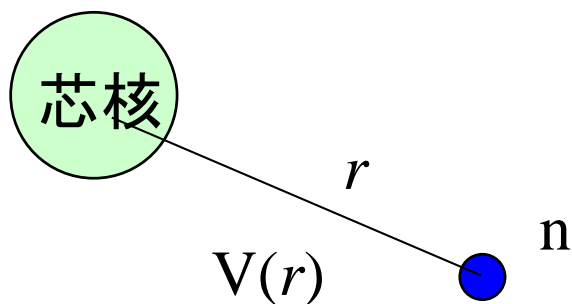


変形した不安定核

- 束縛状態
- 共鳴状態
- 結合チャンネル系の共鳴状態
- Feshbach 共鳴

束縛状態：変形ハロー核

これまで、芯核は球形として最外殻中性子の一粒子運動を議論してきた：

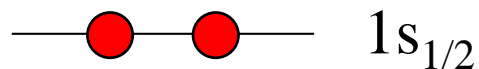
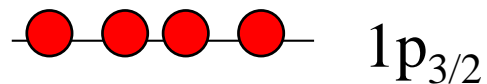
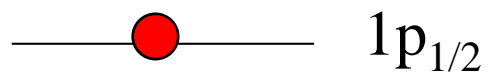


相対運動のハミルトニアン

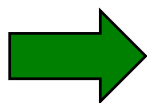
$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(r)$$

↑
球形のポテンシャル

これを ^{11}Be にあてはめると：



^{11}Be



^{11}Be の基底状態は $I^\pi = 1/2^-$

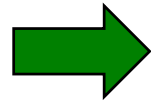
球形ポテンシャルの準位 (^{11}Be)

—●— $1p_{1/2}$

●●●● $1p_{3/2}$

—●—●— $1s_{1/2}$

^{11}Be



^{11}Be の基底状態は $I^\pi = 1/2^-$

実際の ^{11}Be の準位

0.32 MeV

————— $1/2^-$

————— $1/2^+$

^{11}Be

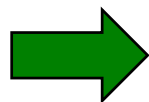
球形ポテンシャルの準位 (^{11}Be)

—●— $1p_{1/2}$

●●●● $1p_{3/2}$

—●— $1s_{1/2}$

^{11}Be



^{11}Be の基底状態は $I^\pi = 1/2^-$

実際の ^{11}Be の準位

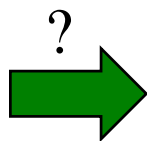
とても不自然

0.32 MeV

— $1/2^-$

— $1/2^+$

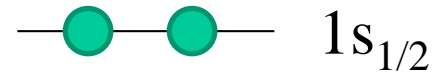
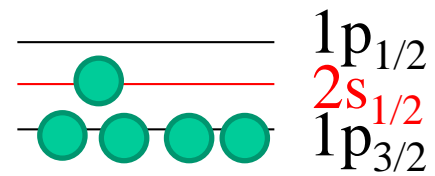
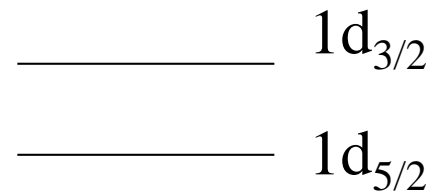
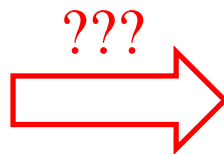
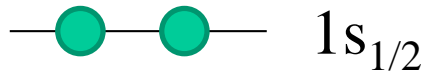
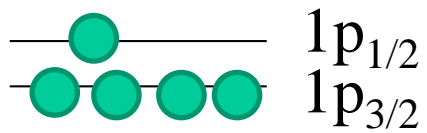
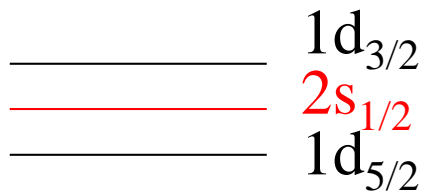
^{11}Be



—●— $1p_{1/2}$
 ●●●● $2s_{1/2}$
 ●●●● $1p_{3/2}$

—●— $1s_{1/2}$

“parity inversion”



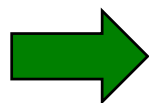
球形ポテンシャルの準位 (^{11}Be)

—●— $1p_{1/2}$

●●●● $1p_{3/2}$

—●—●— $1s_{1/2}$

^{11}Be



^{11}Be の基底状態は $I^\pi = 1/2^-$

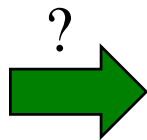
実際の ^{11}Be の準位

とても不自然

0.32 MeV

— $1/2^-$
— $1/2^+$

^{11}Be



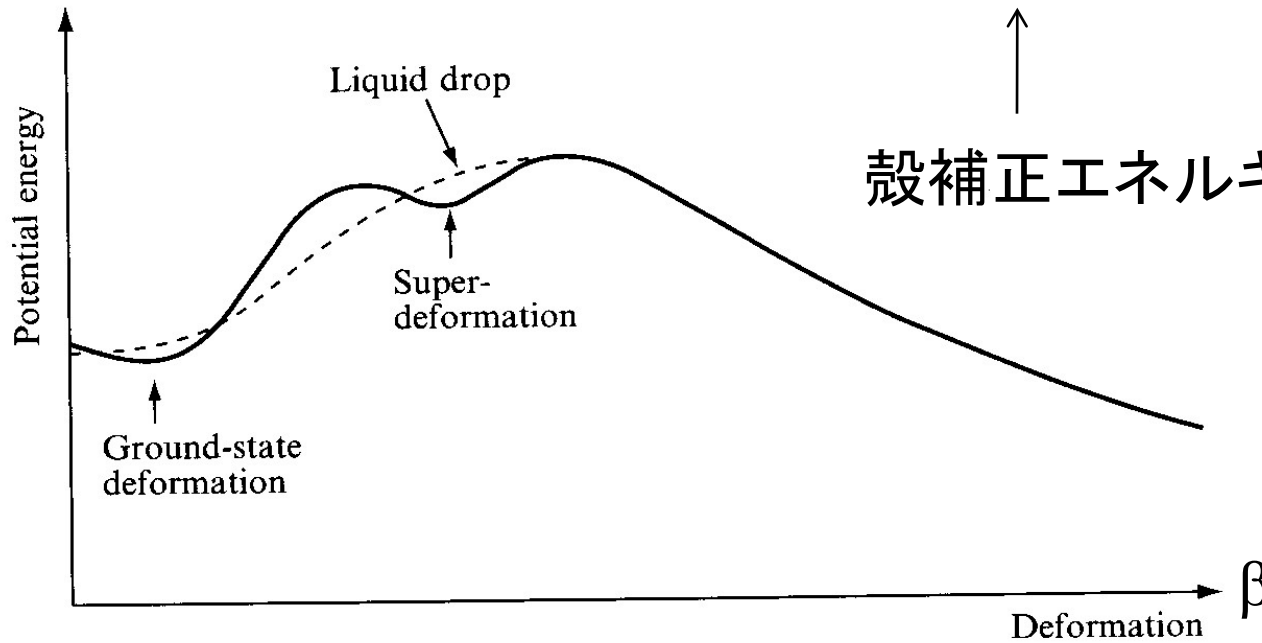
—●— $1p_{1/2}$
●●●● $2s_{1/2}$
—●—●— $1p_{3/2}$

—●—●— $1s_{1/2}$

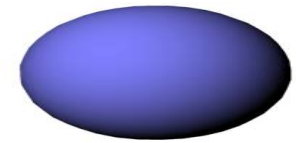
球形ポテンシャルに無理があるなら、変形させてみる?

(復習) 殻補正と原子核の変形

$$E(\beta) = E_{LDM}(\beta) + E_{shell}(\beta)$$



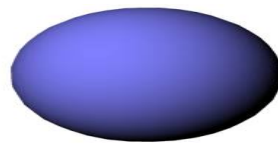
殻補正エネルギー: 魔法数の起源



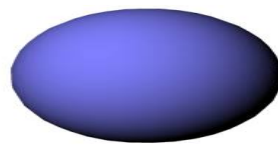
液滴模型のみ \longrightarrow 常に球形が基底状態
殻補正 \longrightarrow 変形状態が基底状態になる場合がある

* 対称性の自発的破れ

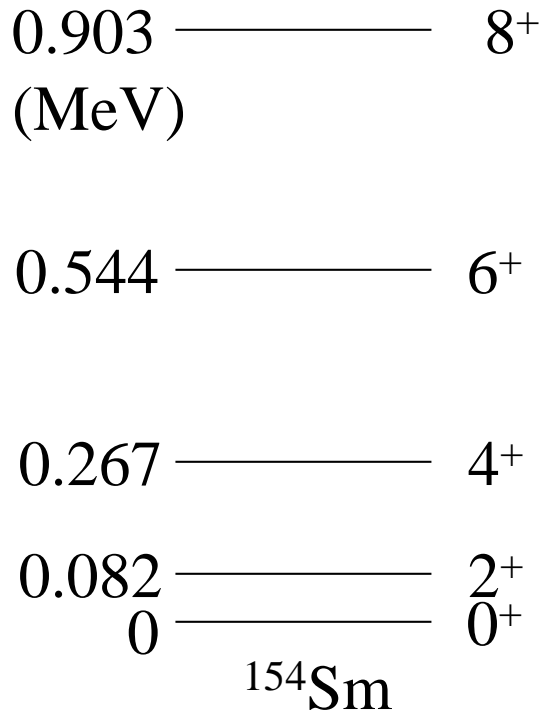
変形の証拠



変形の証拠

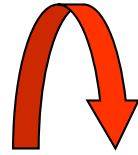


^{154}Sm のスペクトル



cf. 剛体の回転エネルギー(古典力学)

$$E = \frac{1}{2} \mathcal{J} \omega^2 = \frac{I^2}{2\mathcal{J}}$$



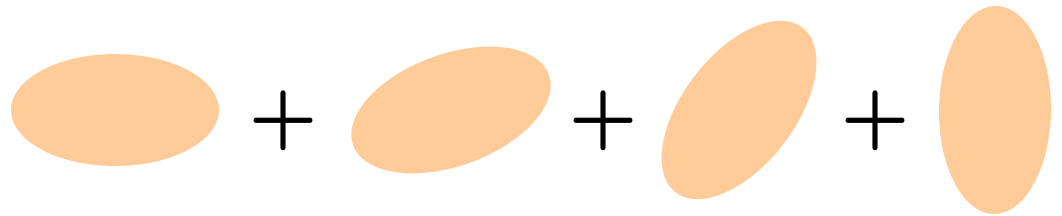
$$(I = \mathcal{J} \omega, \omega = \dot{\theta})$$

^{154}Sm は変形している

(参考) 0^+ 状態とは?

0^+ : 空間異方性がない(「球形」)

→ すべての向きを同等に混ぜればよい



$$E_I \sim \frac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathcal{J}}$$

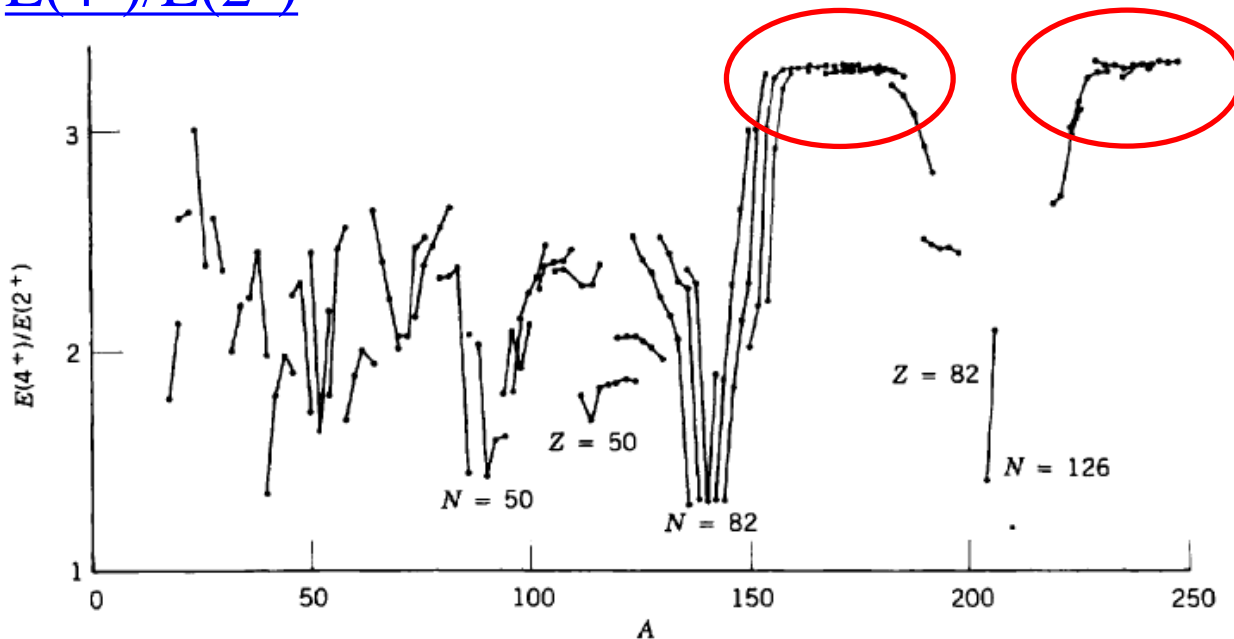
cf. 平均場近似 + 角運動量射影

$$E_I = \frac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathcal{J}}$$

→ $E_2 \propto 2 \times 3 = 6, \quad E_4 \propto 4 \times 5 = 20$

→ $E_4/E_2 = 20/6 = 3.3333 \dots$

$E(4^+)/E(2^+)$



deformed nuclei:
 $E(4^+)/E(2^+) \sim 3.3$

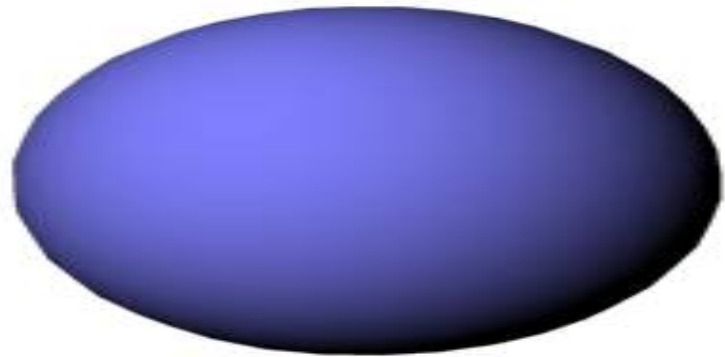
spherical nuclei:
 $E(4^+)/E(2^+) \sim 2$

