次元マップ
（■は地球上に存在する安定な原子核）

- Z ~20くらいまでは N~Z
- Z > 20 になると N > Z

p-p間力
p-n間力
n-n間力

どれも同じ強さ？

n-n 束縛系なし
p-p 束縛系なし

n-p 束縛系あり（重陽子）

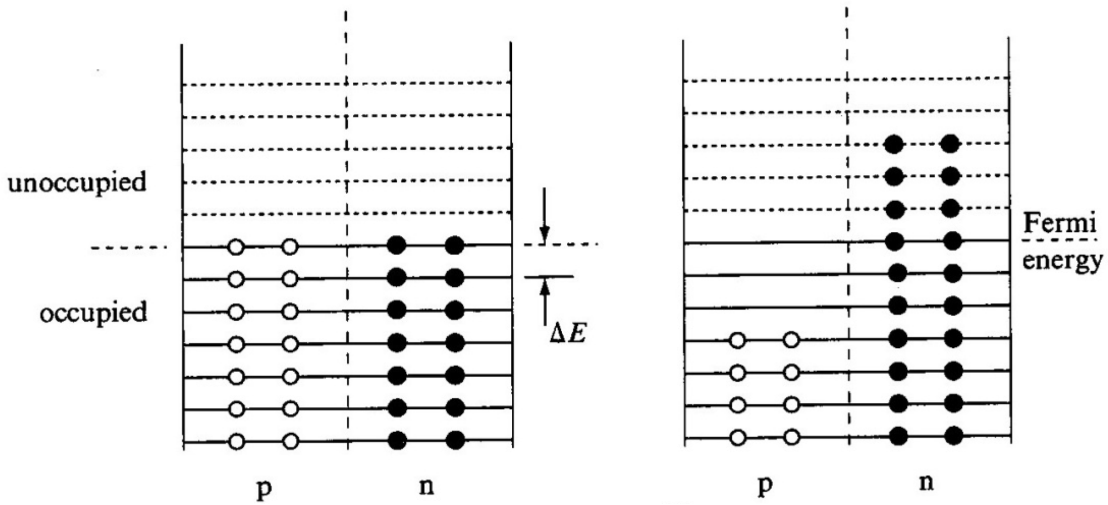
→ pn 間の引力がより強い
（量子力学：3次元ポテンシャルの束縛状態
←引力が強い場合のみ）

- 「Z ~20くらいまでは N~Z」になる理由（原子核の対称エネルギー）

２つの理由

1. 中性子間力や陽子間力よりも中性子－陽子間力の方が強い
   cf. 重陽子

2. パウリ原理



両方とも（同じ A = N+Z であれば）N ~ Z にした方が得する

- それでは、何故「Z > 20 では N > Z」となるか?

クーロン力の影響

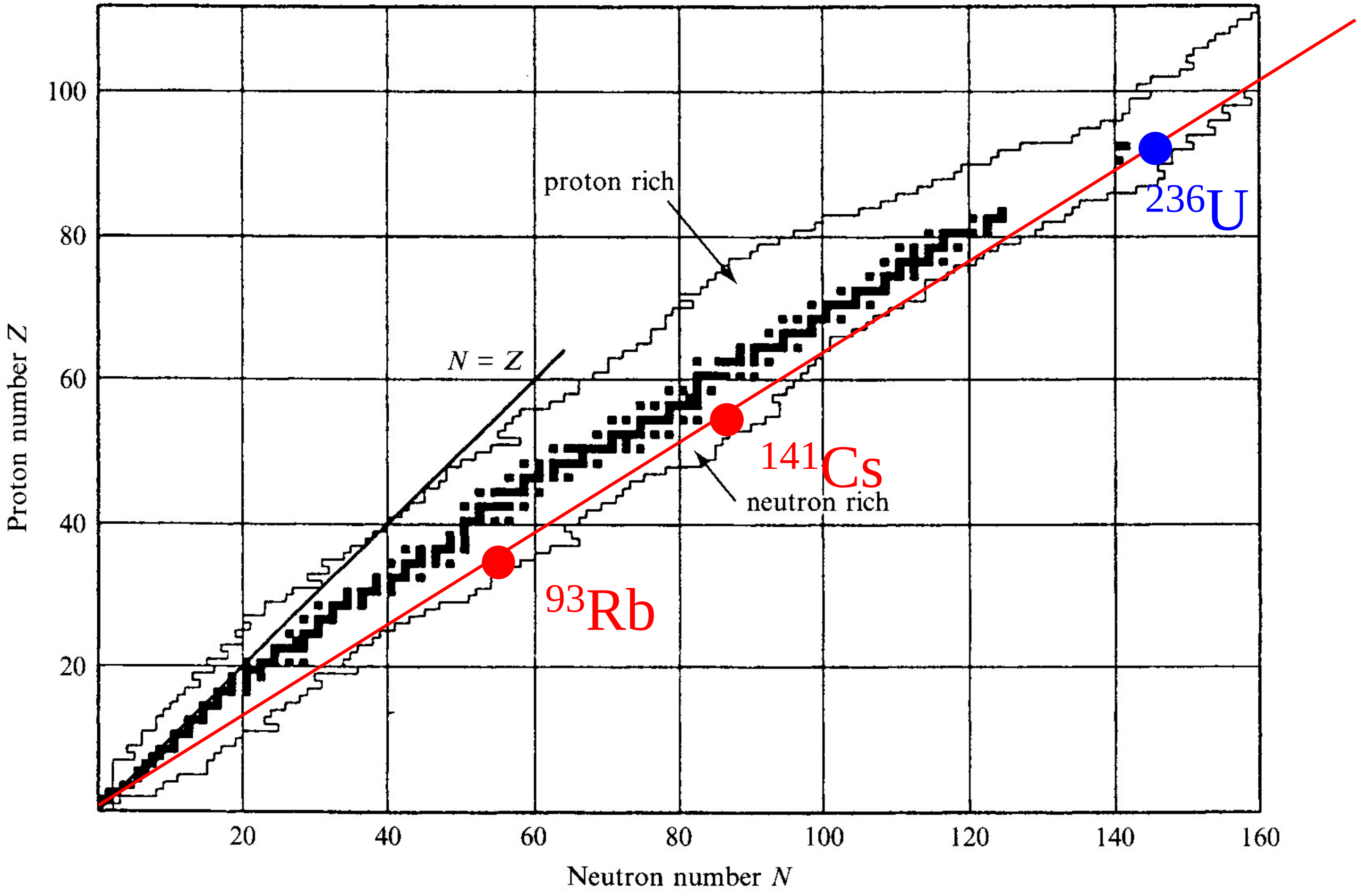
pp, pn, nn : 核力（強い引力）
pp : +クーロン力（斥力）

➡ 中性子の数を増やして引力をかせぐ
（クーロン斥力を打ち消す）

対称エネルギーでは損をするが、トータルとしては得をする。

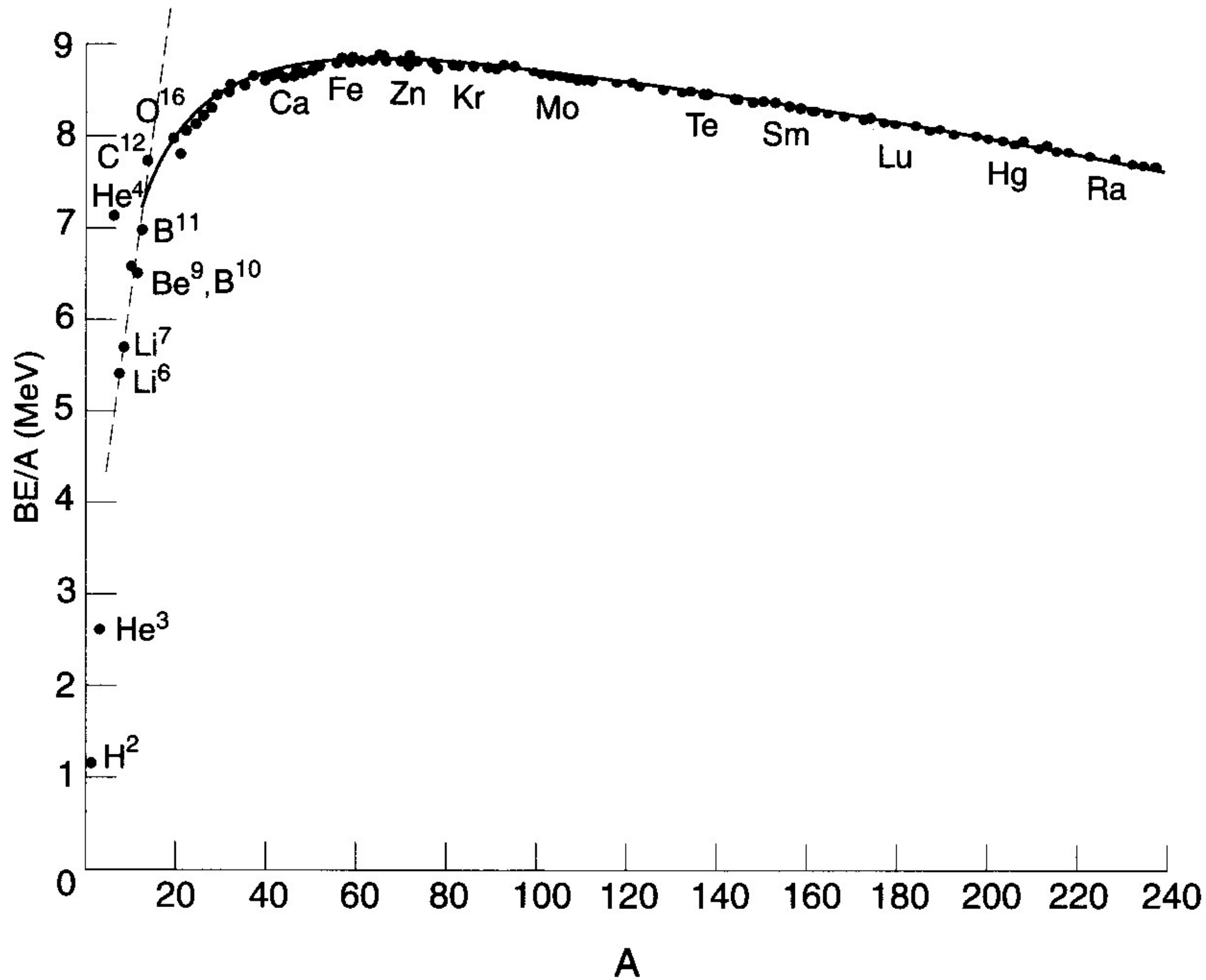
核図表

$^{236}U \longrightarrow {}^{141}Cs + {}^{93}Rb + 2n$（核分裂）



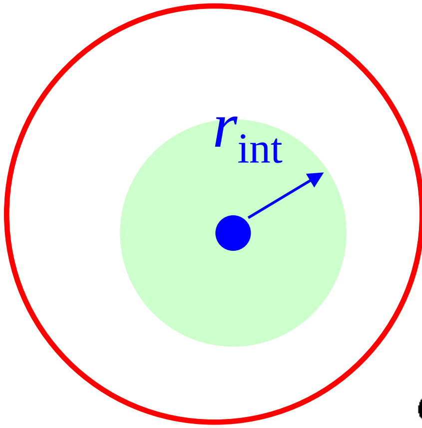
- ✓ 原発の問題
- ✓ 中性子過剰核を生成する1つの有力な方法

束縛エネルギーの実験データ

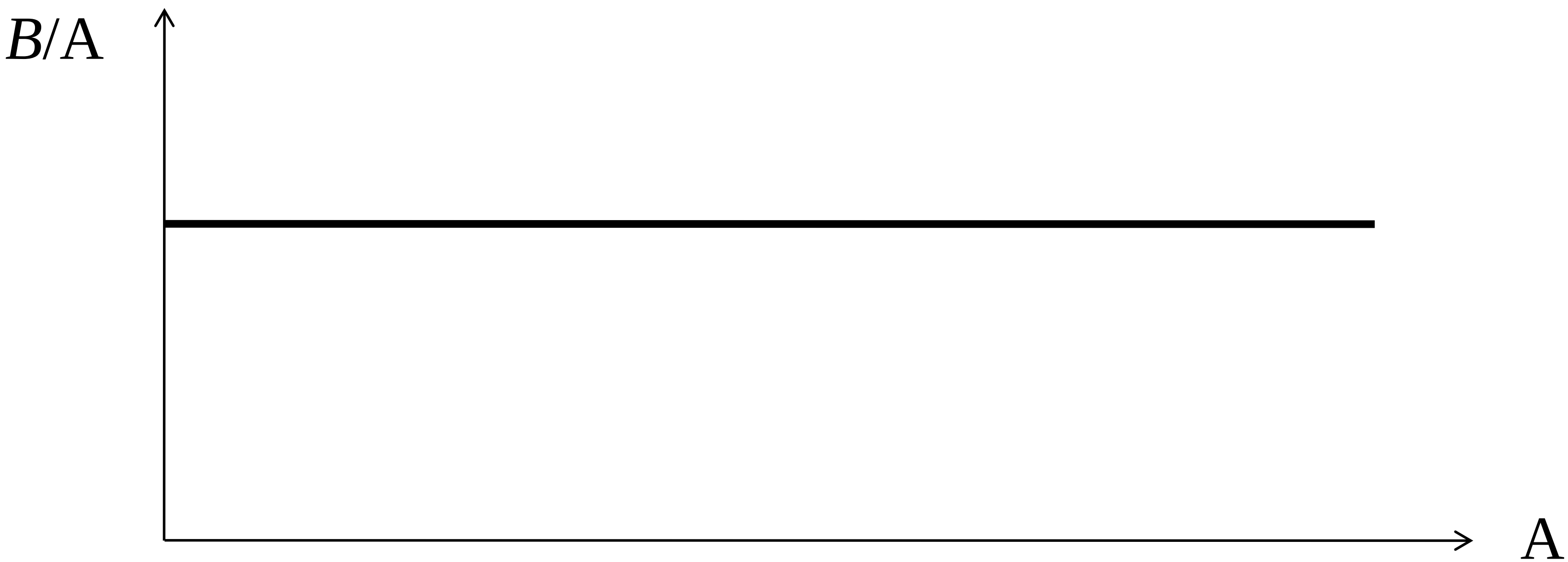


もし、それぞれの核子が近くのα個の粒子とだけ相互作用するとしたら:

$$B \sim \alpha\, A/2 \longrightarrow B/A \sim \alpha/2 \text{ (const.)}$$

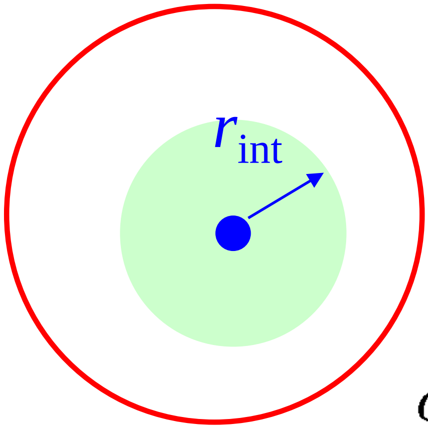


$$\alpha = \frac{4\pi}{3} r_{\rm int}^3 \cdot \rho$$

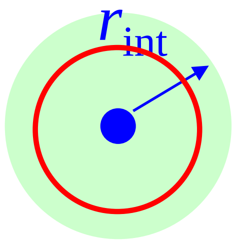


もし、それぞれの核子が近くのα個の粒子とだけ相互作用するとしたら:

$$B \sim \alpha\, A/2 \longrightarrow B/A \sim \alpha/2 \text{ (const.)}$$

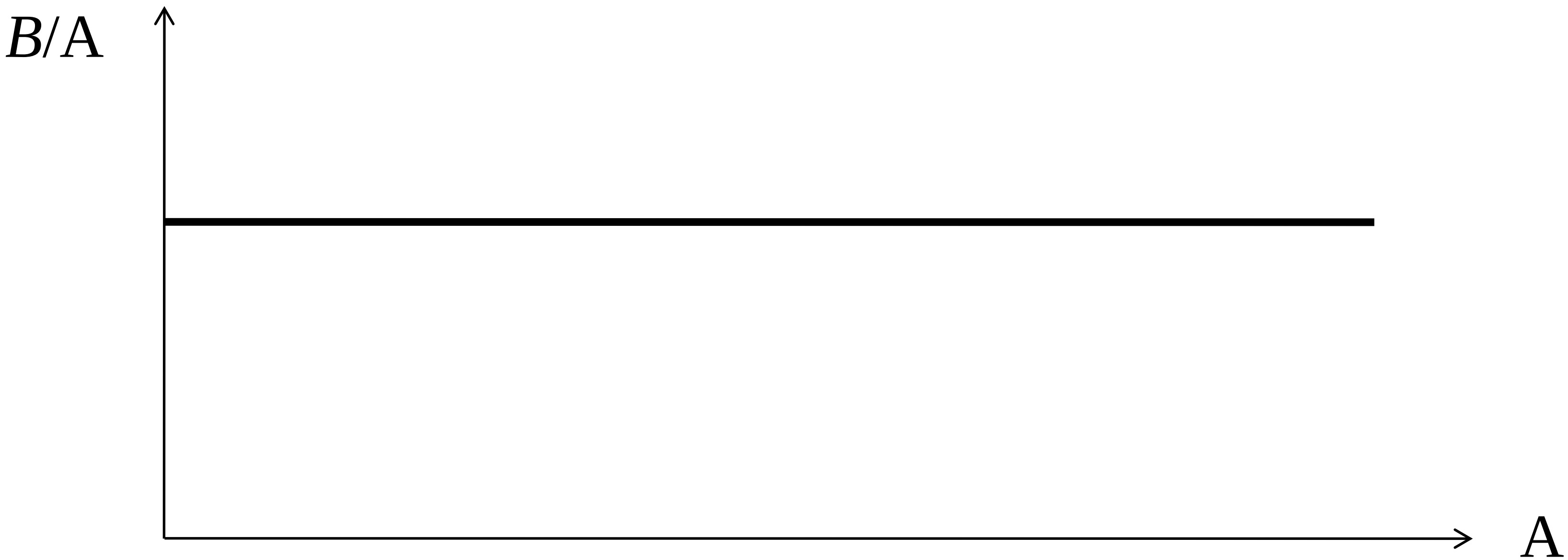


小さな原子核だと



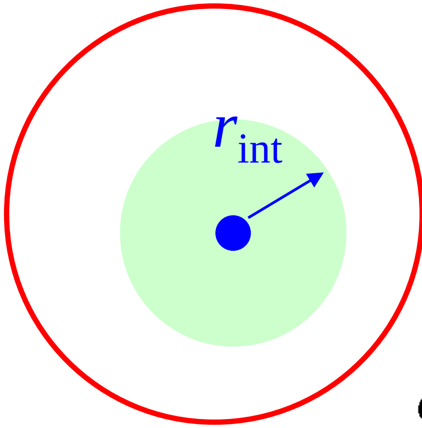
$$\alpha = \frac{4\pi}{3} r_{\rm int}^3 \cdot \rho$$

$$\rightarrow B/A \propto A - 1$$

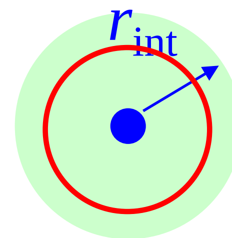


もし、それぞれの核子が近くのα個の粒子とだけ相互作用するとしたら:

