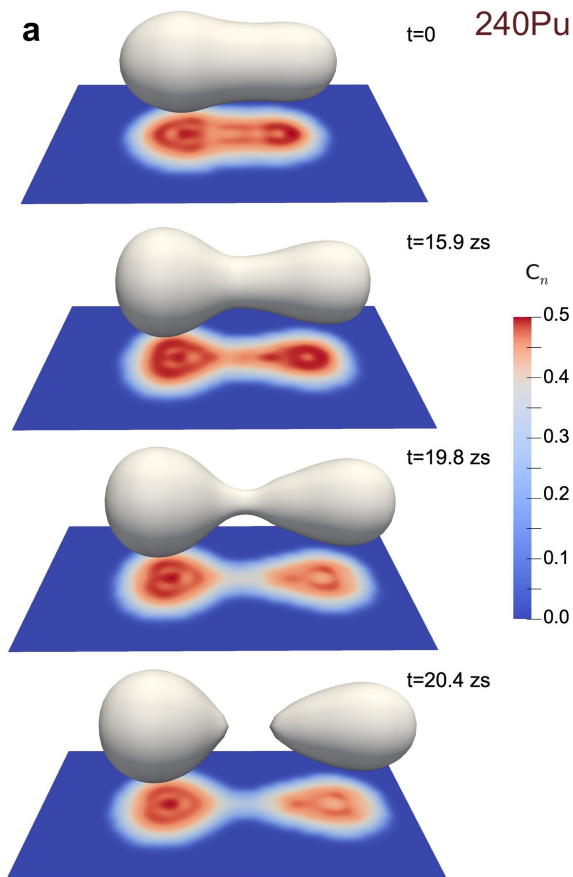


1. イントロダクション: 低エネルギー重イオン反応
2. クーロン障壁近傍の重イオン核融合反応と多体トンネル現象
3. 超重元素の物理
4. **核分裂の物理**



Guillaume Scamps (Toulouse)
<https://sites.google.com/view/guillaumescamps>

はじめに: 核分裂



G. Scamps and C. Simenel,
Nature 564 (2018) 382

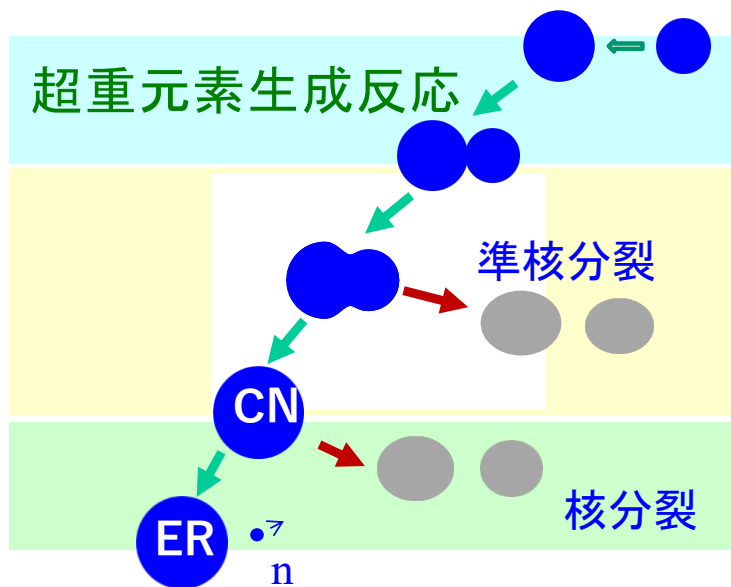
- ハーンとシュトラスマンがウランに中性子を照射するとバリウムができることを発見(1938年)
 - マイトナーとフリッシュはそれが核分裂であることを見抜く
- それから約90年たつが、核分裂は未だに核理論の残された最難問の一つ



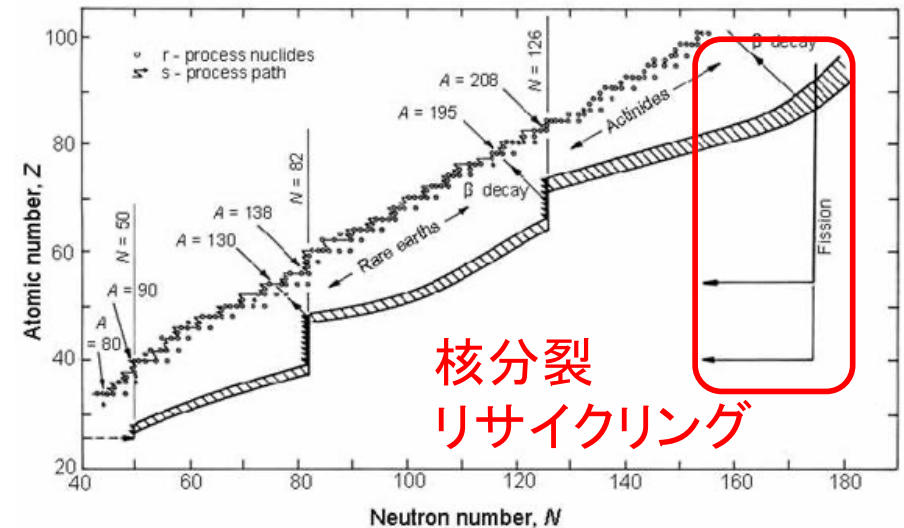
Wikipedia

はじめに: 核分裂

- 重い原子核の主要な崩壊モードの一つ
- 原子核物理の様々な場面で重要となる現象
 - 核エネルギー
 - 超重元素生成反応
 - r-プロセス元素合成
 - 中性子過剰核の生成 など



r-プロセス元素合成



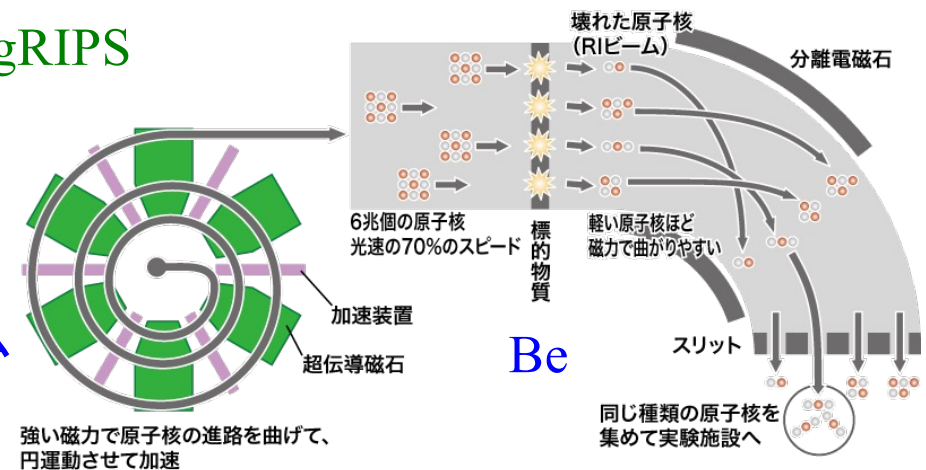
核分裂
リサイクリング

超伝導リングサイクロトロン (SRC)

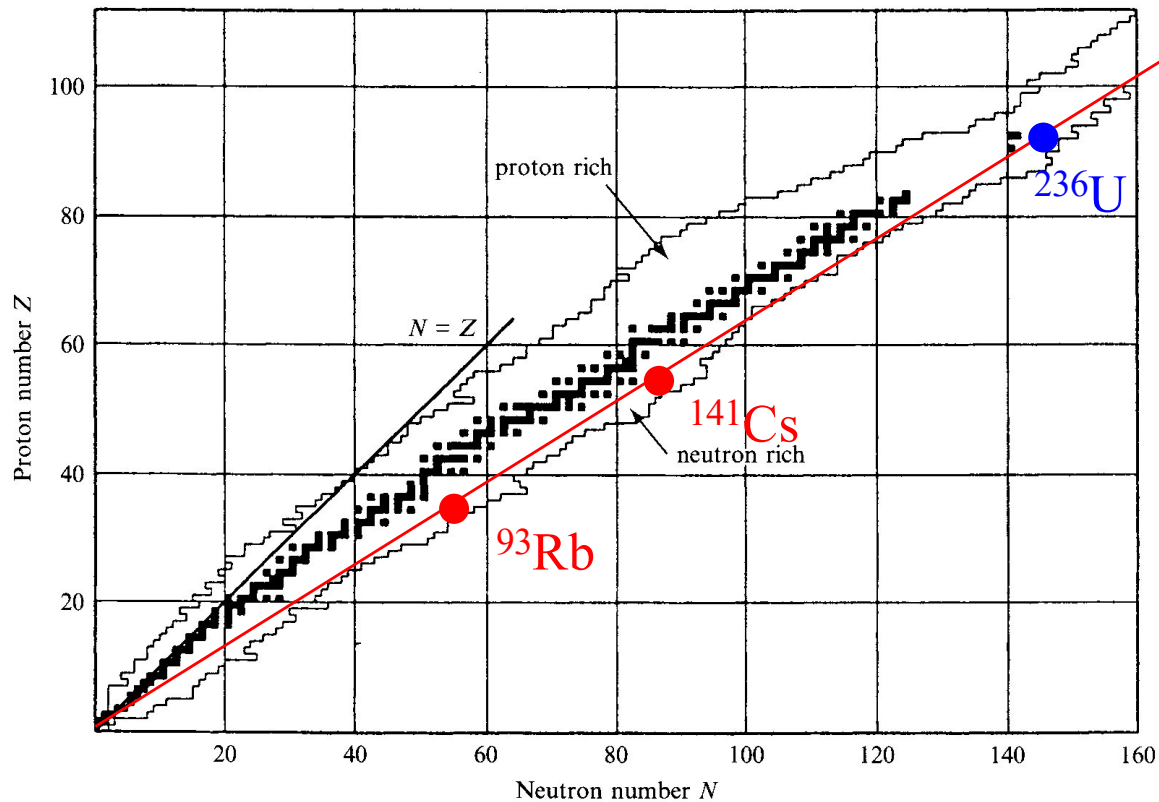
分離生成装置 (BigRIPS)

理研 BigRIPS

ウラン
ビーム



はじめに: 核分裂



重い原子核では、クーロン反発を抑えるために中性子の数が増える:

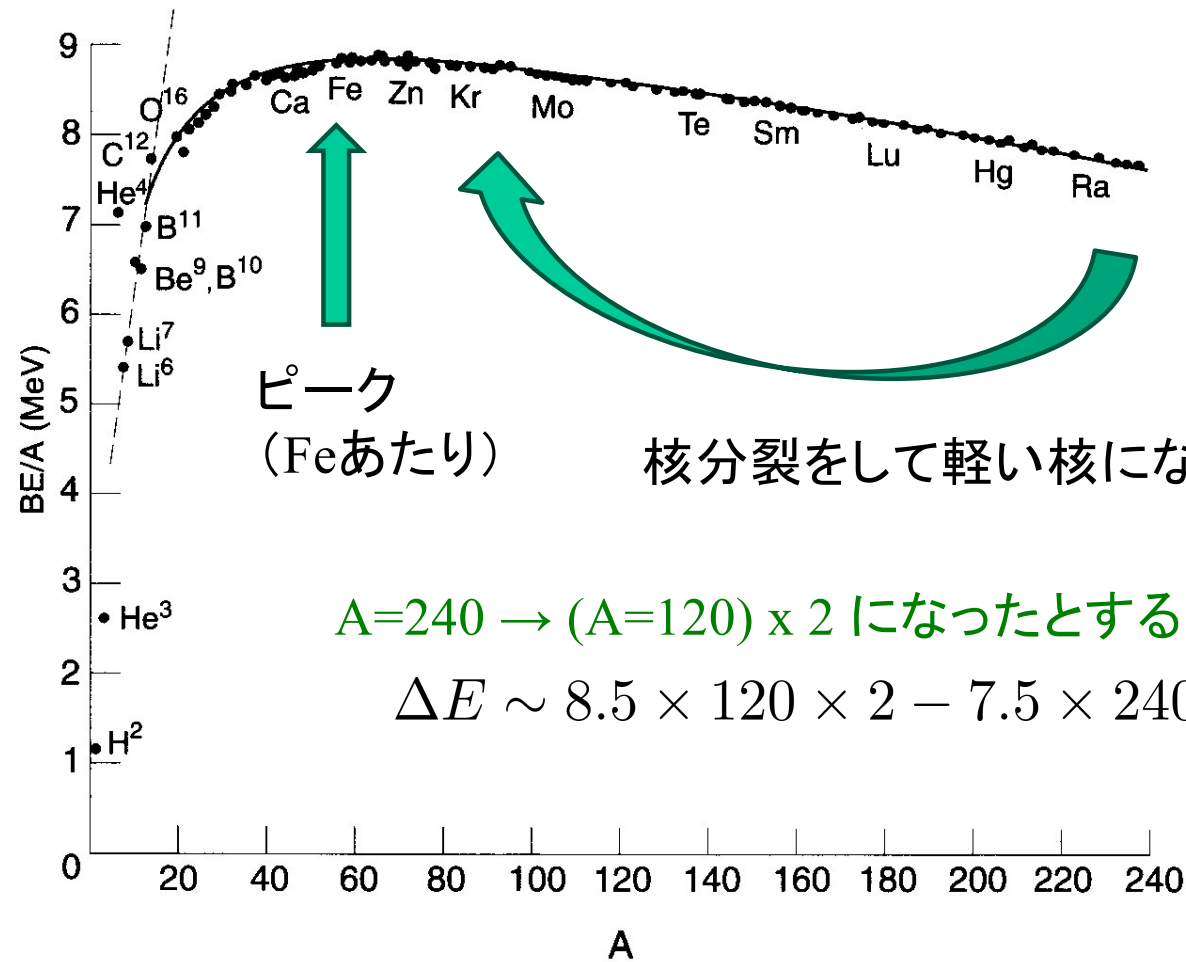
^{236}U ($Z = 92$, $N = 144$) では: $N/Z = 1.565$

核分裂片も、この N/Z 比を反映
→ 中性子過剰核をつくれる

はじめに: 核分裂

なぜ起こるのか？

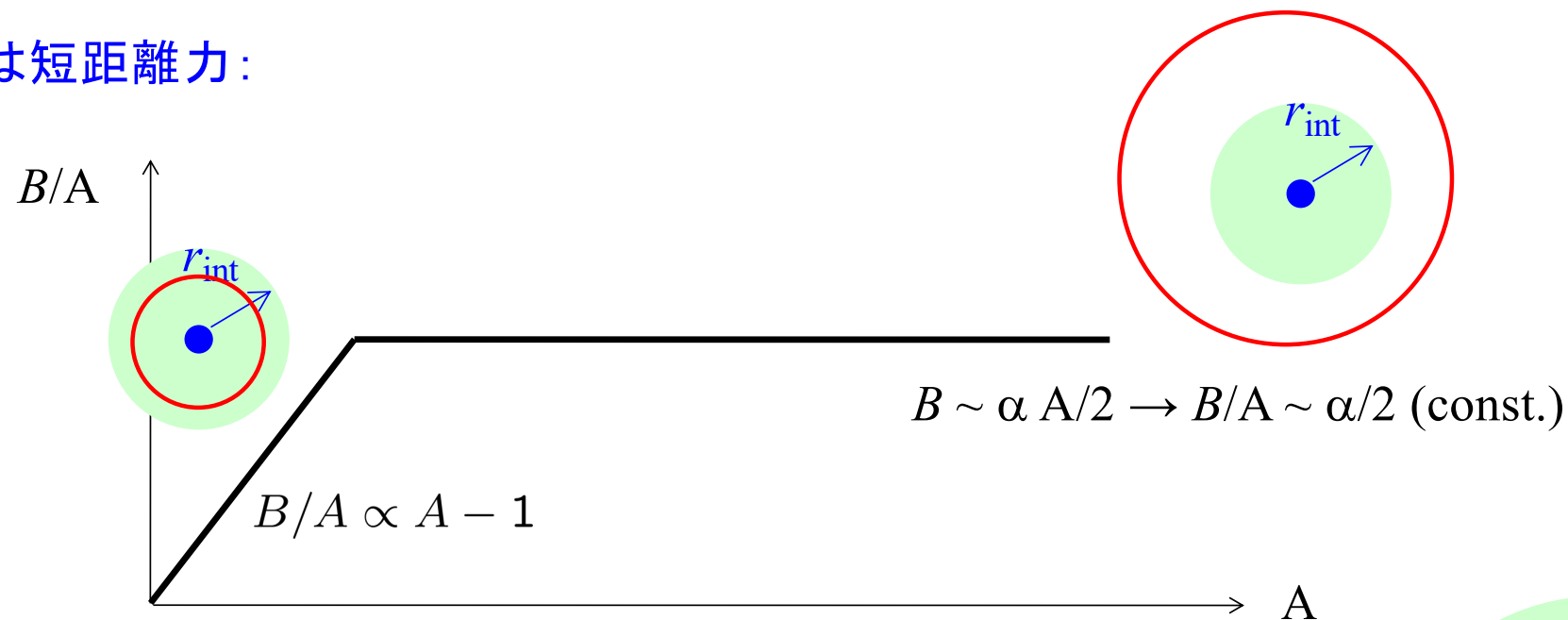
核子1つあたりの
束縛エネルギー



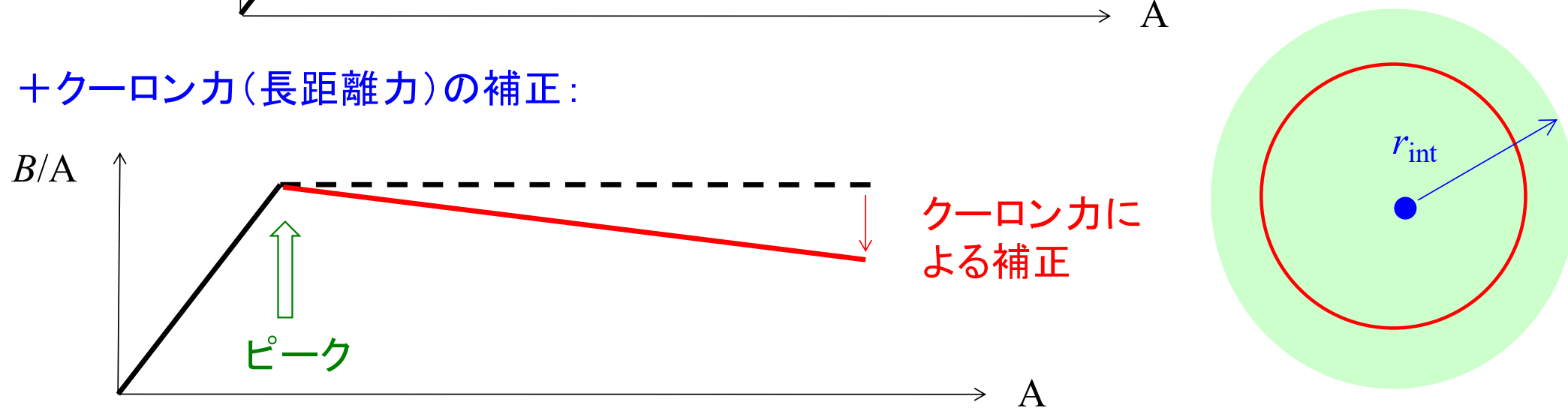
$A=240 \rightarrow (A=120) \times 2$ になったとすると:

$$\Delta E \sim 8.5 \times 120 \times 2 - 7.5 \times 240 = 240 \text{ MeV}$$

核力は短距離力:



+クーロン力(長距離力)の補正:

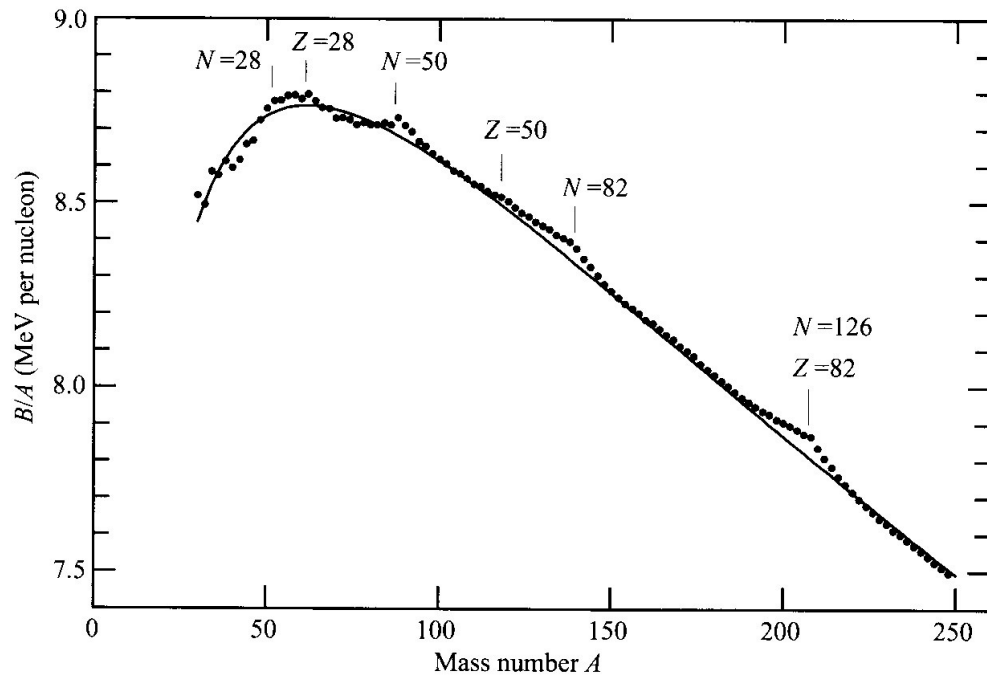


はじめに: 核分裂障壁



原子核の液滴模型(ベーテ・ワイゼッカー質量公式)

$$B(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}$$



- 体積項
- 表面項
- クーロン項
- 対称エネルギー

はじめに: 核分裂障壁



原子核の液滴模型(ベーテ・ワイゼッカー質量公式)

$$B(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}$$

原子核を**体積一定のまま**変形してみる

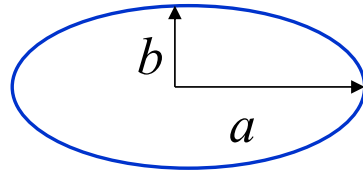


変形したときのエネルギー変化:

- 体積項、対称エネルギー項: 変化せず
 - クーロン項
 - 表面項
- } 変化

$\left\{ \begin{array}{ll} \text{表面項} & \rightarrow \text{球形になる傾向} \\ \text{クーロン項} & \rightarrow \text{変形になる傾向} \end{array} \right\} \rightarrow \text{2つの力の競合}$

はじめに: 核分裂障壁



$$a = R \cdot (1 + \epsilon)$$

$$b = R \cdot (1 + \epsilon)^{-1/2}$$

$$ab^2 = R^3 = \text{一定}$$

□ 表面項

$$E_S(\epsilon) = \sigma \int_S dS \sim E_S^{(0)} \left(1 + \frac{2}{5}\epsilon^2 - \frac{4}{105}\epsilon^3 + \dots \right)$$

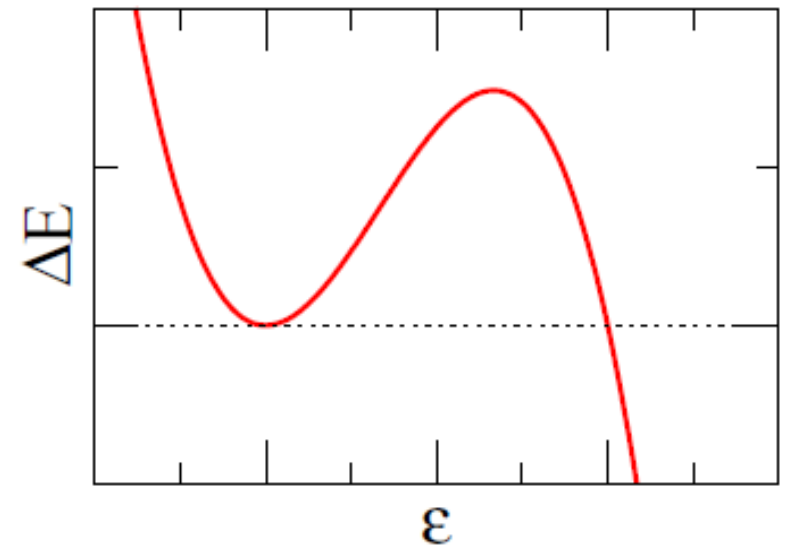
損

核分裂障壁

□ クーロン項

$$E_C(\epsilon) = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') \\ \sim E_C^{(0)} \left(1 - \frac{1}{5}\epsilon^2 - \frac{4}{105}\epsilon^3 + \dots \right)$$

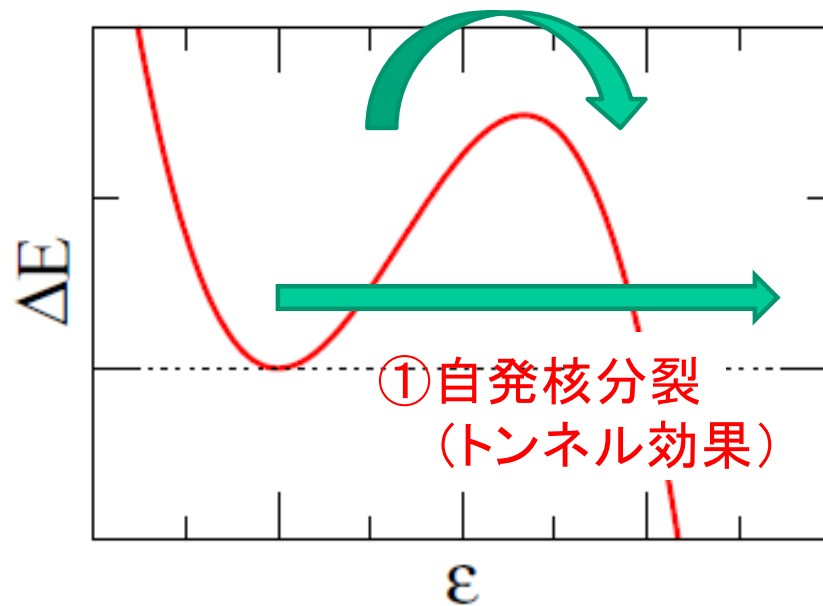
得



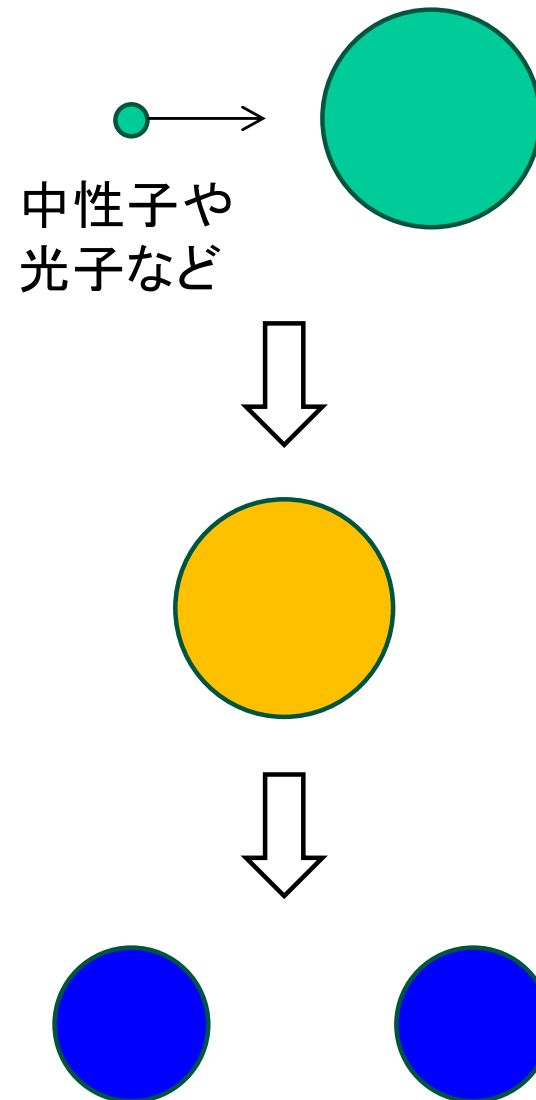
はじめに: 核分裂障壁

2種類の核分裂

②誘起核分裂(熱的崩壊)



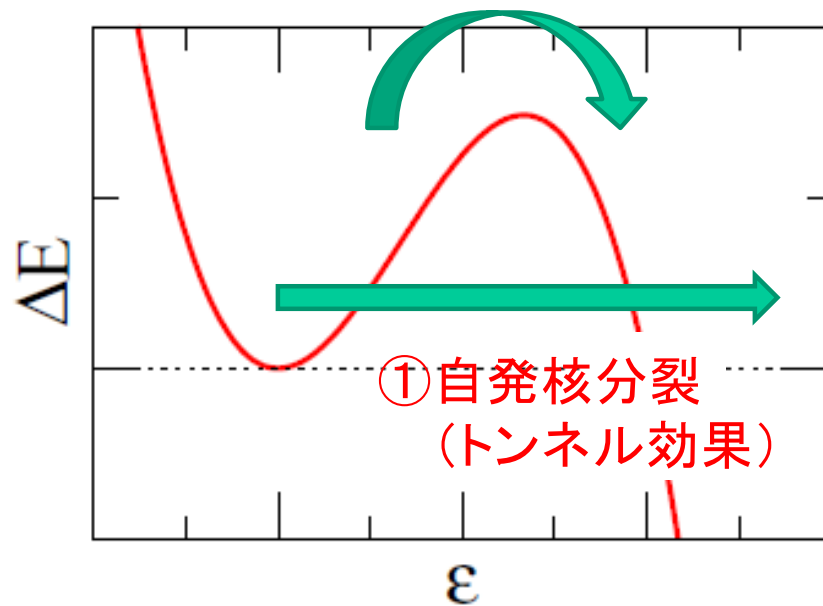
*他にも β 遅延核分裂も



はじめに: 核分裂障壁

2種類の核分裂

②誘起核分裂(熱的崩壊)



*他にも β 遅延核分裂も

^{236}U の光誘起核分裂

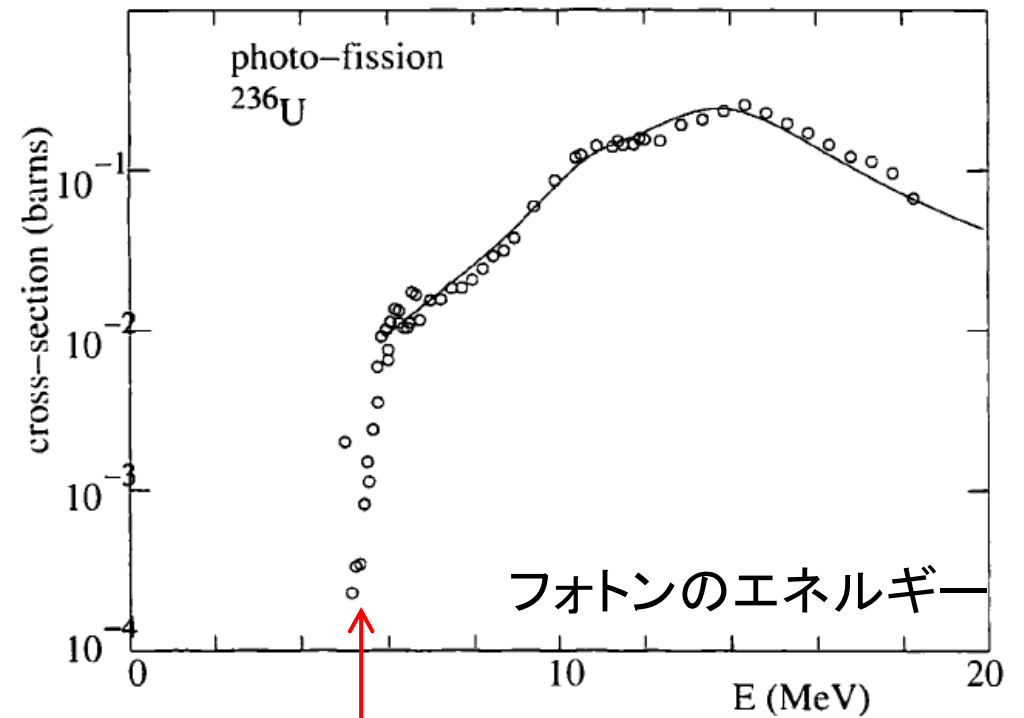


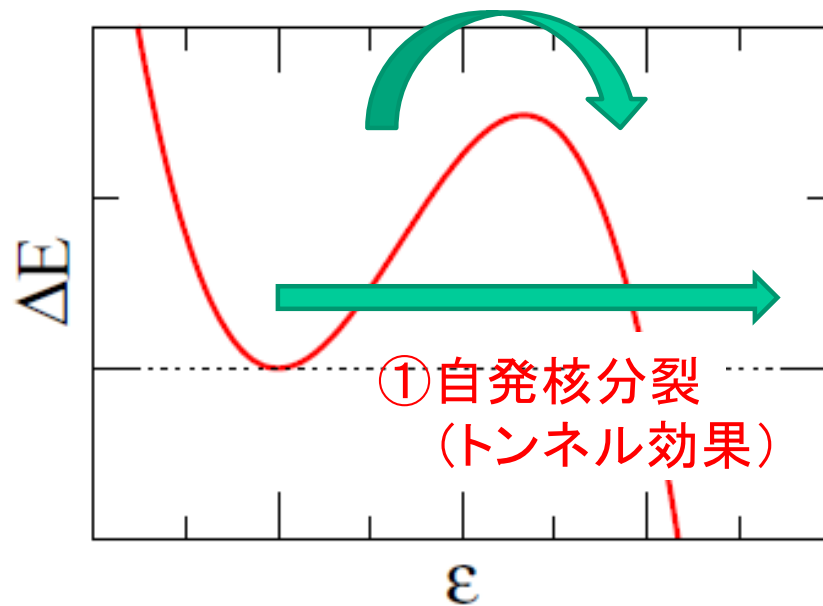
Fig. 6.5. Cross-section for $\gamma^{236}\text{U} \rightarrow \text{fission}$ [30].

閾値(核分裂障壁の高さ)

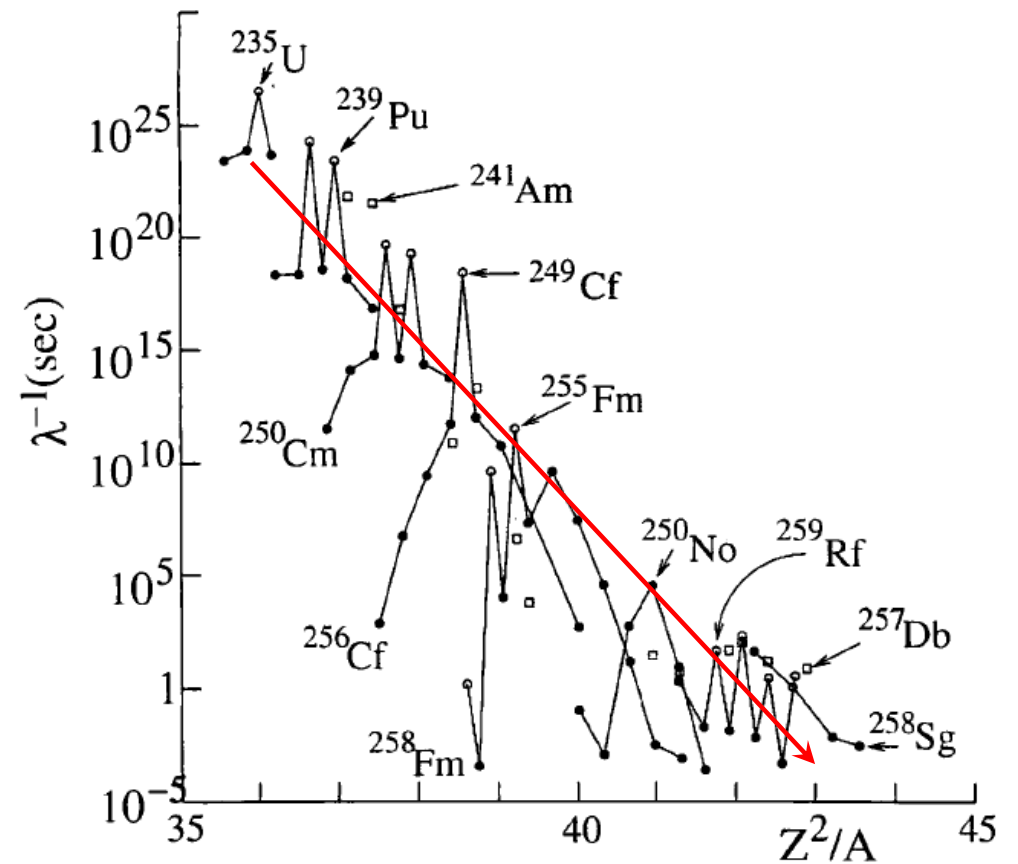
はじめに: 核分裂障壁

2種類の核分裂

②誘起核分裂(熱的崩壊)



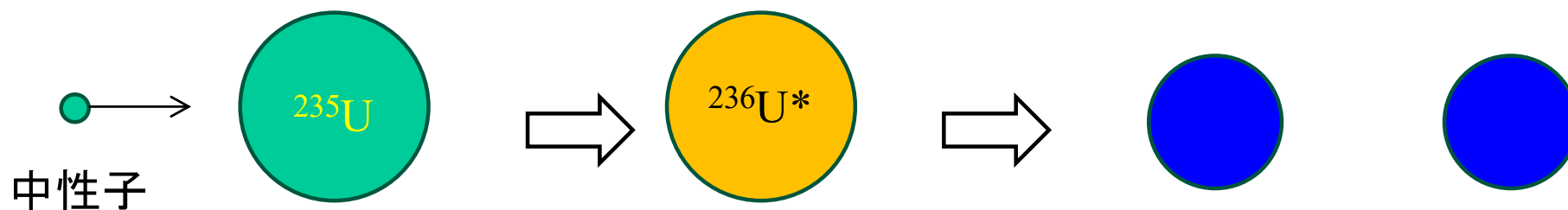
* 他にも β 遅延核分裂も



自発核分裂の寿命: Z^2/A が大きくなるほど、核分裂障壁が低くなって寿命が短くなる

はじめに: 核エネルギー

原子力発電



天然ウラン

{	^{234}U	0.0054%
	^{235}U	0.7204%
	^{238}U	99.274%

なぜ ^{238}U を使わないのか?