変形ポテンシャル中の一粒子運動

$$V(\mathbf{r}) \sim \int v(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \sim -g\rho(\mathbf{r}) \quad \text{if } v(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

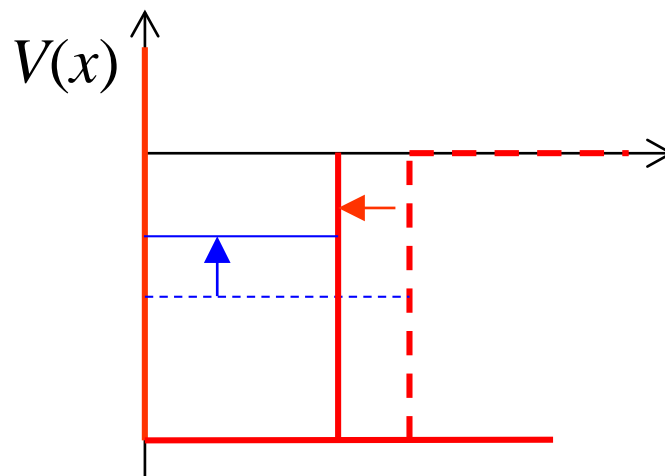
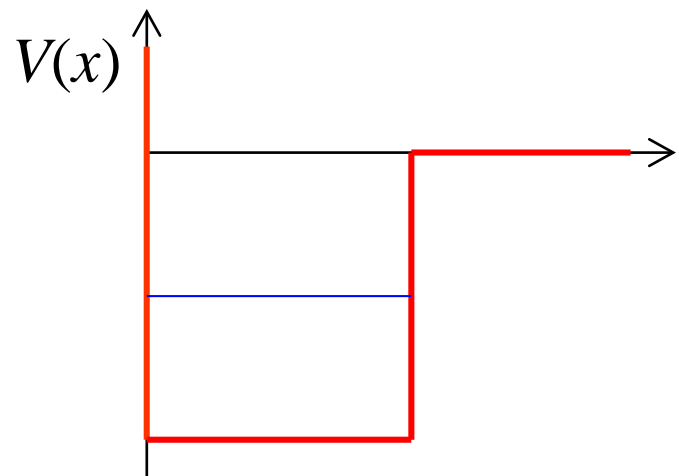
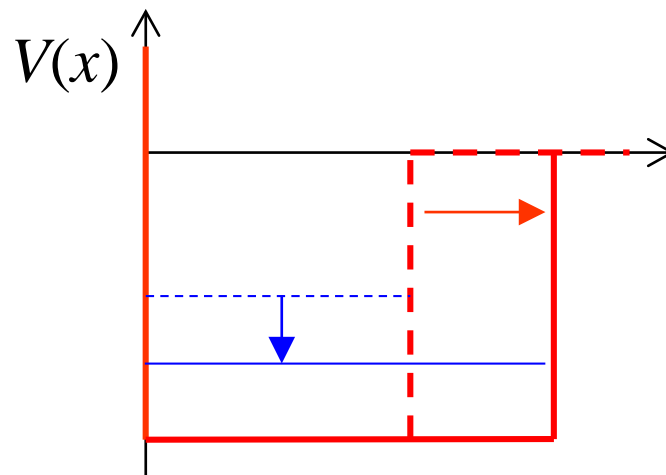
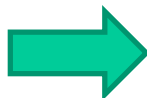
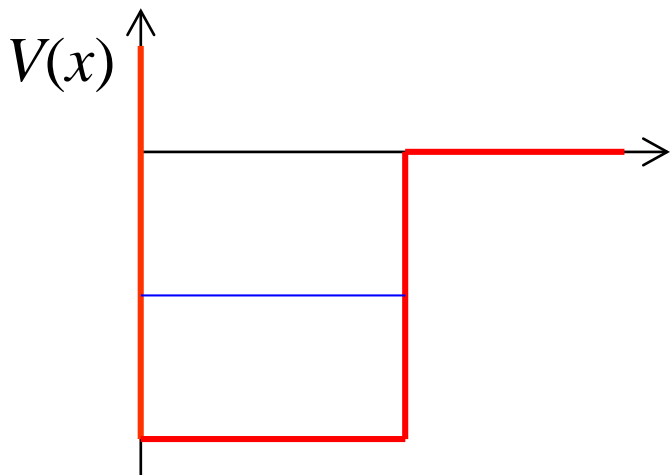


$V(r)$



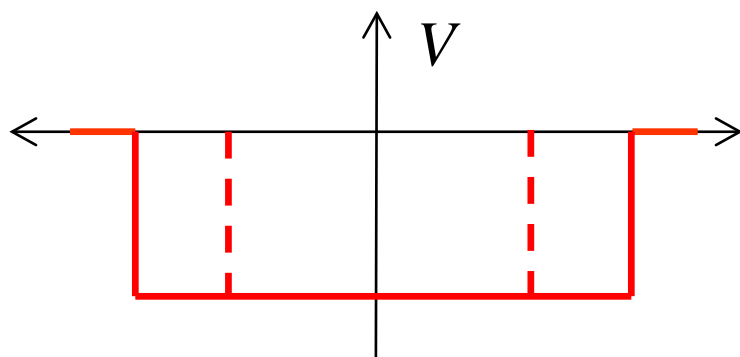
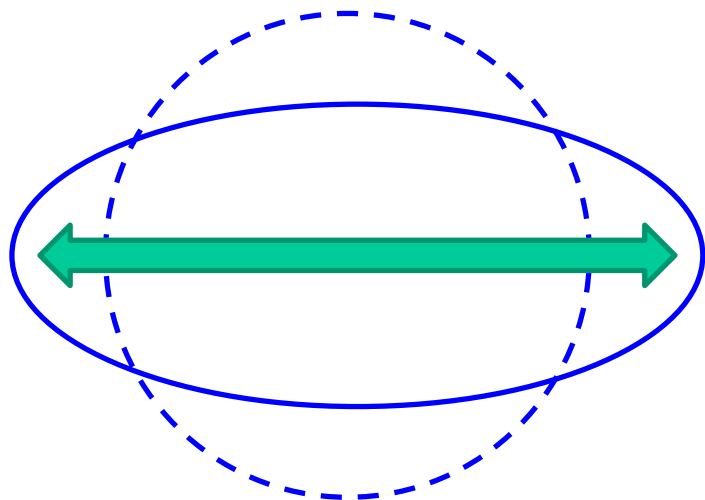
$V(r, \theta)$

(準備) 1次元井戸型ポテンシャル



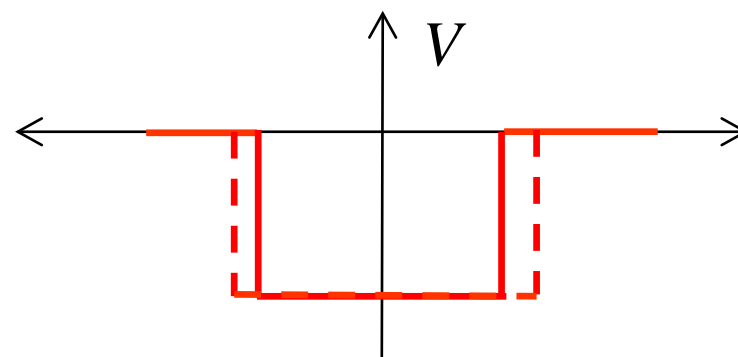
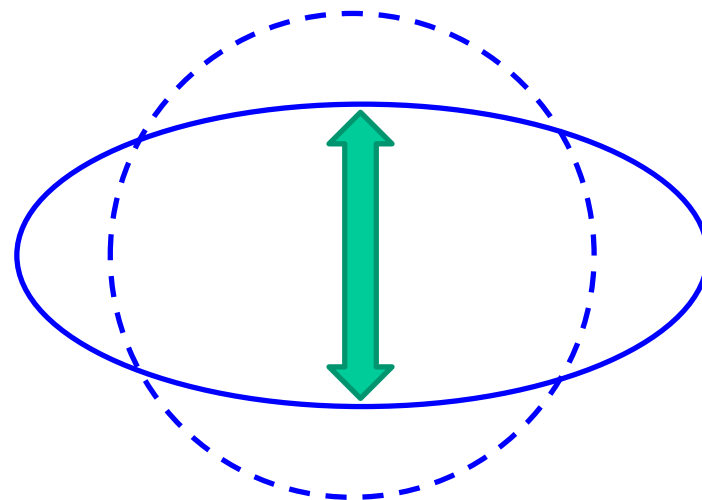
変形ポテンシャル中の一粒子運動

長軸に沿った運動



$E \rightarrow$ 小

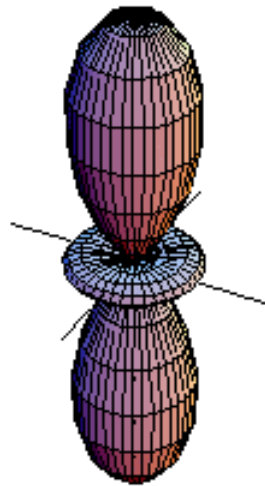
短軸に沿った運動



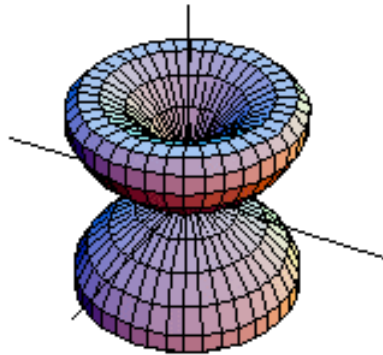
$E \rightarrow$ 大

$l = 2$

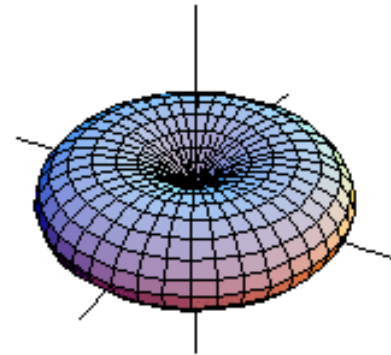
z



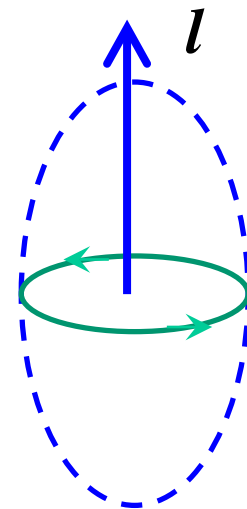
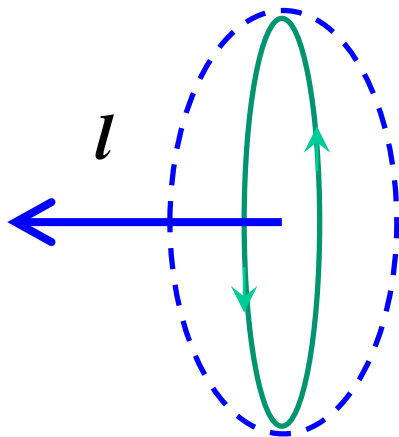
$r = Y_{20}$
($l_z = 0$)



$r = Y_{21}$
($l_z = 1$)

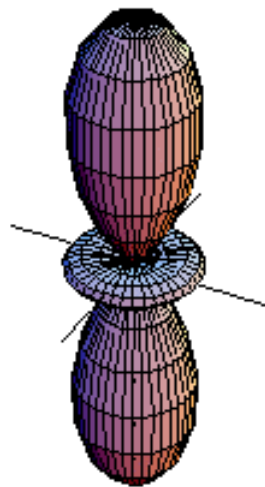


$r = Y_{22}$
($l_z = 2$)