$$B \sim \alpha\, A/2 \longrightarrow B/A \sim \alpha/2\ \text{(const.)}$$

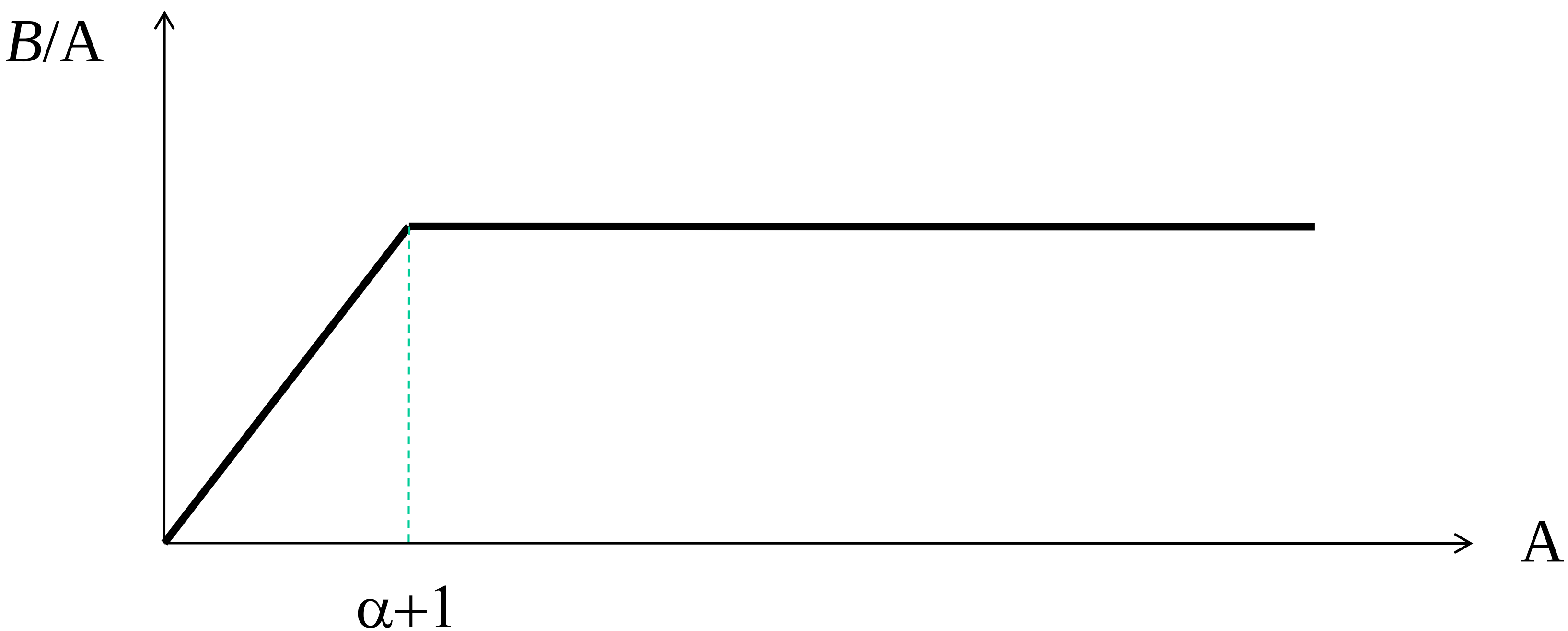


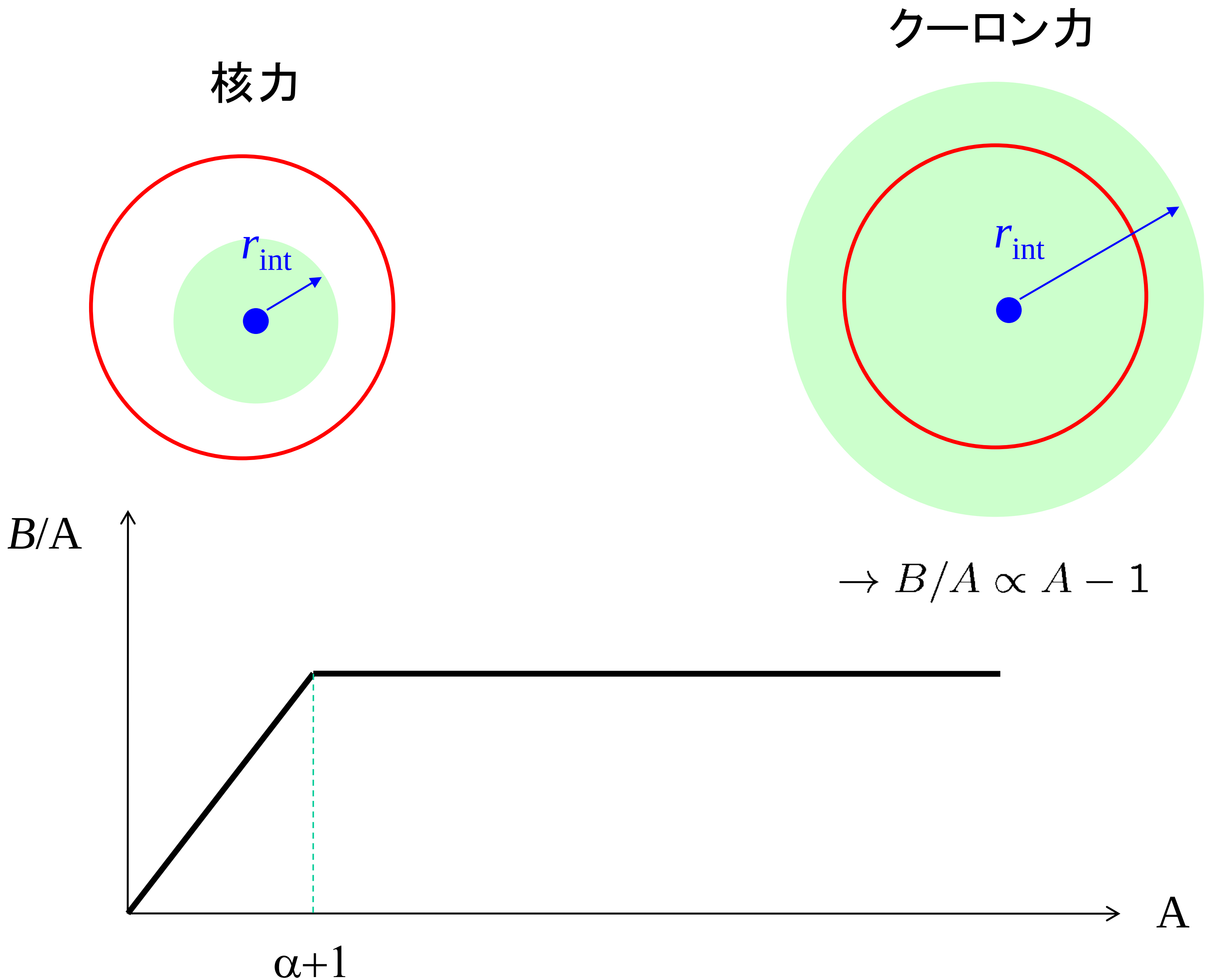
小さな原子核だと

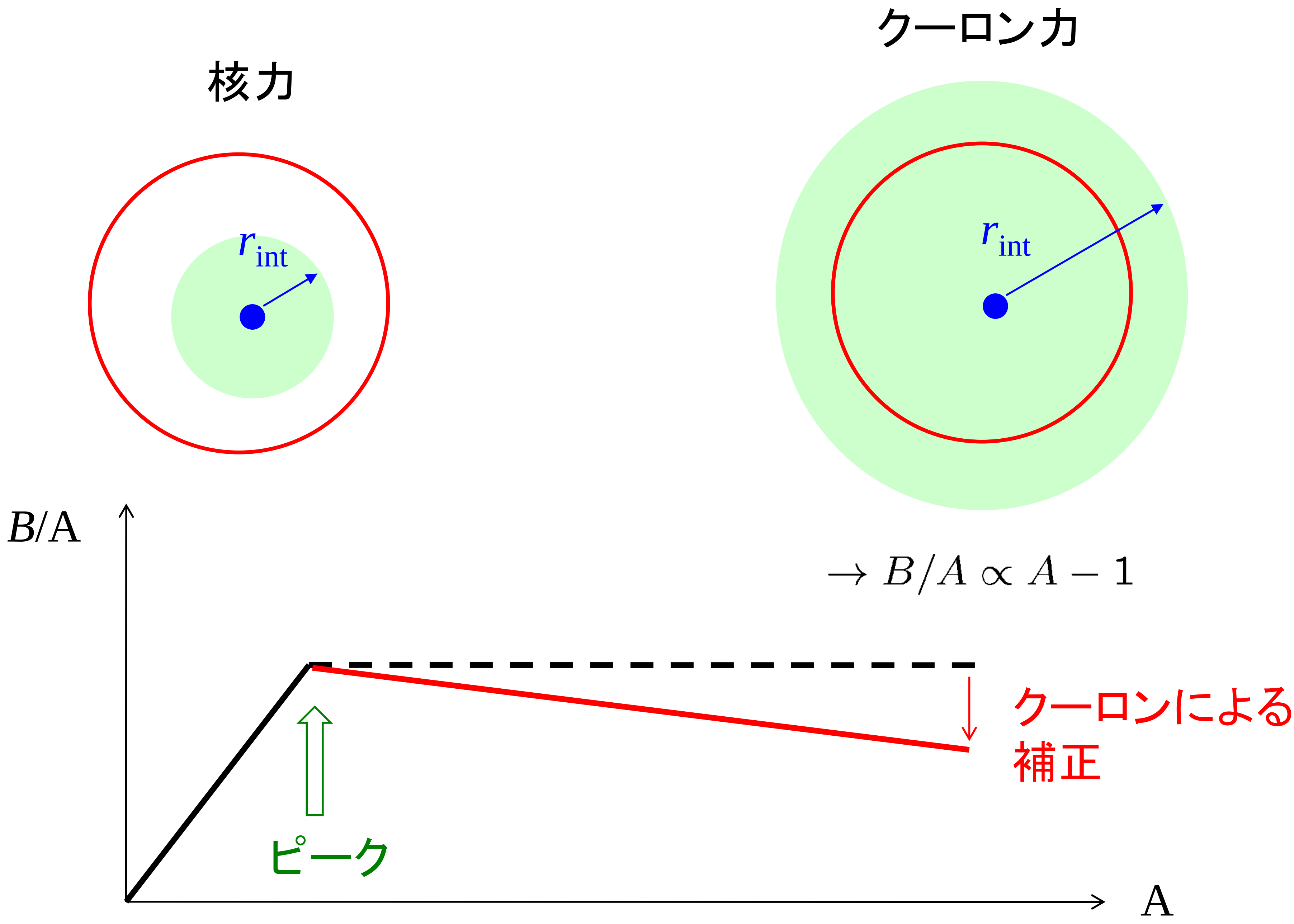


$$\alpha = \frac{4\pi}{3} r_{\rm int}^3 \cdot \rho$$

$$\rightarrow B/A \propto A - 1$$




核力
クーロン力
$r_{\rm int}$
$r_{\rm int}$
B/A
$\rightarrow B/A \propto A-1$
A
α+1


核力
クーロン力
r_{int}
r_{int}
B/A
$\rightarrow B/A \propto A-1$
クーロンによる
補正
ピーク
A

ドリップ線の外側の原子核：一粒子共鳴状態の性質

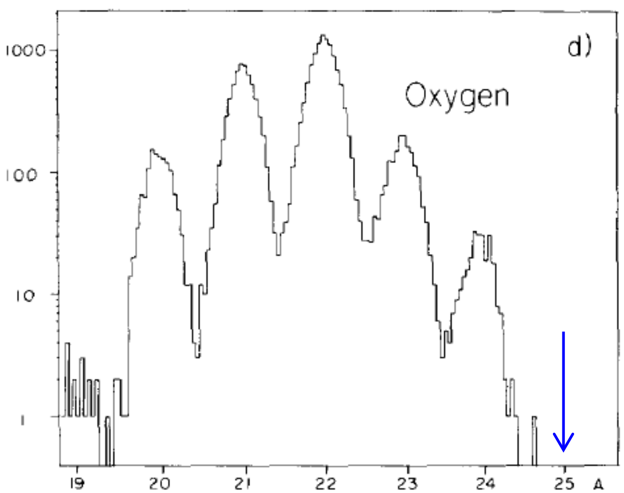
ードリップ線の外側の原子核
ー共鳴状態の一般論
ー共鳴状態の様々な記述法
ー陽子放出崩壊

酸素同位体のドリップ線

酸素原子核 (Z=8)

✓ 安定同位体 : ^{16}O (99.757%), ^{17}O (0.038%), ^{18}O (0.205%)

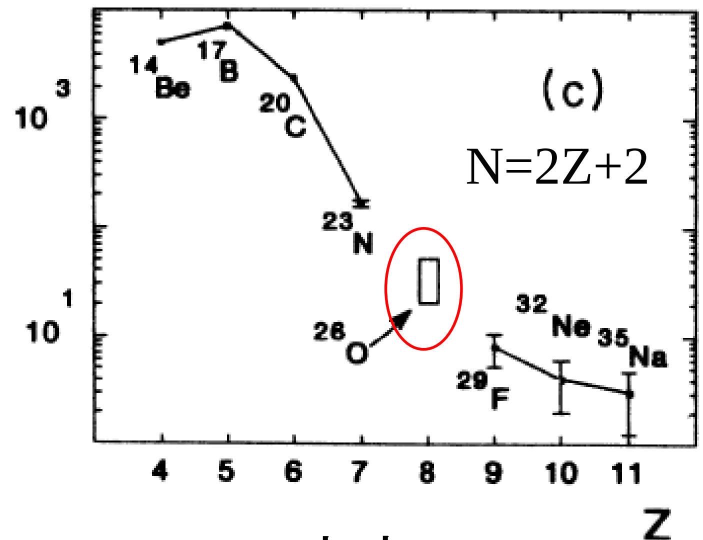
✓ ^{24}O の発見 : A.G. Artukh et al., PL32B (1970) 43



^{40}Ar の破砕

M. Langevin et al.,
PL150B ('85) 71

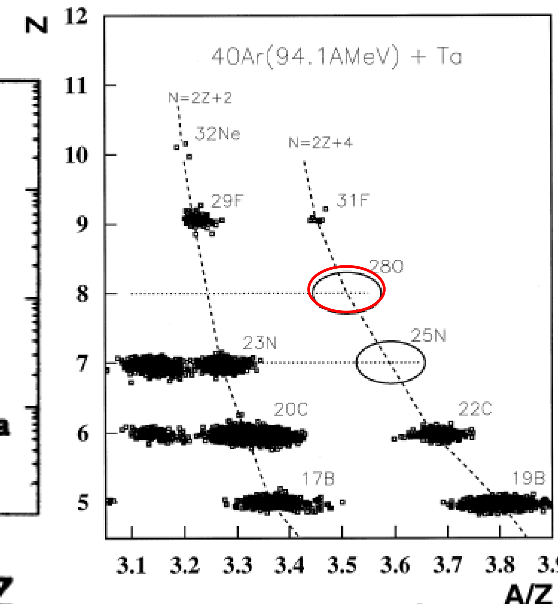
^{25}O は不検出



^{48}Ca の破砕

D. Guillemaud-Mueller et al.,
PRC41 ('90) 937

^{26}O は不検出



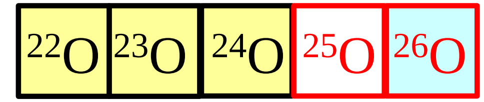
^{40}Ar の破砕

H. Sakurai et al.,
PLB448 ('99) 180

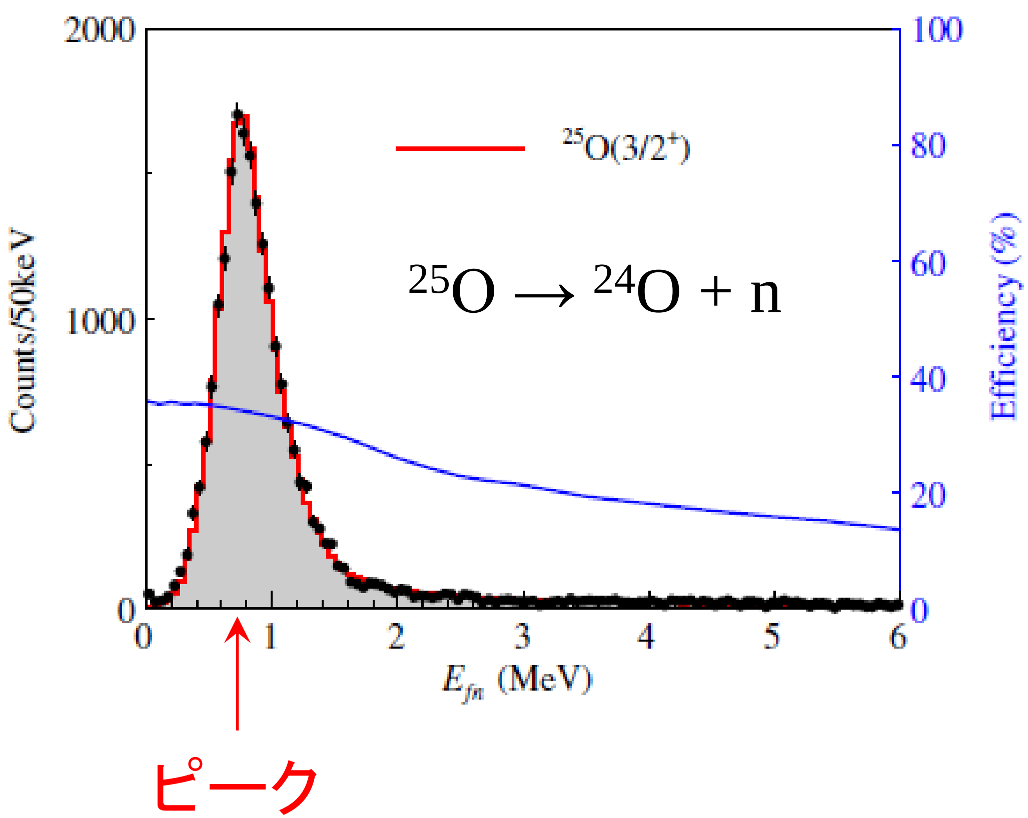
^{28}O は不検出

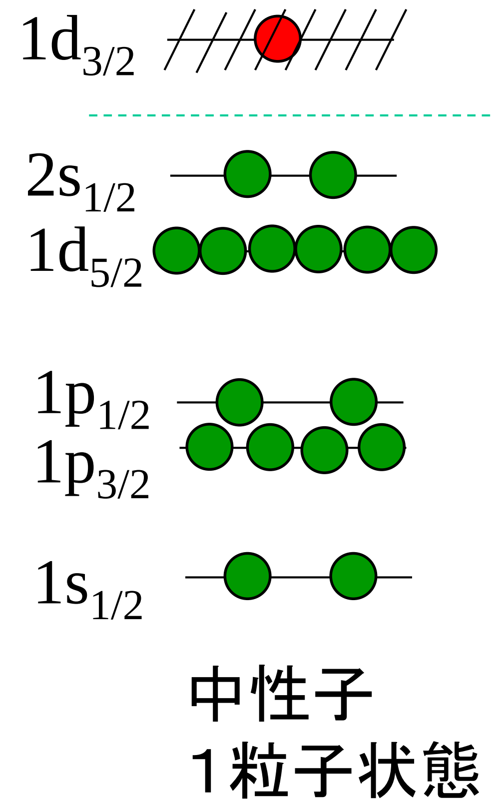
➡ 酸素の中性子ドリップ線は ^{24}O で確定。^{25,26,28}O は非束縛。

^{25}O はどのように見えるのか?



$^{26}_{9}F_{17}$から1つ陽子を抜いて $^{25}_{8}O_{17}$ を生成 → 1中性子を放出して崩壊

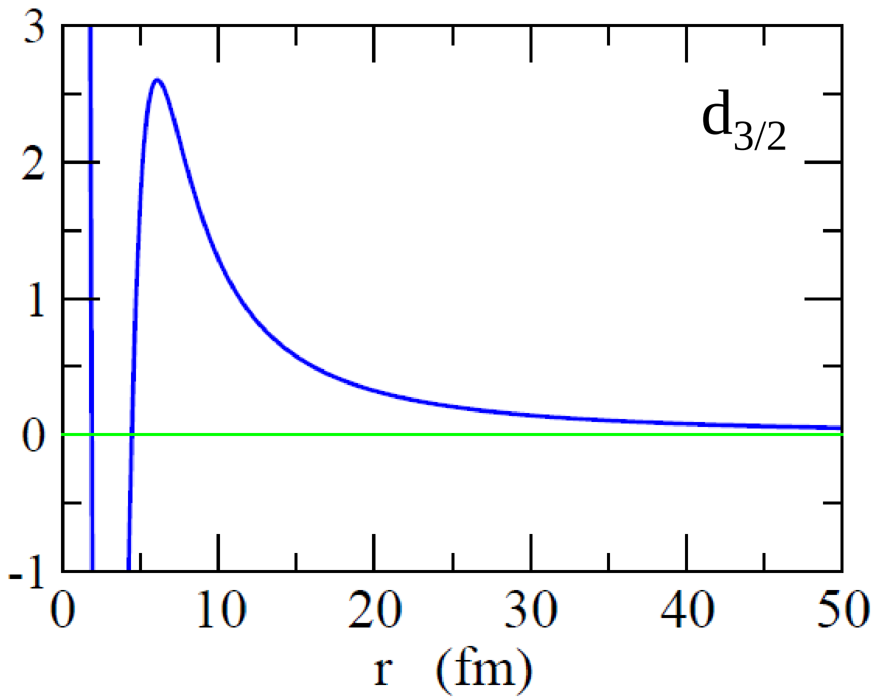




Y. Kondo et al., PRL116 (‘16) 102503

$1d_{3/2}$ の「準束縛」状態と解釈することができる

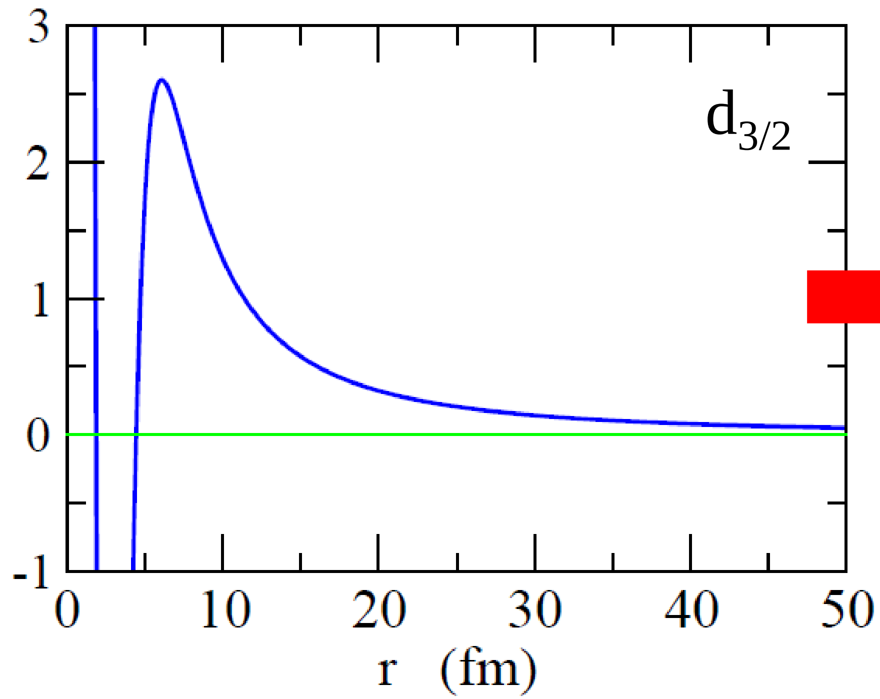
準束縛状態とは?

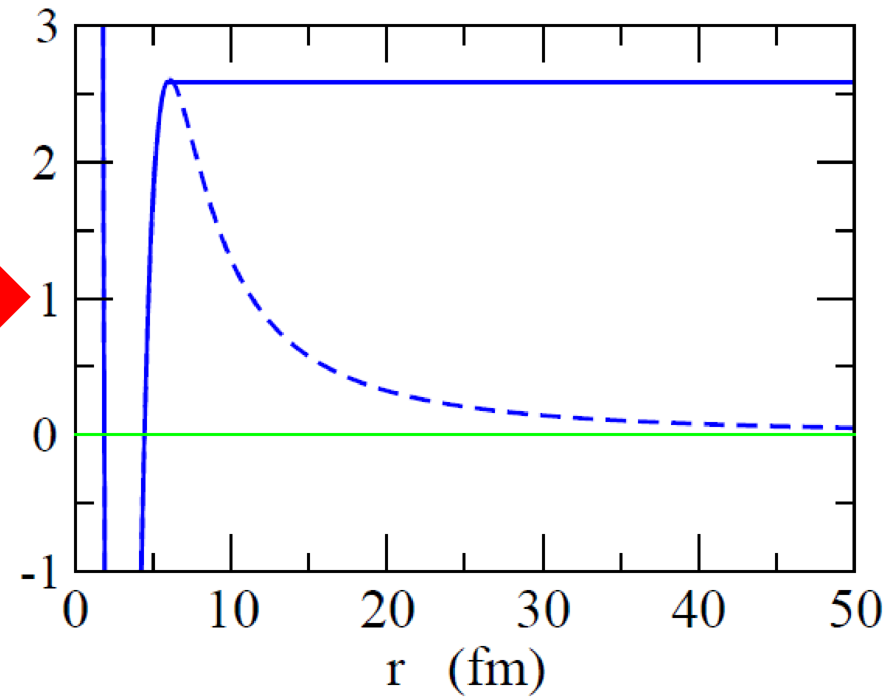


実際のポテンシャル

束縛状態は $E < 0$ の領域のみ

準束縛状態とは?





実際のポテンシャル

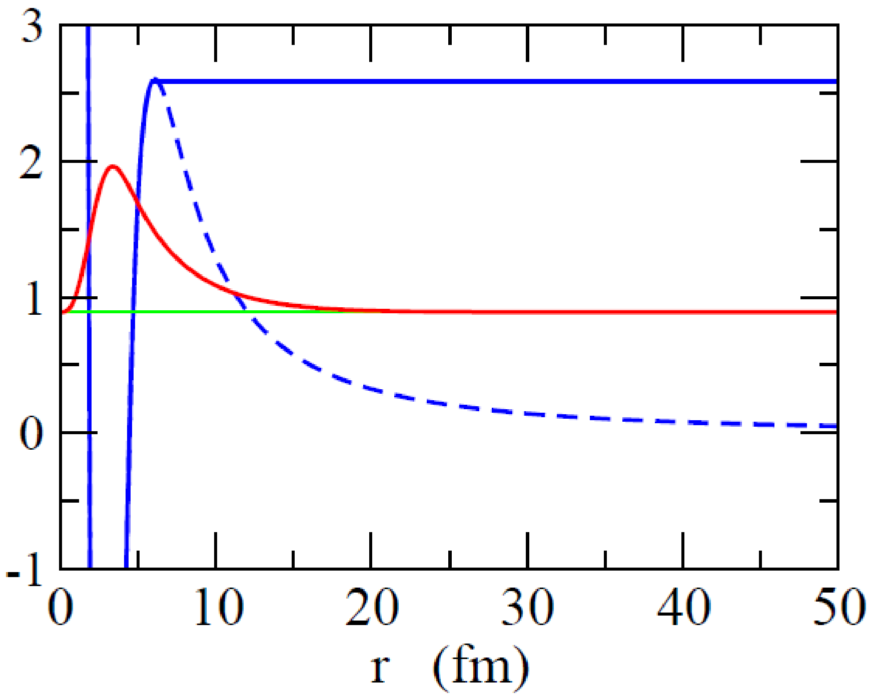
束縛状態は $E<0$ の領域のみ

このようにポテンシャルを変更すると

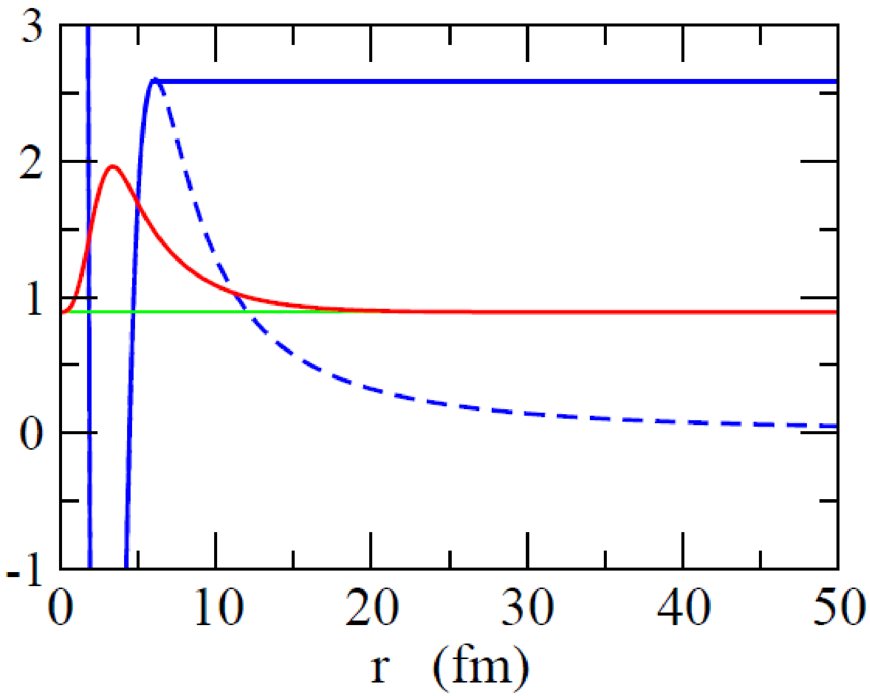
$\longrightarrow$ $E>0$ でも束縛状態ができる

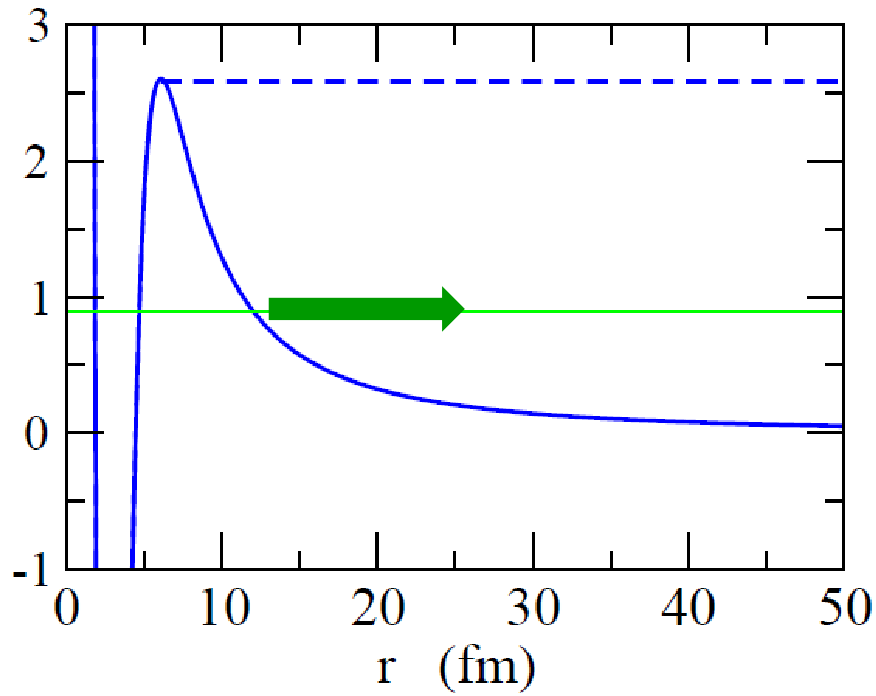
＝ 準束縛(準安定)状態

準束縛状態とは?