(どうして ^{235}U が“燃え”て ^{238}U が“燃え”ないのか?)

→ 原子核構造の理解が必要

はじめに: 核エネルギー

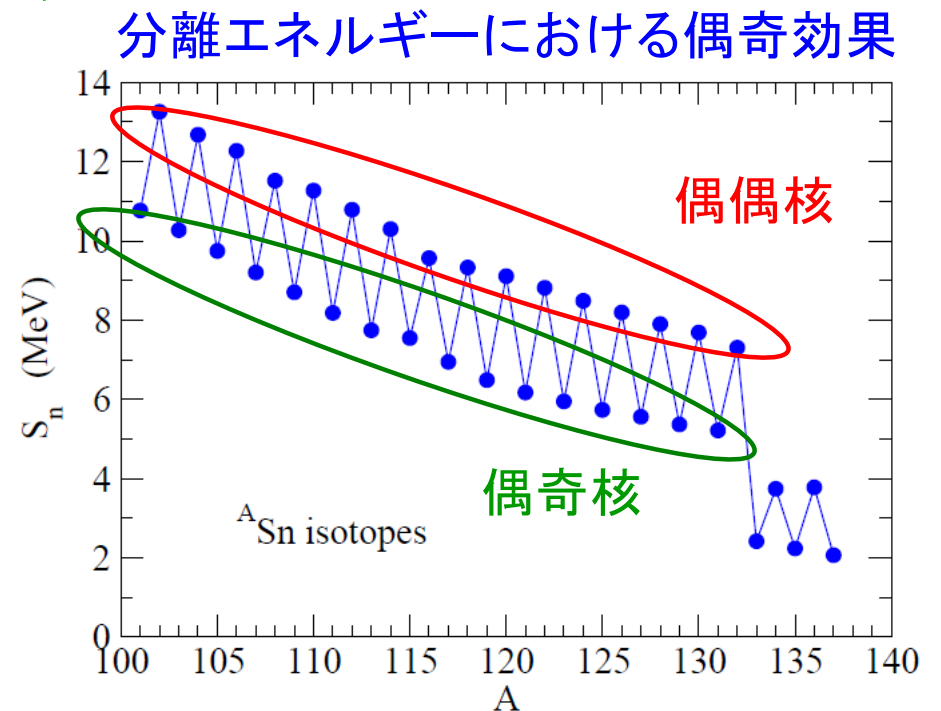
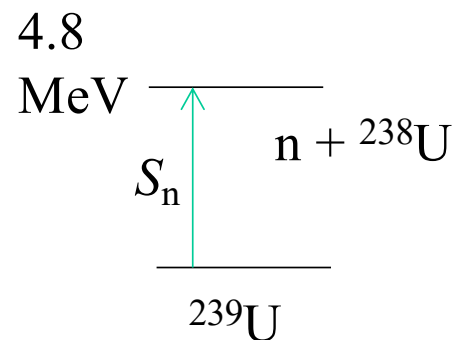
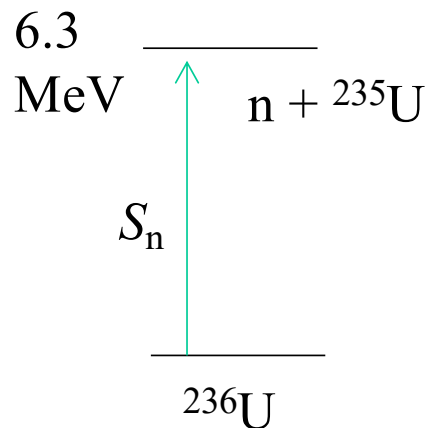
なぜ ^{238}U を使わないのか? (どうして ^{235}U が“燃え”て ^{238}U が“燃え”ないのか?)



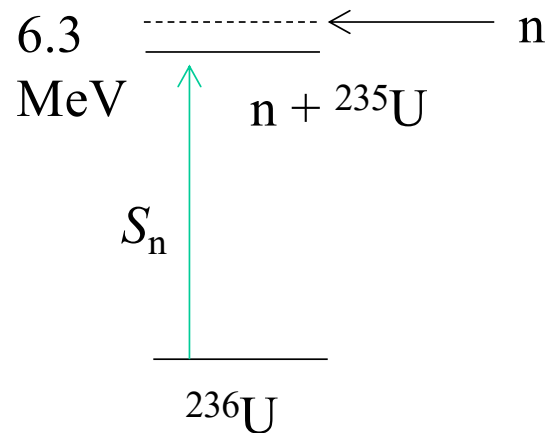
^{236}U と ^{239}U で大きく違うのが1中性子分離エネルギー

$$S_n({}^{236}\text{U}) = 6.3 \text{ MeV}$$

$$S_n({}^{239}\text{U}) = 4.8 \text{ MeV}$$

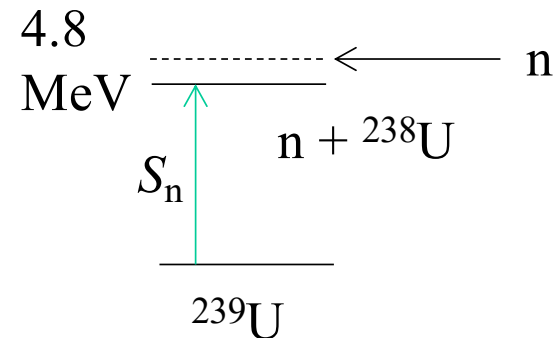
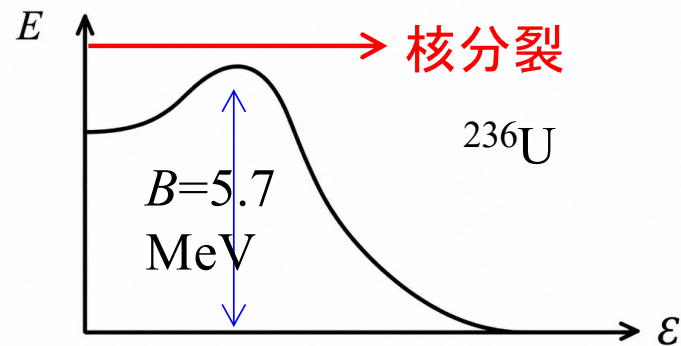


はじめに: 核エネルギー



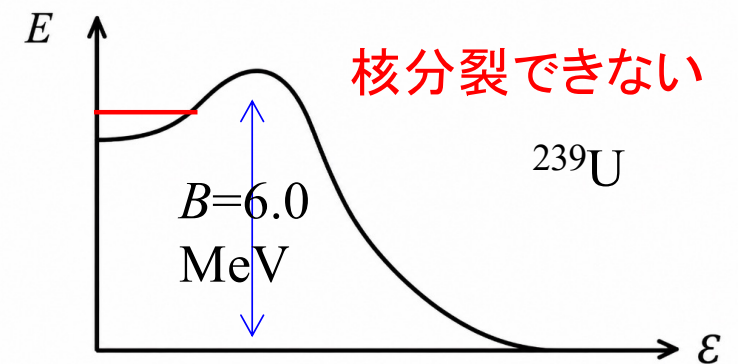
$$E^* = S_n + E_n \sim 6.3 \text{ MeV}$$

($E_n \sim 1/40 \text{ eV}$)



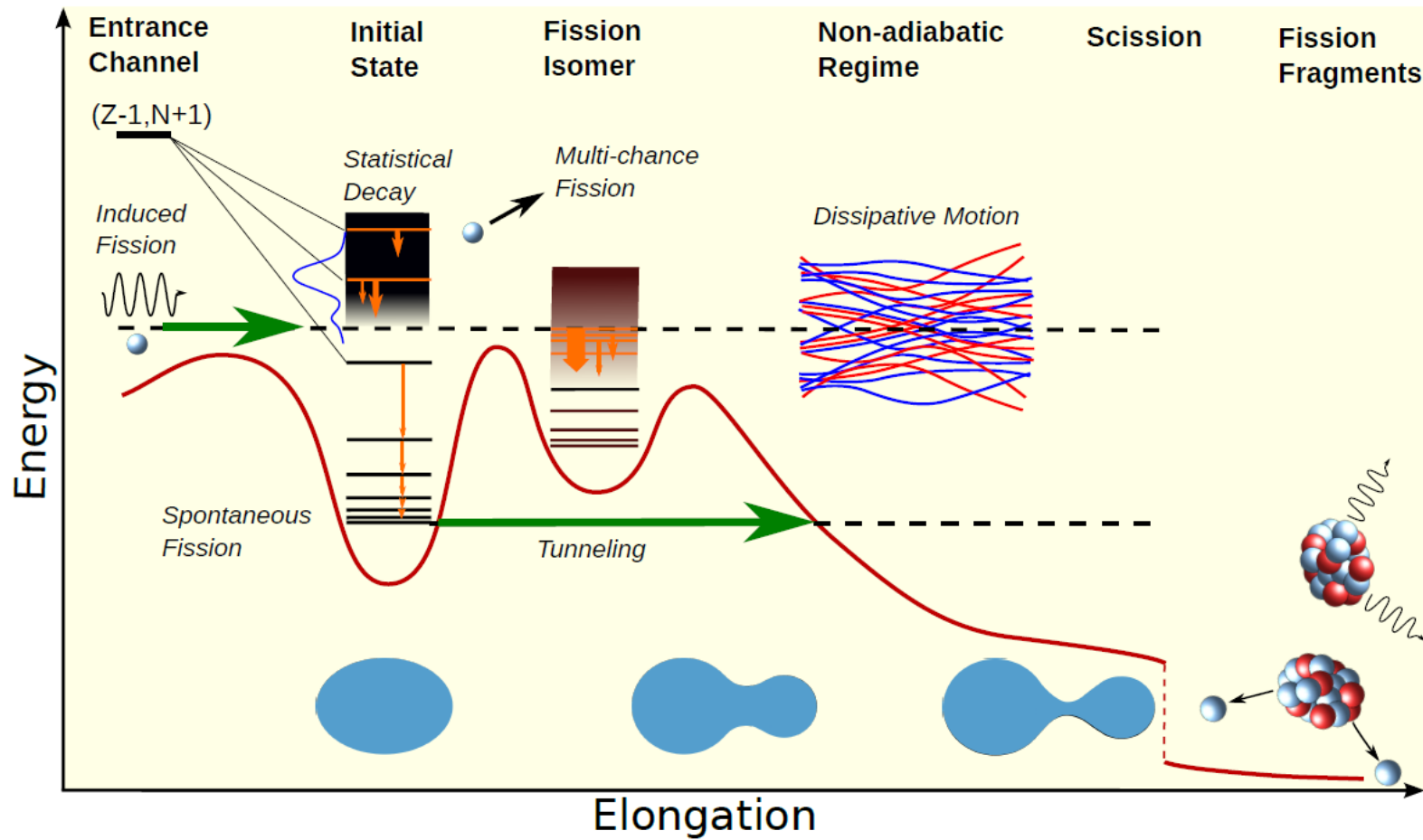
$$E^* = S_n + E_n \sim 4.8 \text{ MeV}$$

($E_n \sim 1/40 \text{ eV}$)



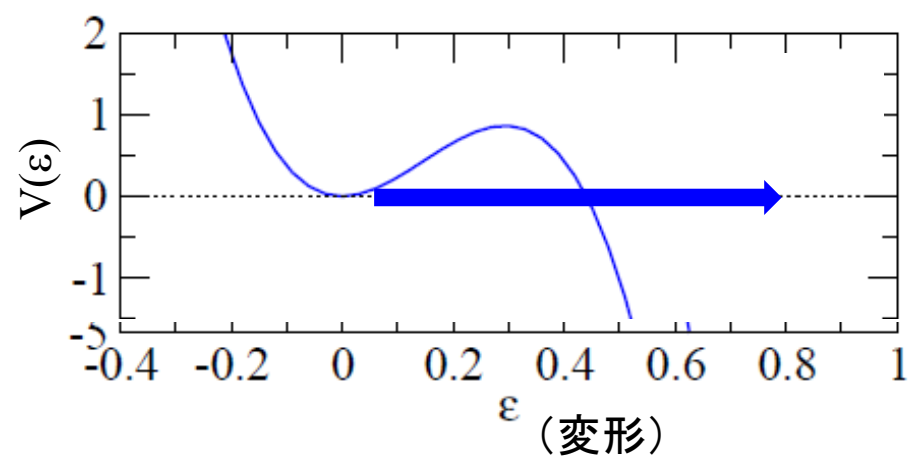
ここまでのまとめ

微視的理解はまだまだこれから

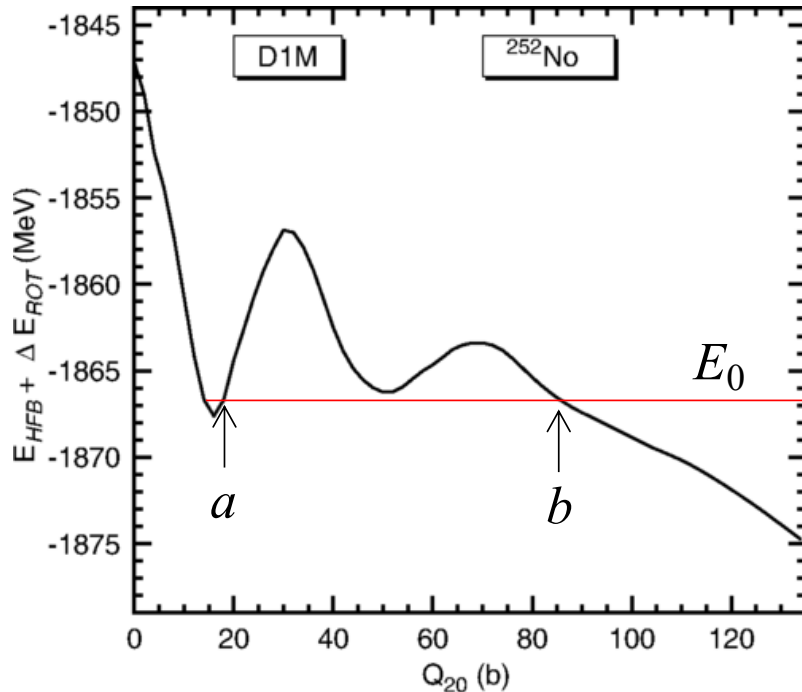


M. Bender et al., J. of Phys. G47, 113002 (2020)

自発核分裂：基底状態からの核分裂



崩壊幅に対するWKB公式



R. Rodriguez-Guzman and L.M. Robledo,
PRC98, 034308 (2018)

$$H_{\text{fis}} = -\frac{d}{dq} \left(\frac{\hbar^2}{2B(q)} \frac{d}{dq} \right) + V(q)$$

慣性質量

$$\Gamma = \frac{\hbar\omega_0}{2\pi} e^{-2S}; \quad S = \int_a^b dq \sqrt{\frac{2B(q)}{\hbar^2} (V(q) - E_0)}$$

$$T_{1/2} = \frac{\hbar \ln 2}{\Gamma}$$

$$E_0 \sim \frac{1}{2} \hbar\omega_0$$

ポテンシャル $V(q)$:

- 液滴模型＋殻補正エネルギー
- 拘束条件付きハートリーフック法

$$\delta \langle H + \lambda (\hat{Q}_{20} - Q_{20})^2 \rangle = 0$$

$$\rightarrow V(Q_{20}) = \langle H \rangle - \frac{\langle J^2 \rangle}{2\mathcal{J}_Y}$$

崩壊幅に対するWKB公式

$$H_{\text{fis}} = -\frac{d}{dq} \left(\frac{\hbar^2}{2B(q)} \frac{d}{dq} \right) + V(q)$$

慣性質量 $B(q)$:

- 流体模型 (Werner-Wheeler質量)

K.T.R. Davies, A.J. Sierk, and J.R. Nix, PRC13, 2385 (1976)

- クランキング近似

$$B(q) = 2\hbar^2 \sum_{k \neq 0} \frac{|\langle k | \partial / \partial q | 0 \rangle|^2}{E_k - E_0}$$

←断熱摂動論 (Ring-Schuck, Sec. 12.3.7)