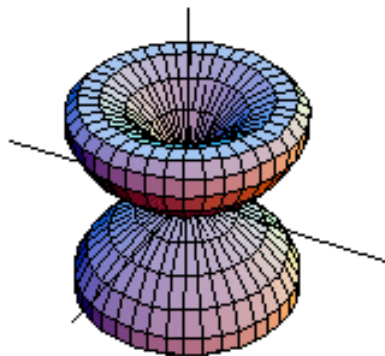


$l = 2$

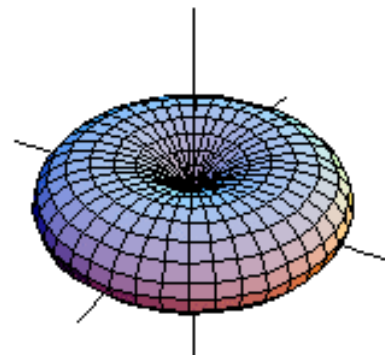
z



$r = Y_{20}$
 $(l_z = 0)$

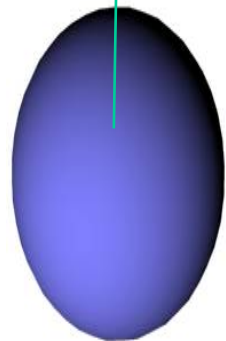


$r = Y_{21}$
 $(l_z = 1)$



$r = Y_{22}$
 $(l_z = 2)$

z



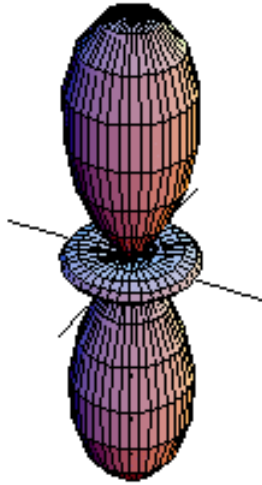
$E \rightarrow$ 小

なら

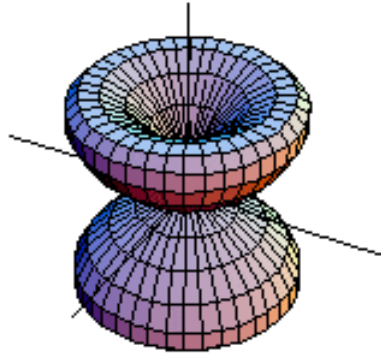
$E \rightarrow$ 大

$l = 2$

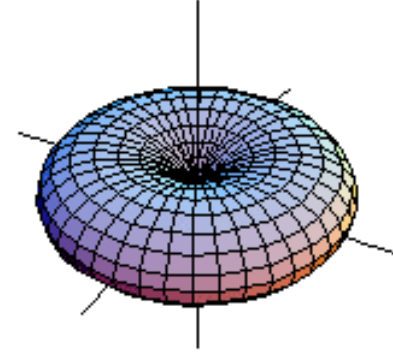
z



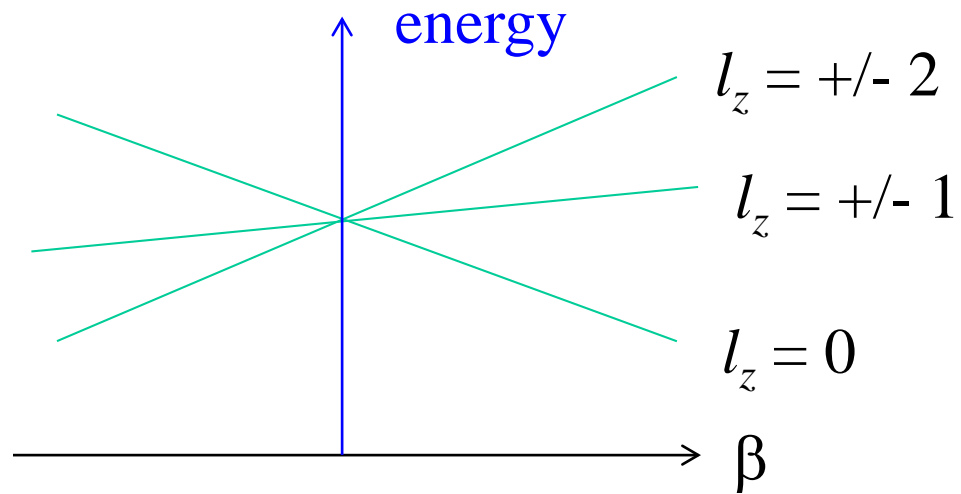
$r = Y_{20}$
($l_z = 0$)

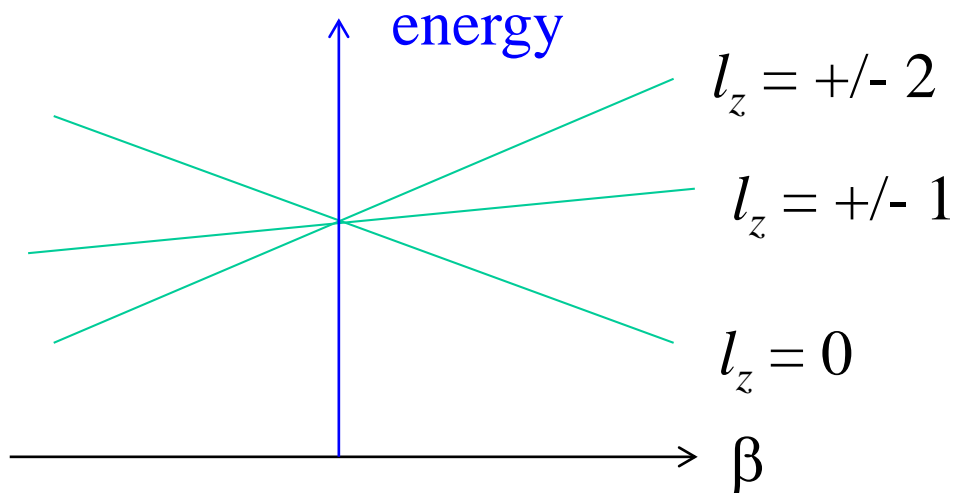


$r = Y_{21}$
($l_z = 1$)



$r = Y_{22}$
($l_z = 2$)





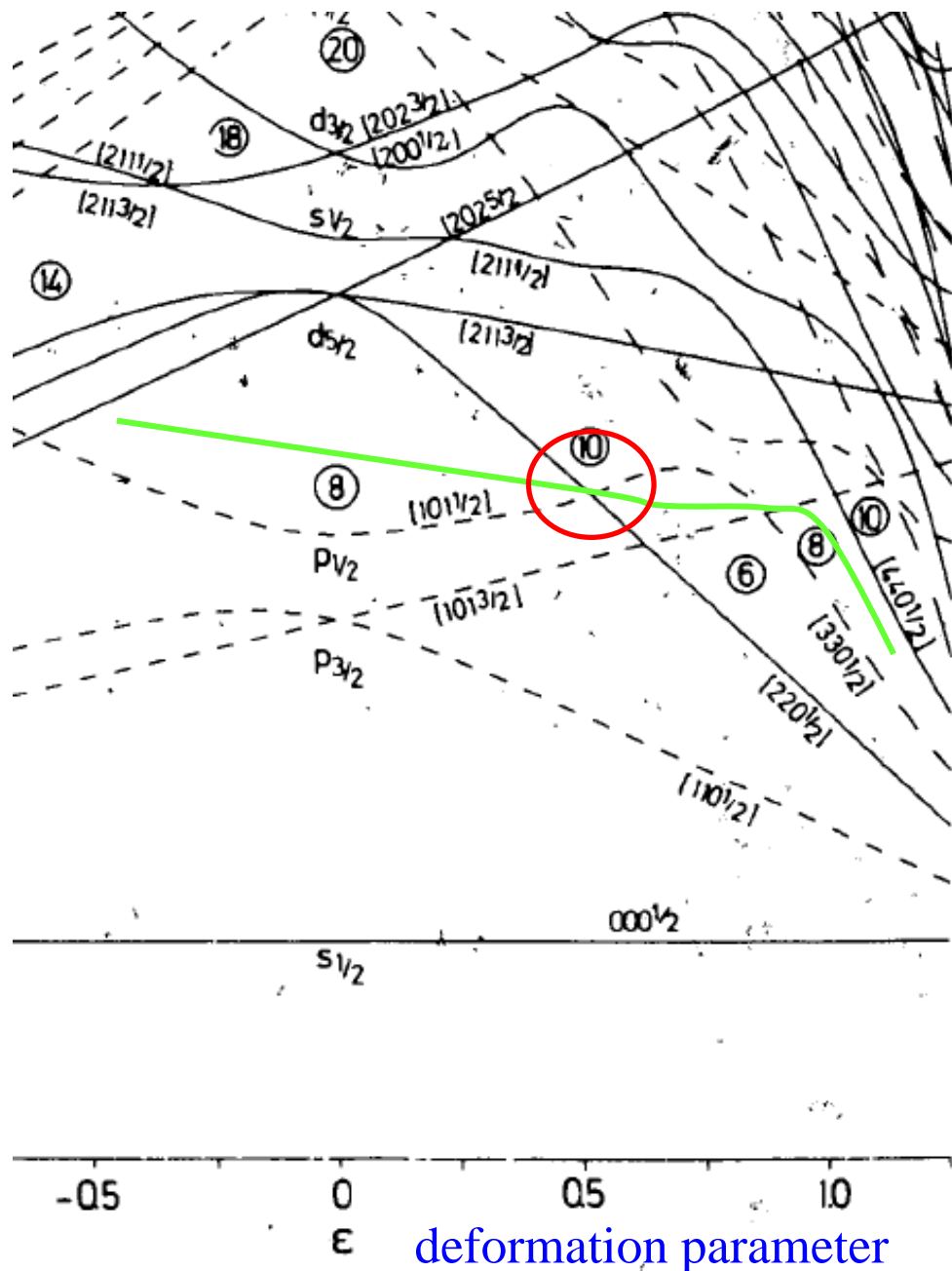
- (note) $V(r, \theta) \rightarrow$ 回転対称性を持っていない
 \rightarrow 角運動量がいい量子数ではない

$$\phi_{nll_z}(r, \theta, \phi) \rightarrow \phi_{nl_z}(r, \theta, \phi) = \sum_l \psi_{nl}(r) Y_{ll_z}(\theta, \phi)$$

いろいろな角運動量成分
 が混じる

* 軸対称変形であれば l_z は保存

$^{11}_4\text{Be}_7$



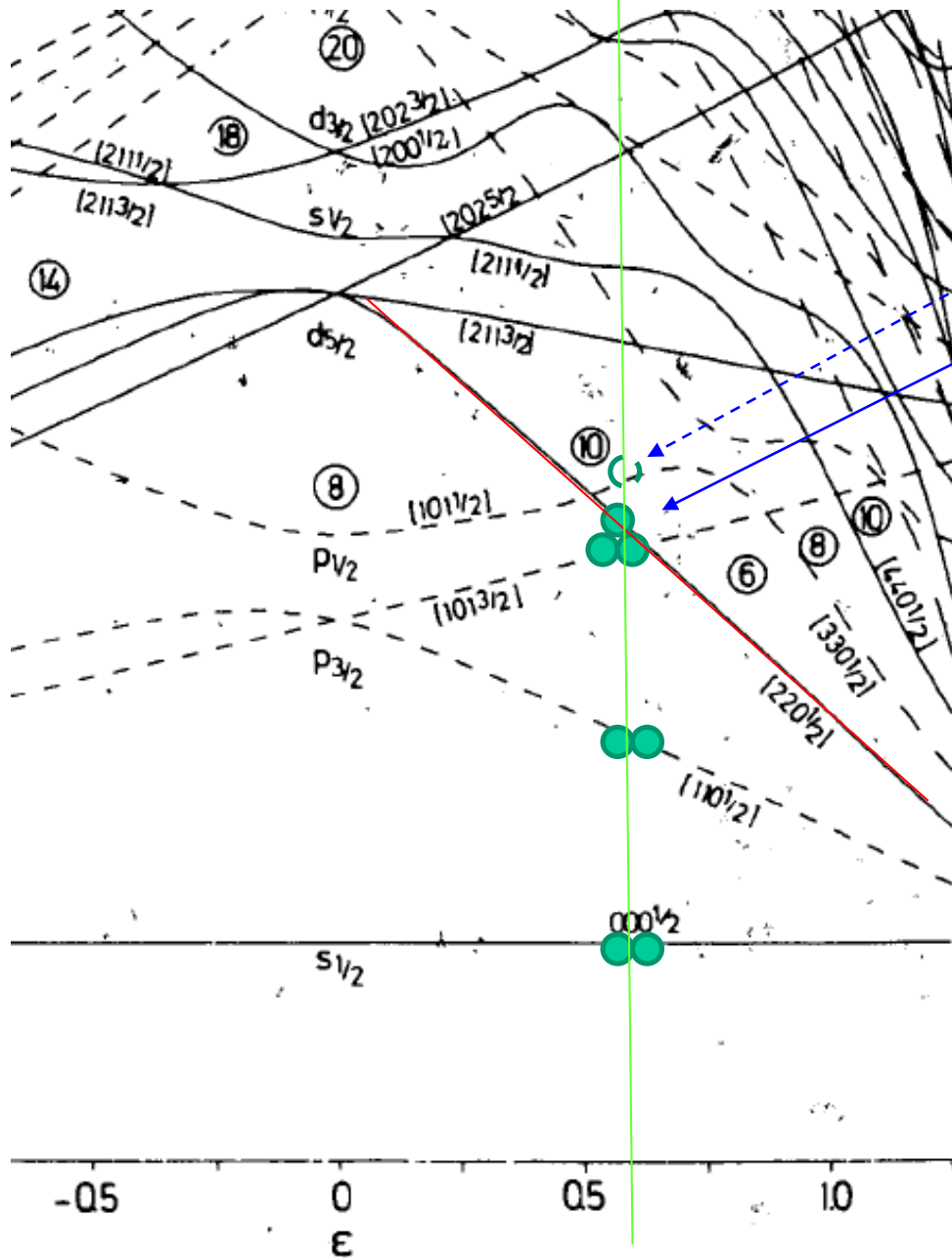
0.32 MeV

_____ $1/2^-$
_____ $1/2^+$

^{11}Be

- ✓ 7番目の中性子の入る軌道を探す
(それぞれの軌道に2つずつ中性子をつめる)