準束縛状態とは?



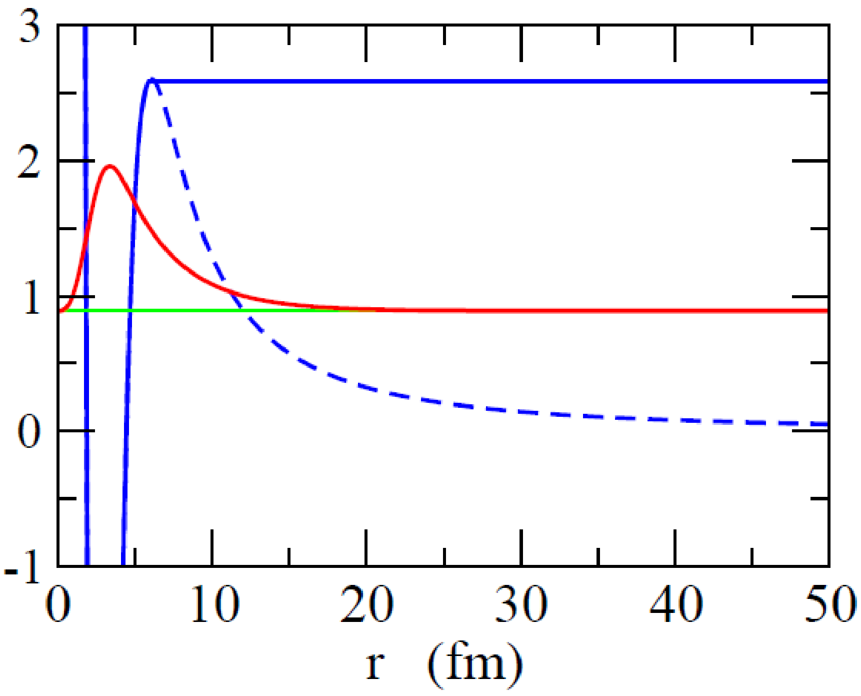


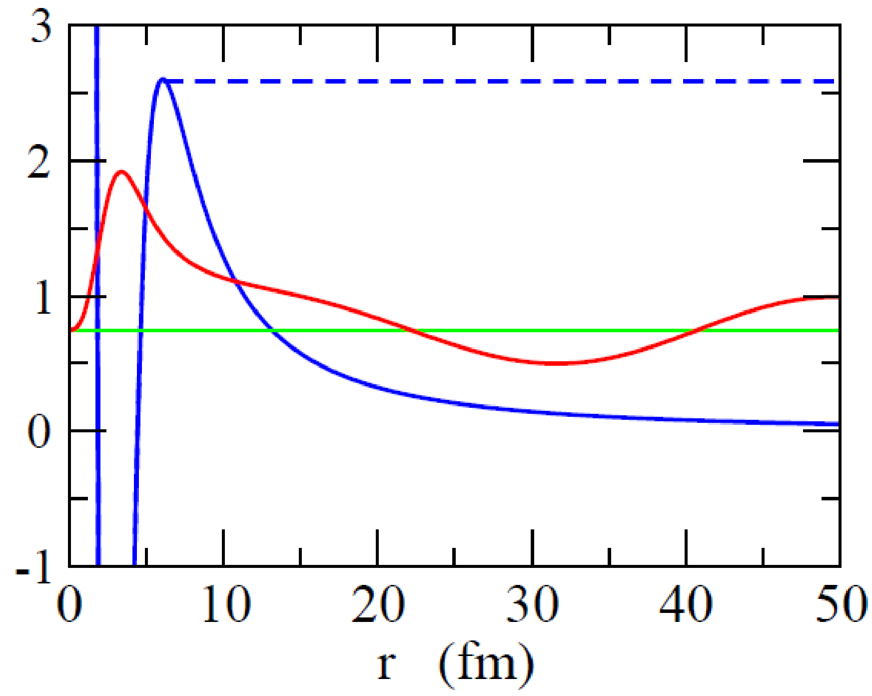
束縛状態 ＝ 無限の寿命

実際には有限の寿命で
障壁をトンネルし崩壊

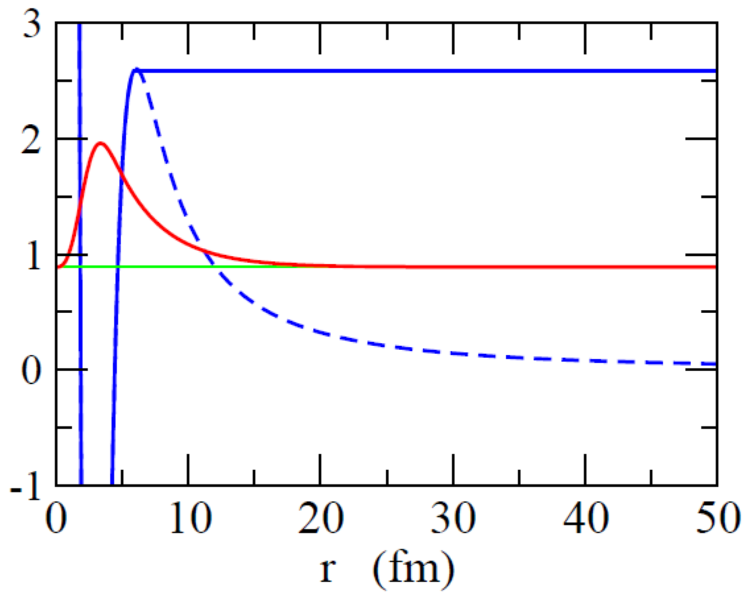
「準束縛（準安定）状態」

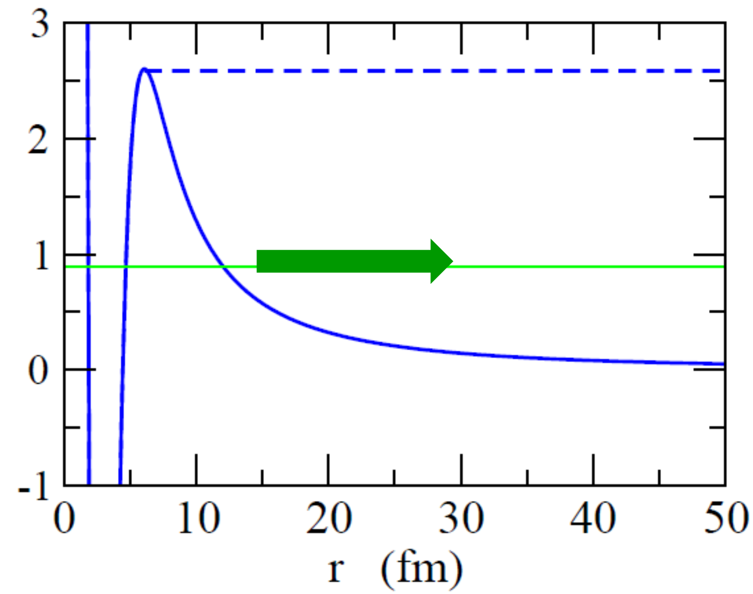
準束縛状態とは?





ガモフ状態





トンネル効果で波動関数が
沁み出し、外向きの波として崩壊

$$\boxed{\begin{array}{llll} u(r) & \sim & r^{l+1} & (r \to 0) \\ & \to & \mathcal{N}\, e^{i(kr - l\pi/2)} & (r \to \infty) \end{array}}$$

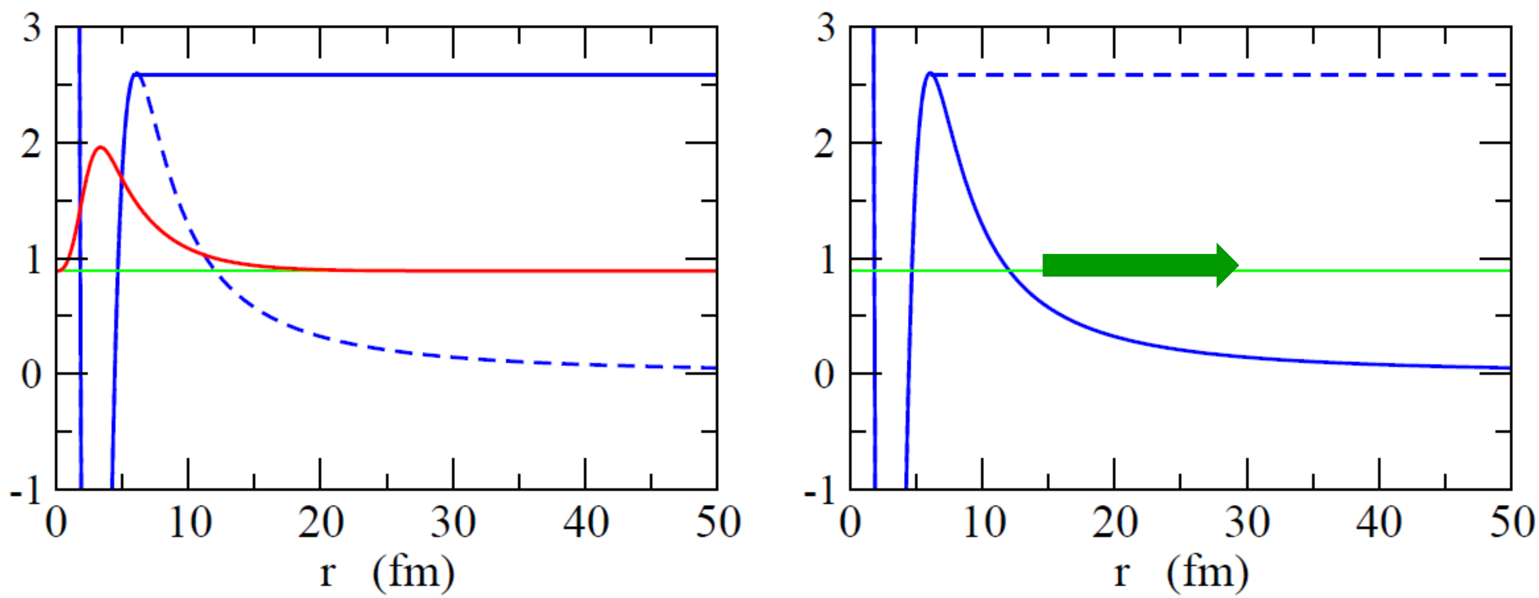
⇨ エネルギーを複素数にしなければならない：

共鳴幅

$$E \to \underset{\uparrow}{E_R} - i\frac{\overset{\downarrow}{\Gamma}}{2}$$

共鳴エネルギー

ガモフ状態



トンネル効果で波動関数が
沁み出し、外向きの波として崩壊

$$E \to E_R - i\frac{\Gamma}{2}$$

$$\begin{aligned}
P_{\mathrm{sur}}(t) &\equiv |\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle|^2 \\
&= |\langle\psi(0)|e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle|^2 \\
&= |\langle\psi(0)|e^{-i(E_R-i\Gamma/2)t/\hbar}|\psi(0)\rangle|^2 \\
&= e^{-\Gamma t/\hbar}
\end{aligned}$$

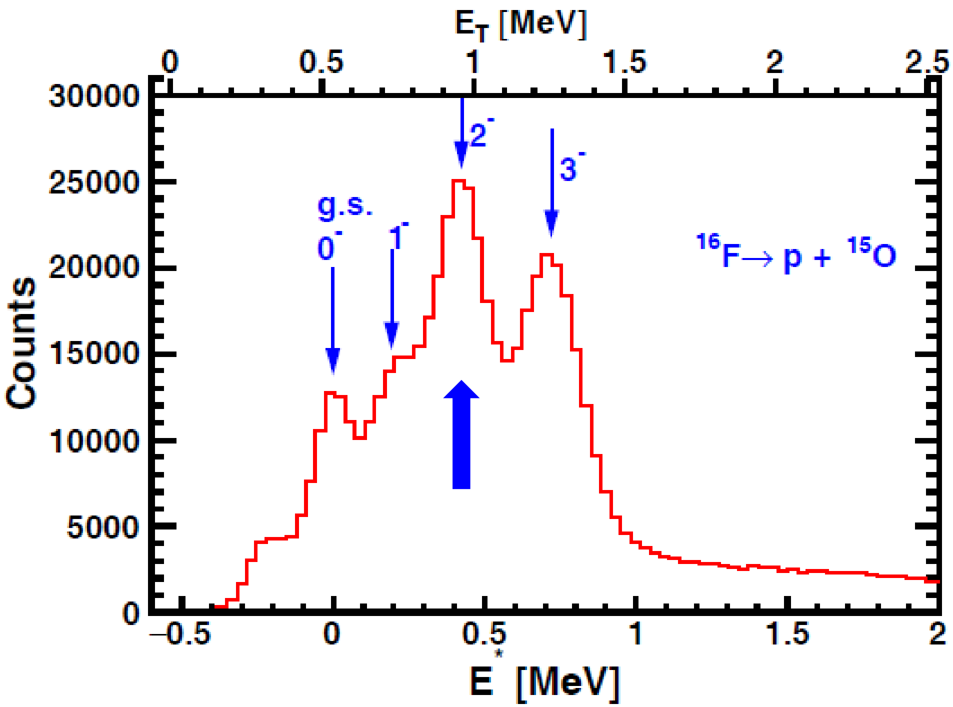
$\longrightarrow$ $\boxed{\hbar/\Gamma \text{ が準安定状態の寿命}}$

共鳴状態と弾性散乱（共鳴散乱）

まず実際の現象から

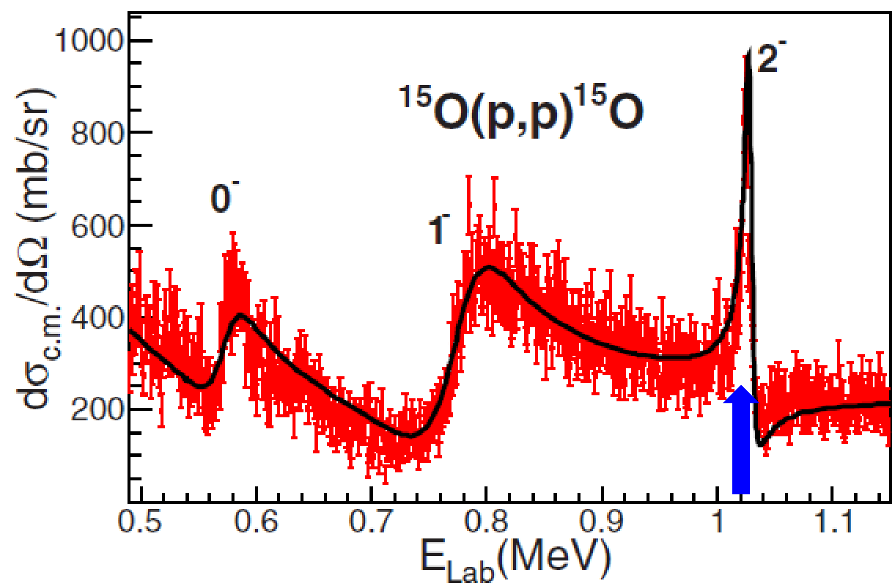
陽子非束縛核 $^{16}_{9}F_{7}$

$^{17}_{10}Ne$から1つ陽子を抜いて
$^{16}_{9}F$ を生成 → 崩壊スペクトル



R.J. Charity,
Eur. Phys. J. Plus 131 (‘16) 63

$^{15}O + p$ 弾性散乱の断面積



θ_{cm} = 180 deg.

I. Stefan et al., PRC90(‘14) 014307

共鳴エネルギーで弾性散乱の断面積が増大（共鳴散乱）

共鳴状態と弾性散乱(共鳴散乱)

次に散乱理論

自由粒子の運動:

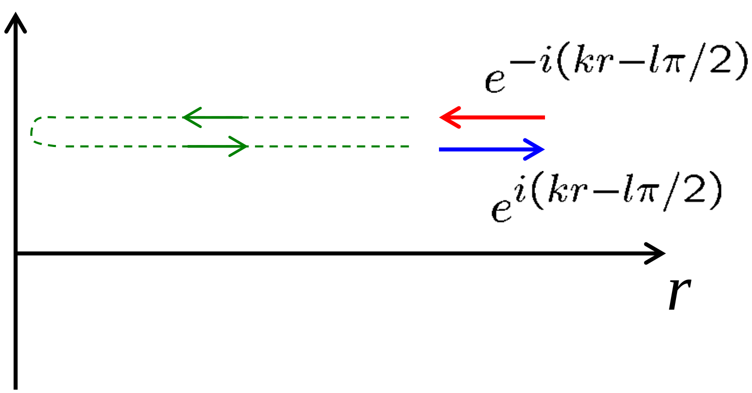
$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - E\right)\psi(\boldsymbol{r}) = 0$$

✓解:

$$\psi(\boldsymbol{r}) \propto j_l(kr)Y_{lm}(\hat{\boldsymbol{r}})\chi_{m_s}$$

✓遠方での振る舞い:

$$\boxed{\begin{aligned} j_l(kr) &\to \frac{1}{kr}\sin(kr - \frac{l\pi}{2}) \\ &= \frac{-1}{2ikr}\Big(e^{-i(kr-l\pi/2)} \\ &\qquad - e^{i(kr-l\pi/2)}\Big) \end{aligned}}$$



共鳴状態と弾性散乱(共鳴散乱)

自由粒子の運動:

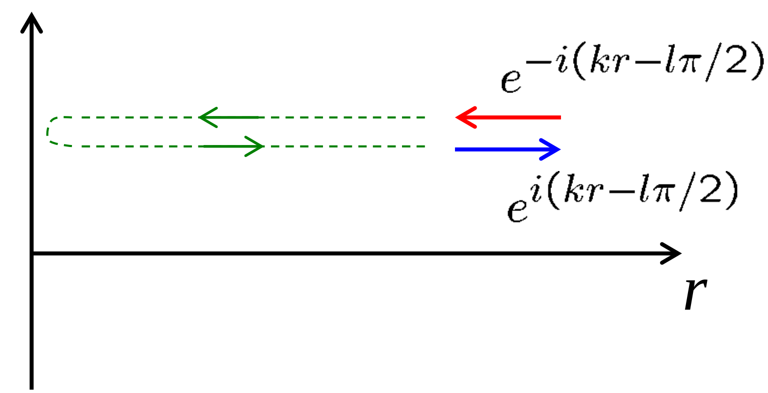
$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 - E\right)\psi(\boldsymbol{r}) = 0$$

✓解:

$$\psi(\boldsymbol{r}) \propto j_l(kr) Y_{lm}(\hat{\boldsymbol{r}})\chi_{m_s}$$

✓遠方での振る舞い:

$$\begin{aligned} j_l(kr) &\to \frac{1}{kr}\sin(kr - \frac{l\pi}{2}) \\ &= \frac{-1}{2ikr}\Big(e^{-i(kr - l\pi/2)} \\ &\qquad - e^{i(kr - l\pi/2)}\Big) \end{aligned}$$



次に散乱理論

ポテンシャル中の運動:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + V(r) - E\right)\psi(\boldsymbol{r}) = 0$$

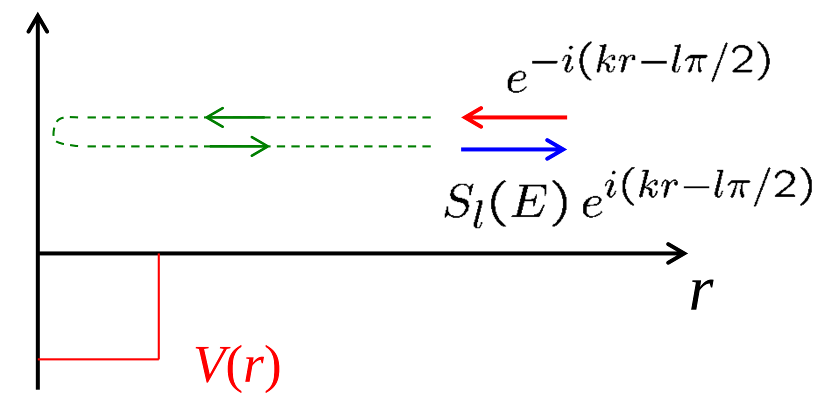
✓解:

$$\psi(\boldsymbol{r}) \propto R_l(r) Y_{lm}(\hat{\boldsymbol{r}})\chi_{m_s}$$

✓遠方での振る舞い:

$$\begin{aligned} R_l(r) \to \frac{-1}{2ikr}\Big(&e^{-i(kr - l\pi/2)} \\ &- S_l(E)\, e^{i(kr - l\pi/2)}\Big) \end{aligned}$$

* 吸収がなければ $|S_l(E)| = 1$



共鳴状態と弾性散乱(共鳴散乱)

次に散乱理論

自由粒子の運動:

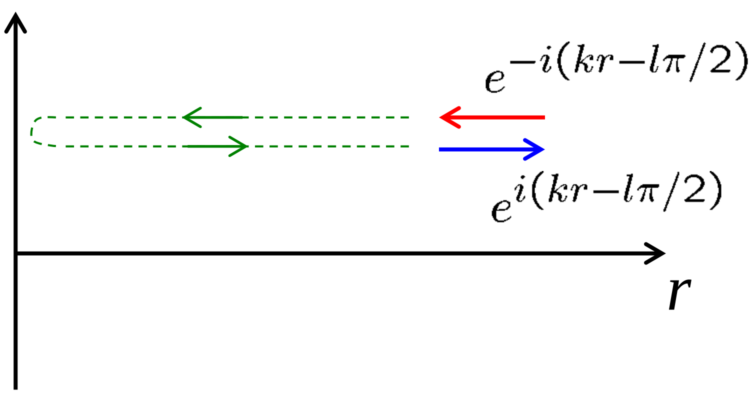
$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 - E\right)\psi(\boldsymbol{r}) = 0$$

✓解:

$$\psi(\boldsymbol{r}) \propto j_l(kr)Y_{lm}(\hat{\boldsymbol{r}})\chi_{m_s}$$

✓遠方での振る舞い:

$$\boxed{\begin{aligned} j_l(kr) &\to \frac{1}{kr}\sin(kr - \frac{l\pi}{2}) \\ &= \frac{-1}{2ikr}\left(e^{-i(kr-l\pi/2)} - e^{i(kr-l\pi/2)}\right) \end{aligned}}$$



ポテンシャル中の運動:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + V(r) - E\right)\psi(\boldsymbol{r}) = 0$$

✓解:

$$\psi(\boldsymbol{r}) \propto R_l(r)Y_{lm}(\hat{\boldsymbol{r}})\chi_{m_s}$$

✓遠方での振る舞い:

$$\boxed{R_l(r) \to \frac{-1}{2ikr}\left(e^{-i(kr-l\pi/2)} - S_l(E)\,e^{i(kr-l\pi/2)}\right)}$$

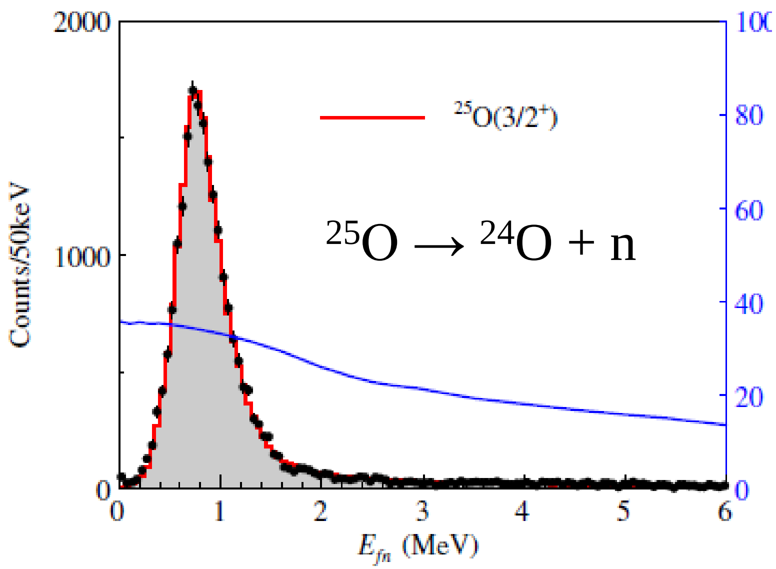
* 吸収がなければ $|S_l(E)| = 1$

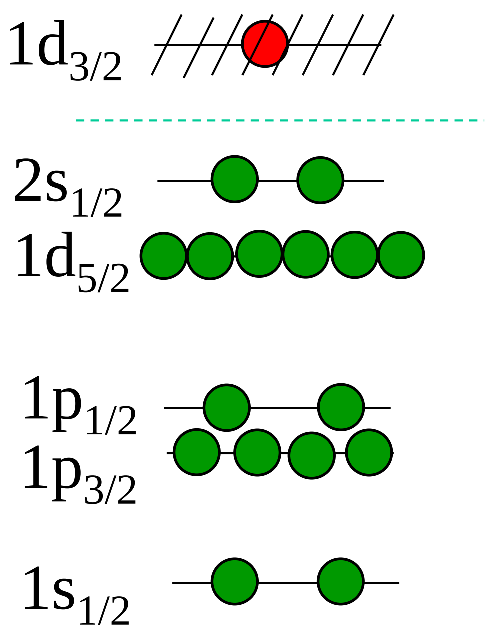
位相のずれ (phase shift)

$$\boxed{S_l(E) = e^{2i\delta_l(E)}}$$

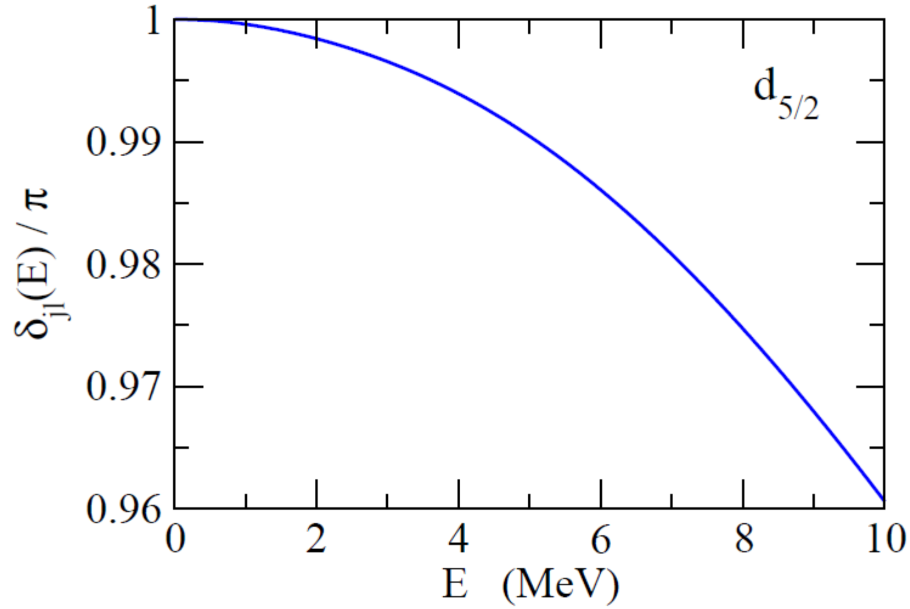
$$R_l(r) \to -\frac{e^{i\delta_l(E)}}{kr}\sin(kr - l\pi/2 + \delta_l(E))$$

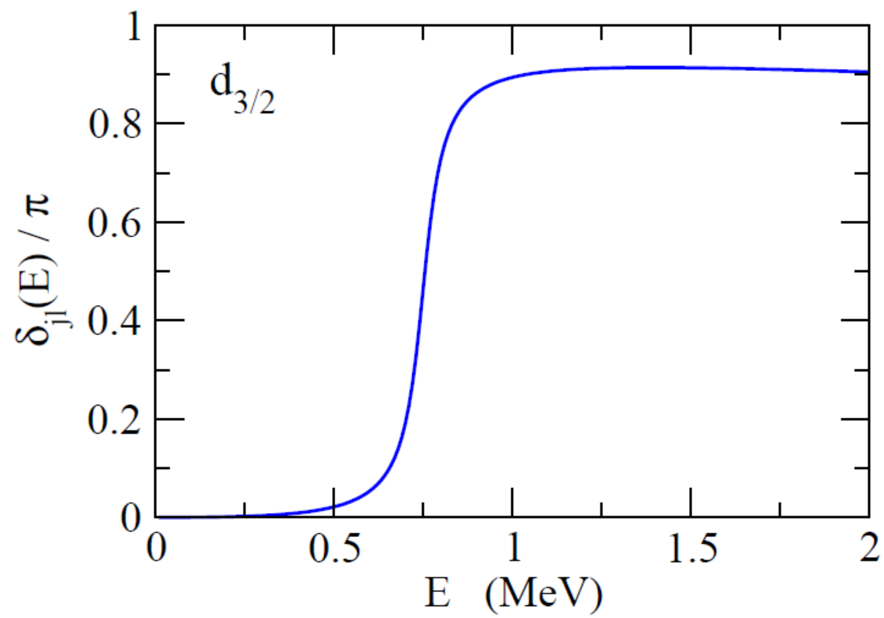
共鳴があると位相のずれはどう振る舞う?