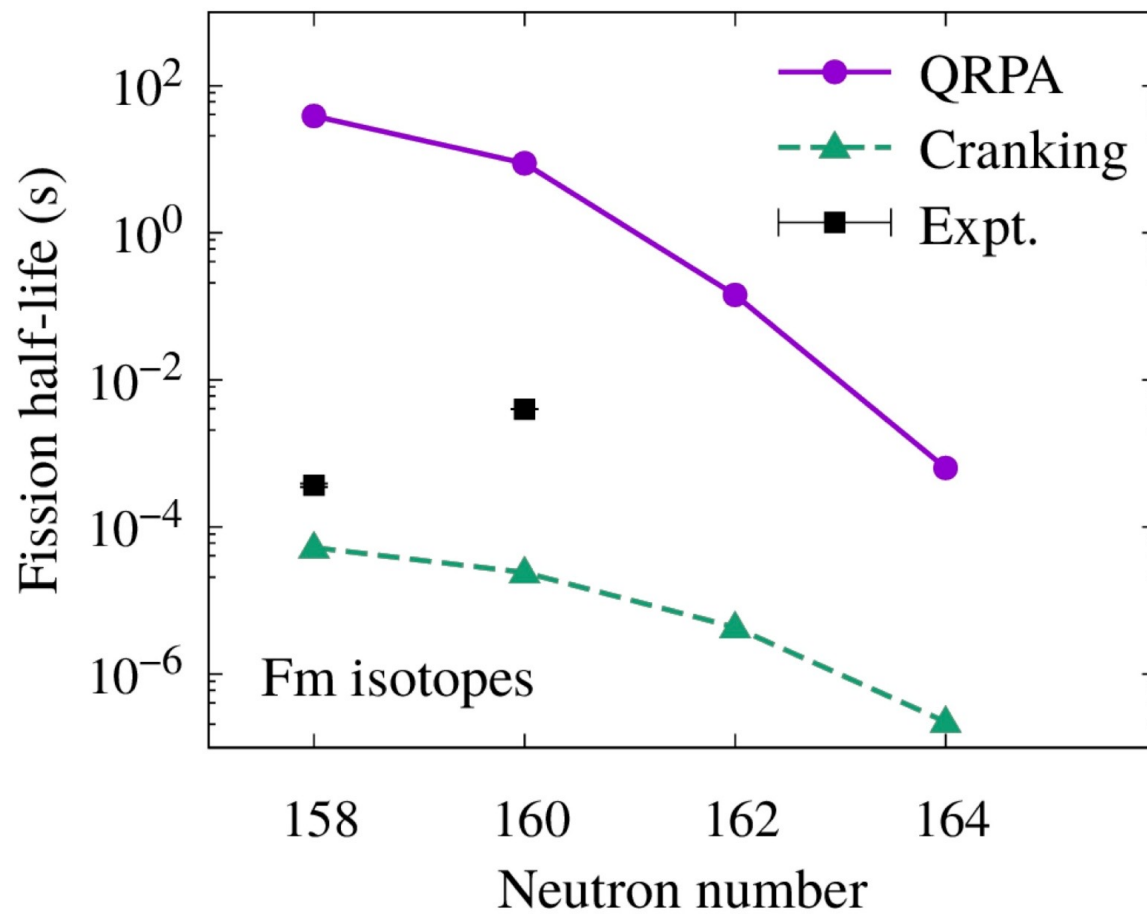
- 局所RPA近似

$$|\Psi_k\rangle = \hat{O}_k |\Psi_0\rangle \leftarrow [\hat{H}, \hat{O}_k] |\Psi_0\rangle \sim \hbar\omega_k |\Psi_0\rangle$$

K. Washiyama, N. Hinohara,
T. Nakatsukasa,
PRC103, 014306 (2021)

$$\begin{aligned} Q_k &= \sqrt{\frac{1}{2M_k\omega_k}} (\hat{O}_k + \hat{O}_k^\dagger) \\ P_k &= -i\sqrt{\frac{M_k\omega_k}{2}} (\hat{O}_k - \hat{O}_k^\dagger) \end{aligned} \rightarrow M_k$$

実験データとの比較

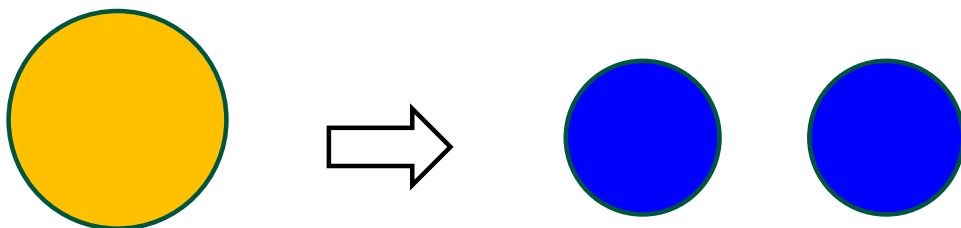


K. Washiyama, arXiv: 2406.09735

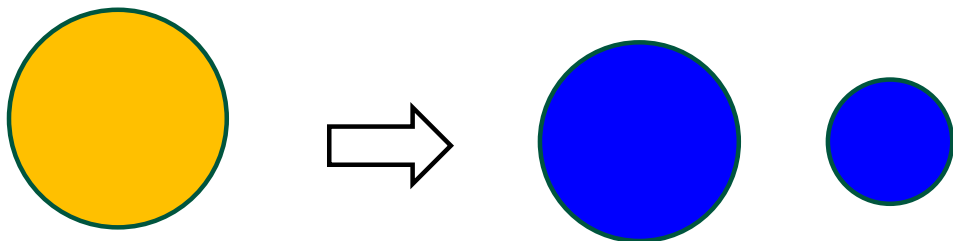
多次元空間への拡張

殻効果のために、しばしば非対称分裂になる

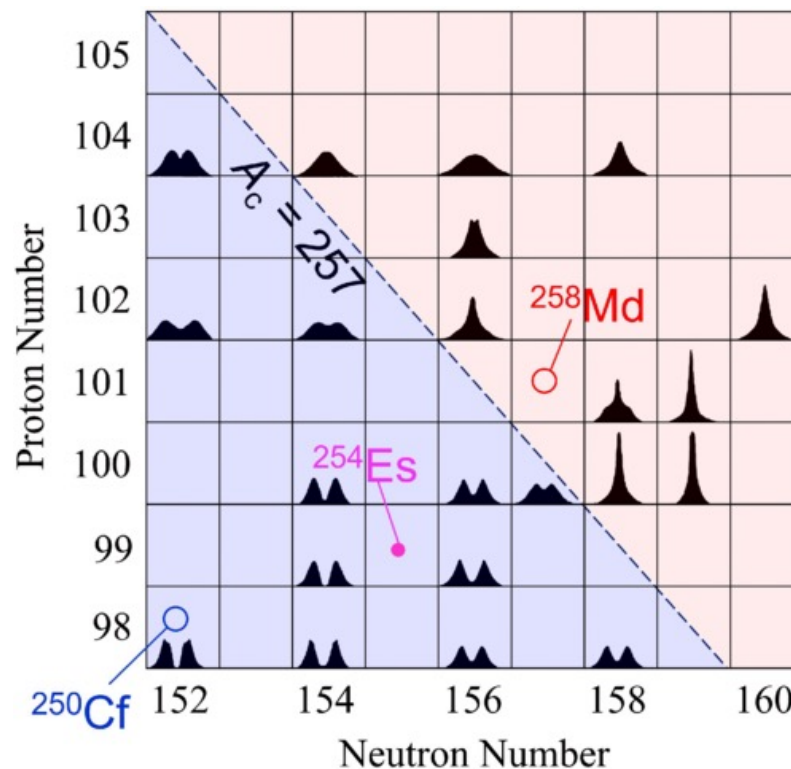
対称分裂



非対称分裂



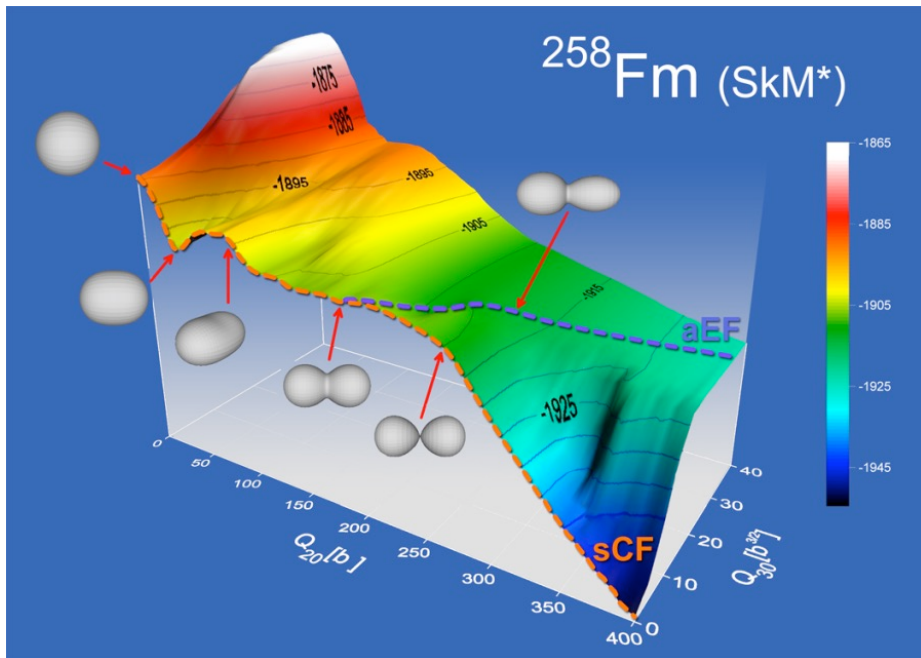
重い核の自発核分裂の質量分布



K. Nishio et al., PRC111, 044609 (2025)

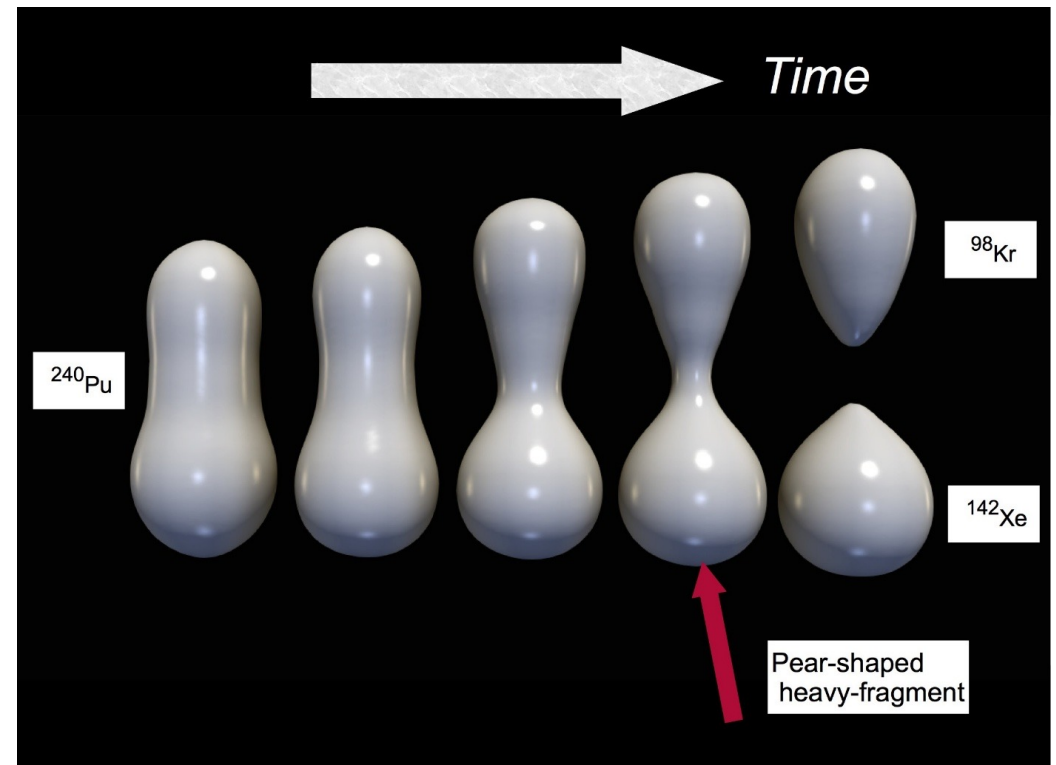
→ 多次元空間における量子トンネル効果を考える必要がある

多次元空間への拡張



A. Staszczak, A. Baran, J. Dobaczewski,
and W. Nazarewicz, PRC80, 014309 (2009)

四重極変形 Q_{20} : 対称分裂
八重極変形 Q_{30} : 非対称分裂



核分裂片の八重極変形における殻効果が
重要な役割を果たす

G. Scamps and C. Simenel,
Nature 564, 382 (2018)

多次元空間への拡張

多次元空間内で核分裂経路をどのように見つけるか?

→作用積分:

$$iS = i \int dt \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j} M_{ij}(\mathbf{q}(t)) \dot{q}_i(t) \dot{q}_j(t) - V(\mathbf{q}(t)) \right]$$

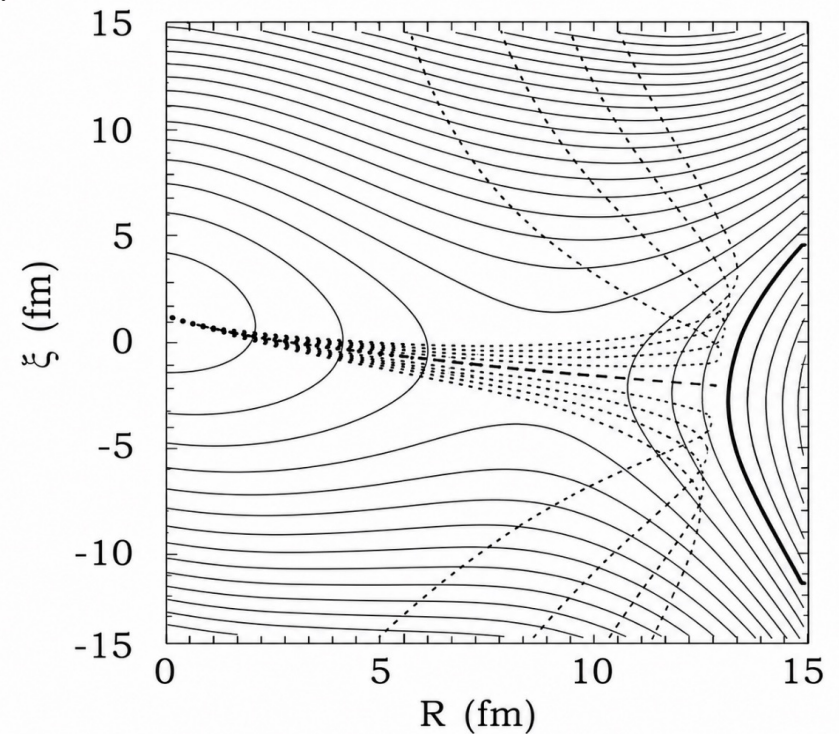
で虚時間に変換し ($it \rightarrow \tau$)

$$iS \rightarrow -S_E = - \int d\tau \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j} M_{ij}(\mathbf{q}(\tau)) \frac{d\mathbf{q}_i}{d\tau} \frac{d\mathbf{q}_j}{d\tau} + V(\mathbf{q}(\tau)) \right]$$

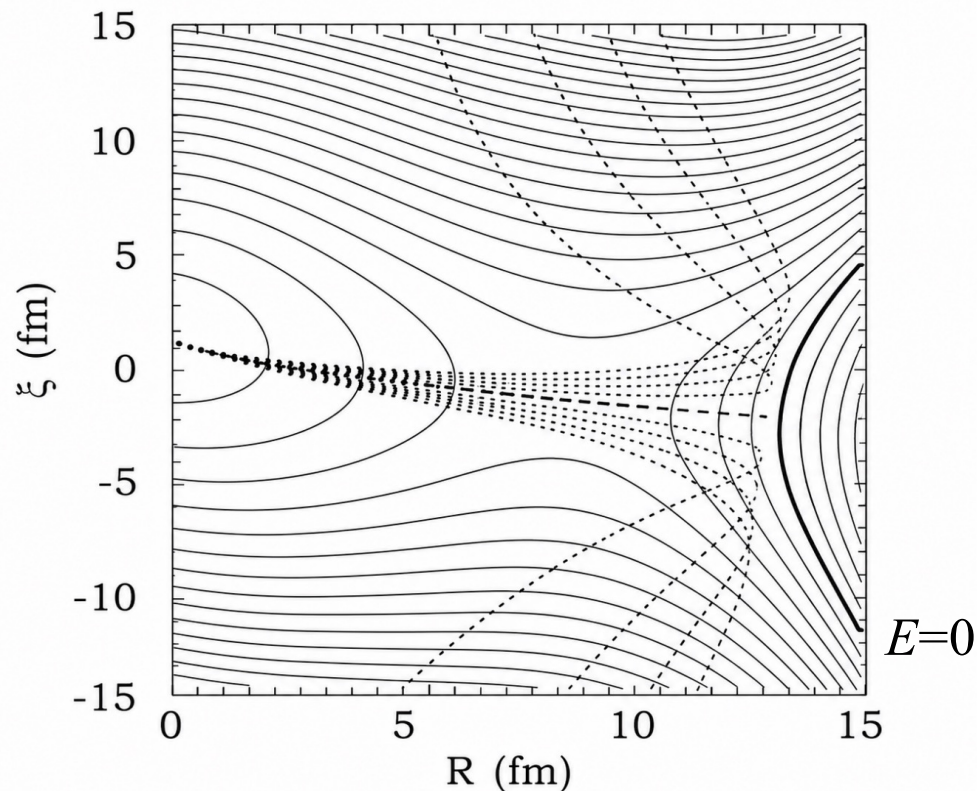
S_E が最小になるような経路 $\mathbf{q}(\tau)$ を探す。

→ポテンシャルを反転させて ($V \rightarrow -V$)、古典経路を求めるのと等価。

$$P = e^{-2S_E/\hbar}$$



多次元空間への拡張



$$\begin{aligned} R(0) &= \epsilon \cos \theta & \text{として } \theta \text{ を変えて経路を探す} \\ \xi(0) &= \epsilon \sin \theta & (\epsilon \text{ は微量}) \end{aligned}$$

特別の θ だけが等エネルギー面に到達できる。
(他の θ はそこに到達する前に離れてしまう。)

= escape path (エスケープ経路)

➡ $\Gamma = A e^{-2S_{\text{EP}}/\hbar}$

$$S_{\text{EP}} = \int_{\text{EP}} \sum_{i,j} \dot{q}_i M_{ij} \dot{q}_j d\tau$$

$$A = \sqrt{60\hbar\omega_0} \sqrt{\frac{S_{\text{EP}}}{\pi\hbar}}$$

- A. Schmit, Ann. of Phys. 170, 333 (1986).
 D.M. Brink, M.C. Nemes, and D. Vautherin,
 Ann. of Phys. 147, 171 (1983).
 K. Hagino and N. Takigawa, PRC51, 187 (1995).