$^{11}_4\text{Be}_7$



0.32 MeV

$1/2^-$

$1/2^+$

^{11}Be

- ✓ 7番目の中性子の入る軌道を探す
(それぞれの軌道に2つずつ中性子をつめる)

s-wave dominance 現象

変形核では様々な l の成分が混ざる:

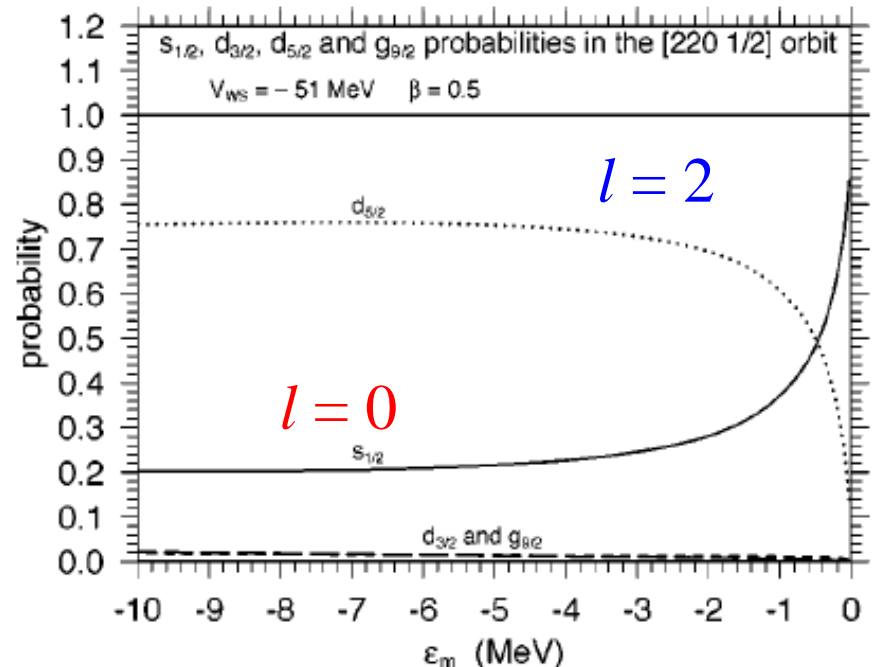
$$\Psi_{K\pi=0^+}(r) = R_0(r)Y_{00}(\hat{r}) + R_2(r)Y_{20}(\hat{r}) + R_4(r)Y_{40}(\hat{r}) + \dots$$

束縛が弱くなると、どんなに小さな変形においても、 $l=0$ の項が主要項になる。

(束縛エネルギーがゼロの極限では $l=0$ の成分が 100%)

ポテンシャルが変形していても波動関数は球形になる

T. Misu, W. Nazarewicz,
and S. Aberg, NPA614('97)44



I. Hamamoto, PRC69('04)041306(R)

s-wave dominance 現象

$$\Psi_K(\mathbf{r}) = \sum_l R_l(r) Y_{lK}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (\text{簡単のために } l_s \text{ はナシ})$$

$$\longrightarrow P_l = \frac{\int r^2 R_l(r)^2 dr}{\sum_{l'} \int r^2 R_{l'}(r)^2 dr}$$

(note)

$$\int_0^\infty r^{n+2} dr R_l(r) R_{l'}(r) \propto \begin{cases} |\epsilon|^{(l+l'-n-1)/2} & (n > l + l' - 1) \\ -\frac{1}{2} \ln |\epsilon| & (n = l + l' - 1) \\ \text{const.} & (n < l + l' - 1) \end{cases}$$

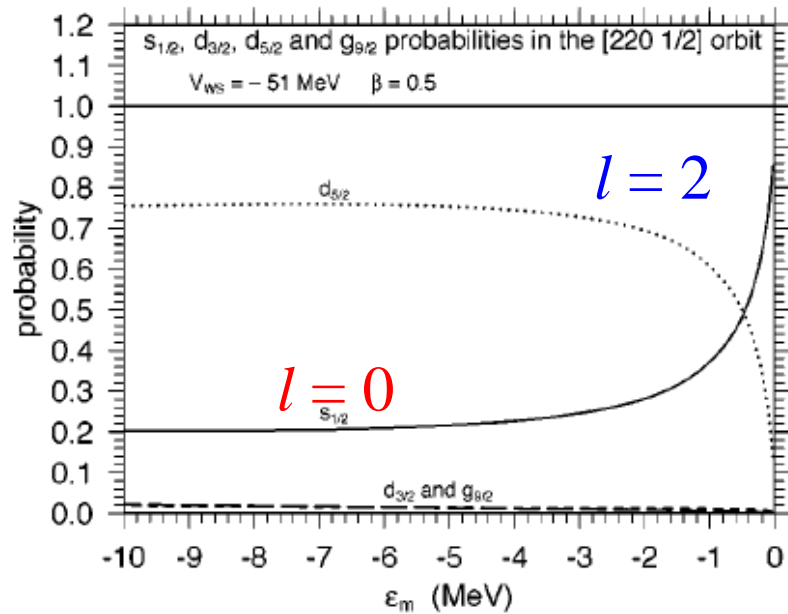
T. Misu, W. Nazarewicz, and S. Aberg, NPA614('97)44

$\longrightarrow \int r^2 R_l(r)^2 dr$ は $l=0$ で発散、他は有限

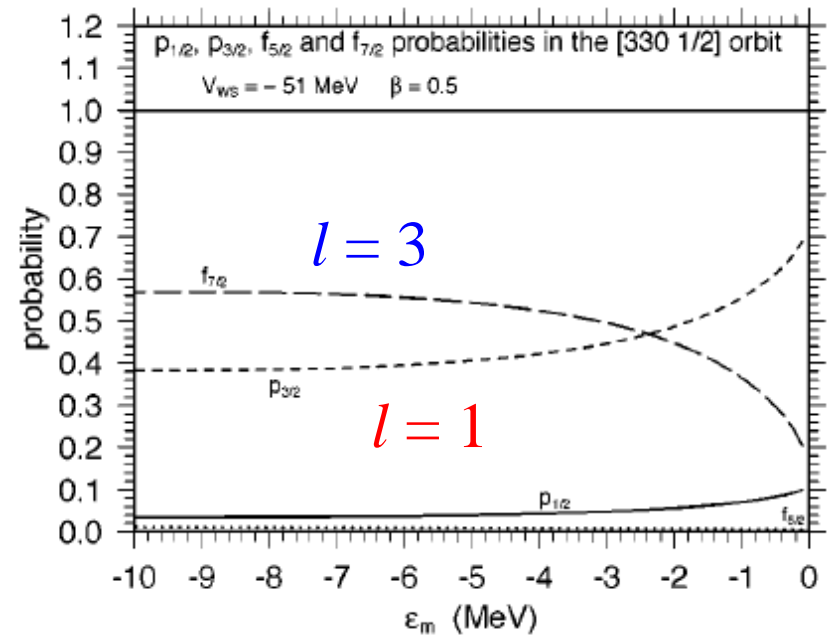


$$P_l \sim \frac{\int r^2 R_l(r)^2 dr}{\int r^2 R_{l=0}(r)^2 dr} = \delta_{l,0}$$

s-wave dominance 現象



I. Hamamoto, PRC69('04)041306(R)

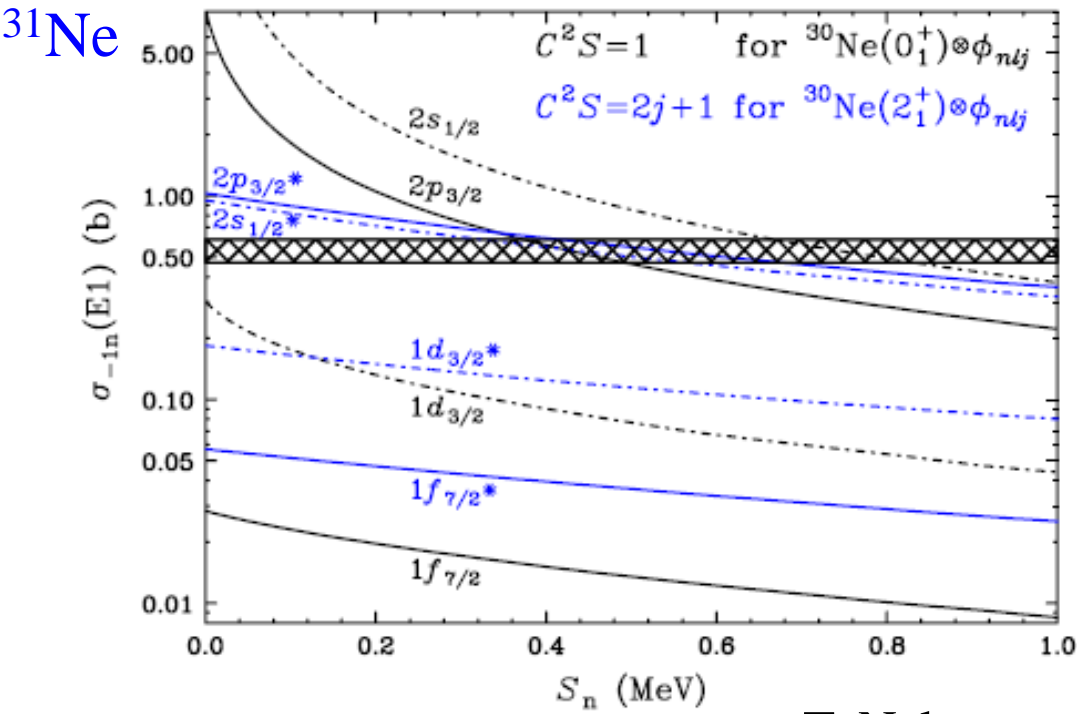


$l = 1$ の成分も同様に弱束縛
で増大(但し 100% にはならない)

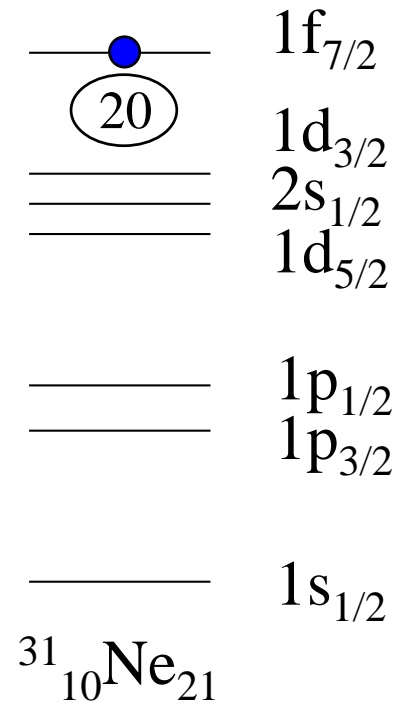


変形したハロー核の可能性: ^{31}Ne

変形ハロー核



T. Nakamura et al.,
PRL103('09)262501

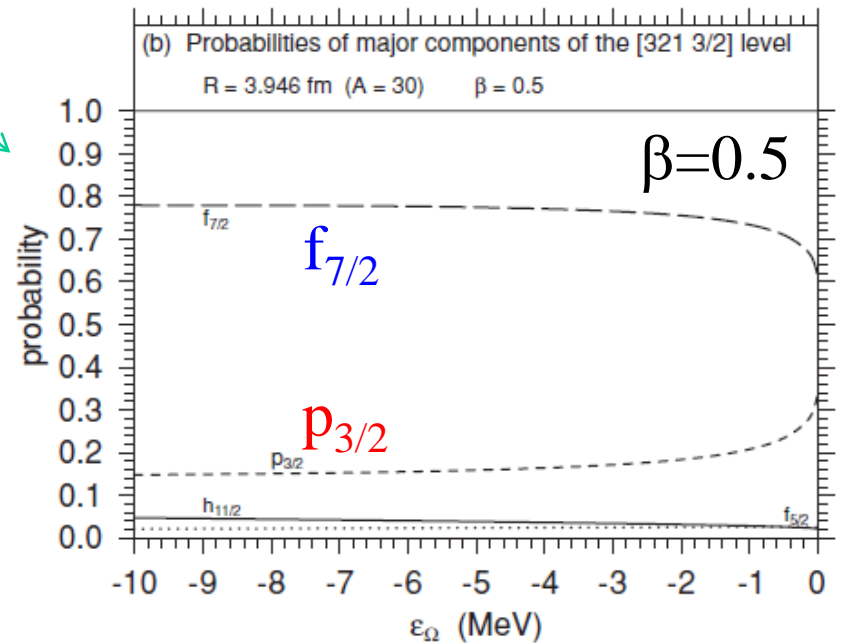
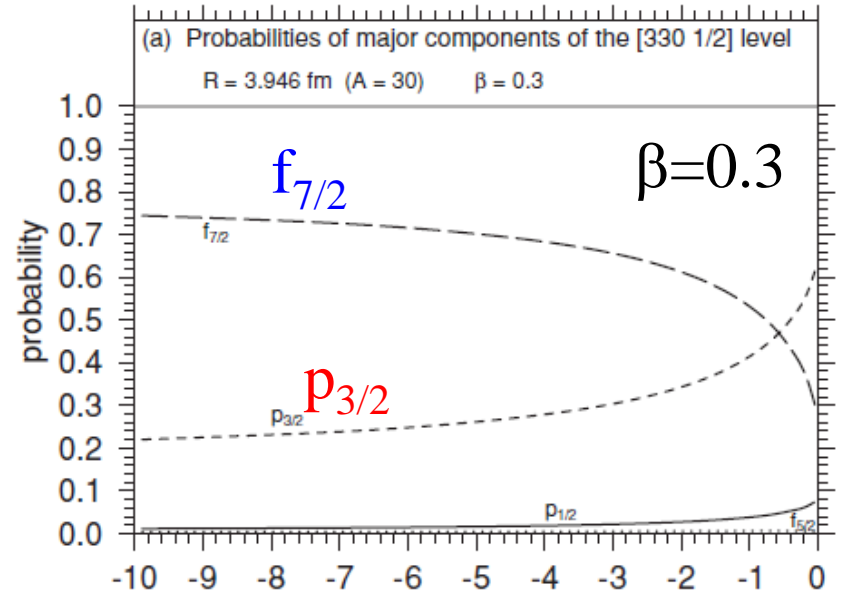
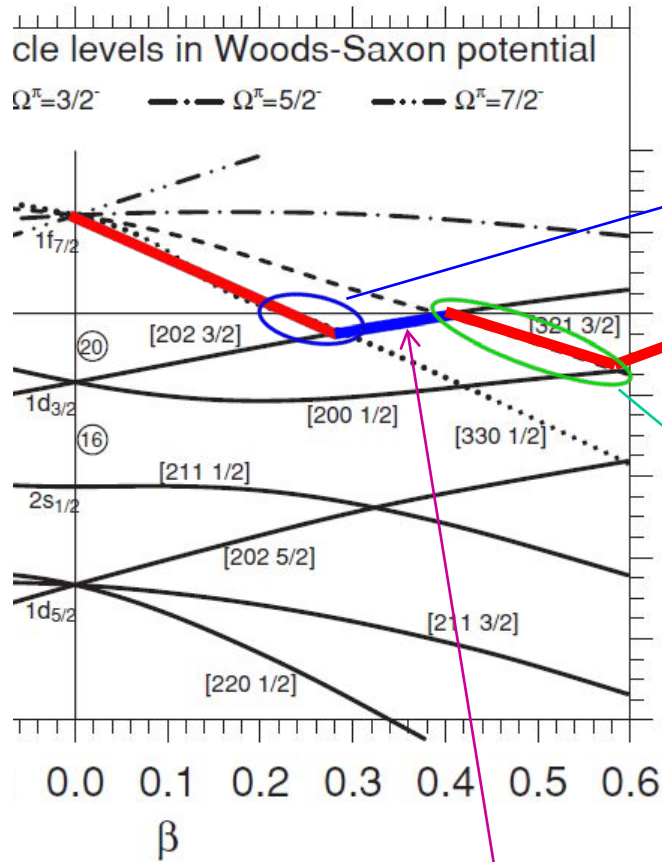