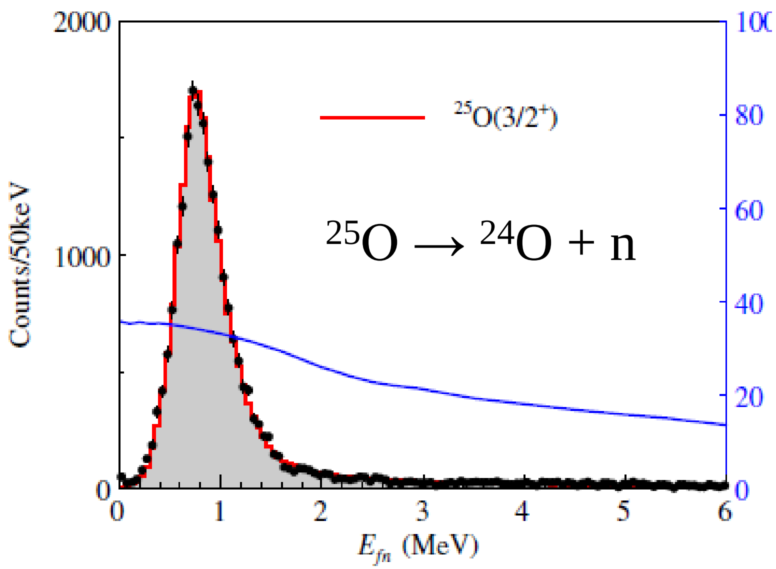


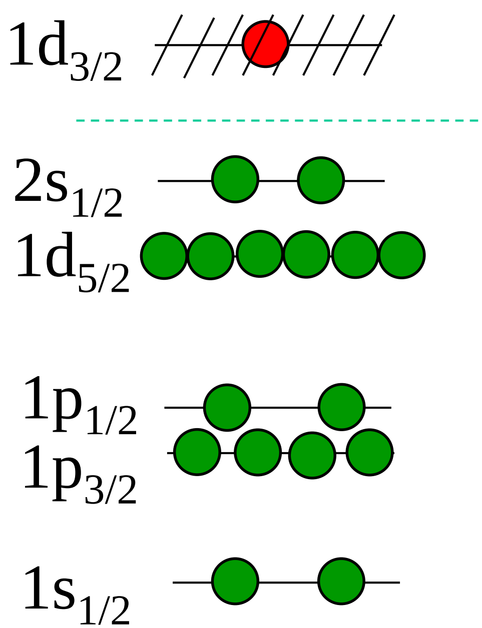
WS ポテンシャルによる n-^{24}O 散乱



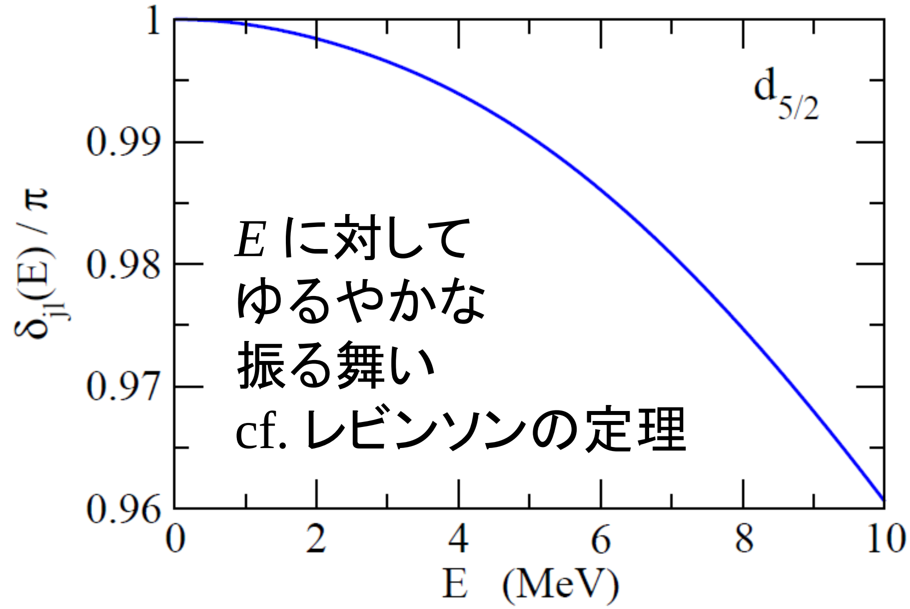


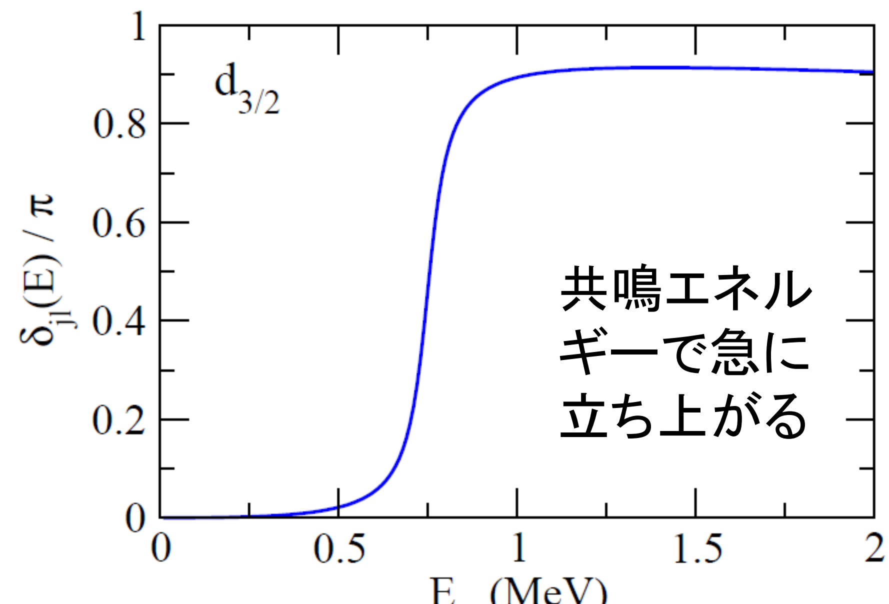
共鳴があると位相のずれはどう振る舞う?



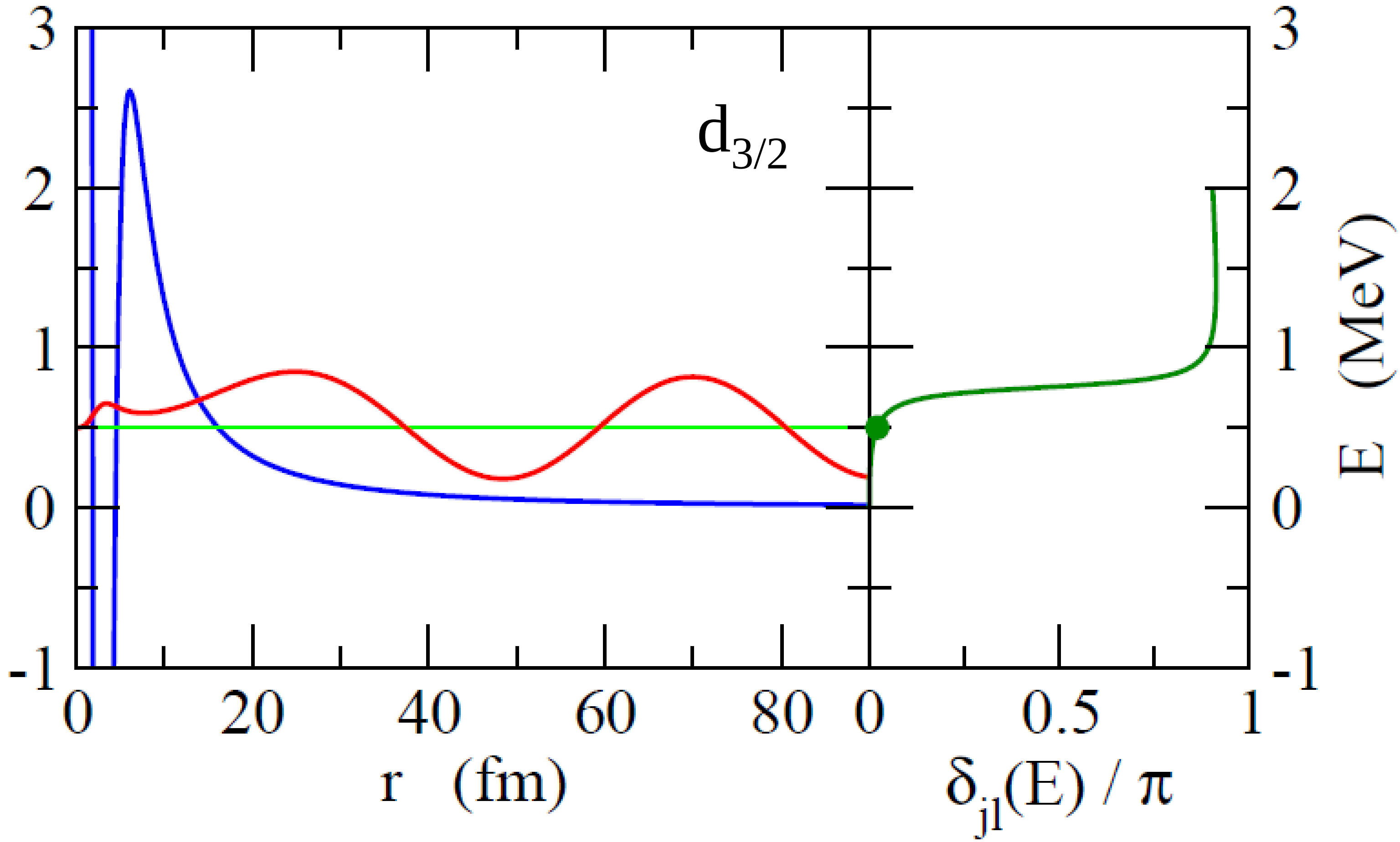


WS ポテンシャルによる n-^{24}O 散乱



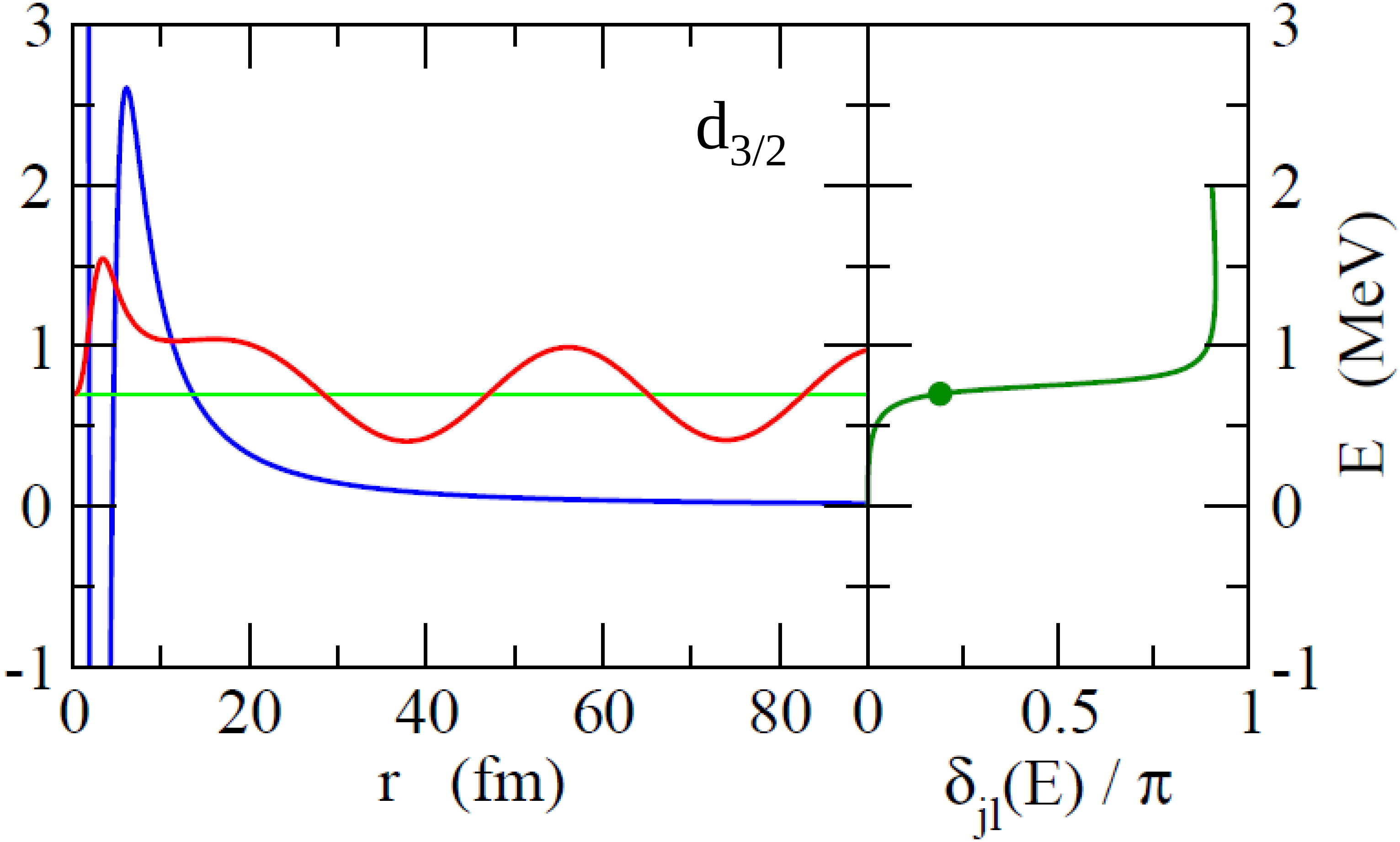


それでは波動関数は?



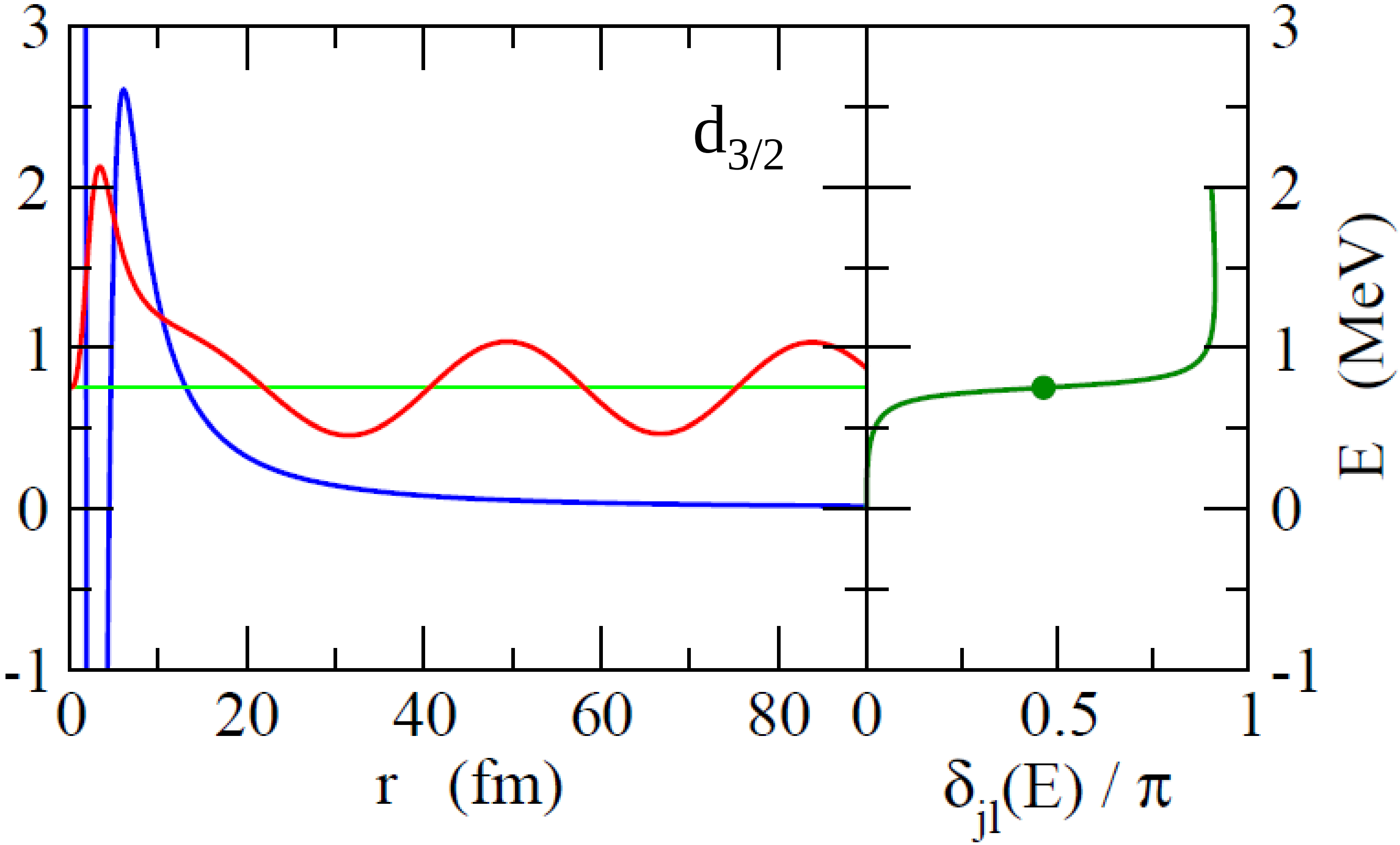
$$rR_{jl}(r) \to \sqrt{\frac{2m}{\pi k\hbar^2}}\,\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{jl}(E)\right)\,; \qquad \int d\boldsymbol{r}\psi_E(\boldsymbol{r})\psi^*_{E'}(\boldsymbol{r}) = \delta(E-E')$$

それでは波動関数は?



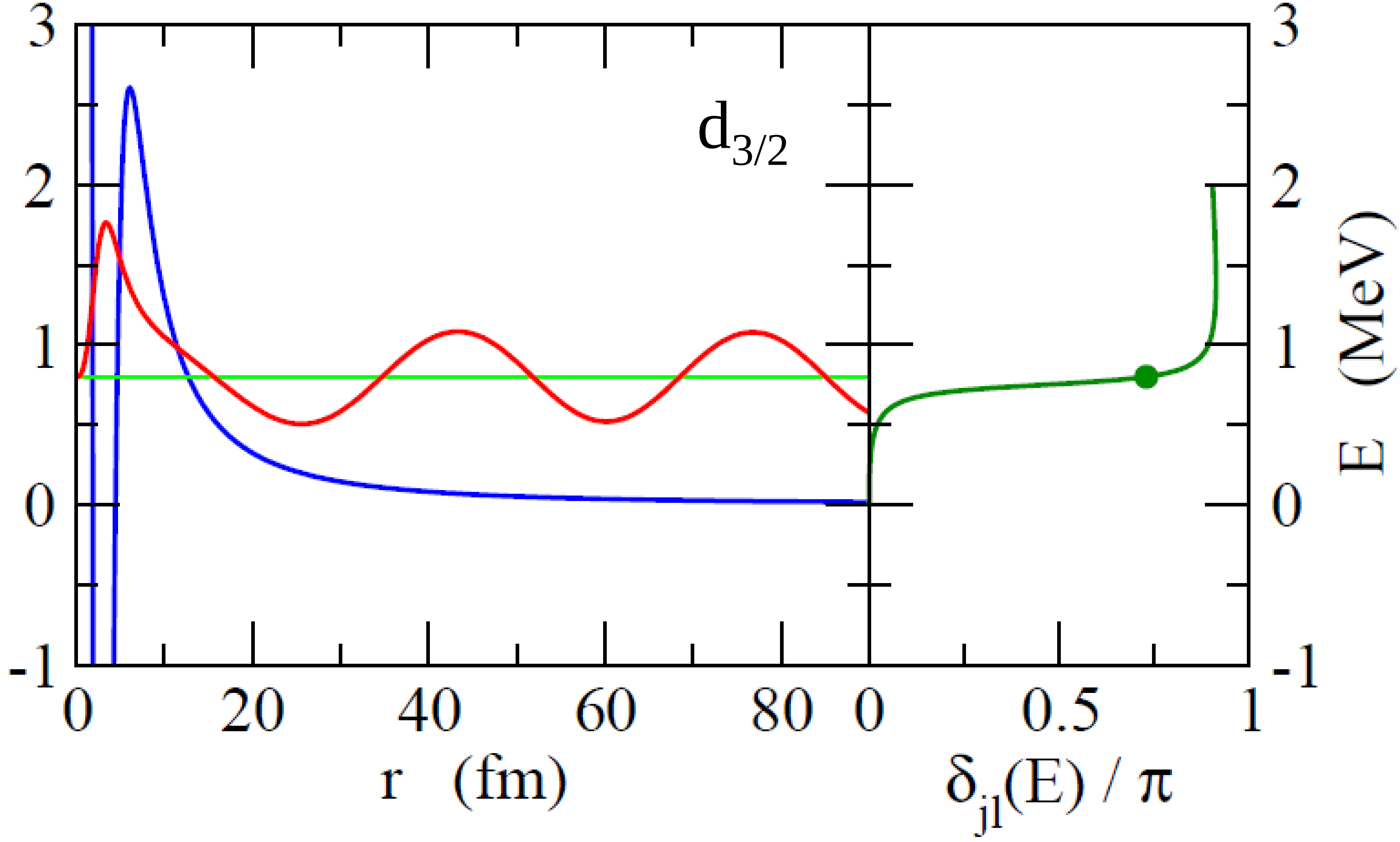
$$rR_{jl}(r) \to \sqrt{\frac{2m}{\pi k \hbar^2}} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{jl}(E)\right); \qquad \int d\boldsymbol{r}\psi_E(\boldsymbol{r})\psi^*_{E'}(\boldsymbol{r}) = \delta(E - E')$$

それでは波動関数は?