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial R^2} + U(R) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 \xi^2 + g R \xi$$

$$U(R) = \frac{1}{2} M \Omega^2 R^2 (1 - R/R_b)$$

$$\hbar\Omega = \hbar\omega = 0.97 \text{ MeV}$$

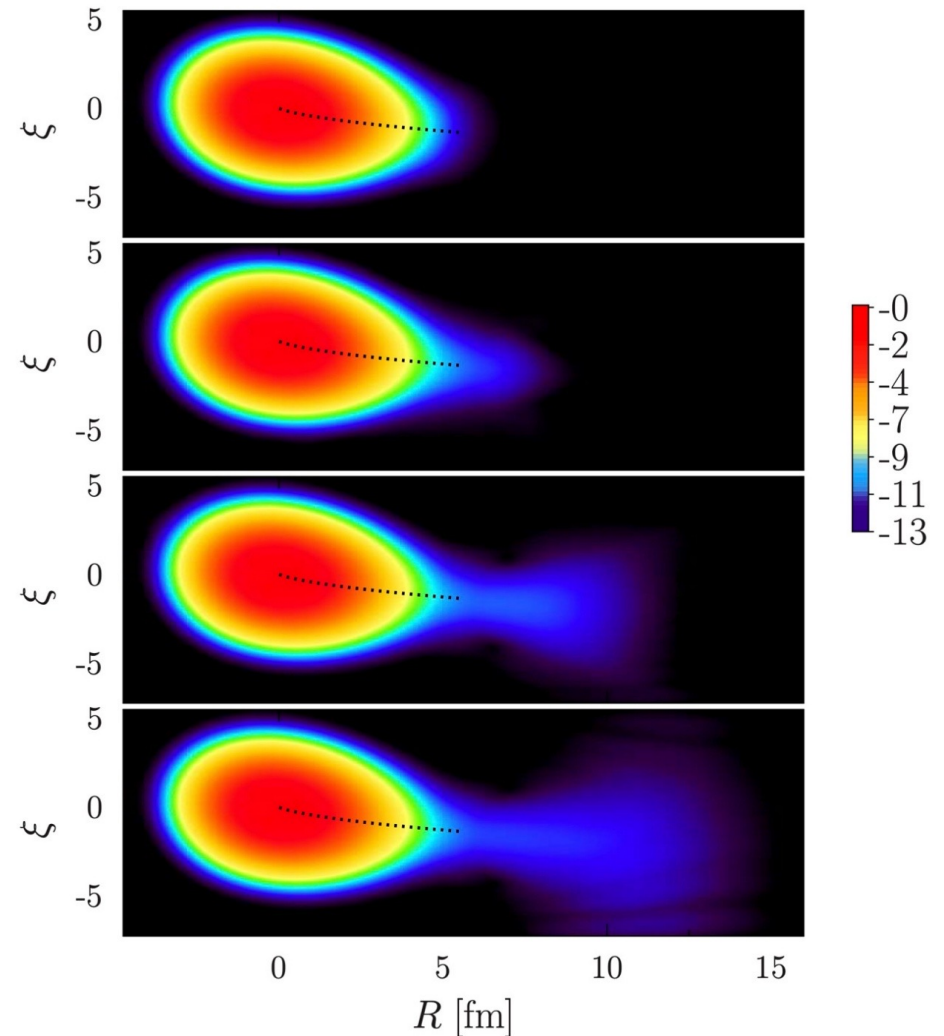
$$g^2 = \frac{M m \Omega^2}{16 \hbar^2},$$

$$M = 234 M_N / 4, \quad m = \frac{3 A M_N R_0^2}{8 \pi}$$

系の時間発展

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\Psi(0)\rangle$$

G. Scamps and K. Hagino,
PRC91, 044606 (2015)



エスケープ経路に沿ってフローが生じている

複素ポテンシャル法:

$$H \rightarrow H' = H - iW_0(R - R_a)^2\theta(R - R_a)$$

$$(W_0=0.1 \text{ MeV}, R_a=11 \text{ fm})$$

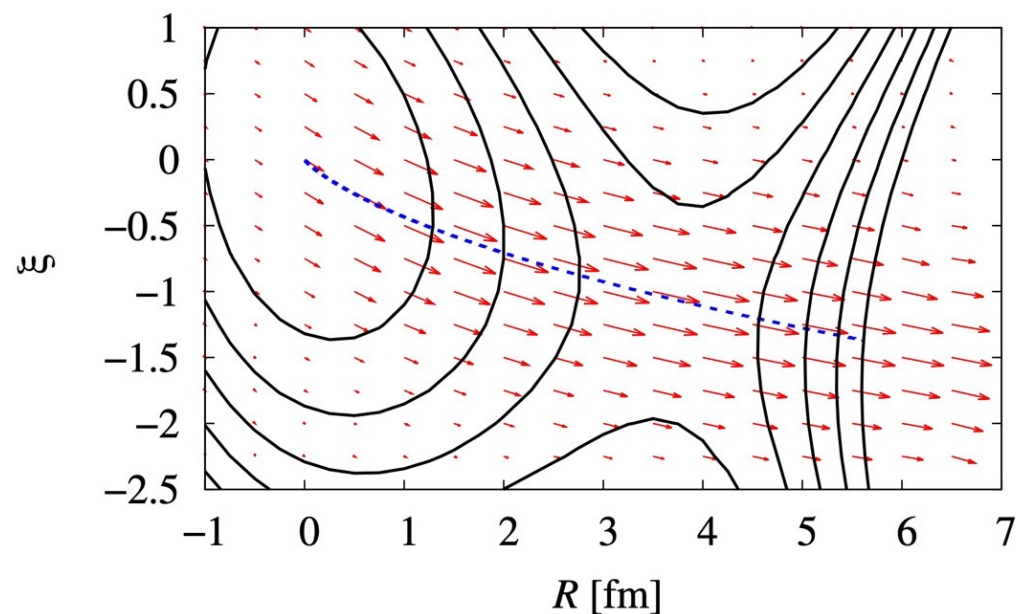
→固有状態 = 共鳴状態

フラックス:

$$j_R = \frac{\hbar}{2iM} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial R} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial R} \right)$$

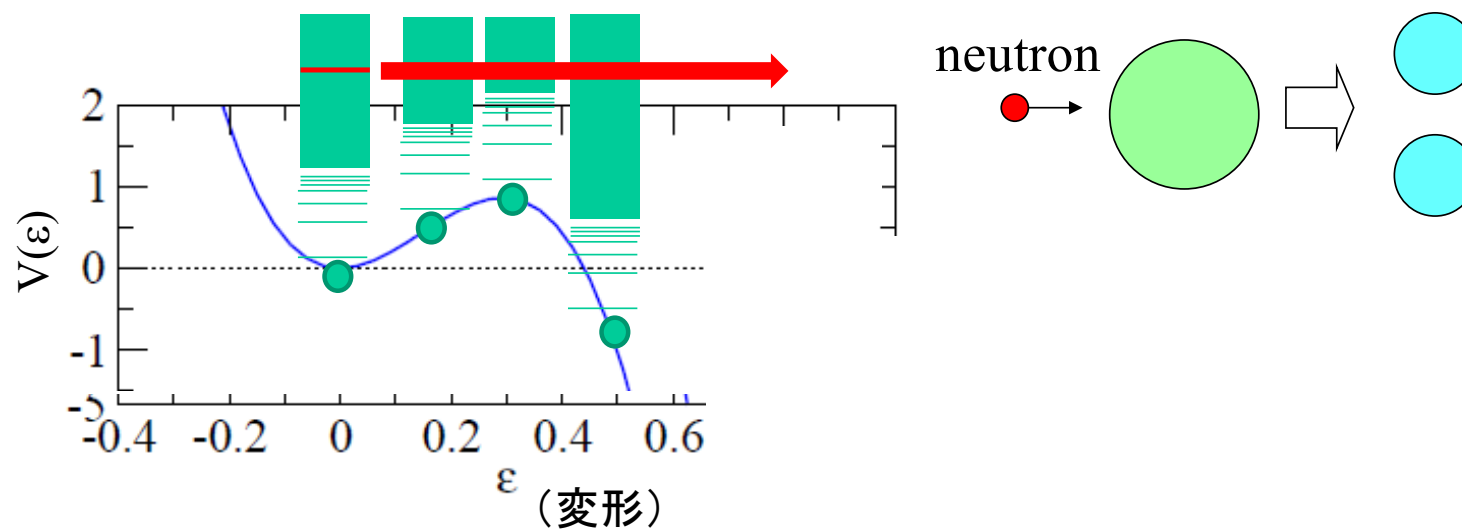
$$j_\xi = \frac{\hbar}{2im} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial \xi} \right)$$

G. Scamps and K. Hagino,
PRC91, 044606 (2015)

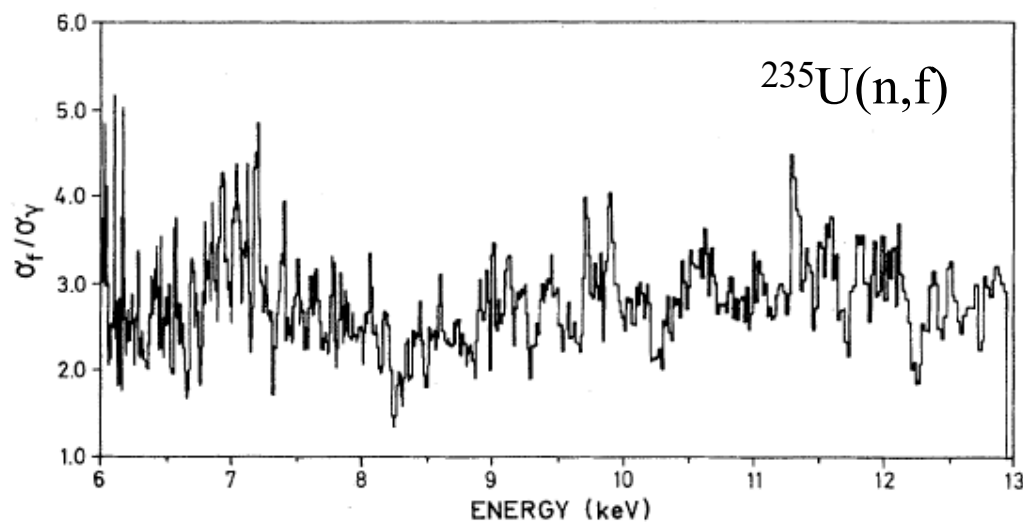
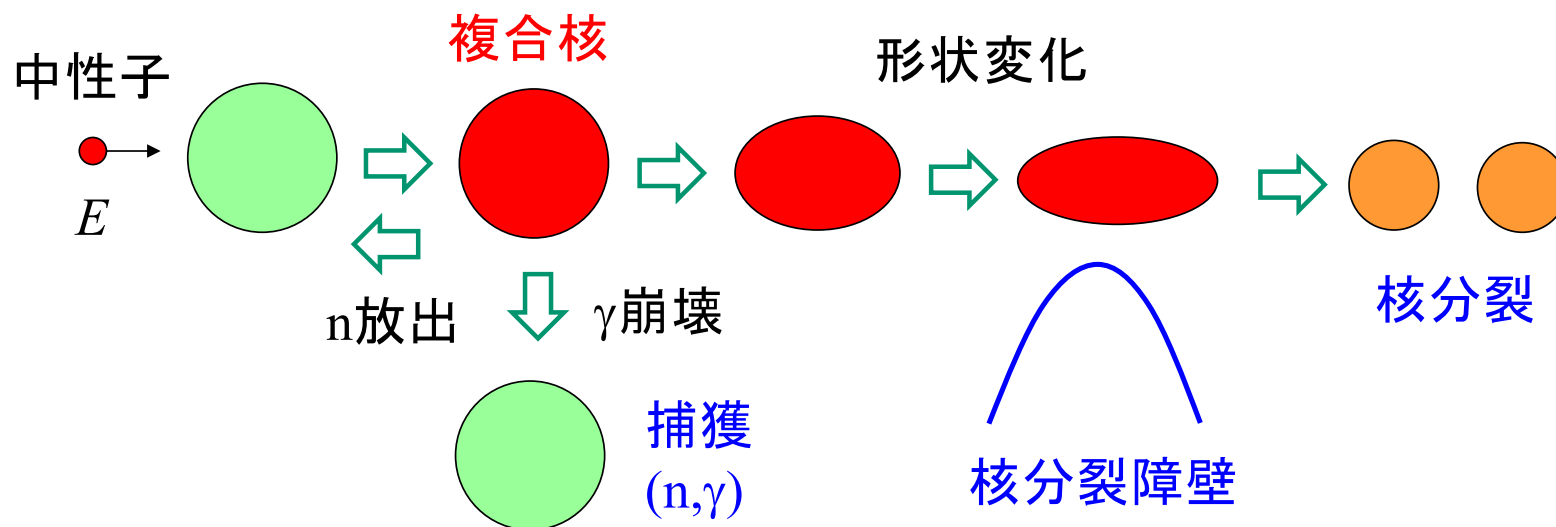