大きなクーロン分解反応の断面積
 → ハロー構造を示唆

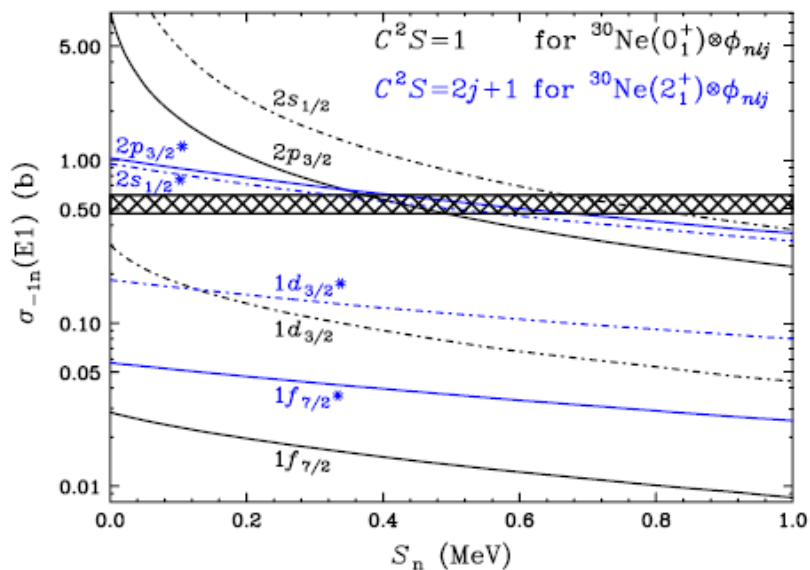
$^{31}_{10}\text{Ne}_{21}$
 ↓
 ^{31}Ne がハロー構造を持つためには球形だとダメ (f 波なので)

→ 変形?

Nilsson 模型による解析 [I. Hamamoto, PRC81('10)021304(R)]



^{31}Ne



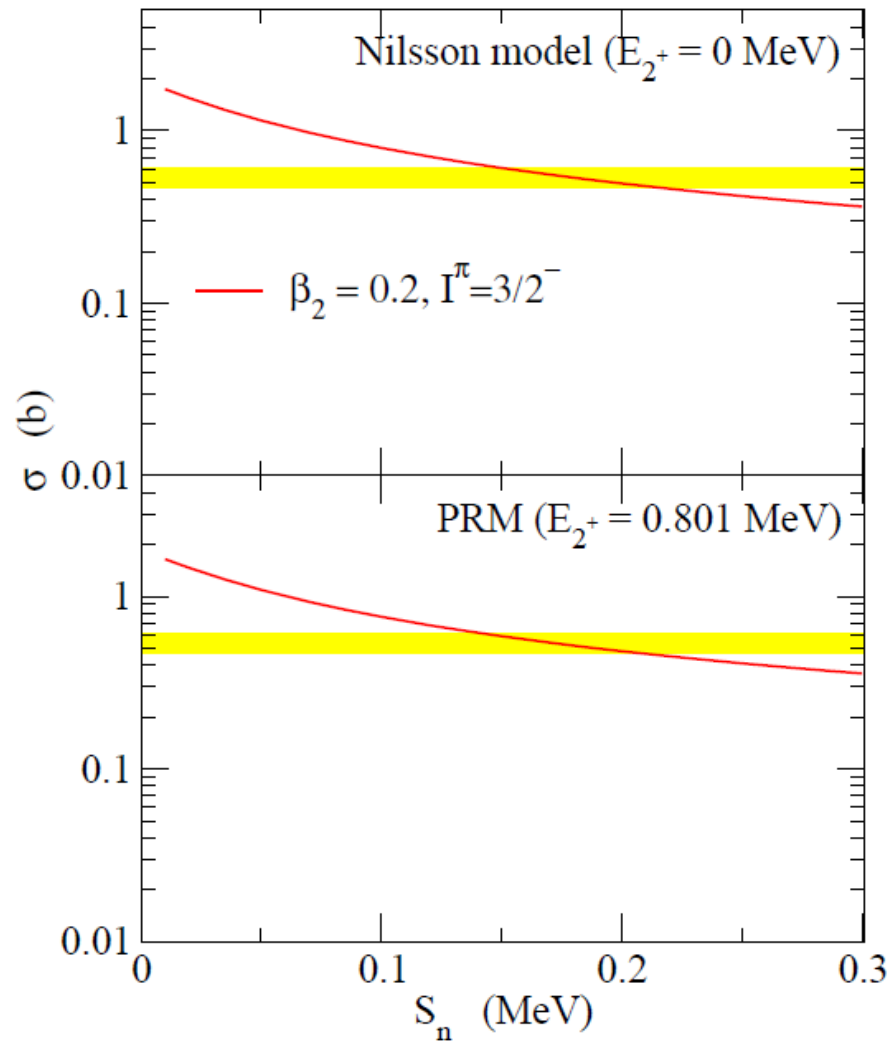
T. Nakamura et al.,
PRL103('09)262501

大きなクーロン分解反応の
断面積

$$E_{2+} (^{30}\text{Ne}) = 0.801(7) \text{ MeV}$$

P. Doornenbal et al.,
PRL103('09)032501

$$S_n (^{31}\text{Ne}) = 0.29 \pm 1.64 \text{ MeV}$$



Y. Urata, K.H., and H. Sagawa,
PRC83('11)041303(R)


結合チャンネル系の共鳴状態

変形ポテンシャル中での一粒子波動関数:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_l \frac{u_l(r)}{r} Y_{lK}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (\text{ここでも簡単のため } l_s \text{ はナシ})$$

異なる性質を持ついろいろな項の重ね合わせ

$$\langle Y_{lK} | H - E | \Psi \rangle = 0$$


$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} - E \right] u_l(r) + \sum_{l'} \langle Y_{lK} | V | Y_{l'K} \rangle u_{l'}(r) = 0$$

結合チャンネル方程式

結合チャンネル系の共鳴状態

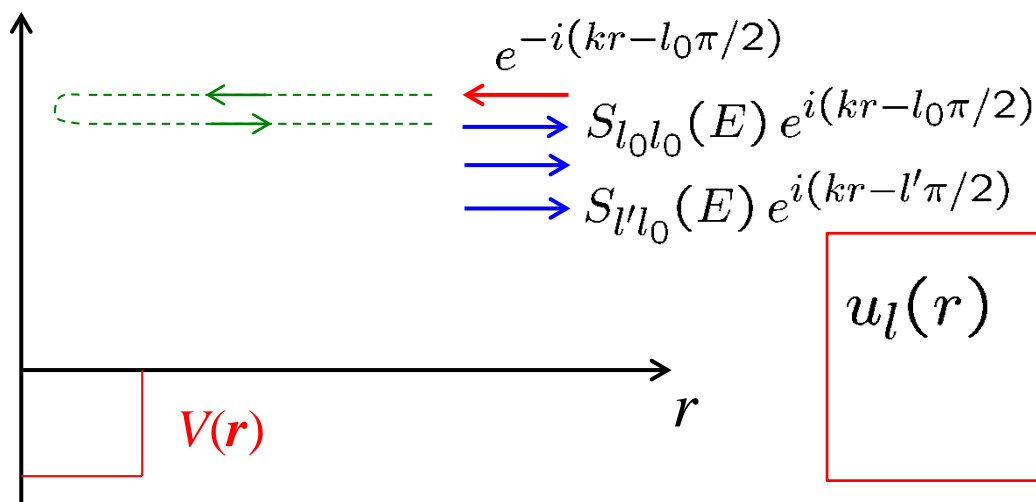
変形ポテンシャル中での一粒子波動関数: $\Psi(\mathbf{r}) = \sum_l \frac{u_l(r)}{r} Y_{lK}(\hat{\mathbf{r}})$

$$\langle Y_{lK} | H - E | \Psi \rangle = 0$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} - E \right] u_l(r) + \sum_{l'} \langle Y_{lK} | V | Y_{l'K} \rangle u_{l'}(r) = 0$$

結合チャンネル方程式

散乱状態



$$u_l(r) \rightarrow e^{-i(kr-l\pi/2)} \delta_{l,l_0} - S_{ll_0}(E) e^{i(kr-l\pi/2)}$$

ある l_0 で入射して、 l が変わって出ていく

結合チャンネル系の共鳴状態

より一般的には、

$$\Psi(\mathbf{r}, \xi) = \sum_{n,l} \frac{u_{nl}(r)}{r} [Y_l(\hat{\mathbf{r}})\phi_n(\xi)]^{(JM)}$$

各内部状態に対する相対運動
の波動関数の重ね合わせ

$$\varepsilon_2 \text{ --- } \bullet \bullet \quad |\phi_2\rangle$$

$$\varepsilon_1 \text{ --- } \bullet \bullet \quad |\phi_1\rangle$$

異なる内部状態
(エネルギーが
違ってよい)

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} + \varepsilon_n - E \right] u_{nl}(r) + \sum_{n'l'} \langle [Y_l\phi_n]^{(JM)} | V | [Y_{l'}\phi_{n'}]^{(JM)} \rangle u_{n'l'}(r) = 0$$

結合チャンネル方程式

$$u_{nl}(r) \rightarrow e^{-i(k_n r - l\pi/2)} \delta_{nl, n_0 l_0} - \sqrt{\frac{k_{n_0}}{k_n}} S_{nl, n_0 l_0}(E) e^{i(k_n r - l\pi/2)}$$

ある (n_0, l_0) で入射して、 (n, l) が変わって出ていく

Eigen-phase sum

single-channel: $S(E) = e^{2i\delta(E)}$

⇒ 同様のことを結合チャンネル系で出来るか? ← S が行列: S_{ij}

Eigen-phase sum

A.U. Hazi, PRA19('79)920

K.H. and N. Van Giai, NPA735 ('04) 55

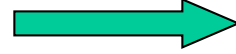
single-channel: $S(E) = e^{2i\delta(E)}$

⇒ 同様のことを結合チャンネル系で出来るか? ← S が行列: S_{ij}

S 行列を対角化:

$$(U^\dagger S U)_{aa'} = e^{2i\delta_a} \delta_{a,a'}$$

(固有位相)



$$\Delta \equiv \sum_a \delta_a$$

(固有位相和)

cf. 一般化された Breit-Wigner の式:

$$S_{\alpha\beta} = e^{2i\phi_\alpha} \delta_{\alpha,\beta} - i \frac{\sqrt{\Gamma_\alpha \Gamma_\beta}}{E - E_R + i\Gamma/2} e^{i(\phi_\alpha + \phi_\beta)}$$



$$\Delta(E) = \tan^{-1} \frac{\Gamma}{2(E_R - E)} + \Delta_0(E)$$

single-channel の場合と同様の振る舞い

固有チャンネル表示

ref. D. Loomba et al., JCP75 ('81) 4546

$$\Psi_{n_0}(r) = \sum_n \frac{u_n(r)}{r} |n\rangle$$



入射チャンネル

と表記を簡単にして書く

$$u_{nl}(r) \rightarrow e^{-i(k_n r - l\pi/2)} \delta_{nl, n_0 l_0} - \sqrt{\frac{k_{n_0}}{k_n}} S_{nl, n_0 l_0}(E) e^{i(k_n r - l\pi/2)}$$