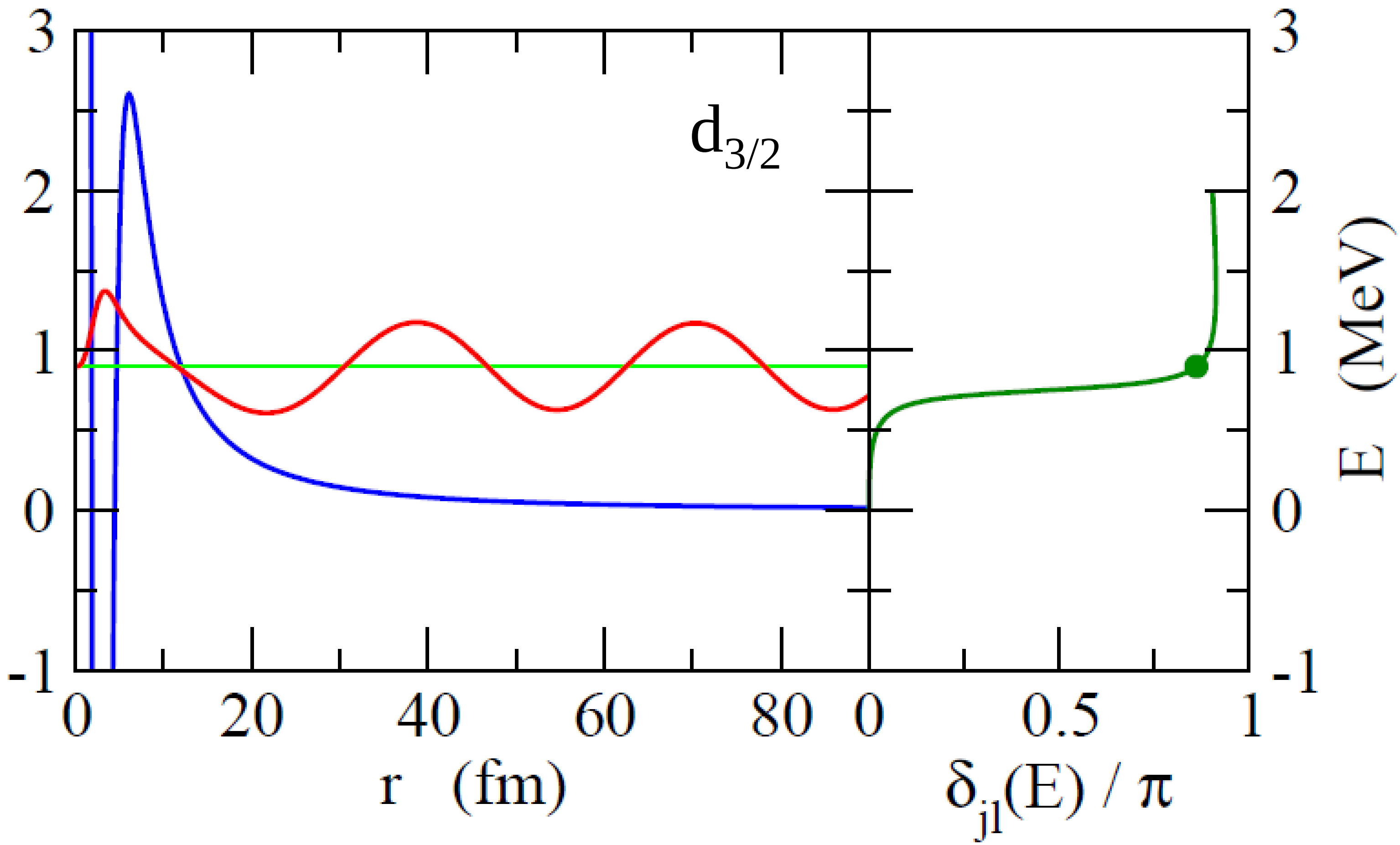
$$rR_{jl}(r) \to \sqrt{\frac{2m}{\pi k \hbar^2}} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{jl}(E)\right); \qquad \int d\boldsymbol{r}\psi_E(\boldsymbol{r})\psi^*_{E'}(\boldsymbol{r}) = \delta(E - E')$$

それでは波動関数は?



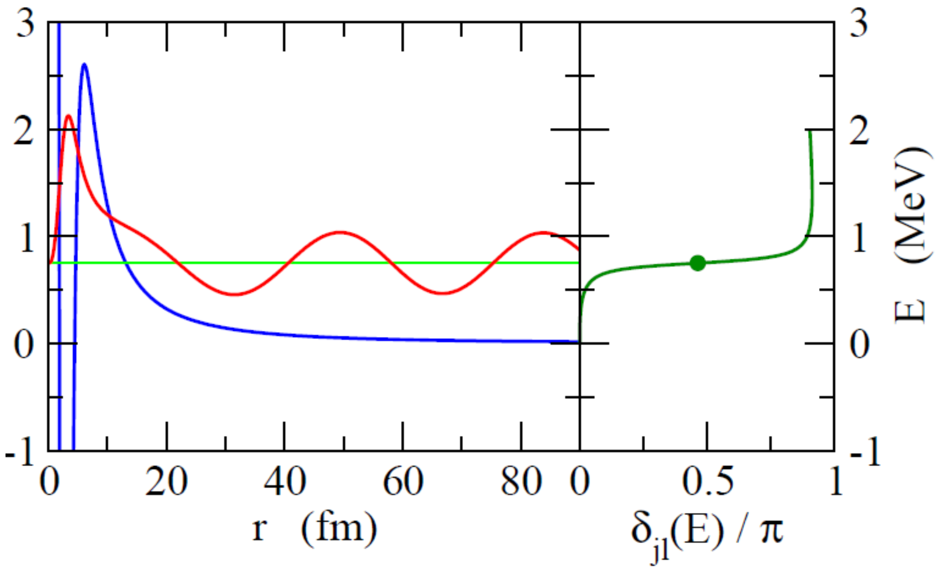
$$rR_{jl}(r) \to \sqrt{\frac{2m}{\pi k\hbar^2}}\,\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{jl}(E)\right);\qquad \int d\boldsymbol{r}\,\psi_E(\boldsymbol{r})\psi^*_{E'}(\boldsymbol{r}) = \delta(E-E')$$

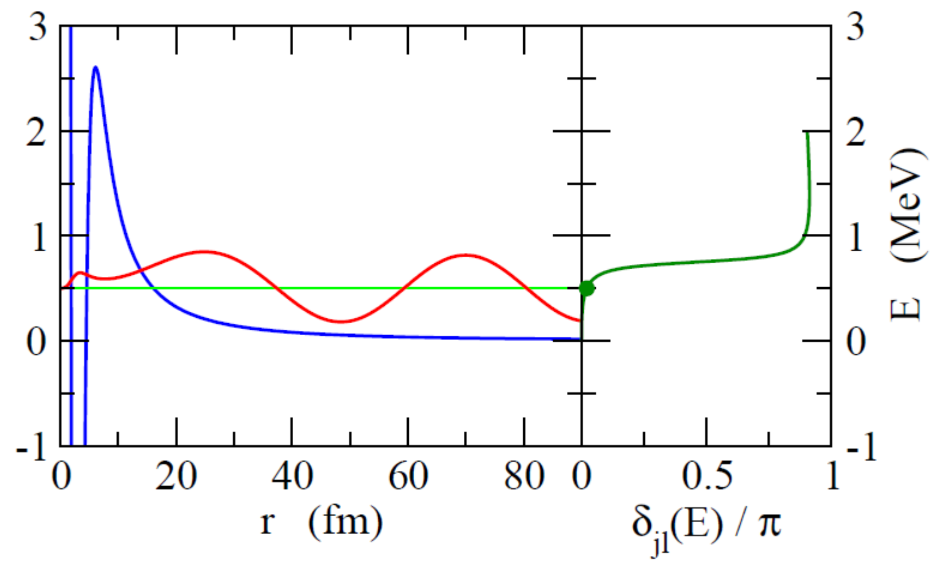
それでは波動関数は?



$$rR_{jl}(r) \to \sqrt{\frac{2m}{\pi k\hbar^2}}\,\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{jl}(E)\right); \qquad \int d\boldsymbol{r}\,\psi_E(\boldsymbol{r})\psi^*_{E'}(\boldsymbol{r}) = \delta(E-E')$$

それでは波動関数は?

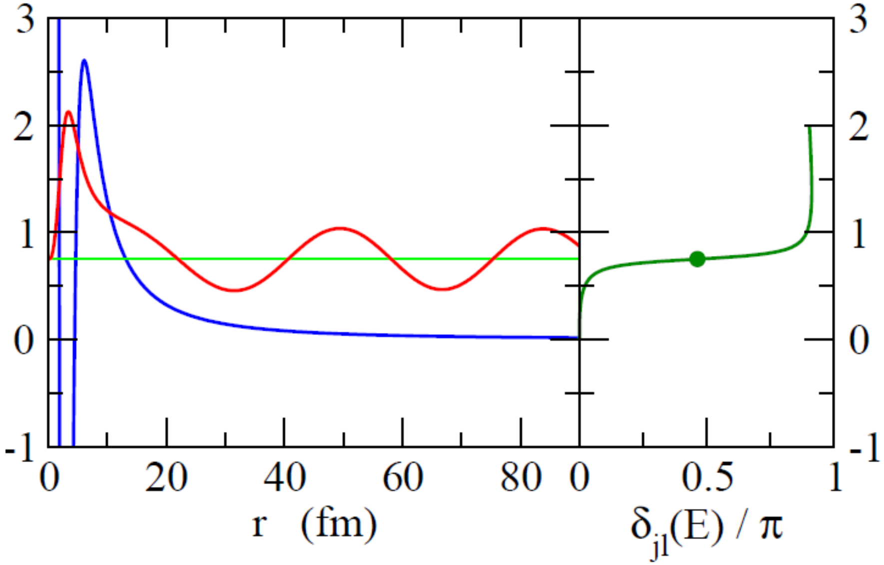


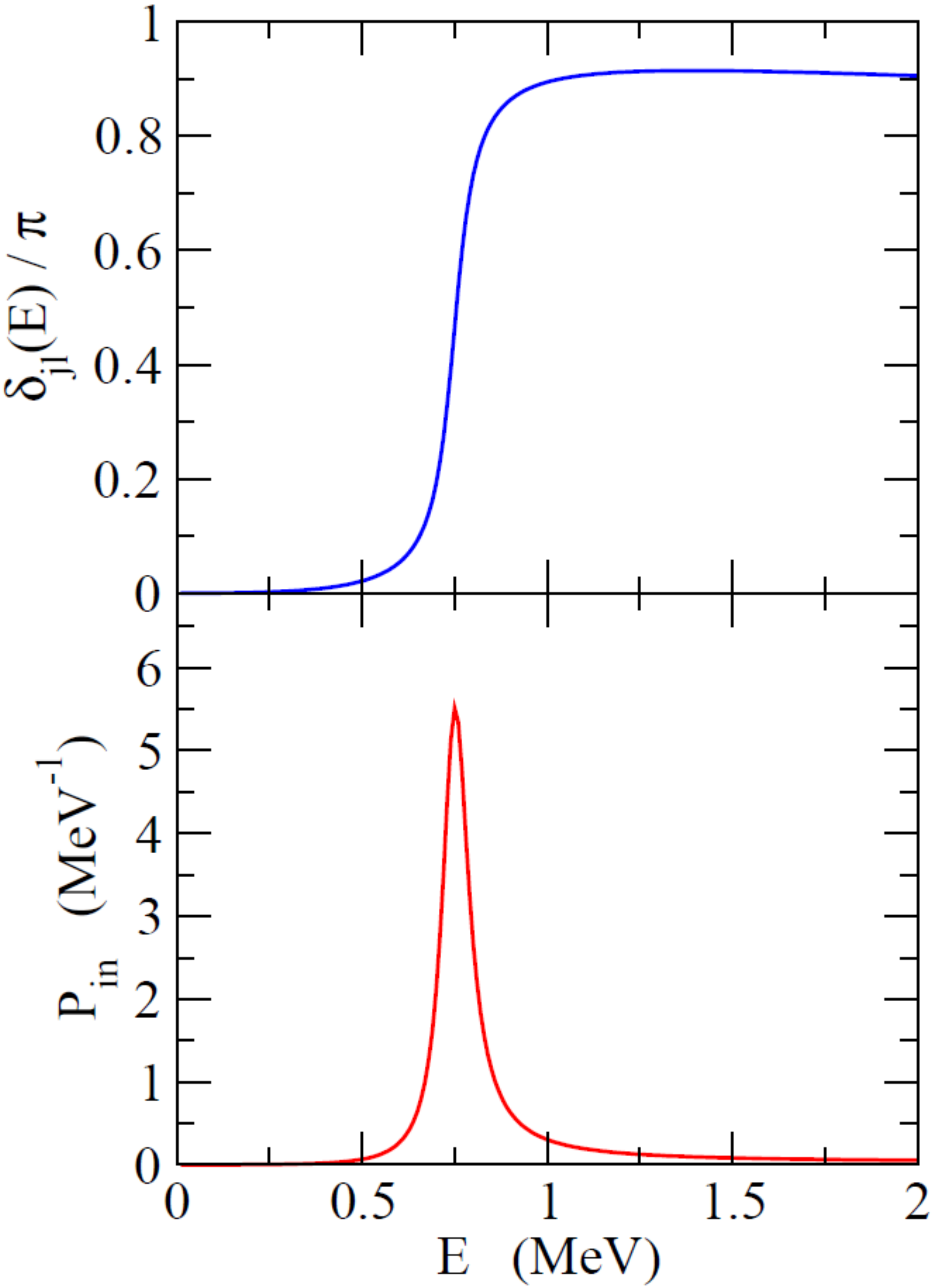


on-resonance:
波動関数は障壁の内側で
大きな振幅

off-resonance:
障壁の内側では振幅が
小さい

それでは波動関数は?





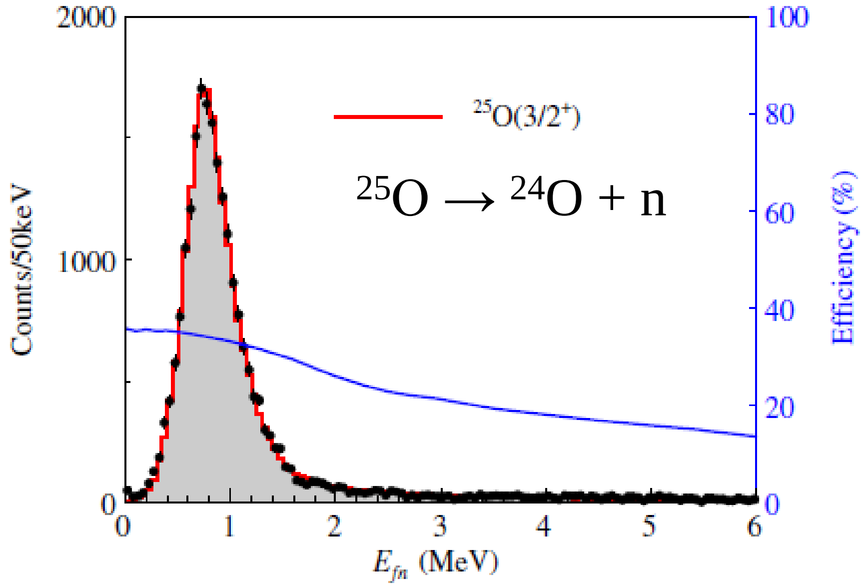
on-resonance:
波動関数は障壁の内側で
大きな振幅

障壁内部の存在確率

$$P_{\mathrm{in}} \equiv \int_0^{r_b} r^2 dr \, |R_{jl}(r)|^2$$

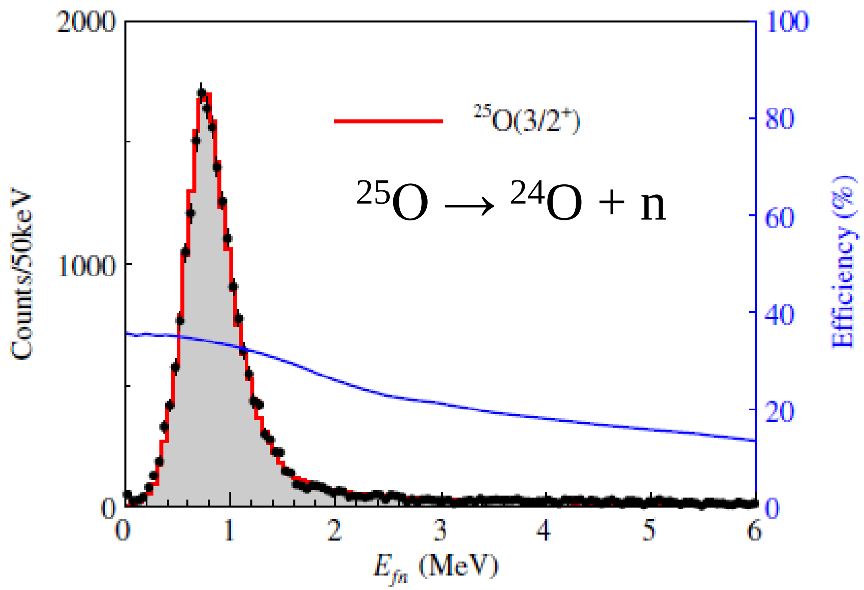
不変質量スペクトルの解析

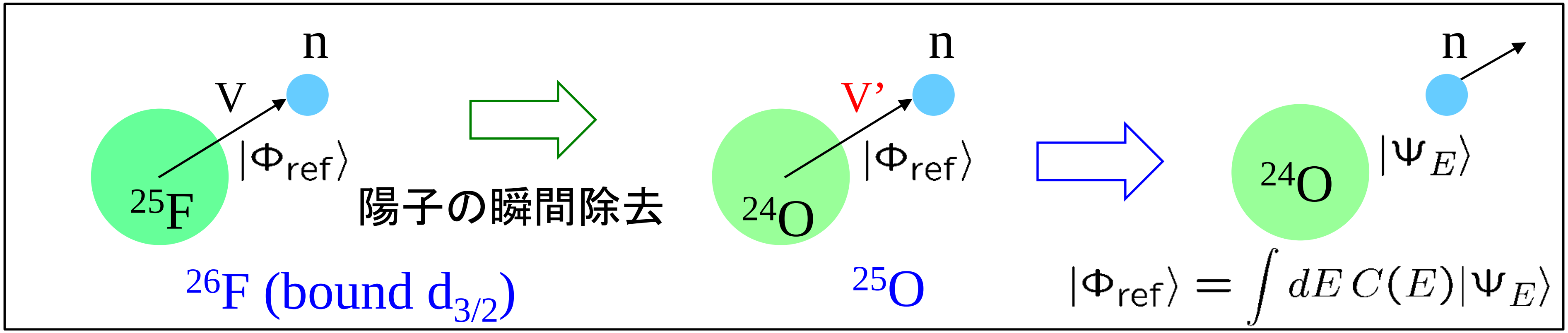
${}^{26}_{9}F_{17}$から1つ陽子を抜いて ${}^{25}_{8}O_{17}$ を生成 → 1中性子を放出して崩壊



不変質量スペクトルの解析

${}^{26}_{9}F_{17}$から1つ陽子を抜いて ${}^{25}_{8}O_{17}$ を生成 → 1中性子を放出して崩壊

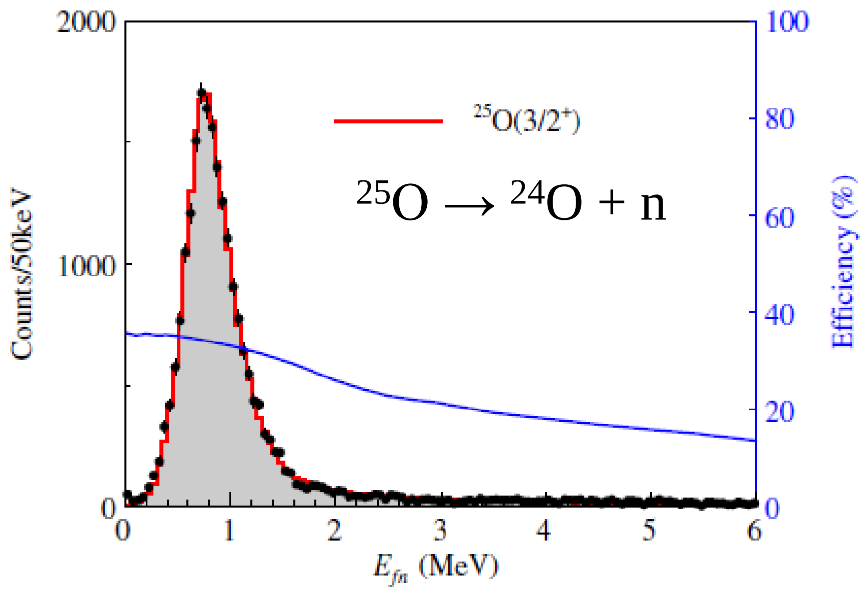


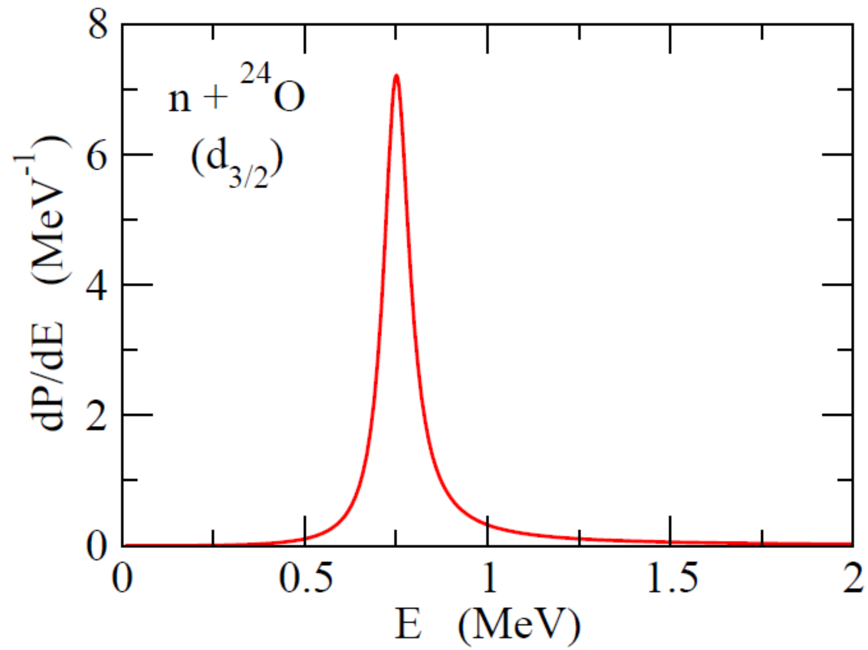


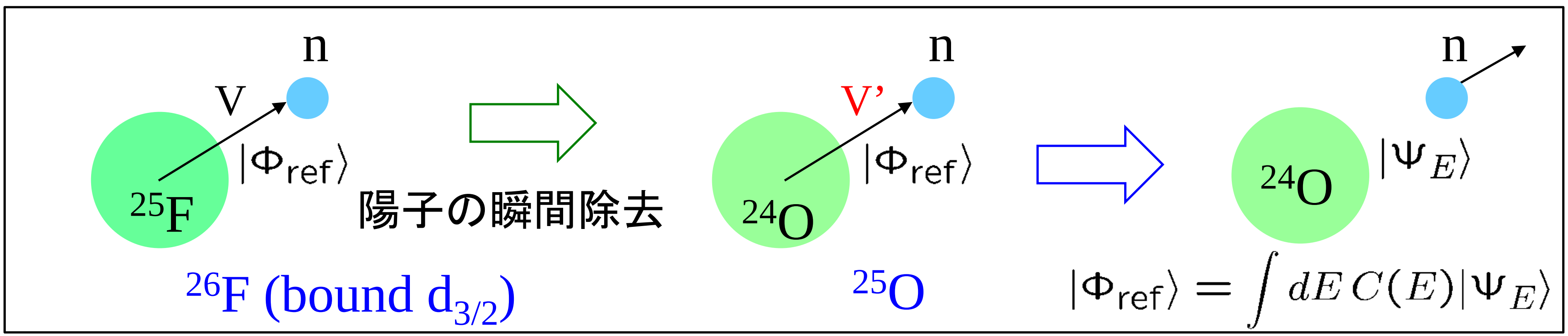
不変質量スペクトルの解析

$^{26}_{9}F_{17}$から1つ陽子を抜いて $^{25}_{8}O_{17}$ を生成 → 1中性子を放出して崩壊

$$\boxed{\frac{dP}{dE} = |\langle \Phi_{\rm ref}|\Psi_E\rangle|^2}$$







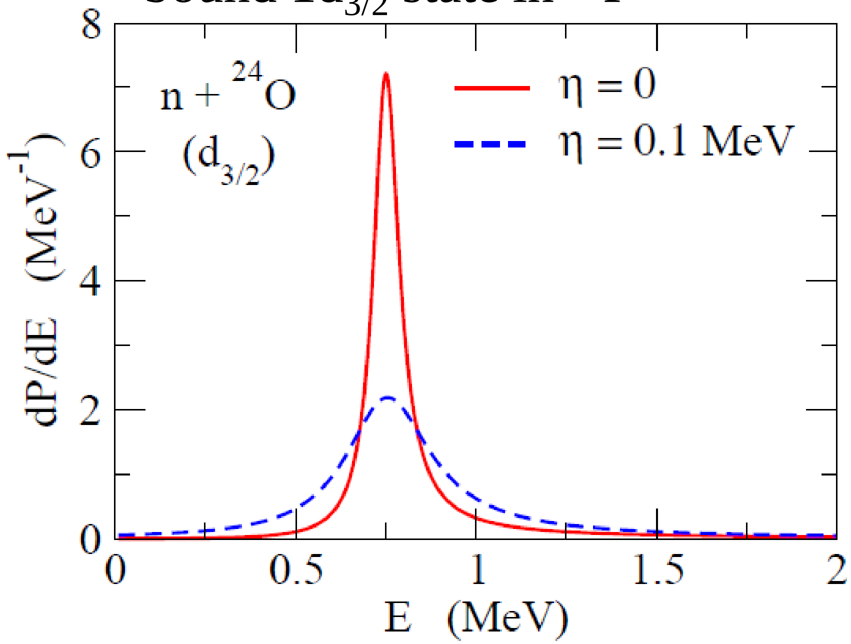
不変質量スペクトルの解析

$$\frac{dP}{dE} = |\langle\Phi_{\rm ref}|\Psi_E\rangle|^2 \;=\; \int dE'\,|\langle\Phi_{\rm ref}|\Psi_{E'}\rangle|^2\delta(E-E')$$

$$\to\; \frac{1}{\pi}Im\int dE'\,|\langle\Phi_{\rm ref}|\Psi_{E'}\rangle|^2\underbrace{\frac{1}{E'-E-i\eta}}$$