エスケープ経路に沿ってフローが生じている

誘起核分裂：励起状態からの核分裂



どういう問題を考えたいか



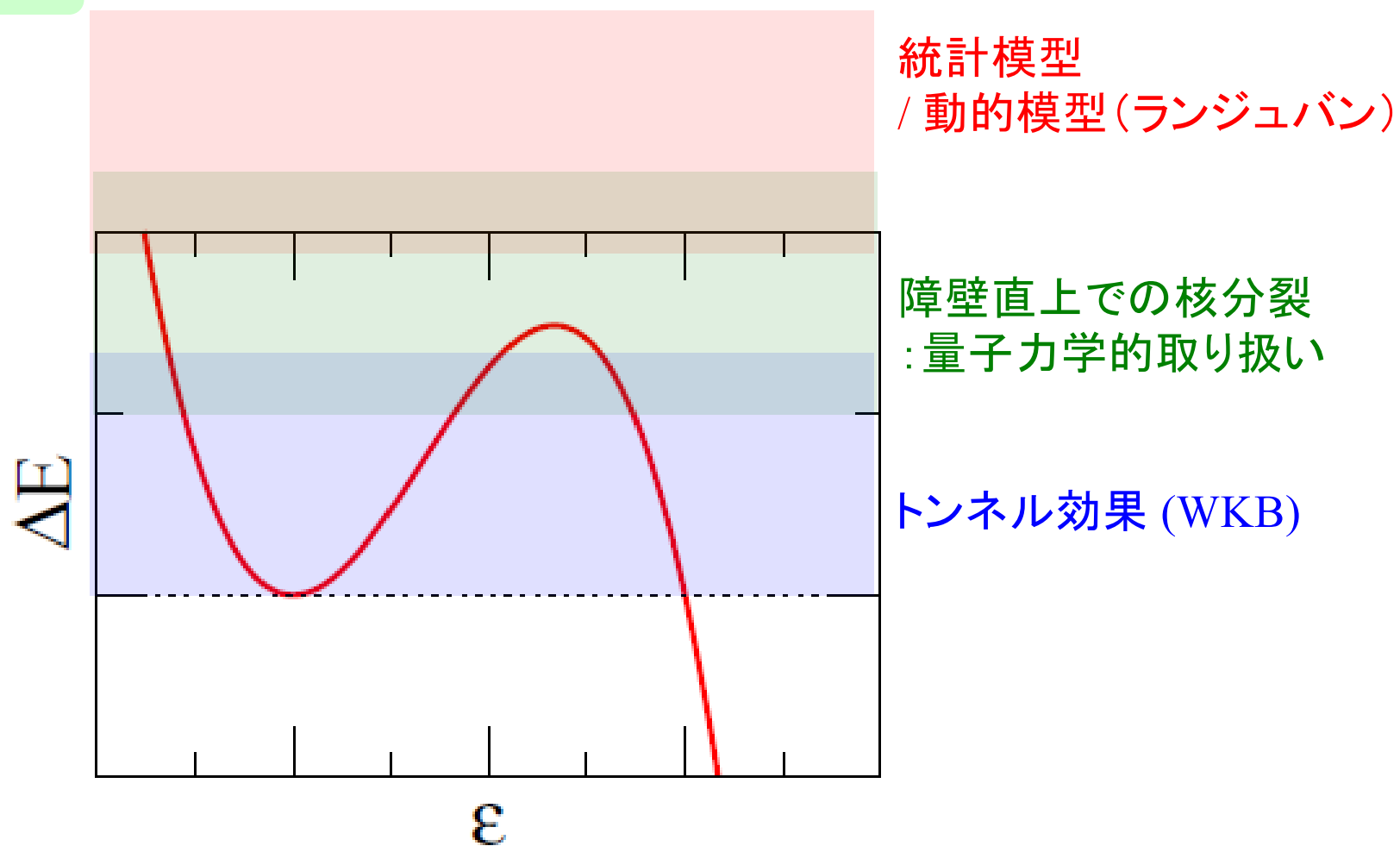
核分裂と捕獲の分岐比

$$\alpha^{-1} = \frac{\sigma_f}{\sigma_\gamma}$$

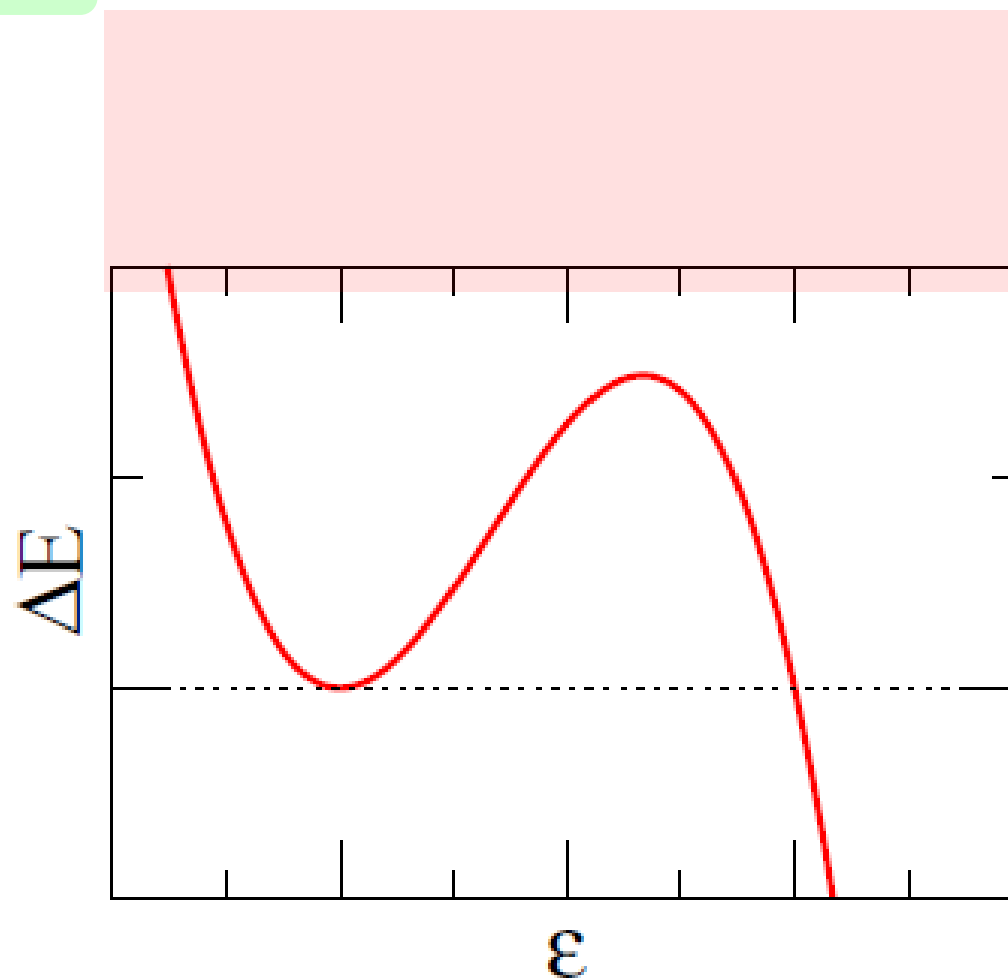
* r-プロセスでも重要な物理量

M.S. Moore et al. PRC30 ('84) 214

誘起核分裂



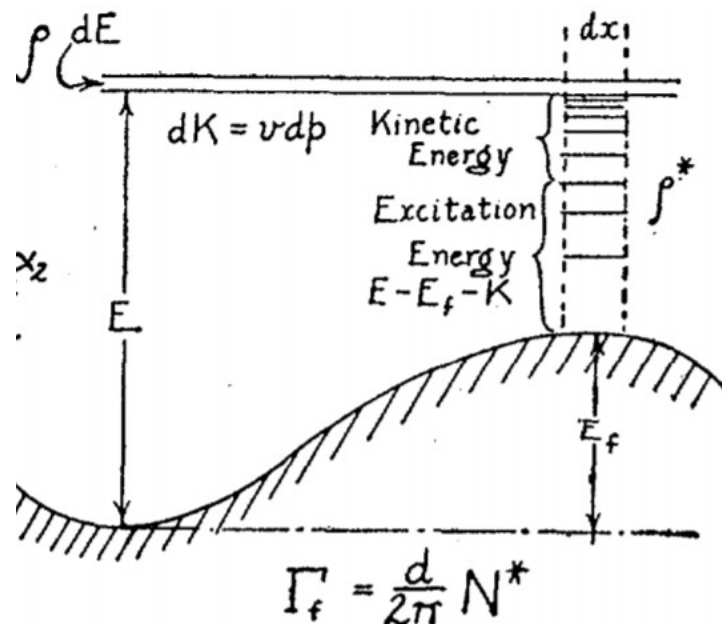
誘起核分裂



統計模型
/ 動的模型(ランジュバン)

まず初めに、励起エネルギー
が大きい場合の核分裂を考える

誘起核分裂:統計模型



Bohr-Wheeler の式
(遷移状態理論)

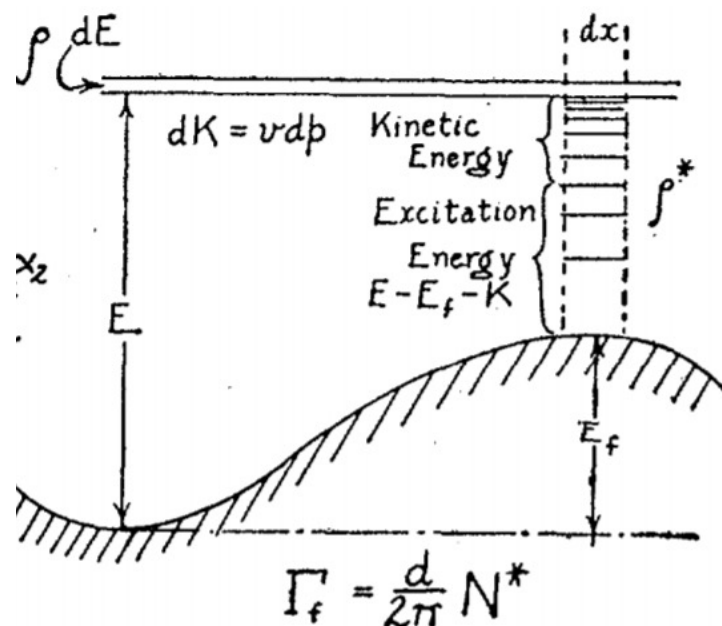
N. Bohr and J.A. Wheeler,
Phys. Rev. 56, 426 (1939)

$$\Gamma_f = \frac{1}{2\pi\rho_{gs}(E^*)} \int_0^{E^* - B_f} \rho_{sd}(E^* - B_f - K) dK = \frac{1}{2\pi\rho_{gs}(E^*)} \sum_c T_c$$

K : 核分裂自由度の
運動エネルギー

複合核に何個の状態があるか 障壁直上に何個の状態があるか

誘起核分裂:統計模型



Bohr-Wheeler の式
(遷移状態理論)

fission の確率は障壁 (transition state) でのダイナミクスで全て決まり、障壁の外でのダイナミクスには依存しない。

N. Bohr and J.A. Wheeler,
Phys. Rev. 56, 426 (1939)

$$\Gamma_f = \frac{1}{2\pi\rho_{\text{gs}}(E^*)} \int_0^{E^* - B_f} \rho_{\text{sd}}(E^* - B_f - K) dK = \frac{1}{2\pi\rho_{\text{gs}}(E^*)} \sum_c T_c$$

K : 核分裂自由度の運動エネルギー

(補足) $E^* \gg B_f$ で成り立つ近似式

$$\Gamma_f = \frac{1}{2\pi\rho_{\text{gs}}(E^*)} \int_0^{E^*-B_f} \rho_{\text{sd}}(E^* - B_f - K) dK$$

フェルミガス模型による準位密度: $\rho(E^*) \propto e^{2\sqrt{aE^*}}; \quad E^* = aT^2$

$$\Gamma_f = \frac{1}{2\pi e^{2\sqrt{aE^*}}} \int_0^{E^*-B_f} e^{2\sqrt{a(E^*-B_f-K)}} dK \sim \frac{T}{2\pi} e^{-B_f/T}$$

(補足) $E^* \gg B_f$ で成り立つ近似式

$$\Gamma_f = \frac{1}{2\pi\rho_{\text{gs}}(E^*)} \int_0^{E^*-B_f} \rho_{\text{sd}}(E^* - B_f - K) dK$$

フェルミガス模型による準位密度: $\rho(E^*) \propto e^{2\sqrt{aE^*}}; \quad E^* = aT^2$

$$\Gamma_f = \frac{1}{2\pi e^{2\sqrt{aE^*}}} \int_0^{E^*-B_f} e^{2\sqrt{a(E^*-B_f-K)}} dK \sim \frac{T}{2\pi} e^{-B_f/T}$$

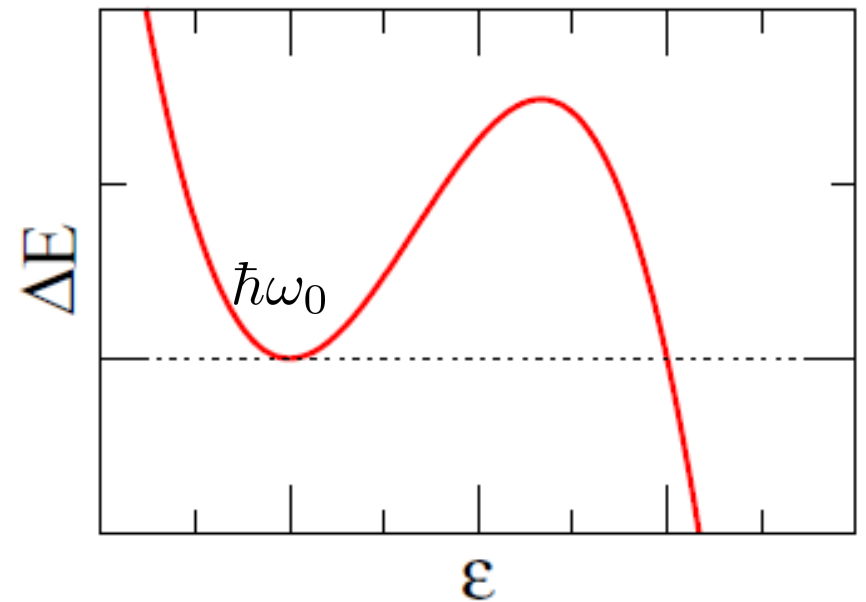
V.M. Strutinsky: PLB47, 121 (1973)

$$\Gamma_f \rightarrow \frac{\hbar\omega_0}{T} \frac{T}{2\pi} e^{-B_f/T} = \frac{\hbar\omega_0}{2\pi} e^{-B_f/T}$$

基底状態ではフェルミガス模型ではなく、
調和振動子ポテンシャル中の準位密度を
使わなければならない。

K.-H. Schmidt, arXiv: 0808.1541

Int. Mod. Phys. E18, 850 (2008)



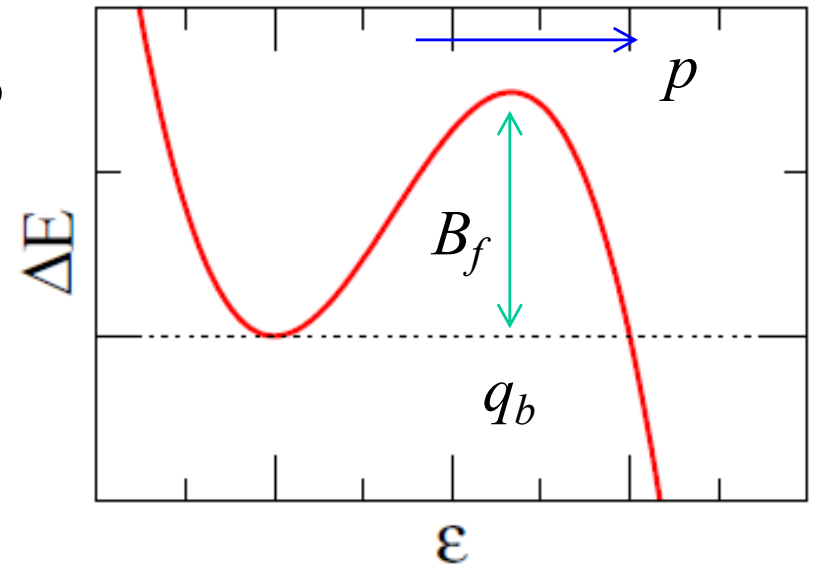
(補足) $E^* \gg B_f$ で成り立つ近似式

$$\Gamma_f = \frac{1}{2\pi e^{2\sqrt{aE^*}}} \int_0^{E^* - B_f} e^{2\sqrt{a(E^* - B_f - K)}} dK \sim \frac{T}{2\pi} e^{-B_f/T} \rightarrow \frac{\hbar\omega_0}{2\pi} e^{-B_f/T}$$

古典的な導出法: サドル点におけるフラックスを計算する

$$\Gamma = \frac{\int dp dq e^{-\beta(\frac{p^2}{2m} + V(q))} \delta(q - q_b) \frac{p}{m} \theta(p)}{\int dp dq e^{-\beta(\frac{p^2}{2m} + V(q))}}$$

$$\rightarrow \Gamma_f = \frac{\hbar\omega_0}{2\pi} e^{-\beta B_f}$$



(補足) $E^* \gg B_f$ で成り立つ近似式

$$\Gamma_f = \frac{1}{2\pi e^{2\sqrt{aE^*}}} \int_0^{E^* - B_f} e^{2\sqrt{a(E^* - B_f - K)}} dK \sim \frac{T}{2\pi} e^{-B_f/T} \rightarrow \frac{\hbar\omega_0}{2\pi} e^{-B_f/T}$$

自由エネルギーとの関係

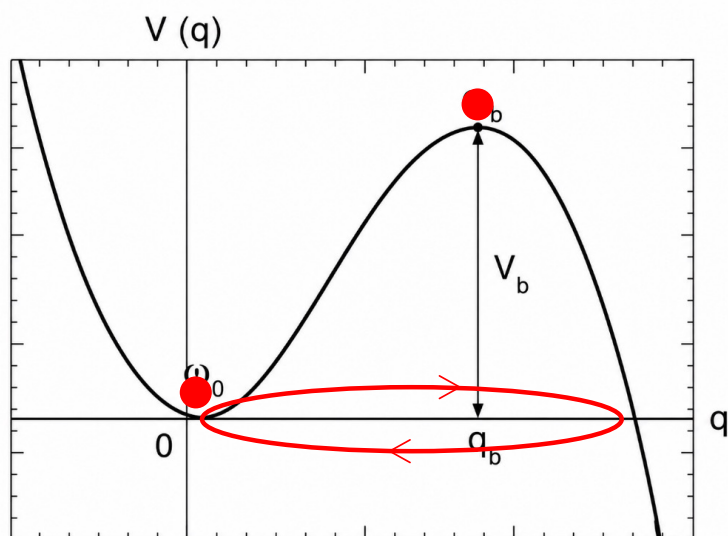
分配関数: $Z = \int dp dq e^{-\beta(\frac{p^2}{2m} + V(q))} = \sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}} \int dq e^{-\beta V(q)}$

$$\rightarrow \text{Im}F = \text{Im} \left(-\frac{\ln Z}{\beta} \right) = -\frac{\omega_0}{2\omega_b\beta} e^{-\beta B_f} \quad \Rightarrow \quad \Gamma = -\frac{\hbar\omega_b\beta}{\pi} \text{Im}F = -\frac{2}{\hbar} \frac{T_c}{T} \text{Im}F$$
$$\left(k_B T_c = \frac{\hbar\omega_b}{2\pi} \right)$$

(補足) ランガーの方法

$$\Gamma = -\frac{\hbar\omega_b\beta}{\pi}\text{Im}F = -\frac{2}{\hbar}\frac{T_c}{T}\text{Im}F \quad \left(k_B T_c = \frac{\hbar\omega_b}{2\pi}\right)$$

J.S. Langer, Ann. Phys. 41, 108 (1967), I. Affleck, PRL46, 388 (1981),
C. G. Callan, Jr. and S. Coleman, PRD16, 1762 (1977)



$$Z(\beta) = \text{Tr}(e^{-\beta H}) = \int_{q(0)=q(\beta\hbar)} \mathcal{D}[q(\tau)] e^{-S_E[q(\tau)]/\hbar}$$

$$S_E[q(\tau)] = \int_0^{\beta\hbar} d\tau \left(\frac{1}{2} M \dot{q}^2 + V(q(\tau)) \right)$$

停留位相近似で経路積分を評価する

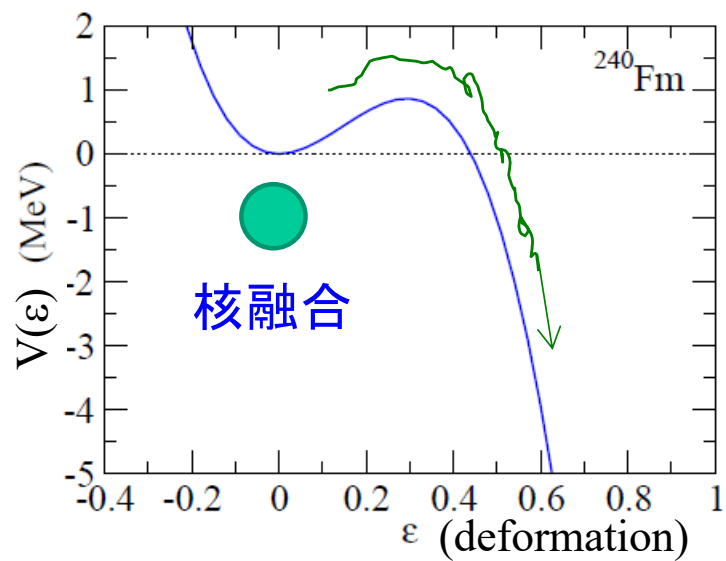
古典解: $q(\tau) = 0, q(\tau) = q_b, q(\tau) = \text{バウンス解}$

(バウンス解は $T > T_c$ で消失)

$$\rightarrow \Gamma = \frac{\hbar\omega_0}{2\pi} f_q e^{-\beta B_f}; \quad f_q = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\nu_n^2 + \omega_0^2}{\nu_n^2 - \omega_b^2} \quad \leftarrow \text{量子補正} \quad \left(\nu_n = \frac{2\pi n}{\beta\hbar} \right) \quad \text{松原周波数}$$

* 量子補正は $T=T_c$ で発散(停留位相近似の破綻)