固有チャンネル:

$$\tilde{\Psi}_a(r) \equiv \sum_{n_0} \Psi_{n_0}(r) U_{n_0 a} = \sum_n \frac{\tilde{u}_{na}(r)}{r} |n\rangle$$

$$(U^\dagger S U)_{aa'} = e^{2i\delta_a} \delta_{a, a'}$$

 $\varepsilon_n = 0$ (断熱近似) の場合には

$$\tilde{u}_{na}(r) \rightarrow \left(e^{-i(kr - l_n \pi/2)} - e^{2i\delta_a} e^{i(kr - l_n \pi/2)} \right) U_{na}$$

single-channel の場合と同様の振る舞い

$$u_{nl}(r) \rightarrow e^{-i(k_n r - l\pi/2)} \delta_{nl, n_0 l_0} - \sqrt{\frac{k_{n_0}}{k_n}} S_{nl, n_0 l_0}(E) e^{i(k_n r - l\pi/2)}$$

固有チャンネル:

$$\tilde{\Psi}_a(r) \equiv \sum_{n_0} \Psi_{n_0}(r) U_{n_0 a} = \sum_n \frac{\tilde{u}_{na}(r)}{r} |n\rangle$$



$$(U^\dagger S U)_{aa'} = e^{2i\delta_a} \delta_{a, a'}$$

$\varepsilon_n = 0$ (断熱近似) の場合には

$$\tilde{u}_{na}(r) \rightarrow \left(e^{-i(kr - l_n\pi/2)} - e^{2i\delta_a} e^{i(kr - l_n\pi/2)} \right) U_{na}$$

single-channel の場合と同様の振る舞い

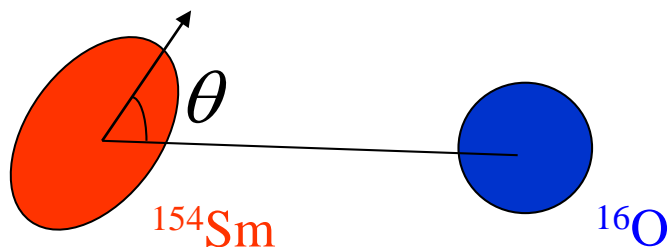
* もし、特定の a が共鳴的振る舞いをすれば、その固有チャンネルを「共鳴状態」とみなすことができる。

(補足) 重イオン反応における固有状態

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_l \frac{u_l(r)}{r} Y_{J0}(\hat{\mathbf{r}}) |\phi_l\rangle$$

➤ 物理的チャンネル: 回転子の角運動量状態 (I)

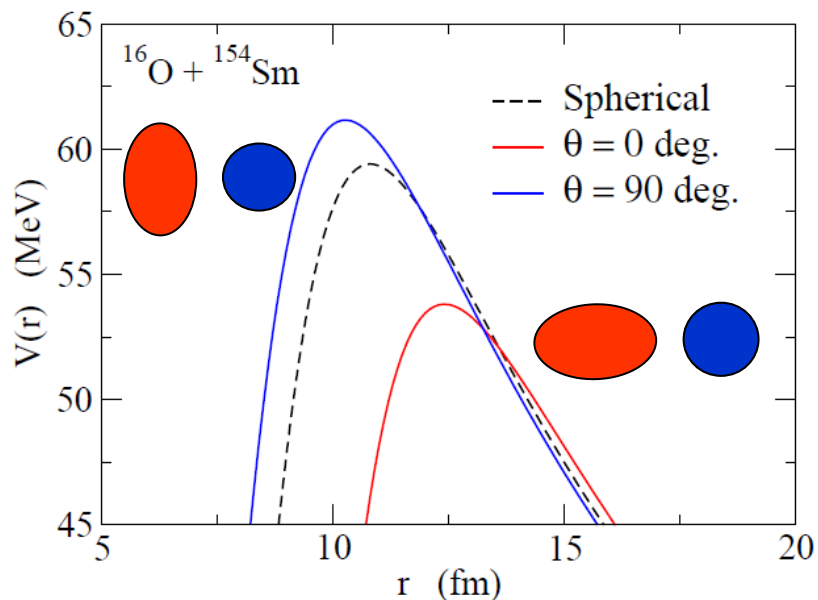
➤ 固有チャンネル: 角度を固定した状態



————	4 ⁺
=====	2 ⁺
=====	0 ⁺
	154Sm

$V(r, \theta)$

ポテンシャルは r と θ の関数



$$\sigma_{\text{fus}}(E) = \int_0^1 d(\cos \theta) \sigma_{\text{fus}}(E; \theta)$$

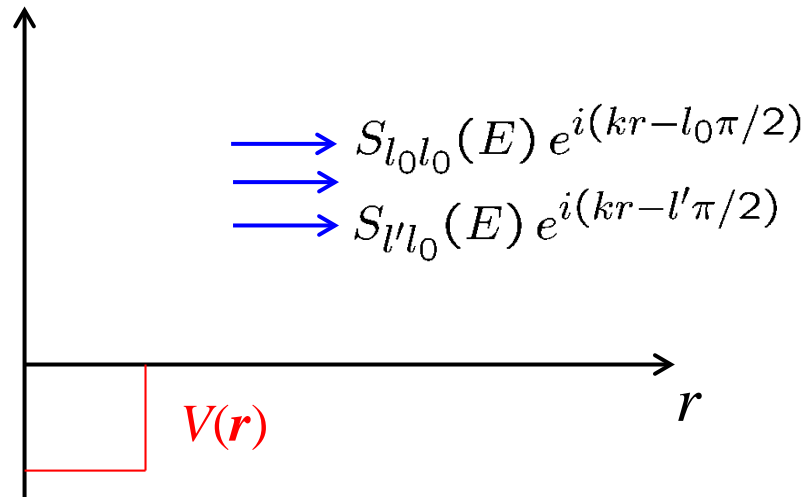
固有チャンネルごとに
(すなわち θ をとめて)
問題を考えた方がわかり
やすい。

結合チャンネル系のガモフ状態

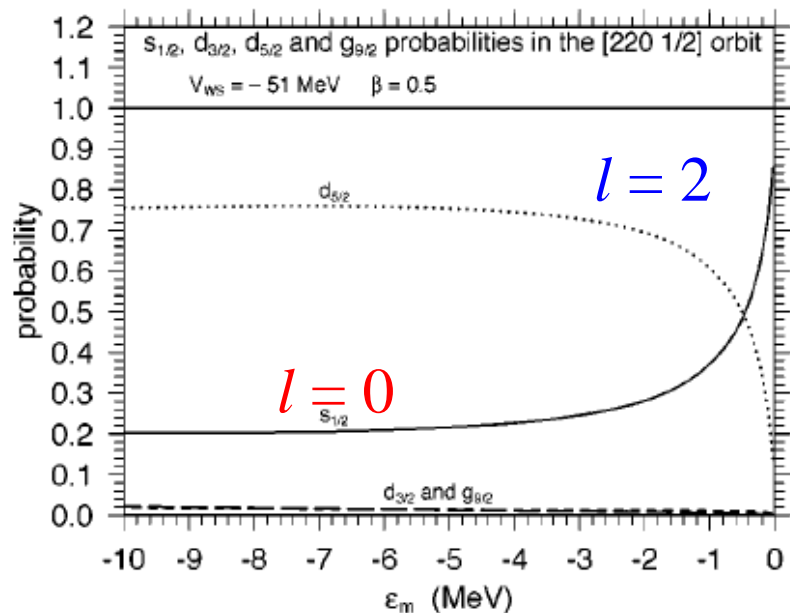
$e^{2i\delta_a}$ がある複素 E で極を持てば、全てのチャンネルで外向きの波

$$\tilde{u}_{na}(r) \rightarrow -e^{2i\delta_a} e^{i(kr - l_n\pi/2)} U_{na}$$

結合チャンネル系のガモフ状態



s-wave dominance 現象と共鳴状態

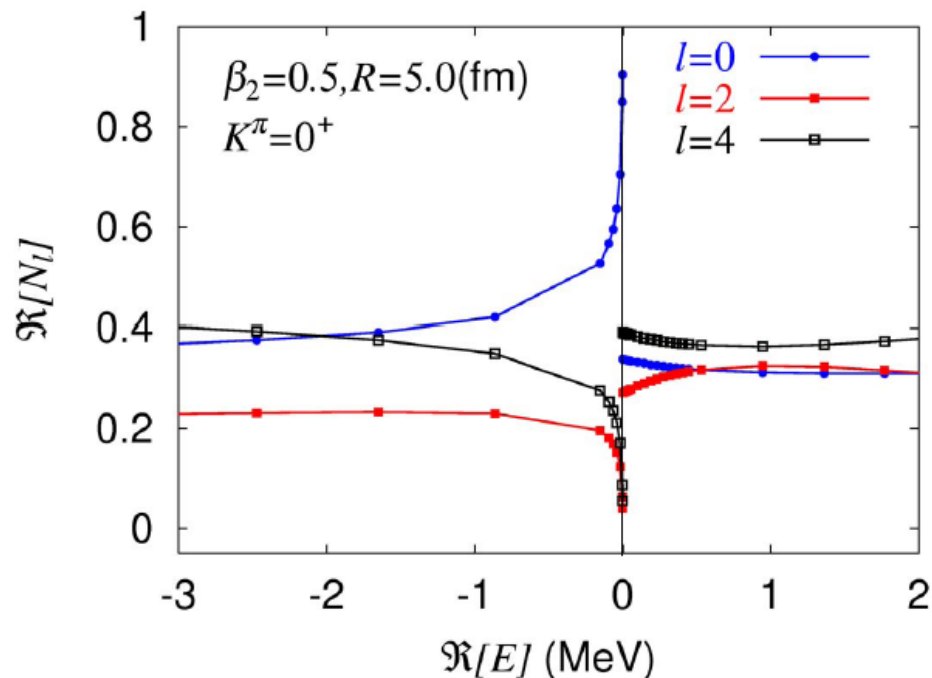


I. Hamamoto, PRC69('04)041306(R)

$$\tilde{\Psi}_a(\mathbf{r}) = \sum_n \frac{\tilde{u}_{na}(r)}{r} |n\rangle$$

$$N_n \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty dr e^{-\epsilon r^2} [\tilde{u}_n(r)]^2$$

変形した共鳴(ガモフ)状態の各成分

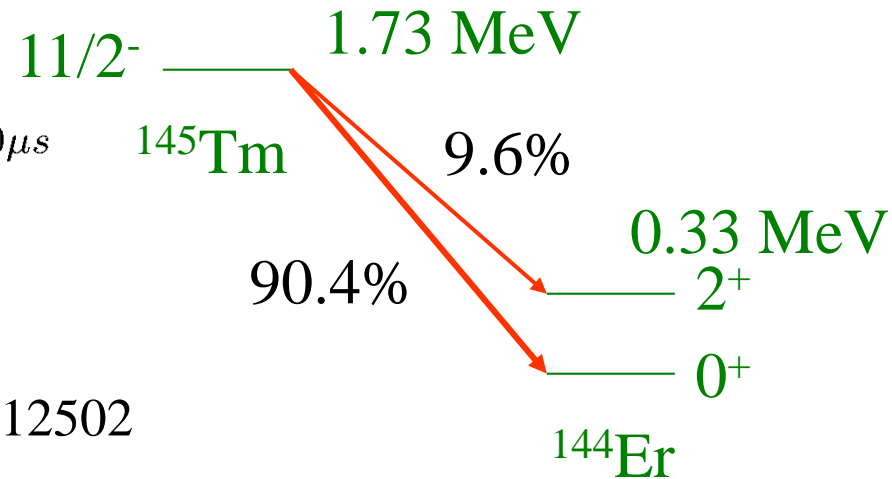
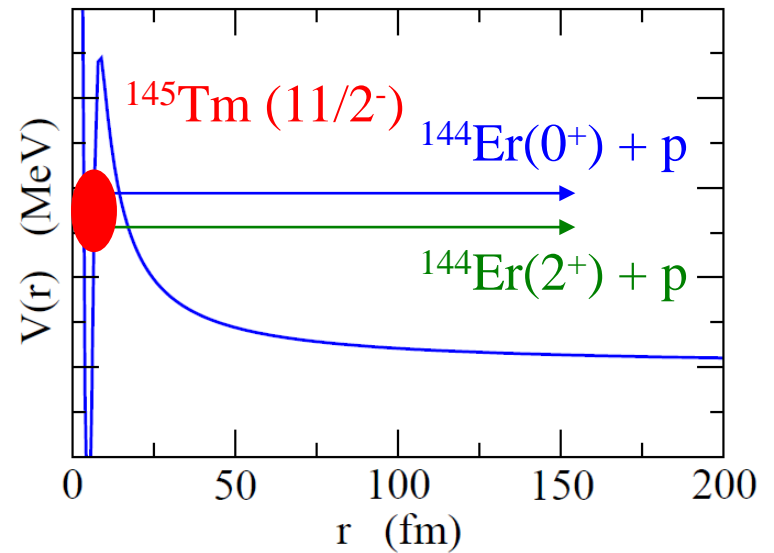
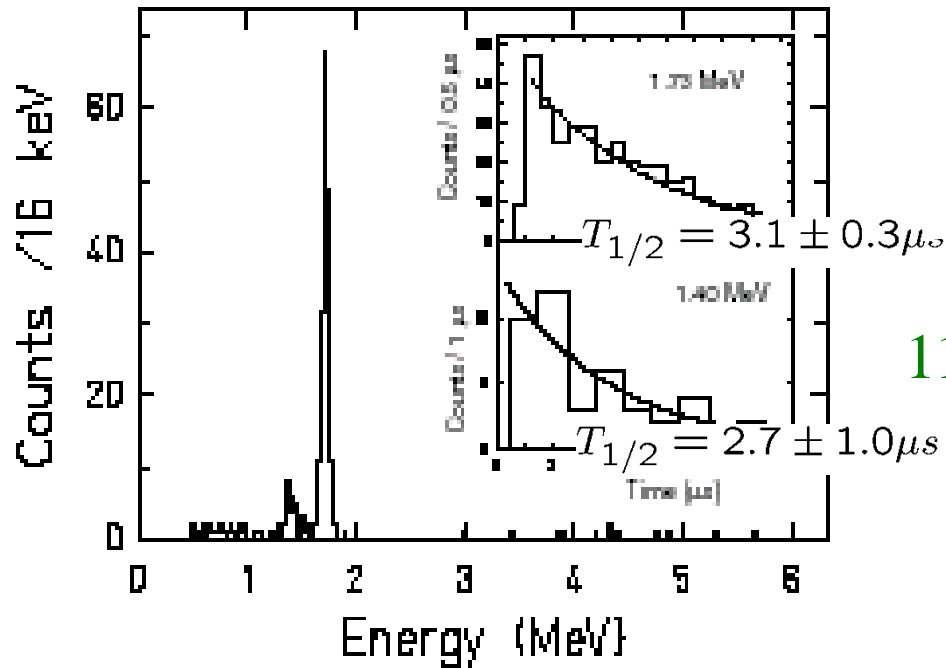


s-wave dominance は
共鳴状態に連続的につながる
わけではない

K. Yoshida and K. Hagino,
PRC72 ('05) 064311

陽子放出崩壊の微細構造

陽子放出核: ^{145}Tm
(Oak Ridge group)