$= 1\,/\,(H - E - i\eta) = G(E)$

Reference state:
bound $1d_{3/2}$ state in ^{26}F



$$\lim_{\eta\to 0}\frac{1}{x-i\eta} = P\frac{1}{x} + i\pi\delta(x)$$

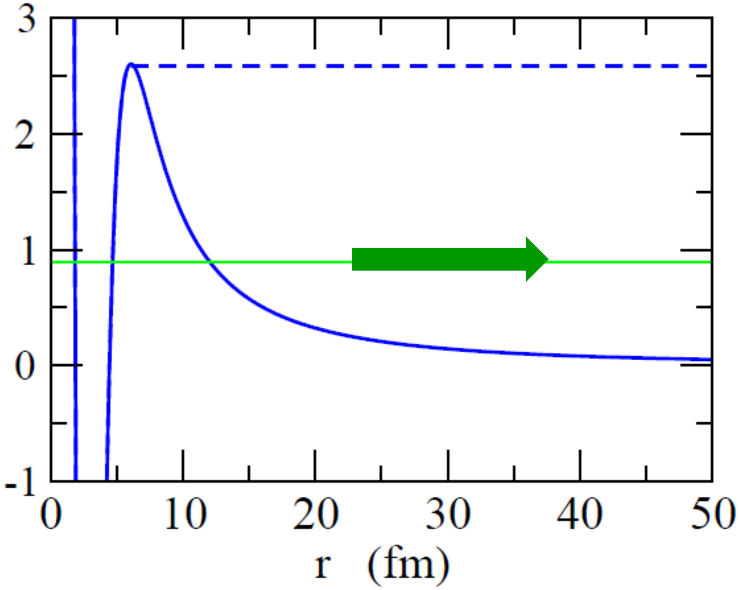
有限の η でも計算できる
（数値計算上便利）

ガモフ状態と散乱状態の関係

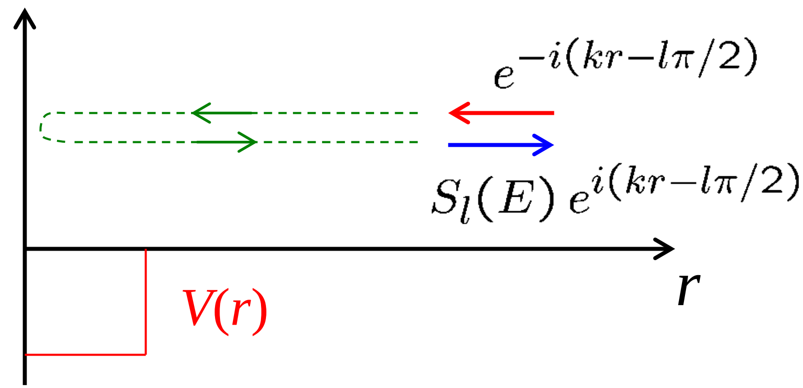
- よく、「共鳴状態＝S行列の極（ポール）」という言い方を聞くけど、それはどういう意味?
- どうしてS行列のポールが共鳴状態と関係しているの?

ガモフ状態と散乱状態の関係

ガモフ状態



散乱状態



外向波境界条件

$$u_l(r) \to \mathcal{N}\, e^{i(kr-l\pi/2)}$$

$$E \to E_R - i\frac{\Gamma}{2}$$

散乱の境界条件

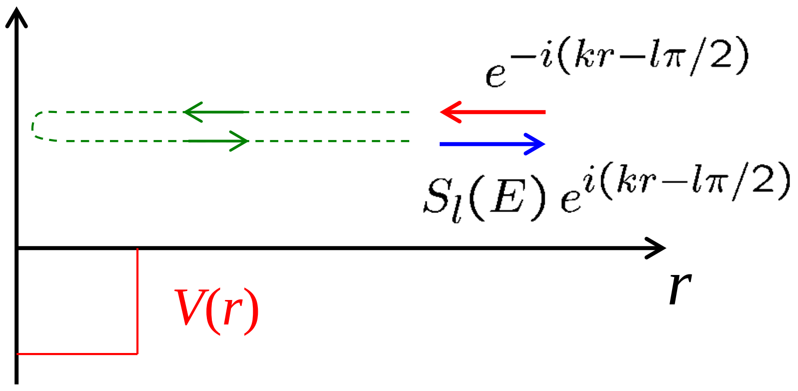
$$u_l(r) \;\to\; \mathcal{N}\left(e^{-i(kr-l\pi/2)} - S_l(E)\,e^{i(kr-l\pi/2)}\right)$$

$$S_l(E) = e^{2i\delta_l(E)}$$

E : real

ガモフ状態と散乱状態の関係

散乱状態



散乱の境界条件

$$u_l(r) \;\to\; \mathcal{N}\left(e^{-i(kr-l\pi/2)} - S_l(E)\, e^{i(kr-l\pi/2)}\right)$$

$$S_l(E) = e^{2i\delta_l(E)}$$

E : real

もし、$S_l(E)$ が発散するような E があれば、

$$u_l(r) \sim \widetilde{\mathcal{N}}\, e^{i(kr-l\pi/2)}$$ （外向波）

ただし、エネルギー E を複素平面へ解析接続しなければならない:

$$E \to E_R - i\frac{\Gamma}{2}$$

➡ ガモフ状態 $\longleftrightarrow$ S 行列の極（ポール）

Breit-Wigner の公式

S-行列が $\epsilon = E_R - i\frac{\Gamma}{2}$ で極を持つとすると、

$$\boxed{S(E) = e^{2i\delta_0(E)} \cdot \frac{E - \epsilon^*}{E - \epsilon}} \longleftarrow |S(E)| = 1$$

$\delta_0(E)$ は E のゆるやかな関数 (background phase shift)

このとき、

$$\begin{aligned} S(E) &= e^{2i\delta_0(E)} \cdot \frac{E - E_R - i\Gamma/2}{E - E_R + i\Gamma/2} \\ &= e^{2i\delta_0(E)} \left(1 - \frac{i\Gamma}{E - E_R + i\Gamma/2} \right) \end{aligned}$$

Breit-Wigner の公式

S-行列が $\epsilon = E_R - i\frac{\Gamma}{2}$ で極を持つとすると、

$$\boxed{S(E) = e^{2i\delta_0(E)} \cdot \frac{E-\epsilon^*}{E-\epsilon}} \longleftarrow |S(E)| = 1$$

$\delta_0(E)$ は E のゆるやかな関数 (background phase shift)

$$E - \epsilon^* = c\, e^{i\delta_r(E)}$$ とすると、

$$S(E) = e^{2i\delta_0(E)} \cdot \frac{c\, e^{i\delta_r(E)}}{c\, e^{-i\delta_r(E)}} = e^{2i\delta_0(E)} e^{2i\delta_r(E)}$$

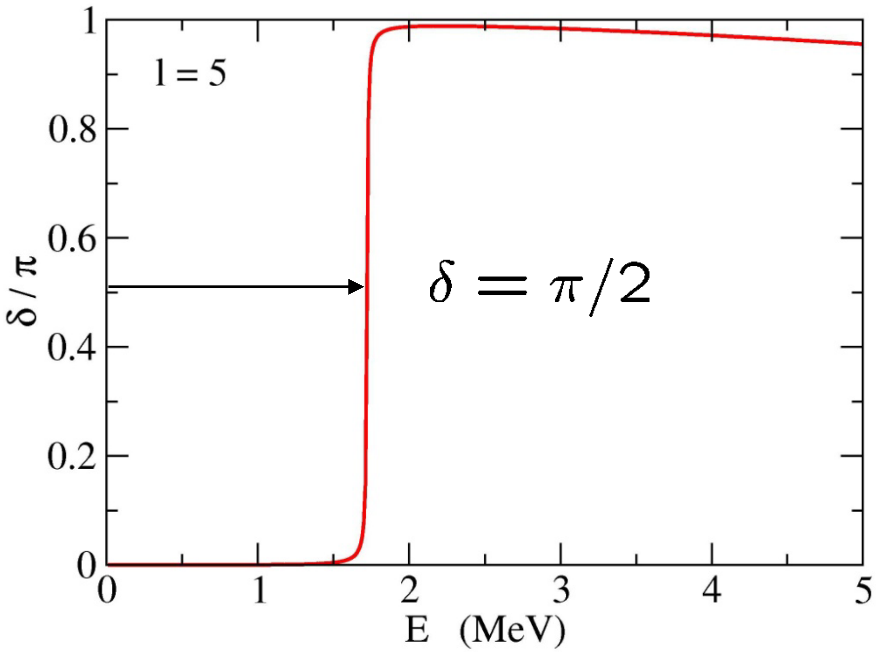
$$E - \epsilon^* = E - E_R - i\Gamma/2 = c\, e^{i\delta_r} = c(\cos\delta_r + i\sin\delta_r)$$

$$\longrightarrow \quad \tan\delta_r = \frac{\sin\delta_r}{\cos\delta_r} = \frac{-\Gamma/2}{E - E_R}$$

$$\boxed{\delta(E) = \delta_r(E) + \delta_0(E) = \tan^{-1}\left(\frac{\Gamma}{2(E_R - E)}\right) + \delta_0(E)}$$

Breit-Wigner の公式

幅が狭ければ、位相のずれが π/2 を切る時に共鳴



Breit-Wigner formula:

$$\delta(E) = \tan^{-1}\frac{\Gamma}{2(E_R - E)} + \delta_0(E)$$

$$\Rightarrow \quad \delta(E_R) \sim \pi/2$$

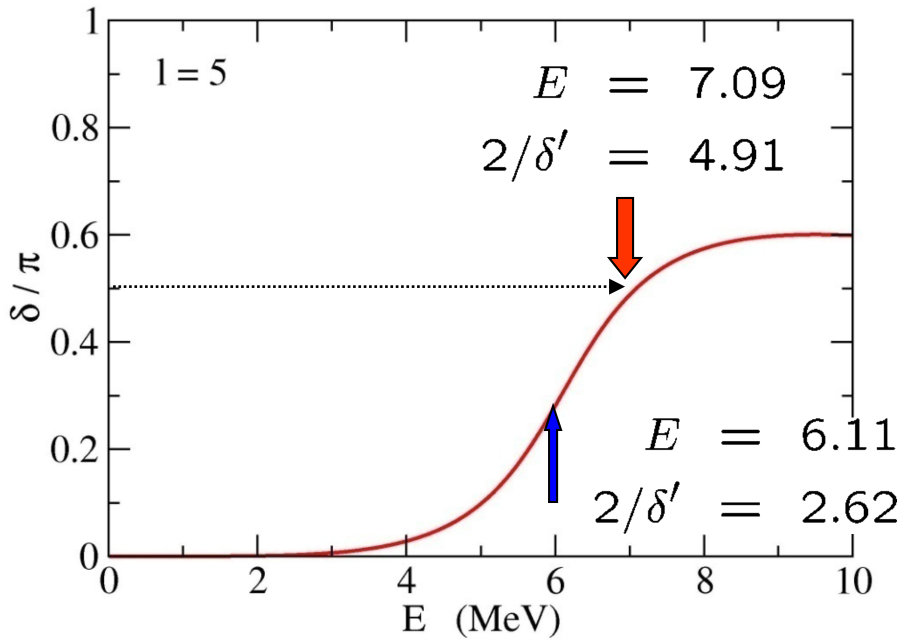
$$\Gamma = \frac{2}{\delta'(E_R)}$$

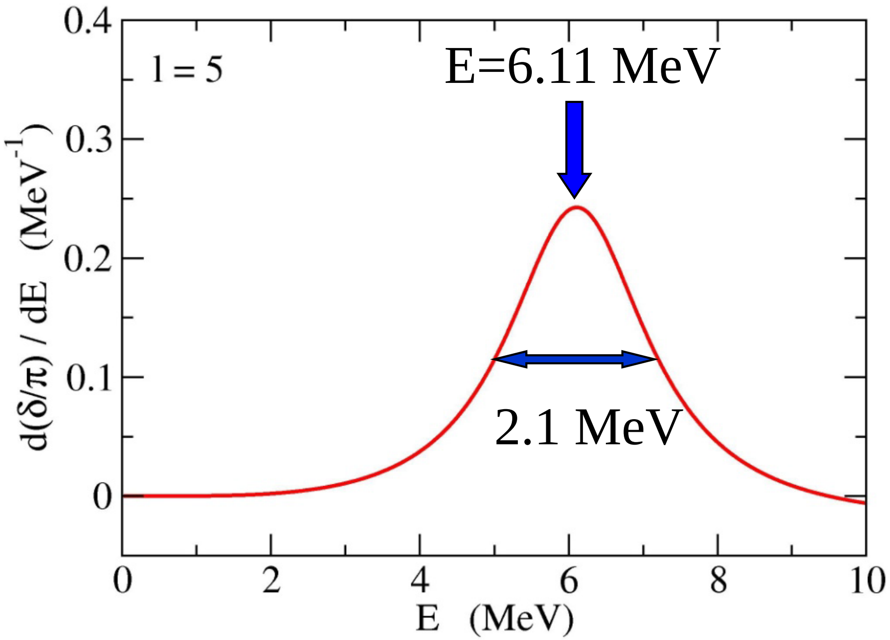
V_0 = -50 MeV
R_0 = 1.27 * $200^{1/3}$ fm
a = 0.67 fm
μ = 200 m_N / 201

(note) ただし、幅が広いと π/2 とは限らない

$$\delta(E) = \tan^{-1}\frac{\Gamma}{2(E_R - E)} + \delta_0(E)$$

background phase shift

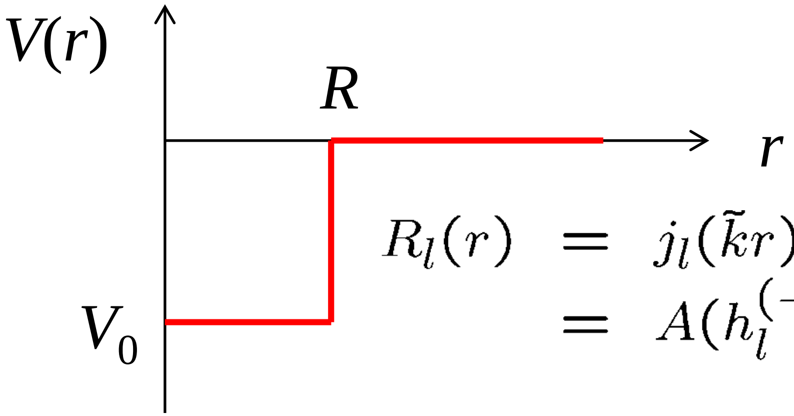




Gamow state: $E = 6.01$ MeV

$\Gamma = 2.22$ MeV

井戸型ポテンシャルの例



$$R_l(r) = j_l(\tilde{k}r) \qquad (r < R)$$
$$= A(h_l^{(-)}(kr) - U_l h_l^{(+)}(kr)) \qquad (r \geq R)$$

波動関数の接続条件により S 行列が解析的に求まる:

$$\boxed{U_l(E) = \frac{L_l(E) - S_l(E) + iP_l(E)}{L_l(E) - S_l(E) - iP_l(E)} e^{2i\phi_l}}$$

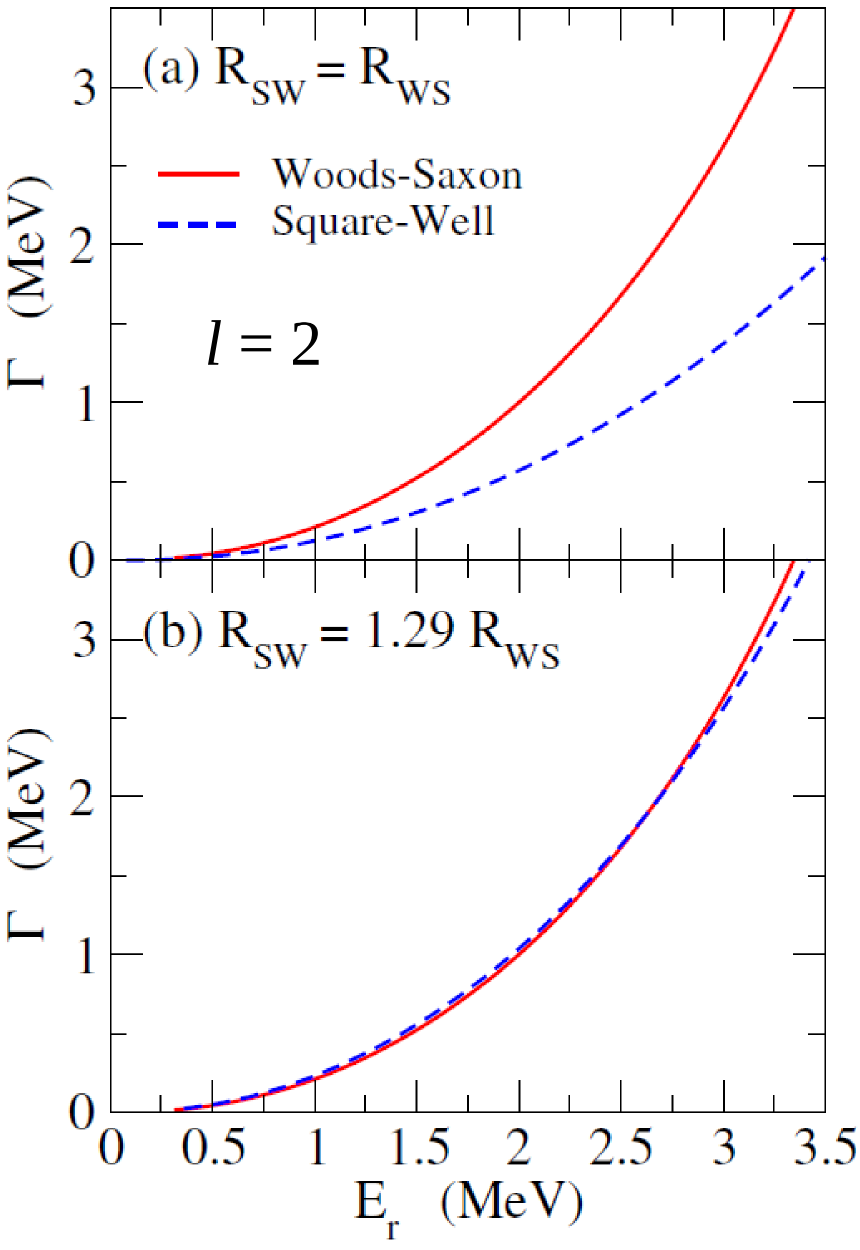
$$L_l \equiv R\left(\frac{d}{dr}u_l(r)\right)_{r=R} \frac{1}{u_l(R)}$$

$$S_l = \frac{G_l(R)G_l'(R) + F_l(R)F_l'(R)}{G_l(R)^2 + F_l(R)^2}$$

$$P_l = \frac{kR}{G_l(R)^2 + F_l(R)^2}$$

$$F_l(r) \equiv kr\, j_l(kr), \qquad G_l(r) \equiv -kr\, n_l(kr)$$
$$F_l'(r) \equiv R\frac{dF_l}{dr}, \qquad G_l'(r) \equiv R\frac{dG_l}{dr}$$

$$e^{2i\phi_l} = \frac{G_l(R) - iF_l(R)}{G_l(R) + iF_l(R)}$$



井戸型ポテンシャルと
Woods-Saxon ポテンシャル
(a = 0.67 fm) の比較

K.H., H. Sagawa, S. Kanaya,
A. Odahara,
PTEP, in press (2019);
arXiv: 1903.01634 (nucl-th)

$$U_l(E) = \frac{L_l(E) - S_l(E) + iP_l(E)}{L_l(E) - S_l(E) - iP_l(E)}\, e^{2i\phi_l}$$

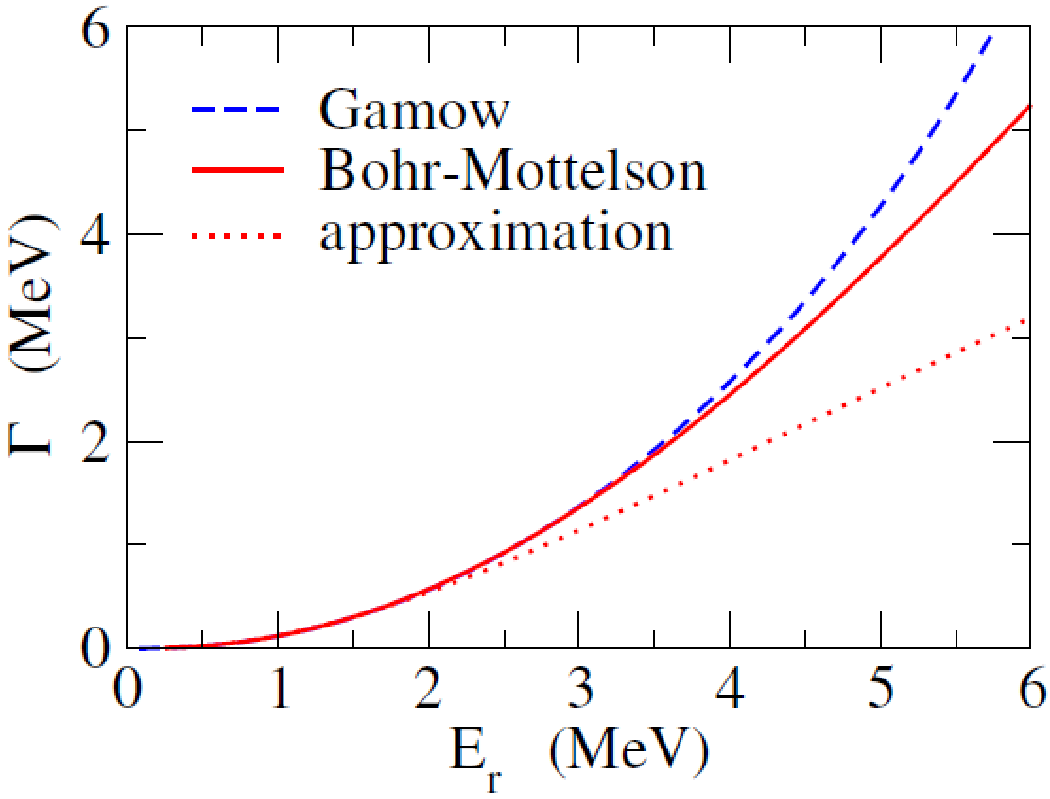
幅が狭い時の近似式 (Bohr-Mottelson, Appendix 3F-2)