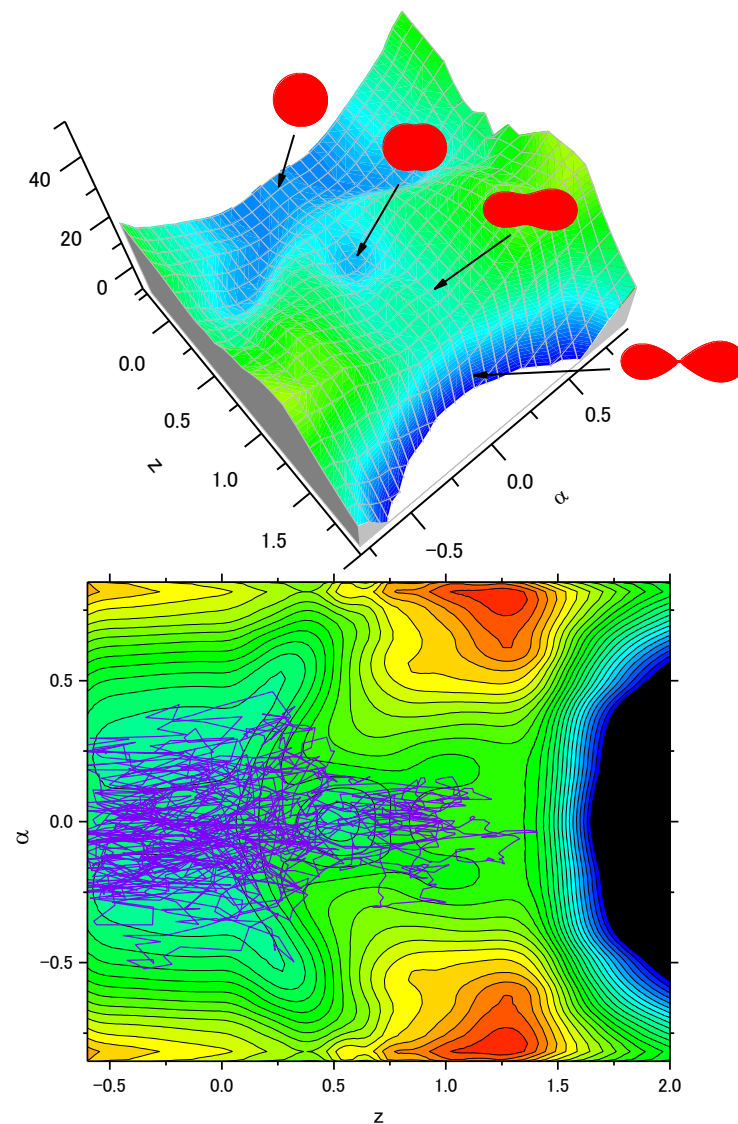
誘起核分裂：動的模型



ランジュバン法(ブラウン運動)

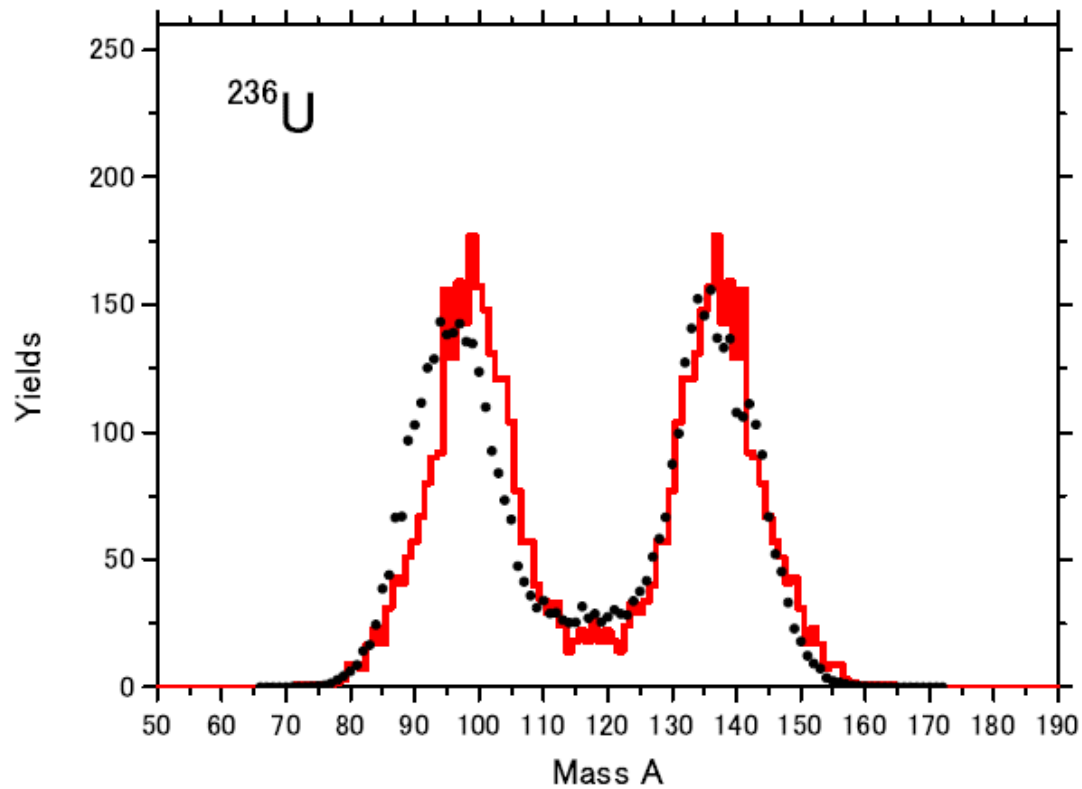
$$m \frac{d^2 q}{dt^2} = - \frac{dV(q)}{dq} - \gamma \frac{dq}{dt} + R(t)$$

γ : 摩擦係数, $R(t)$: ランダム力

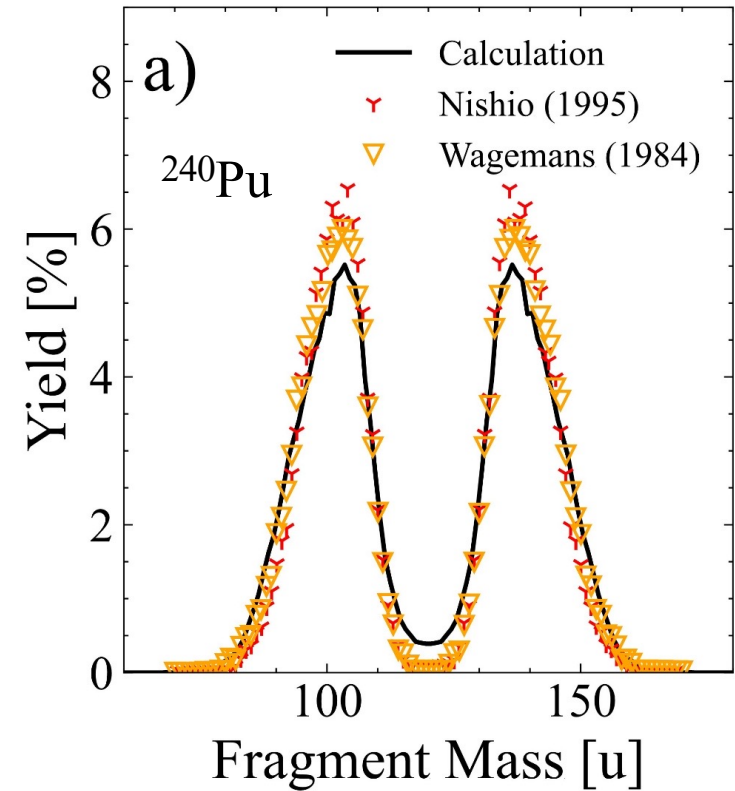


図：有友嘉浩氏(近大)

誘起核分裂: 動的模型



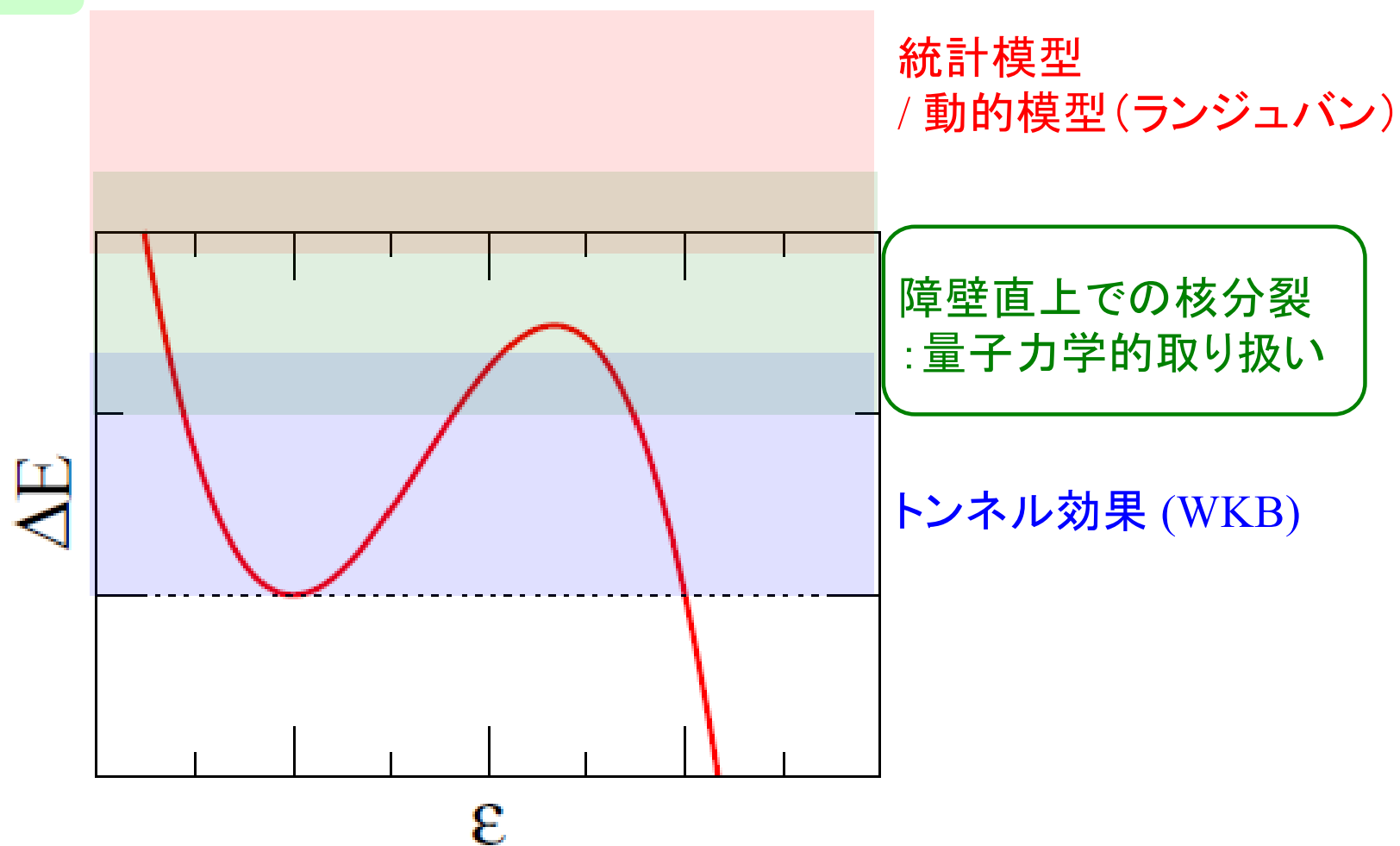
Y. Aritomo and S. Chiba, PRC88, 044614 (2013)



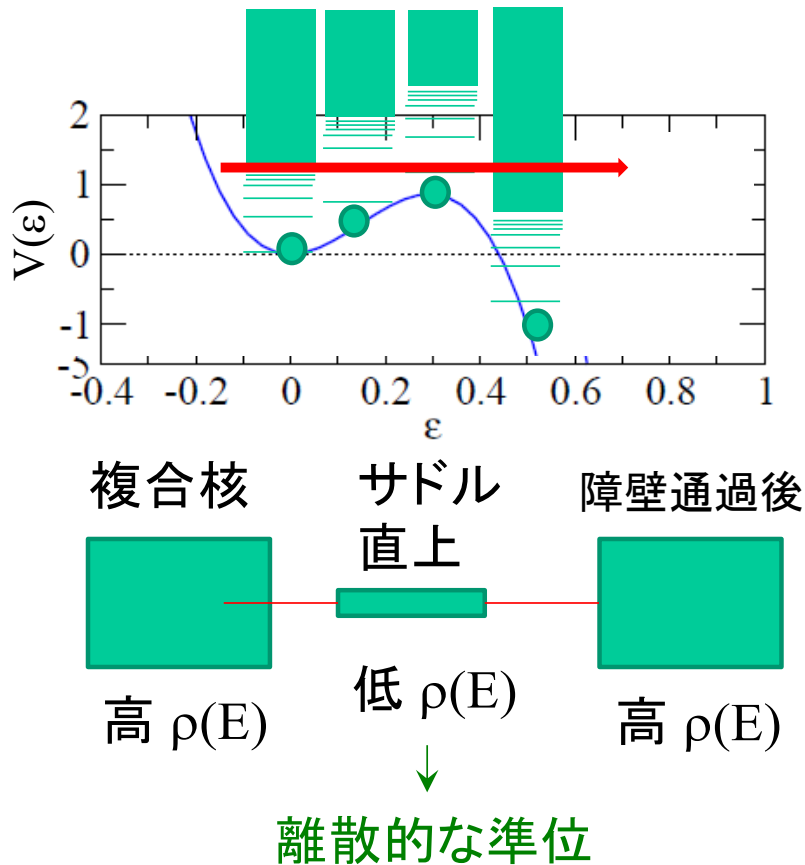
S. Takagi, Y. Aritomo, et al.,
PRC112, 014608 (2025)

cf. See also: J. Randrup and P. Moller, PRL106, 132503 (2011) for a random walk model

誘起核分裂

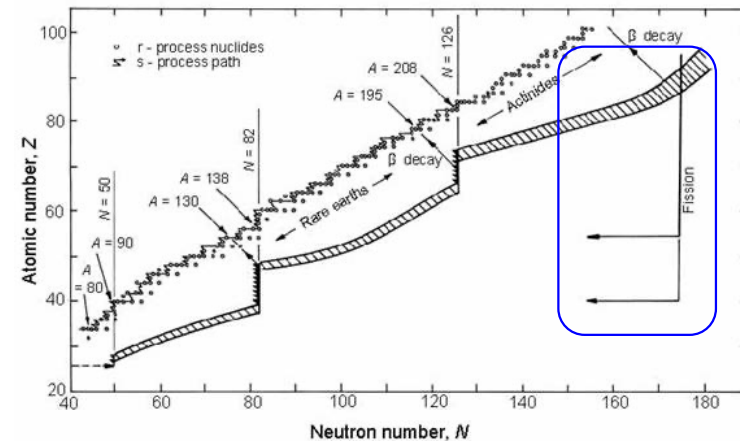


障壁直上の核分裂



量子力学に基づく微視的な取り扱いが重要

cf. r-プロセス元素合成

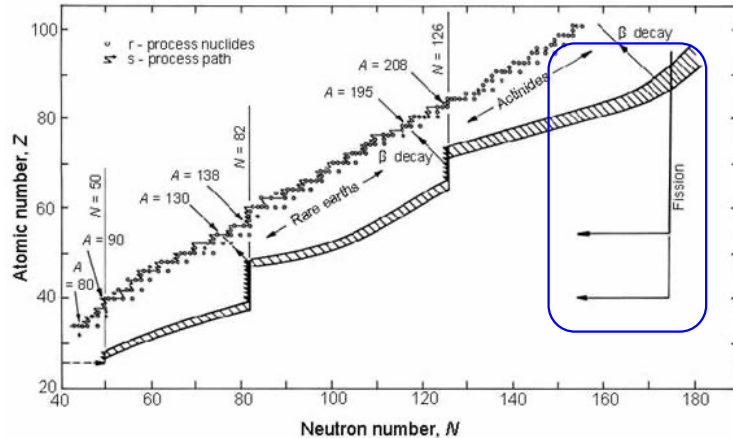


中性子過剰核の核分裂

→ 低い E^* 、低い $\rho(E^*)$

- ✓ 統計モデルは妥当か?
- ✓ ランジュバンを使ってもいいのか?
- ✓ 経験に依らない記述が欲しい

r-プロセス元素合成における重要な「問い」



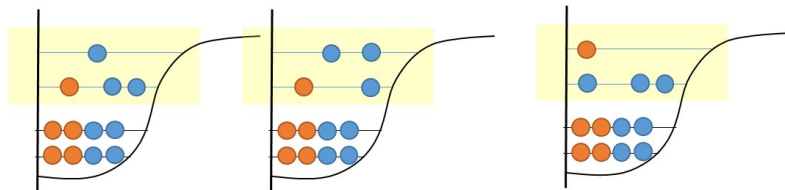
中性子過剰核の核分裂
→ 低い E^* 、低い $\rho(E^*)$

- 中性子過剰核になると核分裂障壁はどう変わる?
- 中性子誘起核分裂に対する対相関の果たす役割は?
- 捕獲過程と核分裂過程の分岐比は中性子過剰核ではどうなる? (n,f) vs (n,γ)
- 中性子過剰核では核分裂とアルファ崩壊の競合はどうなる?