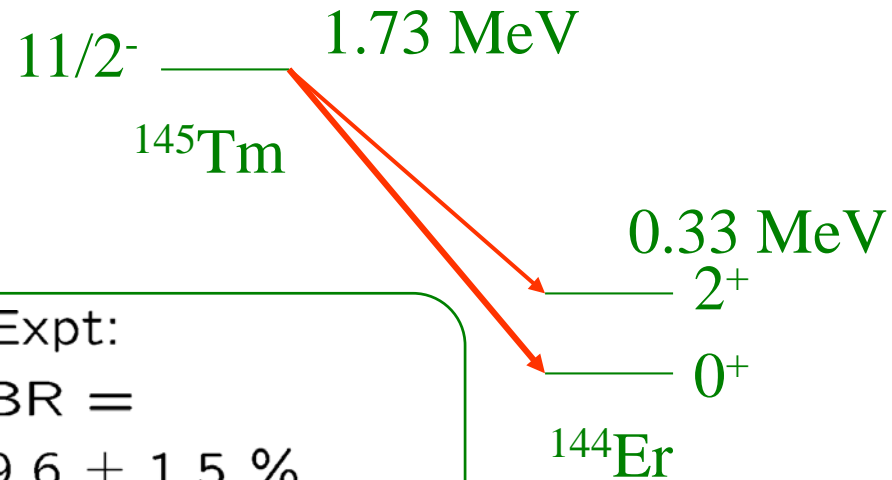
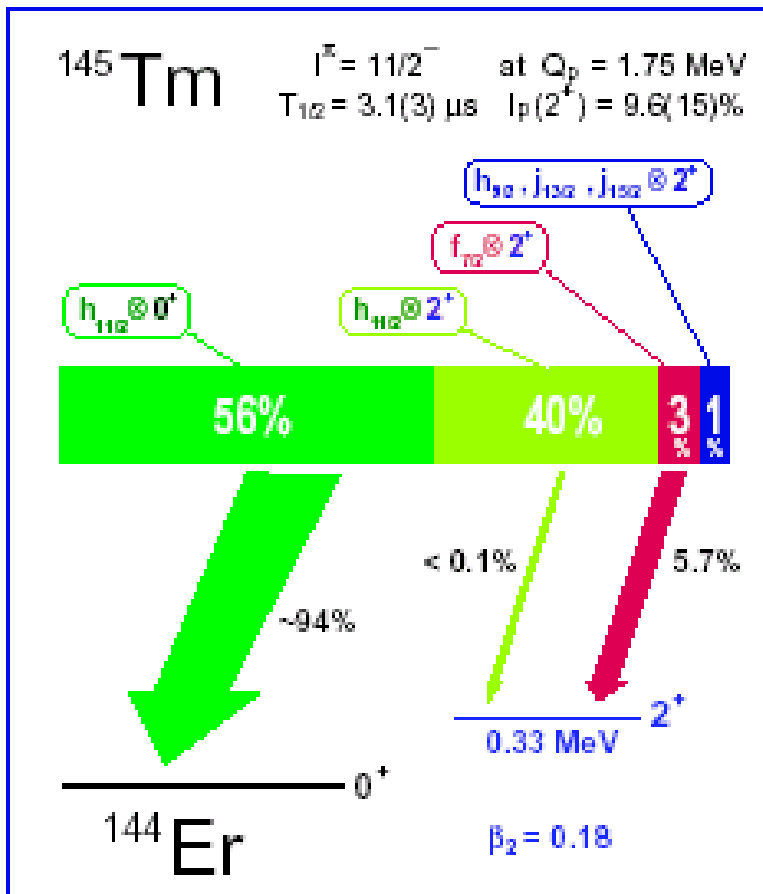
M. Karny, ..., K.H., et al., PRL90 ('03) 012502

➔ 芯励起を入れて共鳴状態(ガモフ状態)をつくる
: 結合チャンネルの問題

$$\Psi(r, \xi) = \sum_{n,j,l} \frac{u_{njl}(r)}{r} [\mathcal{Y}_{jl}(\hat{r}) \phi_n(\xi)]^{(JM)}$$

$$\Psi(r, \xi) = \sum_{n,j,l} \frac{u_{njl}(r)}{r} [\mathcal{Y}_{jl}(\hat{r}) \phi_n(\xi)]^{(JM)}; \quad u_{njl}(r) \rightarrow \mathcal{N}_{njl} e^{i(kr - l\pi/2)}$$

$\phi_n(\xi)$: $^{144}\text{Er}(0^+)$ and $^{144}\text{Er}(2^+)$; collective vibration



Expt:
 BR =
 $9.6 \pm 1.5 \%$
 $T_{1/2} = 3.1 \pm 0.3 \mu\text{s}$

Calc.
 Br = $5.7 \pm 0.3 \%$
 $T_{1/2} = 3.0 \pm 0.4 \mu\text{s}$

Feshbach 共鳴

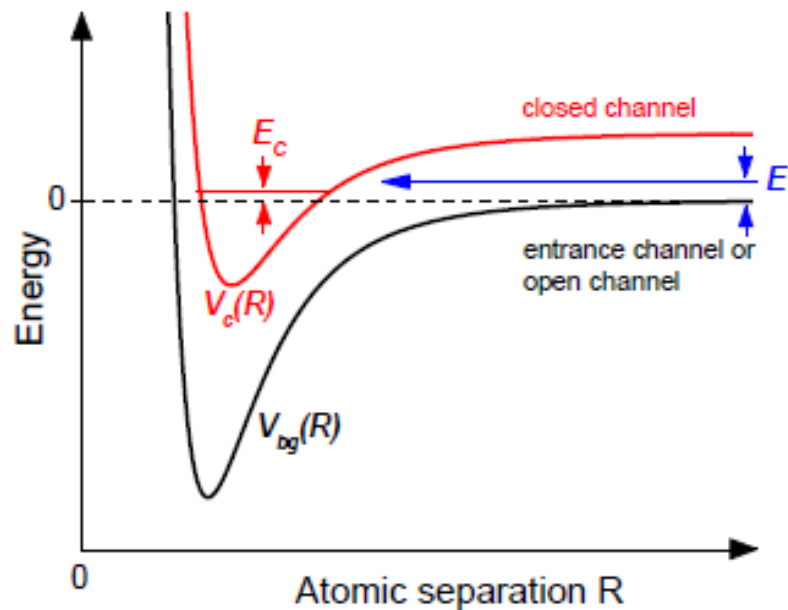
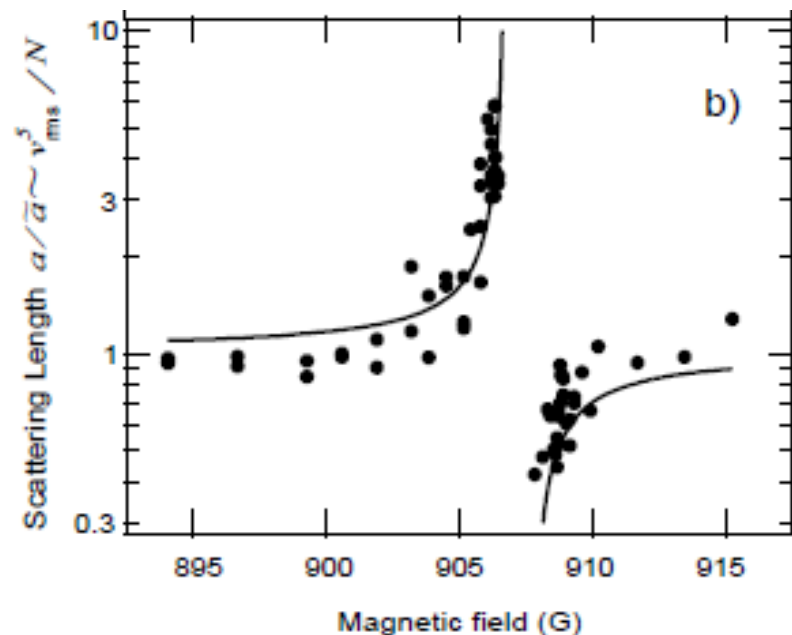


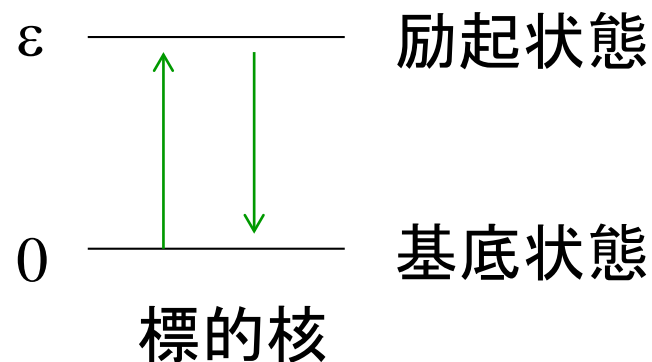
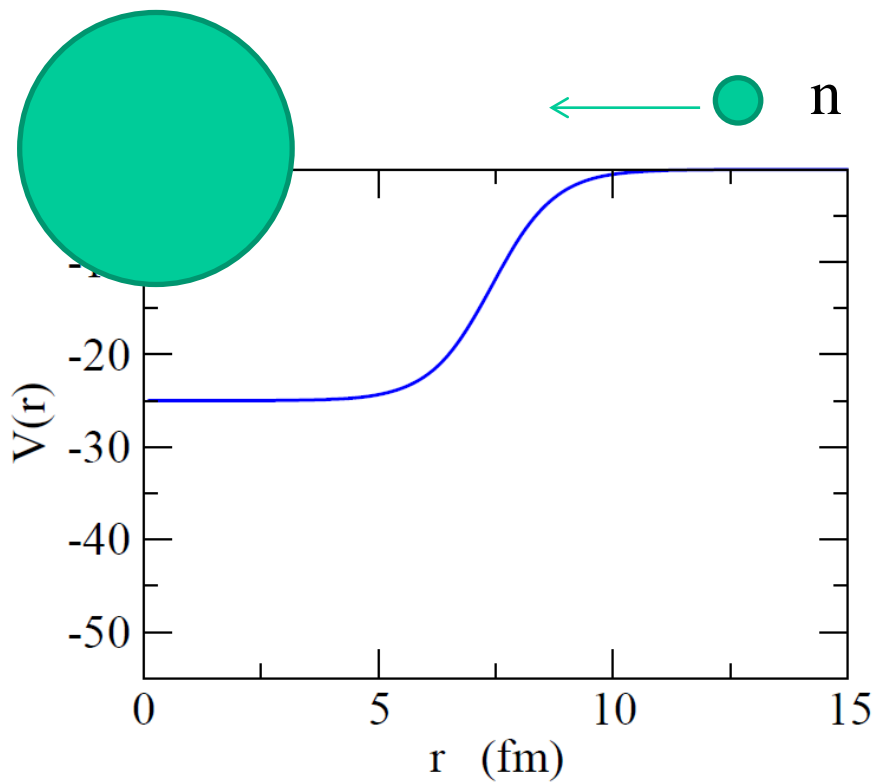
FIG. 1 Basic two-channel model for a Feshbach resonance. The phenomenon occurs when two atoms colliding at energy E in the entrance channel resonantly couple to a molecular bound state with energy E_c supported by the closed channel potential. In the ultracold domain, collisions take place near zero-energy, $E \rightarrow 0$. Resonant coupling is then conveniently realized by magnetically tuning E_c near 0, if the magnetic moments of the closed and open channel differ.