ポール・エネルギーの実部: $L_l(E_r) - S_l(E_r) \sim 0$

$$\Longrightarrow \quad U_l(E) = \left(1 - \frac{i\Gamma_l}{E - E_r + i\frac{\Gamma_l}{2}}\right) e^{2i\phi_l}$$

$$\begin{aligned} L_l(E) - S_l(E) &\sim L_l(E_r) - S_l(E_r) - \frac{1}{\gamma_l^2}(E - E_r) \\ &= -\frac{1}{\gamma_l^2}(E - E_r) \end{aligned}$$

$$\Gamma_l \equiv 2P_l\gamma_l^2$$



（点線：球ベッセル関数などのべき展開を用いて更に簡単化）

変形核へも拡張可能

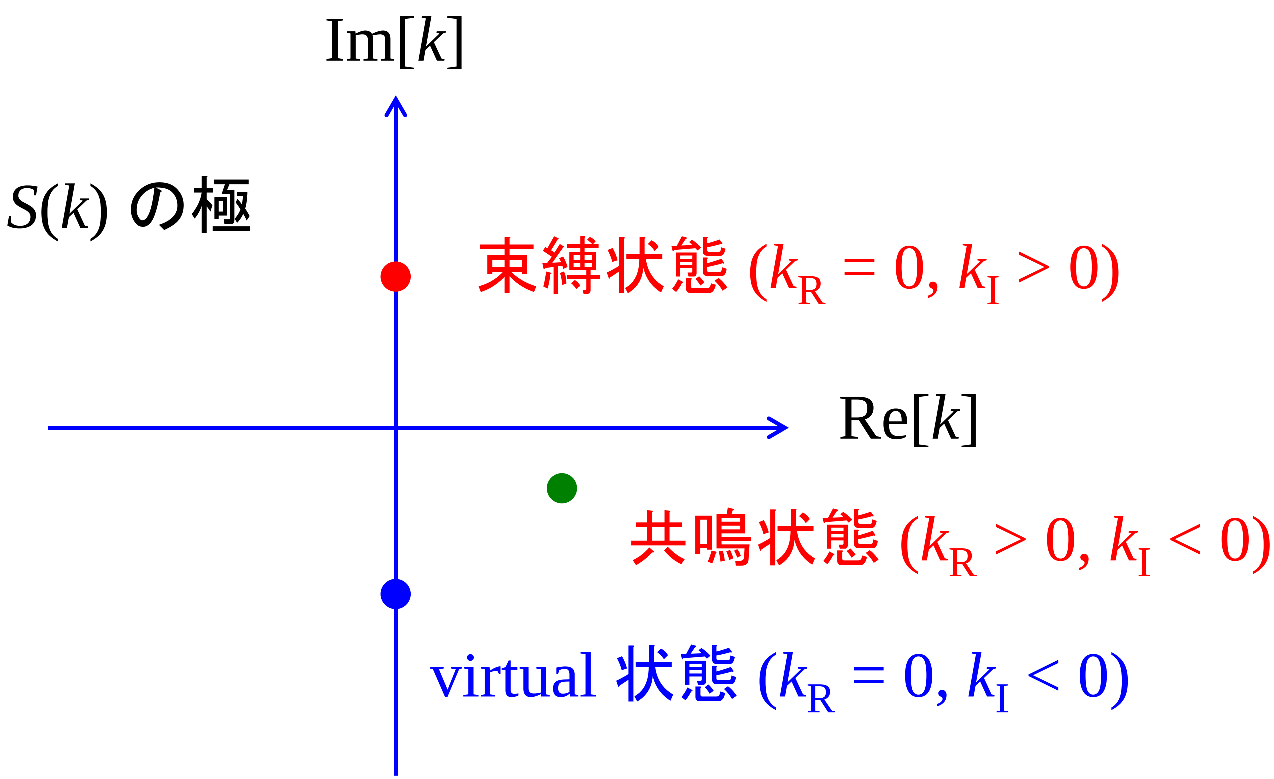
K.H., H. Sagawa, S. Kanaya, A. Odahara,
PTEP, in press (2019); arXiv: 1903.01634 (nucl-th)

virtual state について

散乱問題：正の実数エネルギー（これが物理的な観測量）

影響

複素エネルギー（または複素運動量）平面で実軸の近くの
S 行列の極



virtual state について

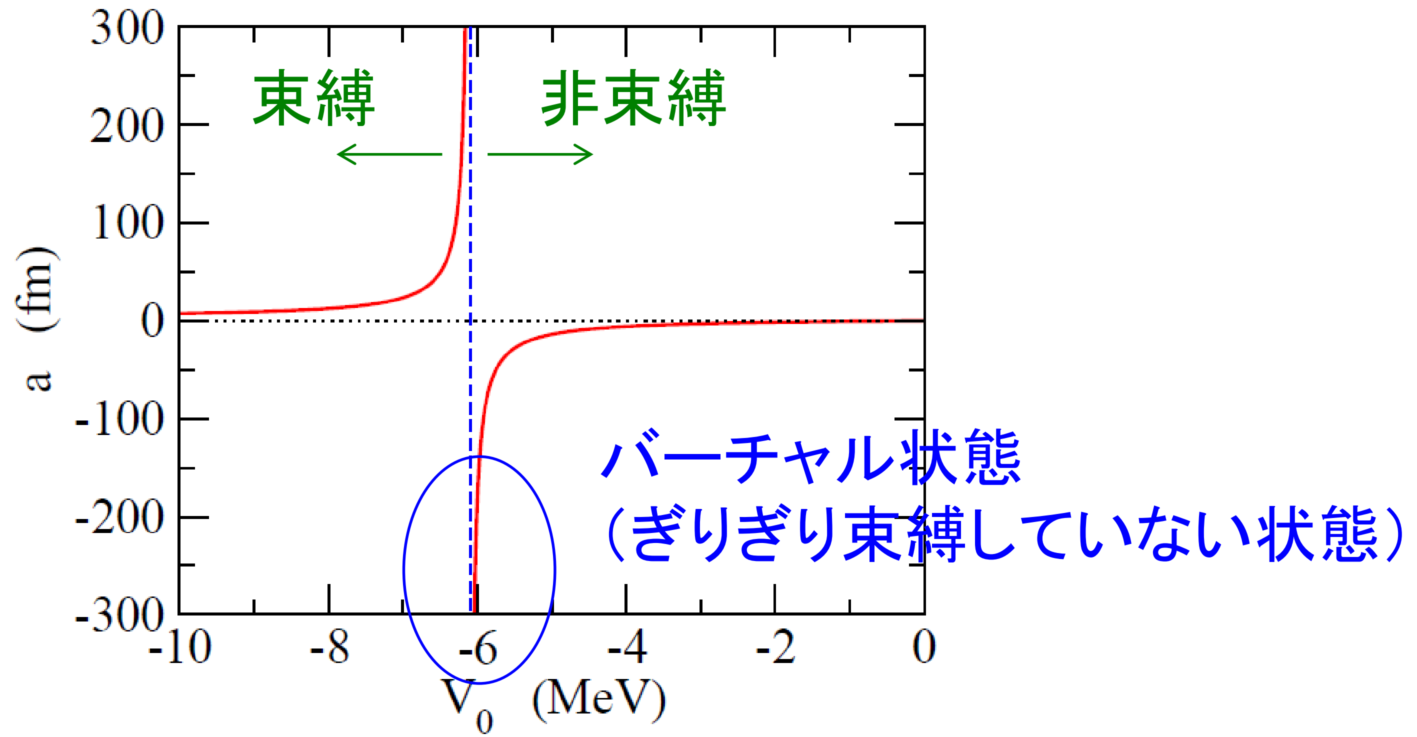
極低エネルギーでの散乱を考える（従って s-wave のみ）

effective range expansion:

$$\boxed{k \cot \delta(k) \sim -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_e k^2 + \cdots}$$

virtual state について

散乱長は $E = 0$ の束縛状態を作るときに正で発散



Woods-Saxon ポテンシャルで
ポテンシャルの深さを変える

(R = 2.736 fm, a_0 = 0.67 fm)

散乱長の物理的意味

半径 R の井戸型ポテンシャル：

$$a = R\left(1 - \frac{\tan\kappa R}{\kappa R}\right)$$

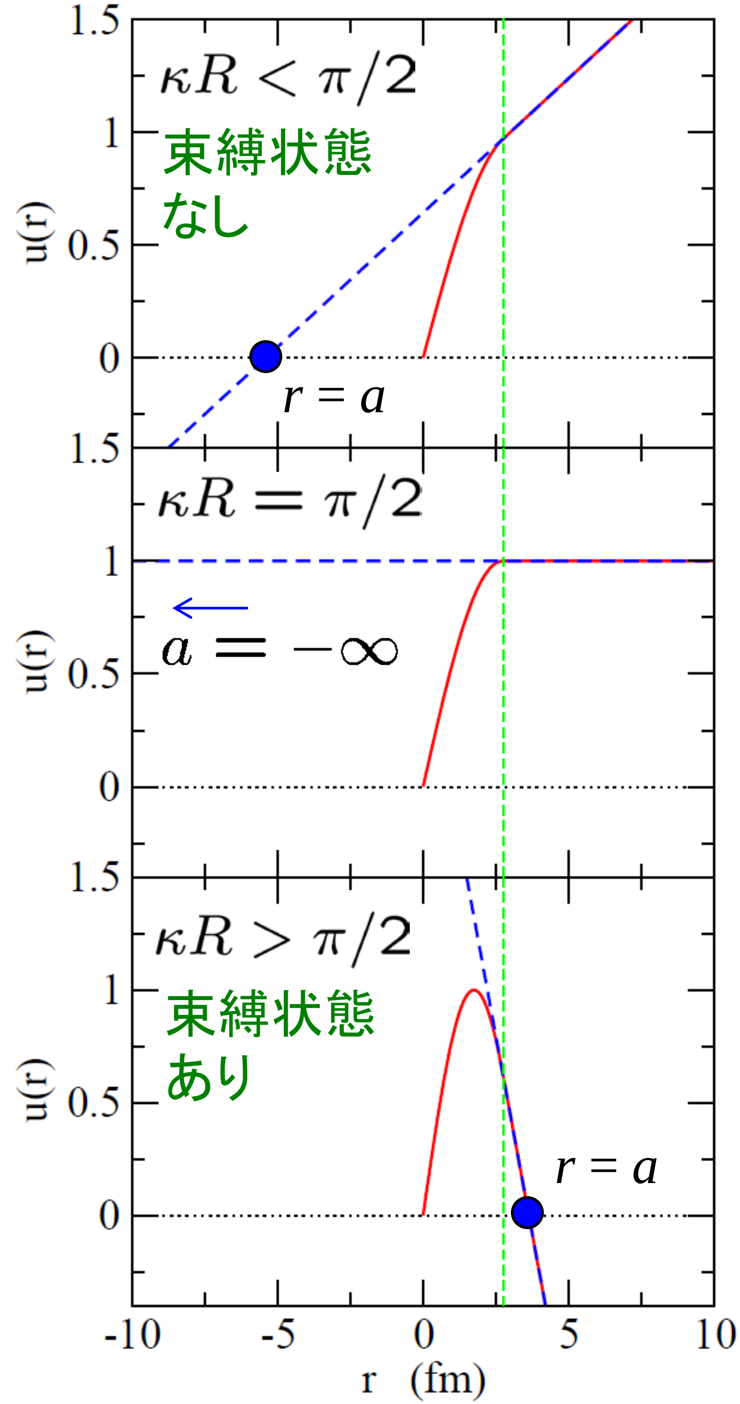
$$\kappa = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}$$

$$u(r) = A\sin(\kappa r) \quad (r < R)$$

$$f(r) \equiv u(R) + u'(R)(r - R)$$

は $r = a$ で $f(a)=0$。

すなわち、散乱長は $r = R$ で波動関数を一次近似したときに、その直線が x 軸を切る点。



virtual state について

極低エネルギーでの散乱を考える（従って s-wave のみ）

effective range expansion:

$$k \cot\delta(k) \sim -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_e k^2 + \cdots$$

このとき、

$$\begin{aligned} S(k) &= \frac{e^{i\delta}}{e^{-i\delta}} = \frac{\cos\delta + i\sin\delta}{\cos\delta - i\sin\delta} \\ &= \frac{\cot\delta + i}{\cot\delta - i} \\ &\sim \frac{-1/a + ik}{-1/a - ik} \end{aligned}$$

極は $k = i\dfrac{1}{a}$

$a < 0$ なら virtual 状態、$a > 0$ なら（浅い）束縛状態

virtual state について

極低エネルギーでの散乱を考える（従って s-wave のみ）

effective range expansion:

$$\boxed{k \cot \delta(k) \sim -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_e k^2 + \cdots}$$

このとき、

$$\boxed{S(k) \sim \frac{-1/a + ik}{-1/a - ik}}$$

極は $k = i\frac{1}{a}$

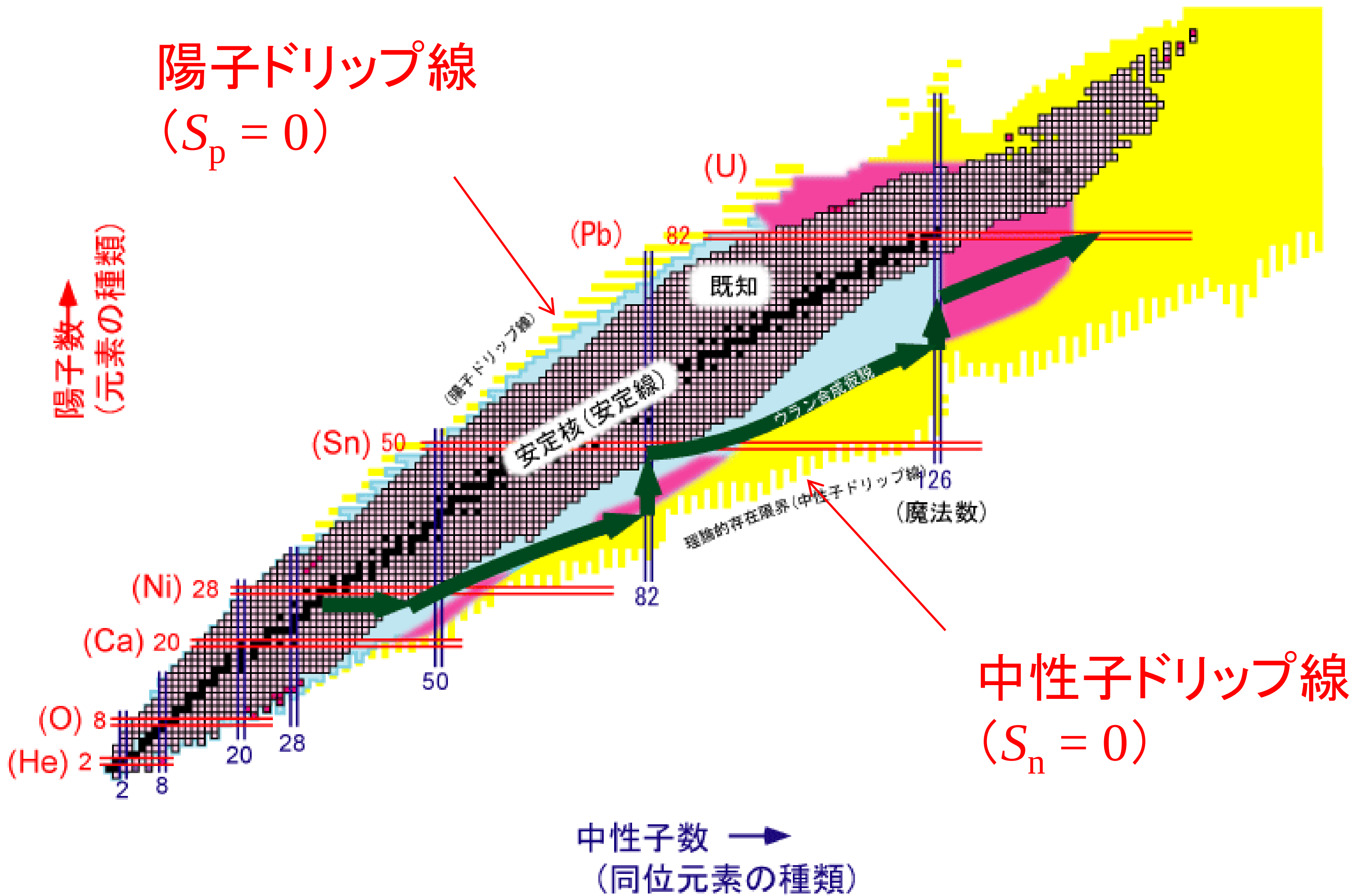
極が実軸に近い $\longrightarrow$ $|a|$ が大

このとき、弾性散乱の全断面積:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta = \frac{4\pi}{(k\cot\delta)^2 + k^2} \sim 4\pi a^2$$

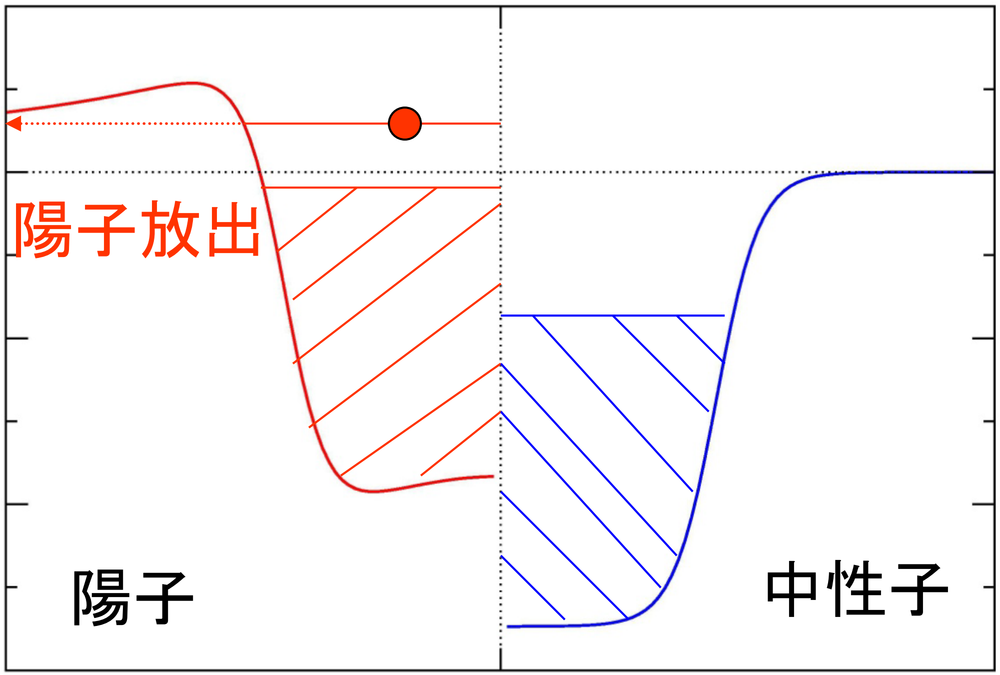
: large

陽子ドリップ線を越えた原子核の陽子放出崩壊



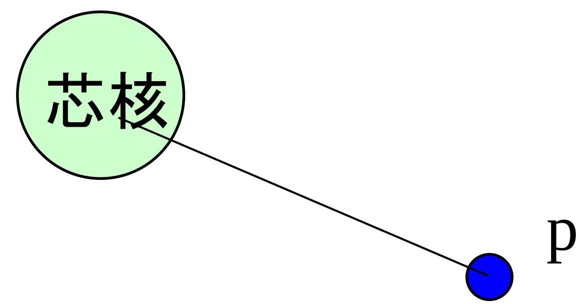
陽子放出崩壊

陽子ドリップ線を越えた原子核



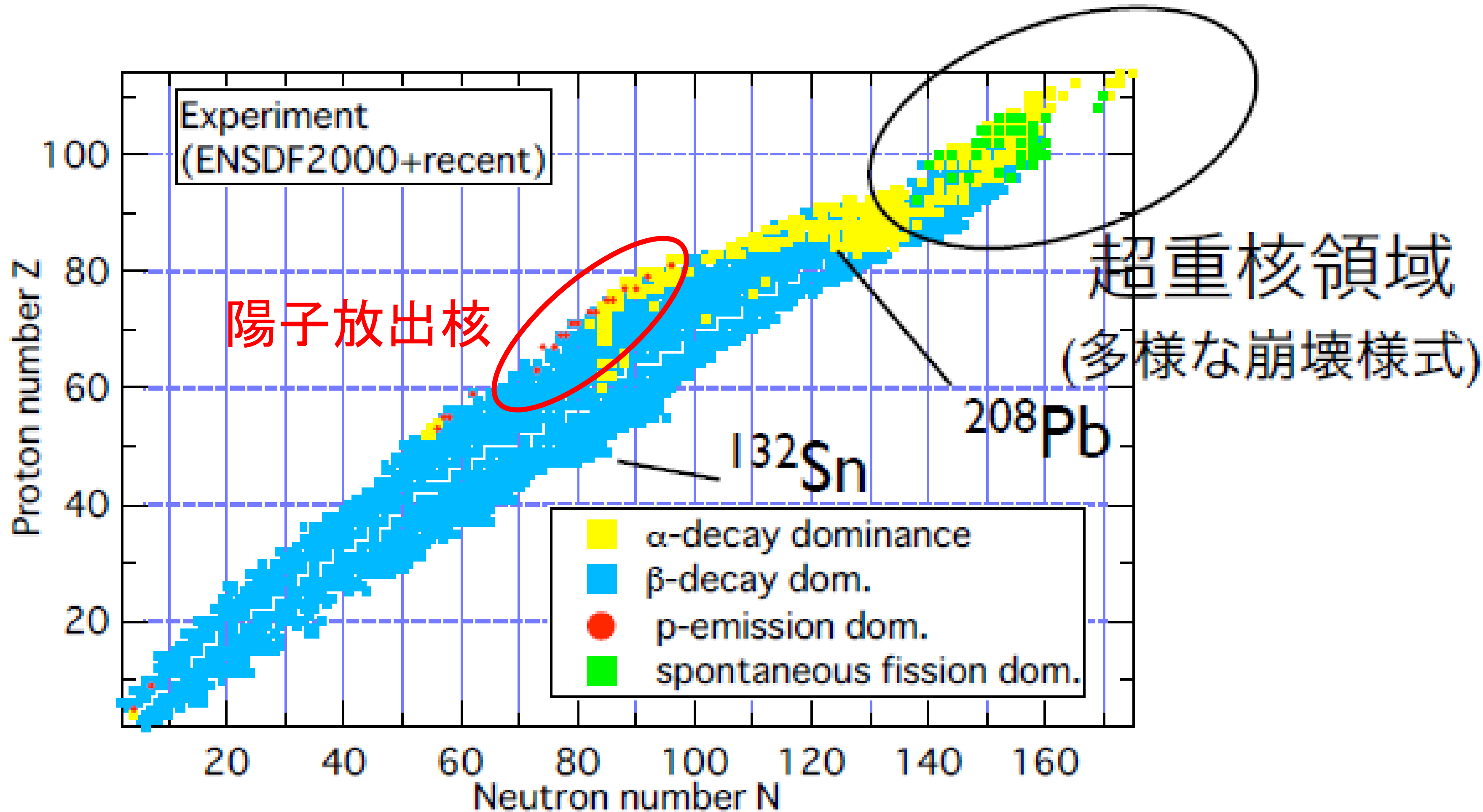
陽子：クーロン障壁にトラップ
（障壁をトンネルしなければならない）

非常に幅の狭い
（長寿命な）共鳴状態

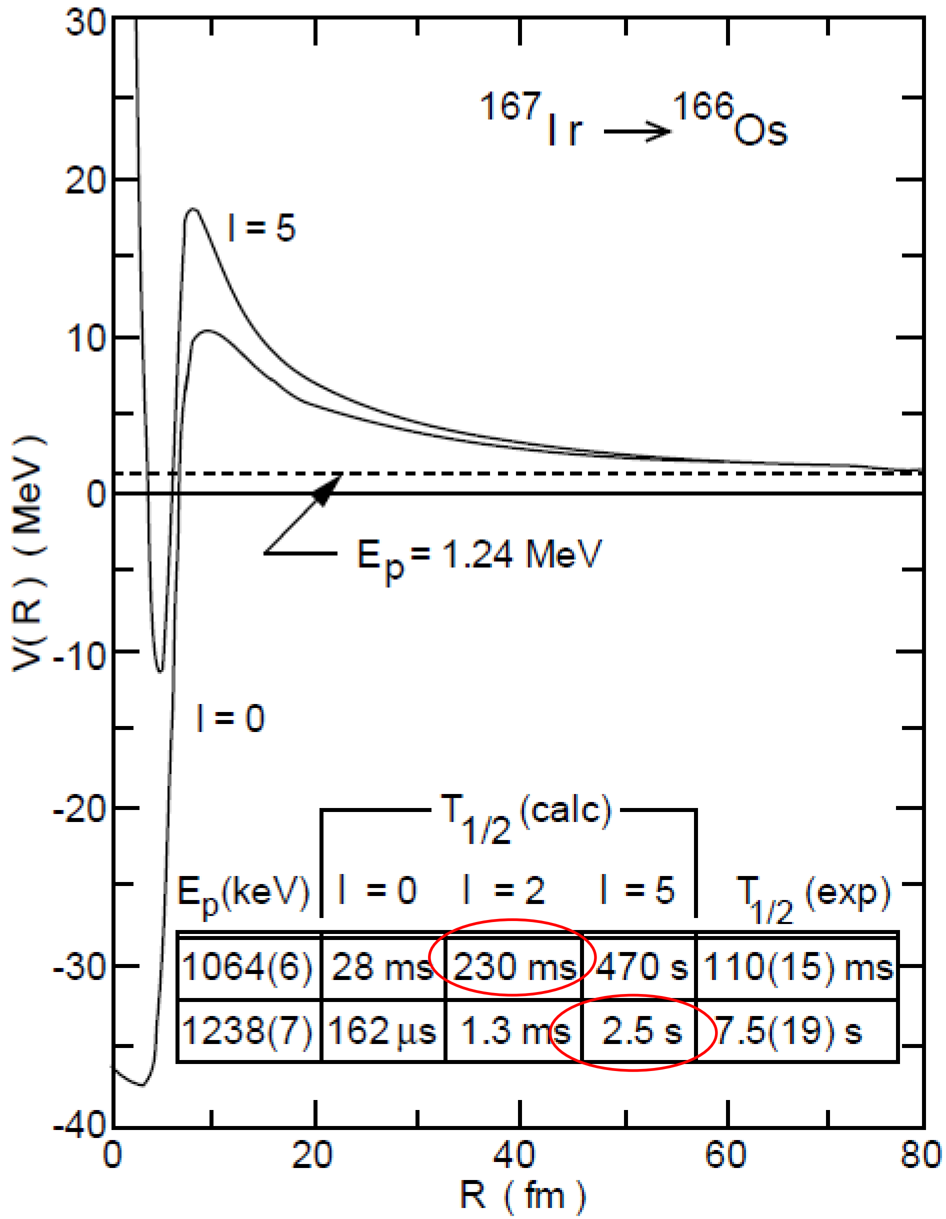


多くの（基底状態）陽子放出核が発見

実験の観測量: 陽子の放出エネルギーE_p と崩壊半減期 $T_{1/2}$



小浦寛之氏(JAEA)
のスライドより



E_p(keV)	l = 0	l = 2	l = 5	$T_{1/2}$ (exp)
1064(6)	28 ms	230 ms	470 s	110(15) ms
1238(7)	162 μs	1.3 ms	2.5 s	7.5(19) s

Figure 3 Proton-nucleus potential calculated for the proton emitter ^{167}Ir. The *inset* shows the proton-decay half-lives calculated using the WKB approximation for three values of the angular momentum ℓ, compared to the experimental values for the ground and isomeric transitions.

A ~ 150-160 領域における典型的な値

V_b ~ 10 MeV (l=0)
E_p ~ 1 MeV
R_{turn}: 80~100 fm
Γ : 10^{-18}~10^{-22} MeV
$T_{1/2}$: 100 μs~1 sec

陽子放出崩壊の一つの特徴:
半減期が l に敏感

↓

陽子崩壊を通じて陽子過剰核の陽子一粒子状態の l を決定できる

P.J. Woods and C.N. Davids,
Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 47 ('97)541

グリーン関数法（非常に幅の狭いガモフ状態の幅を求める方法）

S.G. Kadmensky et al., Sov. J. Nucl. Phys. 14 ('72) 193
C.N. Davids and H. Esbensen, PRC61 ('00) 054302
K.H., PTP Suppl. 146 ('02) 348

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2}+V_{\rm cent}(r)+V(r)-\left(E-\frac{i}{2}\Gamma_0\right)\right]u(r)=0$$

$$V(r)\to\frac{Ze^2}{r}\qquad(r\to\infty)$$

まず $\Gamma_0 = 0$ とし位相のずれが $\delta = \pi/2$ となる散乱状態を求める:

$$\begin{aligned}\phi(r) &\sim r^{l+1} && (r\to 0)\\ &\to \widetilde{\mathcal{N}}G_l(kr) && (r\to\infty)\end{aligned}$$

このときのエネルギー E が共鳴のエネルギー。

グリーン関数法（非常に幅の狭いガモフ状態の幅を求める方法）

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2}+V_{\rm cent}(r)+V(r)-\left(E-\frac{i}{2}\Gamma_0\right)\right]u(r)=0$$

まず $\Gamma_0 = 0$ とし位相のずれが $\delta = \pi/2$ となる散乱状態を求める:

$$\begin{aligned}\phi(r) &\sim r^{l+1} && (r\to 0)\\ &\to \widetilde{\mathcal{N}}G_l(kr) && (r\to\infty)\end{aligned}$$

このときのエネルギー E が共鳴のエネルギー。幅は次のように求める。

Gell-Mann-Goldberger 変換

cf. DWBA

$$\begin{aligned}&[\hat{T}+V-E]\Psi=0\\ &\hookrightarrow \left[\hat{T}+\frac{Ze^2}{r}-E\right]\Psi=\left(\frac{Ze^2}{r}-V\right)\Psi\\ &\hookrightarrow \Psi\sim\frac{1}{\hat{T}+\frac{Ze^2}{r}-E-i\eta}\left(\frac{Ze^2}{r}-V\right)\Phi\end{aligned}$$

$\Gamma_0 = 0$ として求めた
定常波

$$\Psi \sim \frac{1}{\hat{T}+\frac{Ze^2}{r}-E-i\eta}\left(\frac{Ze^2}{r}-V\right)\Phi$$

(note)

外向波 原点正則

$$\left\langle \boldsymbol{r}\left|\left(\hat{T}+\frac{Ze^2}{r}-E-i\eta\right)^{-1}\right|\boldsymbol{r}'\right\rangle = \frac{2\mu}{k\hbar^2}\frac{O_l(kr_>)}{r_>}\mathcal{Y}_{jl}(\hat{\boldsymbol{r}}_>)\cdot\mathcal{Y}^*_{jl}(\hat{\boldsymbol{r}}_<)\frac{F_l(kr_<)}{r_<}$$

$$u(r)\to\mathcal{N}O_l(kr)=\mathcal{N}(G_l(kr)+iF_l(kr))\qquad(r\to\infty)$$

$$\boxed{\mathcal{N}=-\frac{2\mu}{\hbar^2 k}\int_0^\infty r^2dr\,F_l(kr)\left(V(r)-\frac{Ze^2}{r}\right)\phi(r)}$$

Γ_0 = (outgoing flux) / (normalization):

$$= \frac{\frac{\hbar^2 k}{\mu}\mathcal{N}^2}{\int_0^{r_2}|\phi(r)|^2r^2dr}$$

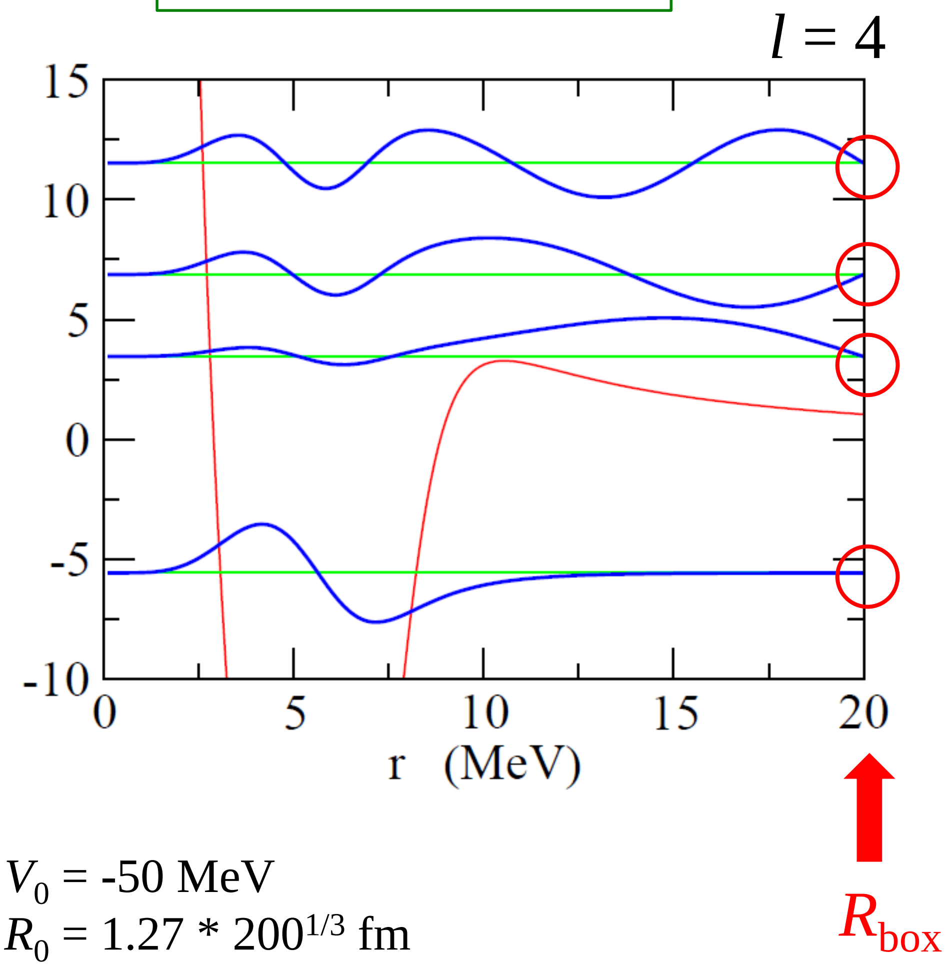
共鳴状態に対する他の計算法

- ✓stabilization method
- ✓complex scaling method
- ✓ACCC法

stabilization method

box 境界条件＝散乱状態の離散化

$$\boxed{u_{jl}(R_{\rm box}) = 0}$$



V_0 = -50 MeV

R_0 = 1.27 * $200^{1/3}$ fm

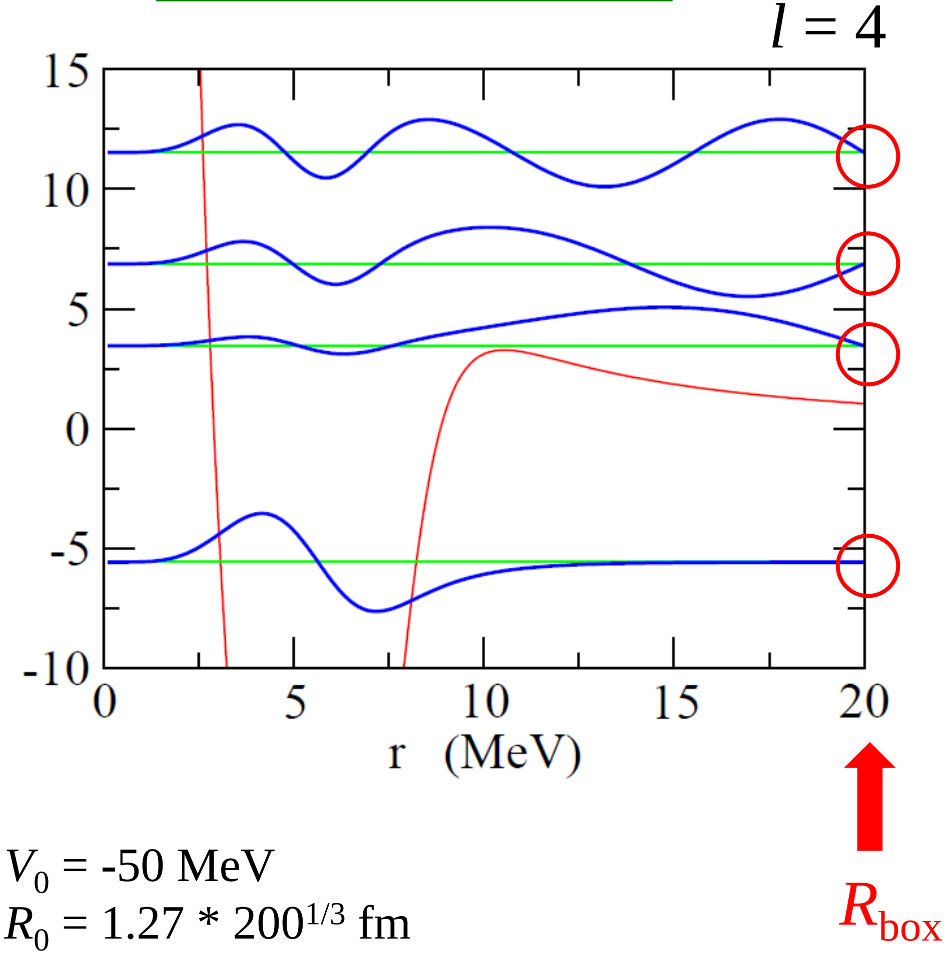
a = 0.67 fm

μ = 200 m_N / 201

[stabilization method]

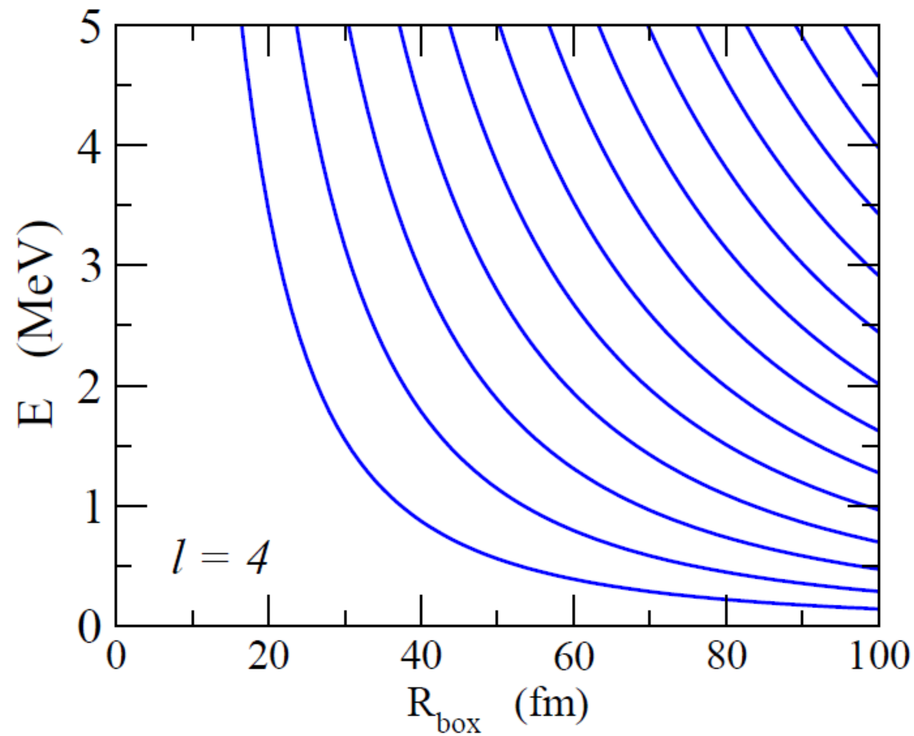
box 境界条件＝散乱状態の離散化

$$\boxed{u_{jl}(R_{\rm box}) = 0}$$



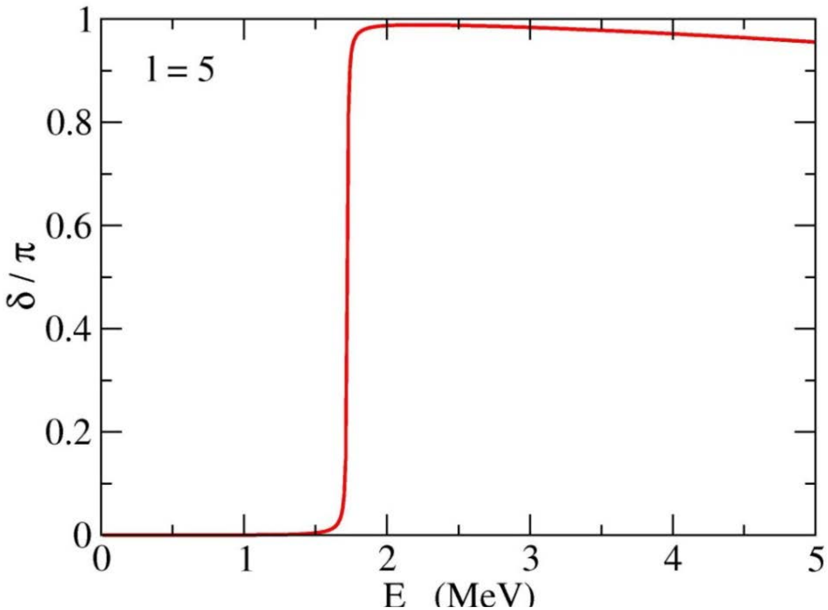
V_0 = -50 MeV
R_0 = 1.27 * $200^{1/3}$ fm
a = 0.67 fm
μ = 200 m_N / 201

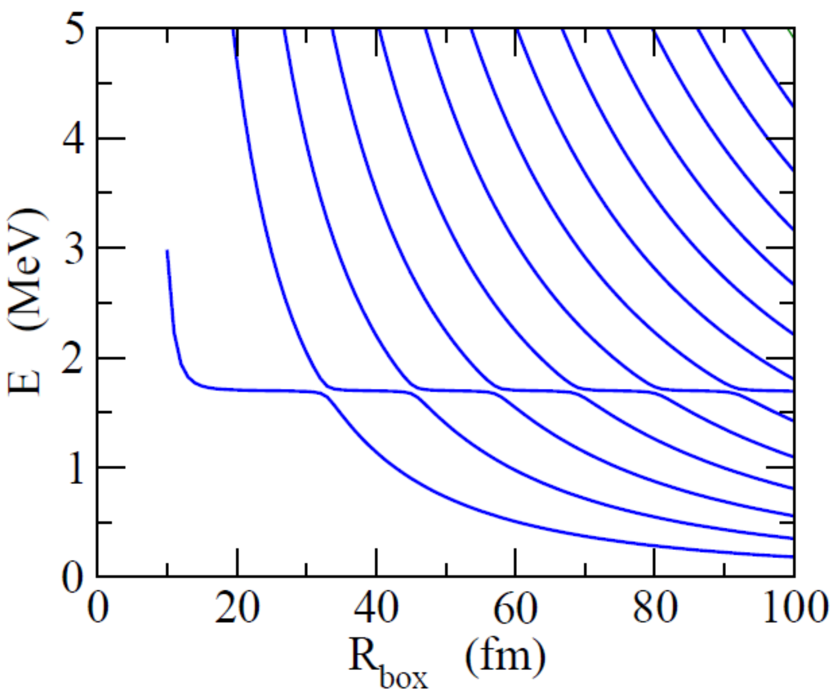
$R_{\rm box}$を変えるとどうなるか?



✓ $R_{\rm box}$ の関数として単調に減少
✓ $R_{\rm box}$ が大きい方が dk が小

共鳴がある場合



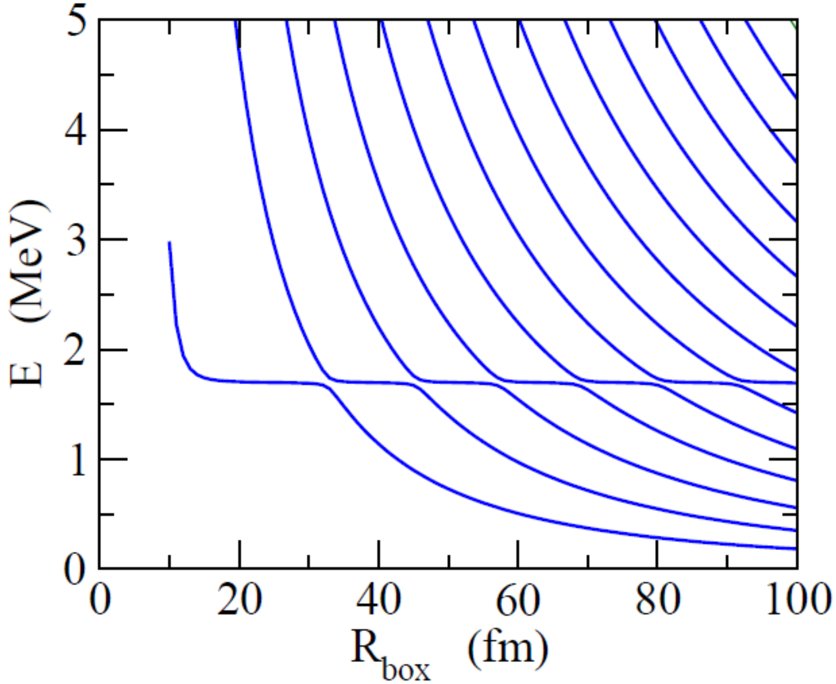


共鳴のエネルギーで離散化
されたエネルギーが安定化

"stabilization method"
A.U. Hazi and H.S. Taylor,
PRA 1 ('70) 1109

L^2基底で共鳴エネルギーと
共鳴幅を計算する

共鳴がある場合



共鳴のエネルギーで離散化されたエネルギーが安定化

"stabilization method"
A.U. Hazi and H.S. Taylor,
PRA 1 ('70) 1109

L^2基底で共鳴エネルギーと共鳴幅を計算する

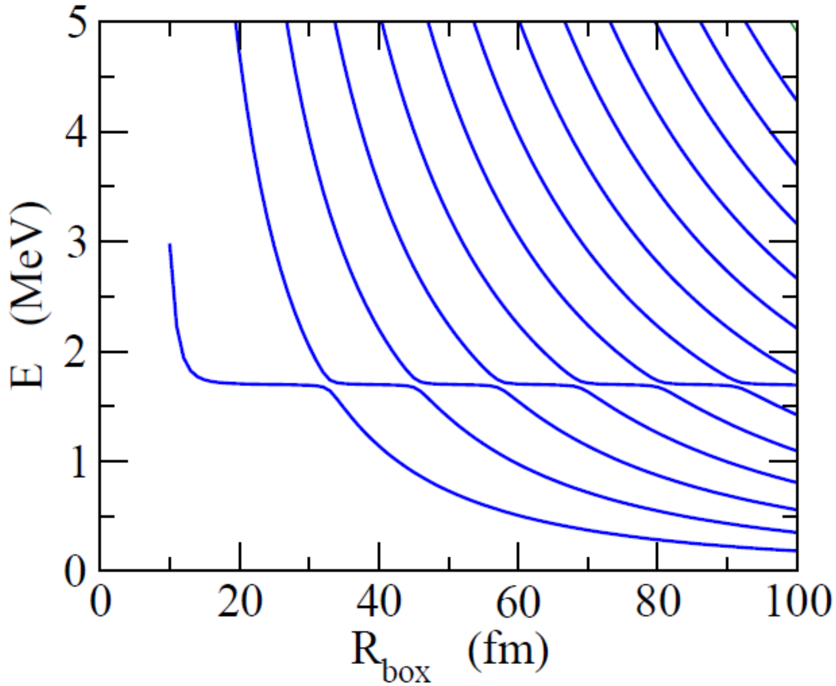
何故共鳴準位が安定するのか?

$$u_l(r) \to \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l(E)\right) \quad \Longrightarrow \quad kR - \frac{l\pi}{2} + \delta_l(E) = n\pi$$

R で微分すると:
$$\frac{\partial k}{\partial R}R + k + \frac{\partial \delta_l}{\partial R} = 0 \longrightarrow R\frac{\partial k}{\partial E}\cdot\frac{\partial E}{\partial R} + k + \frac{\partial \delta_l}{\partial E}\cdot\frac{\partial E}{\partial R} = 0$$

共鳴準位:
$$\frac{\partial \delta_l}{\partial E} = \text{large} \longrightarrow \boxed{\frac{\partial E}{\partial R} = \text{small}} \qquad \frac{\partial E}{\partial R} \sim -k\left(\frac{\partial \delta_l}{\partial E}\right)^{-1} < 0$$

共鳴がある場合



共鳴のエネルギーで離散化されたエネルギーが安定化

"stabilization method"
A.U. Hazi and H.S. Taylor,
PRA 1 ('70) 1109

L^2基底で共鳴エネルギーと共鳴幅を計算する

$$\left(\frac{\partial E}{\partial R}\right)_{E=E_R} = -\frac{2E_R}{R+\frac{2}{\Gamma}\frac{k_R\hbar^2}{m}}$$ ← Breit-Wigner

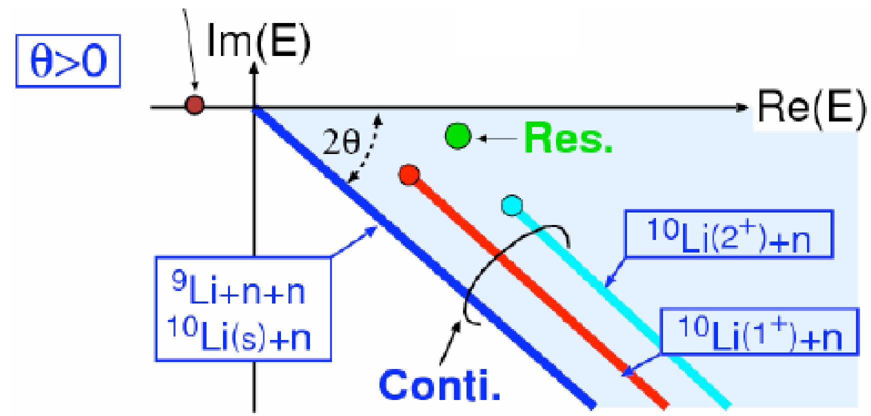
$$\Longrightarrow \Gamma = \frac{2k_R\hbar^2}{m}\cdot\frac{1}{-R-2E_R\left[\left(\frac{\partial E}{\partial R}\right)_{E=E_R}\right]^{-1}}$$

C.H. Maier, L.S. Cederbaum, and W. Domcke, J. of Phys. B13 ('80) L119
L. Zhang et al., PRC77 ('08) 014312

✓複素座標スケーリング法（北大グループ）

$$r \to re^{i\theta}, p \to pe^{-i\theta}$$

として $H(q)$を対角化。



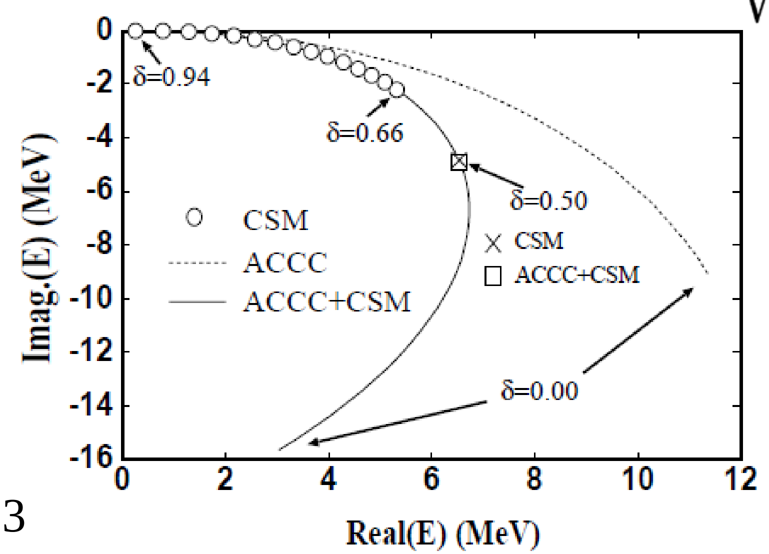
スライド：明孝之氏

✓ACCC (Analytic Continuation in the Coupling Constant)法

$$H \to H + \delta \cdot V$$

として δ ~ 1 で求めた束縛レベルのエネルギーを $x = \sqrt{\delta - \delta_0}$ の関数として δ=0 に外挿

(δ_0 はゼロ束縛となる δ)



S. Aoyama, PRC68(‘03)034313