$E \sim 0$ 近傍における散乱長



冷却原子への応用

A toy model : 中性子 s-波散乱に対する2チャンネル模型



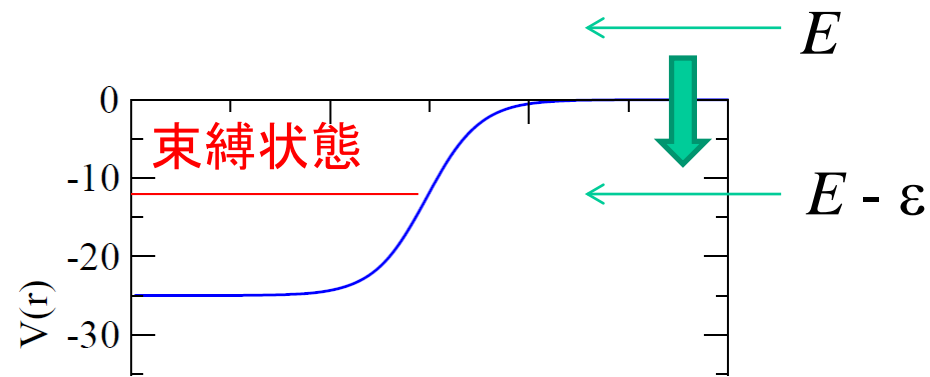
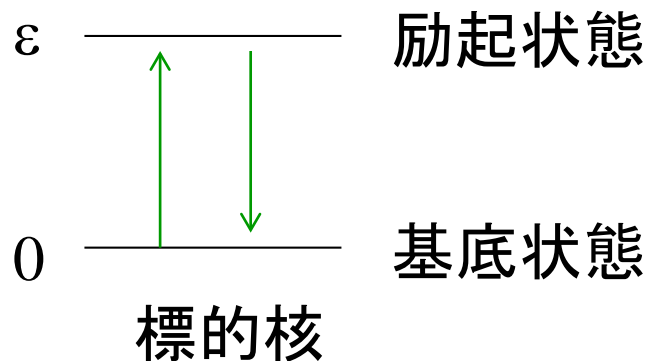
$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + V(r) - E \right] \begin{pmatrix} u_1(r) \\ u_2(r) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & F(r) \\ F(r) & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(r) \\ u_2(r) \end{pmatrix} = 0$$

$$u_1(r) \rightarrow e^{-ik_1 r} - S_{00} e^{ik_1 r}$$

$$u_2(r) \rightarrow -\sqrt{\frac{k_1}{k_2}} S_{10} e^{ik_2 r}$$

($k_2 = i\kappa_2$ for $E < \epsilon$ closed ch.)

A toy model : 中性子 s-波散乱に対する2チャンネル模型



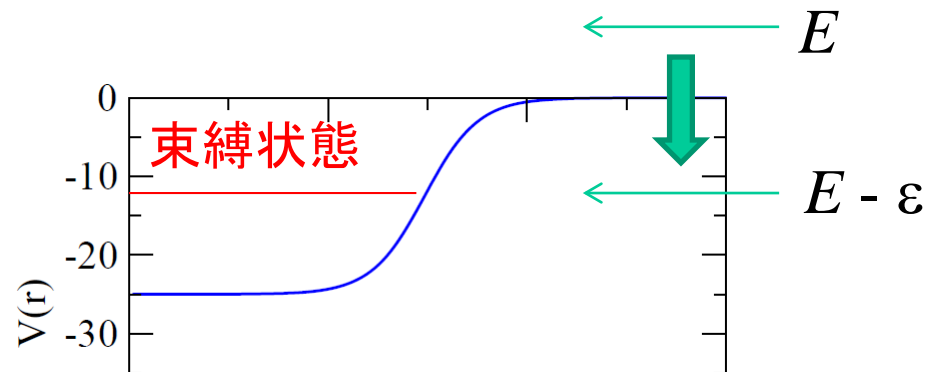
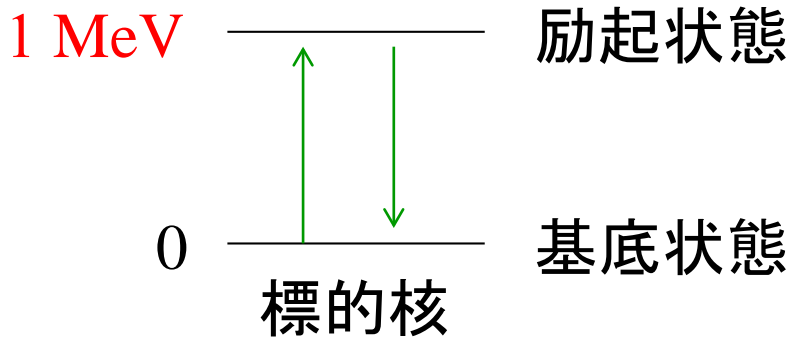
$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + V(r) - E \right] \begin{pmatrix} u_1(r) \\ u_2(r) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & F(r) \\ F(r) & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(r) \\ u_2(r) \end{pmatrix} = 0$$

$V(r)$: Woods-Saxon ($V_0=23.03$ MeV, $R_0 = 4.5$ fm, $a = 0.63$ fm)

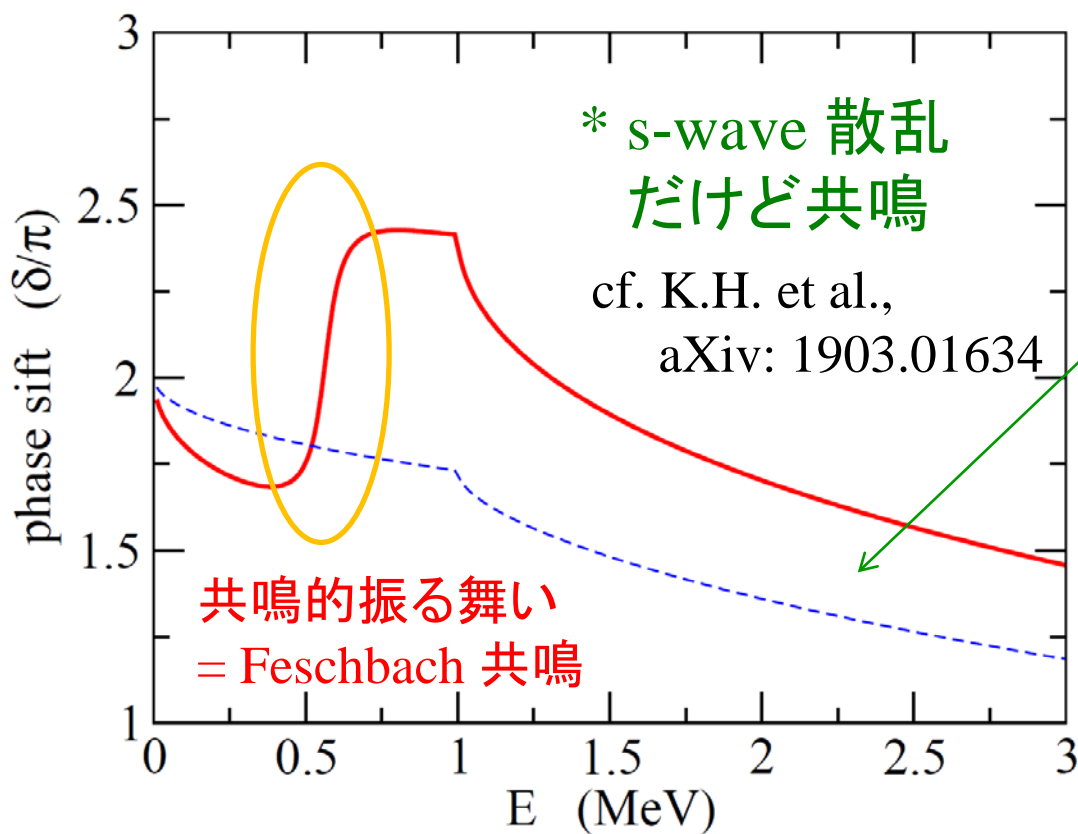
→ -14.8 MeV と **-0.506 MeV** に2つの束縛状態

$$F(r) = -\frac{\beta}{\sqrt{4\pi}} R_0 \frac{dV}{dr} \quad \beta = 0.1, \quad \epsilon = 1 \text{ MeV}$$

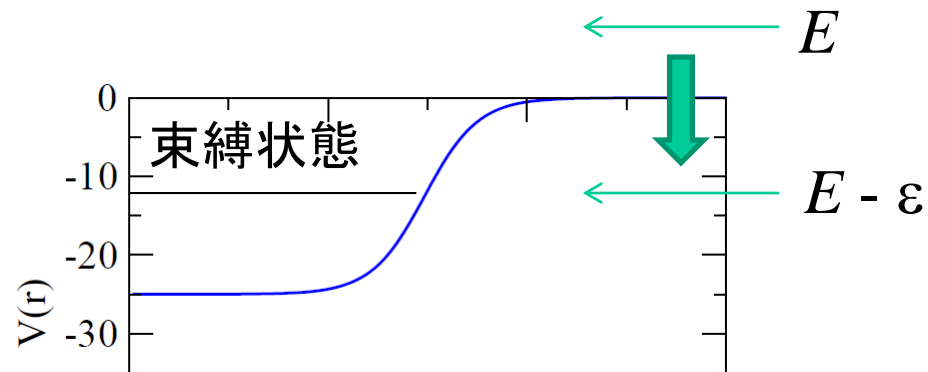
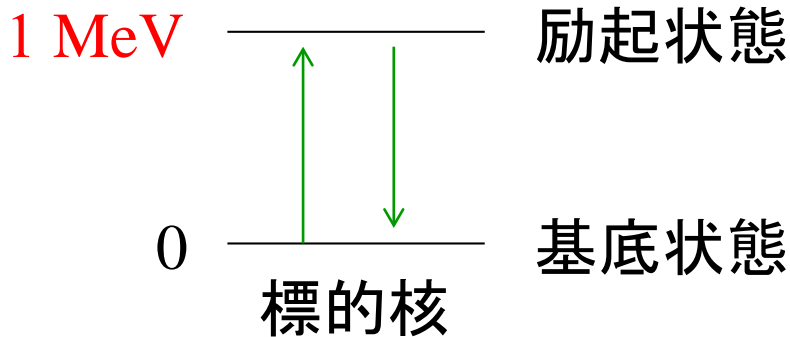
⇒ 入射エネルギーが $E=0.494$ MeV のとき、標的核が励起すると
 相対運動のエネルギーは $E = -0.506$ MeV になる。



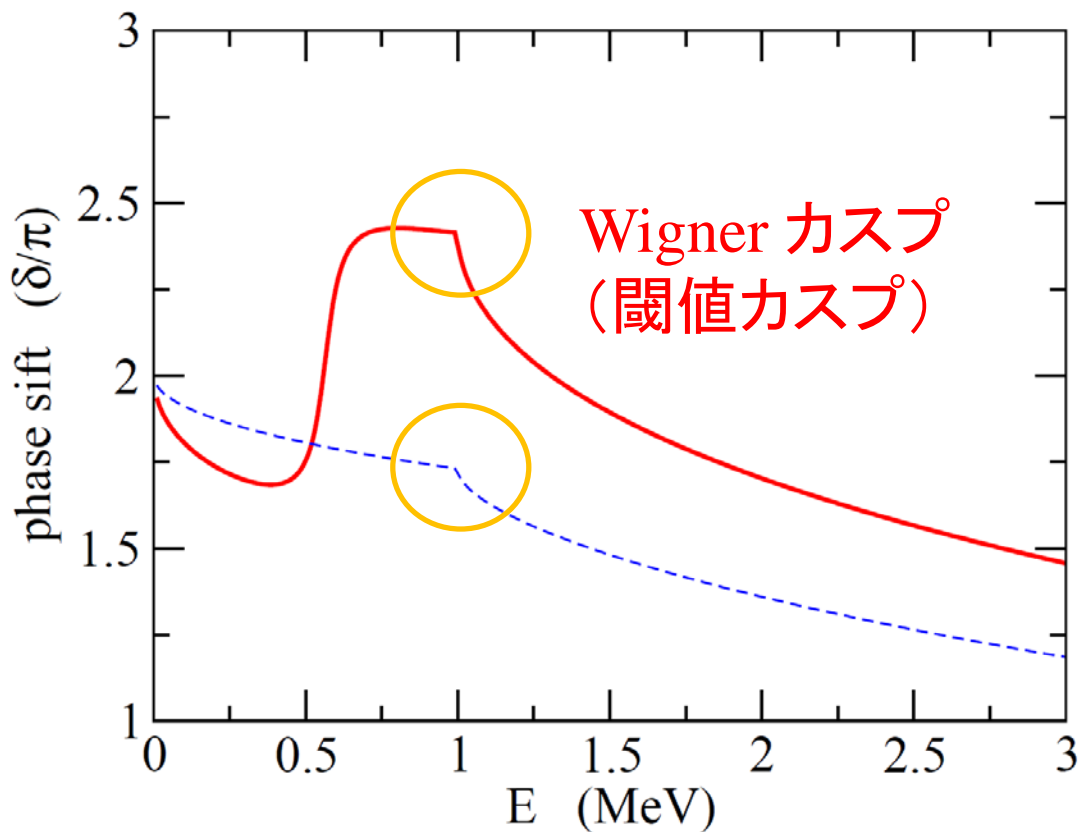
$V(r)$ → -14.8 MeV と -0.506 MeV に束縛状態



束縛状態が
 -9.58 MeV と
 -29.79 MeV
 にあるときは
 共鳴的振る舞い
 を示さない



$V(r)$ → -14.8 MeV と -0.506 MeV に束縛状態



E.P. Wigner,
Phys. Rev. 73 ('48)
1002

ハドロン分光
実験でも出てくる