これらの問いを解き明かすためには、微視的アプローチが不可欠

低エネルギー核分裂の微視的記述：我々の取り組み

殻模型

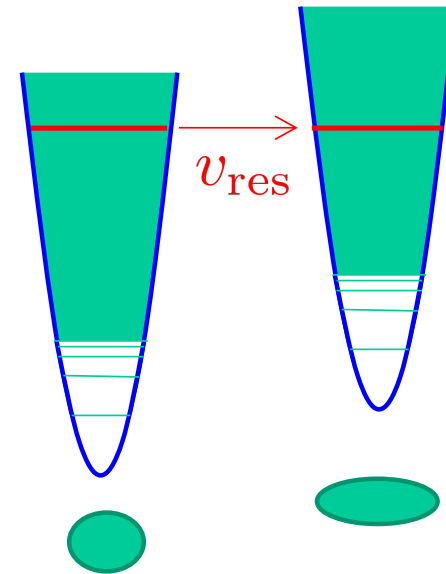


$$|\Psi\rangle = v_1|m_1\rangle + v_2|m_2\rangle + v_3|m_3\rangle + \dots$$

図：清水則孝氏

平均場ポテンシャル中の
多粒子多空孔配位

→ 残留相互作用による混合

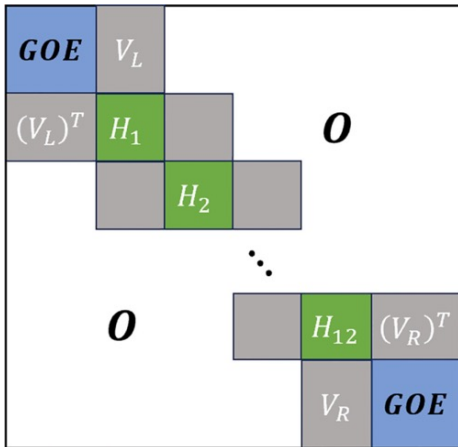
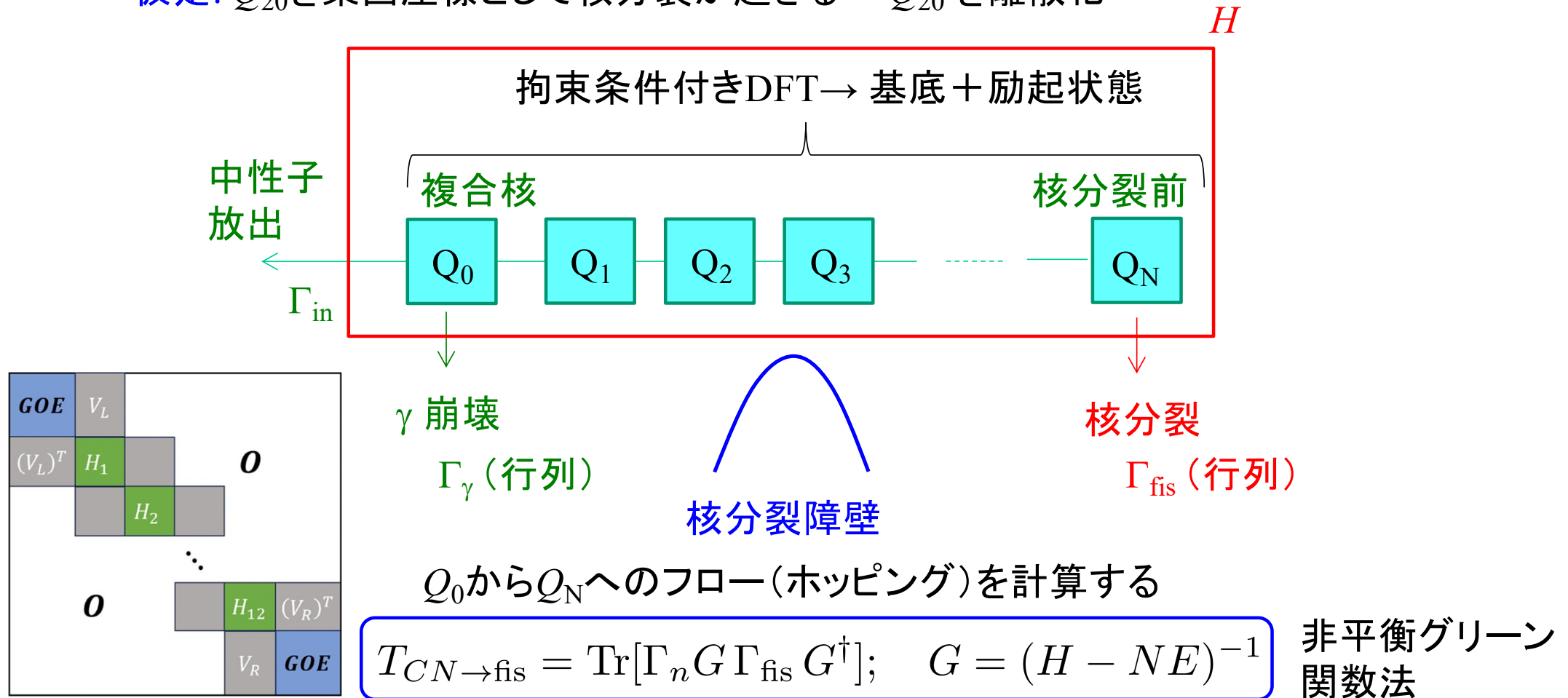


- それぞれの核形状で異なるポテンシャル
- 形状ごとに多粒子多空孔配位
- 残留相互作用による配位のホッピング
→ 形状変化

G.F. Bertsch and K.Hagino, Phys. Rev. C107, 044615 (2023).
K. Uzawa and K. Hagino, Phys. Rev. C110, 014321 (2024).

低エネルギー核分裂の微視的記述：我々の取り組み

仮定: Q_{20} を集団座標として核分裂が起きる→ Q_{20} を離散化



低エネルギー核分裂の微視的記述：我々の取り組み

(補足)

中性子
放出

Γ_{in}

複合核

Q_0

Q_1

Q_2

Q_3

核分裂前

Q_N

γ 崩壊

Γ_γ (行列)

核分裂障壁

核分裂

Γ_{fis} (行列)

Q_0 から Q_N へのフロー (ホッピング) を計算する

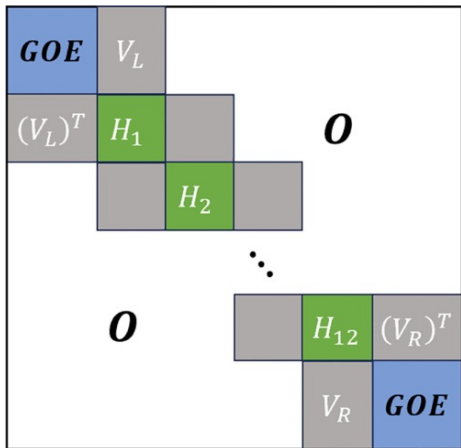
$$T_{CN \rightarrow \text{fis}} = \text{Tr}[\Gamma_n G \Gamma_{\text{fis}} G^\dagger]; \quad G = (H - NE)^{-1}$$

非平衡グリーン
関数法

$$H = H_0 - GP^\dagger P + V_{\text{rand}}$$

非直交基底

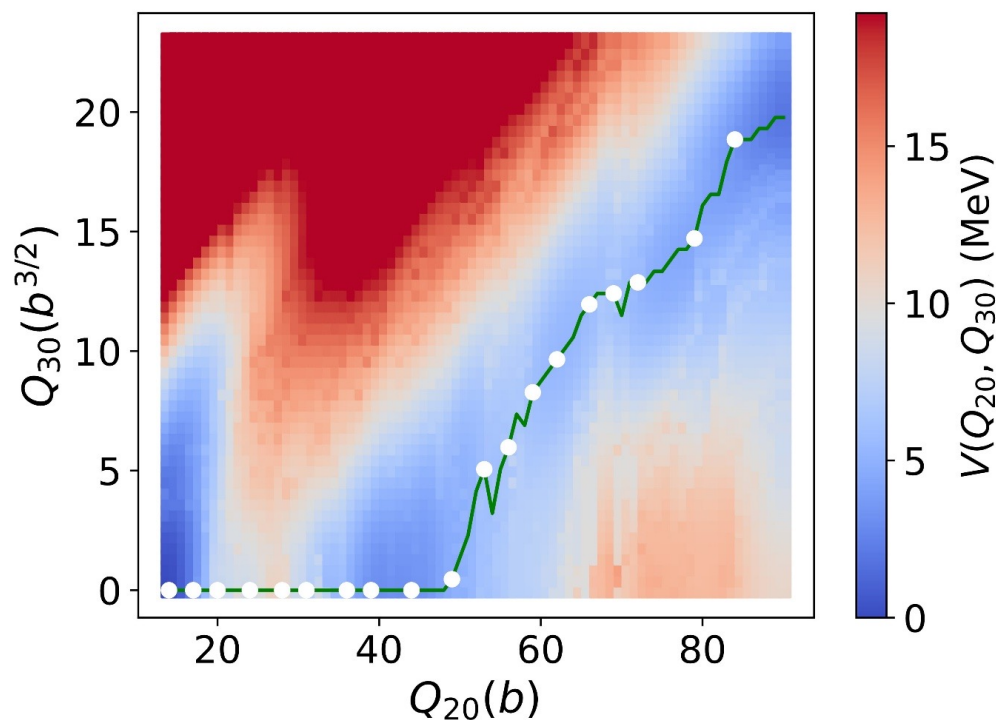
$$\left\{ \begin{array}{l} N_{\mu\mu'} = \langle \Psi_\mu(Q) | \Psi_{\mu'}(Q') \rangle \\ \frac{\langle \Psi_\mu(Q) | H_0 | \Psi_\mu(Q') \rangle}{\langle \Psi_\mu(Q) | \Psi_\mu(Q') \rangle} \equiv \langle \Psi_\mu(Q) | V_{\text{diabatic}} | \Psi_\mu(Q') \rangle \end{array} \right.$$



^{236}U の低エネルギー核分裂への応用

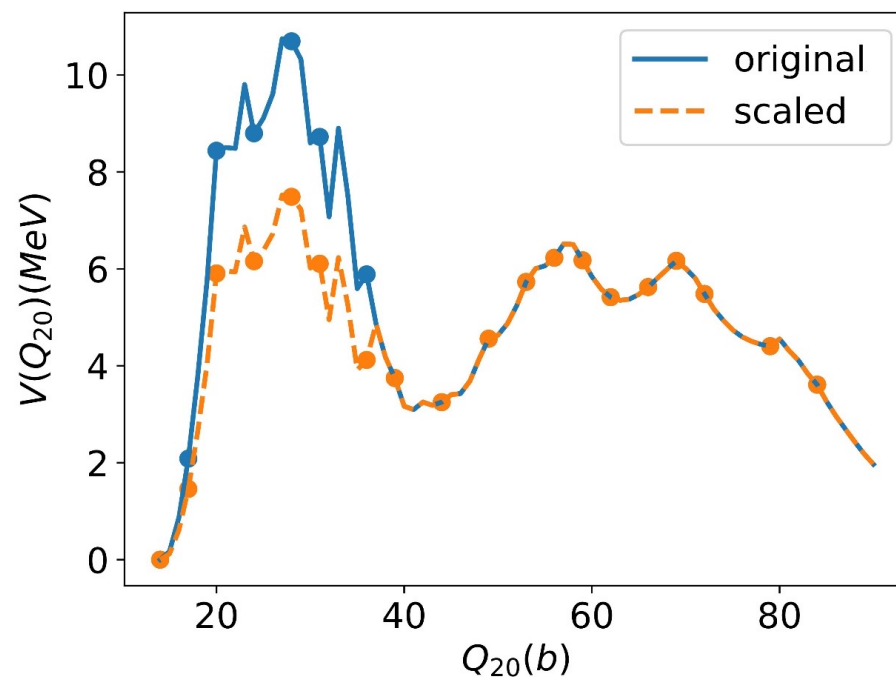
K. Uzawa and K. Hagino, Phys. Rev. C112, 014326 (2025).

Skyrme DFT (UNEDF1)に基づく核分裂経路



$$\langle \Psi_{\mu}(Q) | \Psi_{\mu}(Q') \rangle \sim 0.52$$

対相関を取り入れる前の核分裂障壁

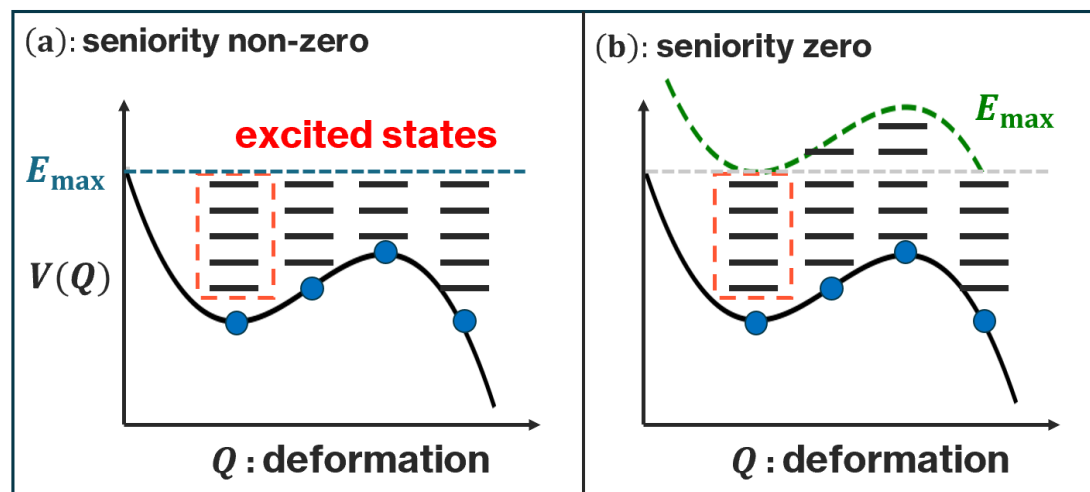


対相関を入れて $B \sim B_{\text{empirical}}$ となるようにスケールする

^{236}U の低エネルギー核分裂への応用

K. Uzawa and K. Hagino, Phys. Rev. C112, 014326 (2025).

E_{max} までの $np-nh$ 配位を構築



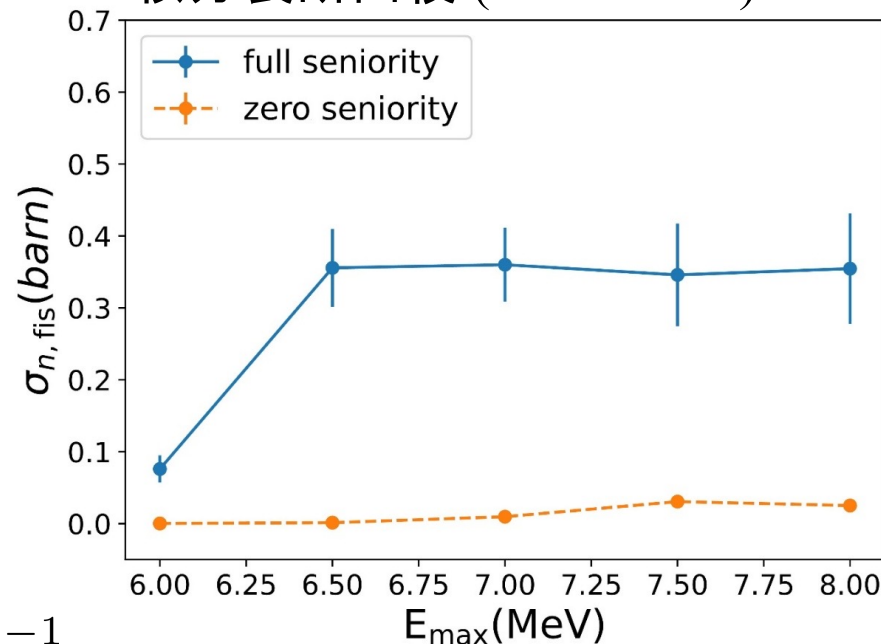
ハミルトニアンの次元 $\sim O(10^5)$

$$T_{CN \rightarrow \text{fis}} = \text{Tr}[\Gamma_n G \Gamma_{\text{fis}} G^\dagger]; \quad G = (H - NE)^{-1}$$

- LSMR 法
- shift-invert Lanczos 法

K. Uzawa and K. Hagino, PRE110, 055302 (2024).

核分裂断面積 ($E = 10$ keV)



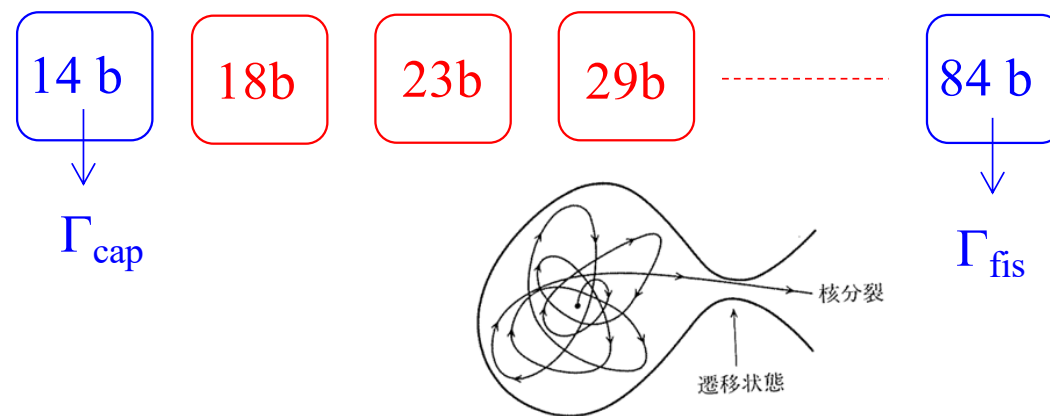
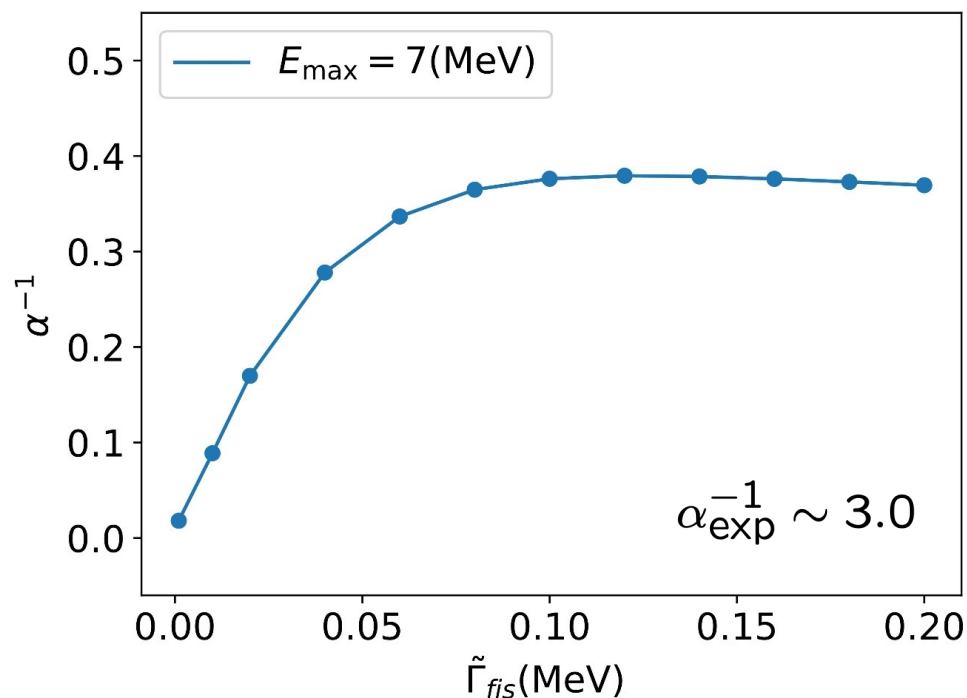
実験データ: $\sigma_{n,\text{fis}} = 3.116$ b

(ファクター 10 の精度で再現に成功)

^{236}U の低エネルギー核分裂への応用

K. Uzawa and K. Hagino, Phys. Rev. C112, 014326 (2025).

核分裂とガンマ崩壊の分岐比

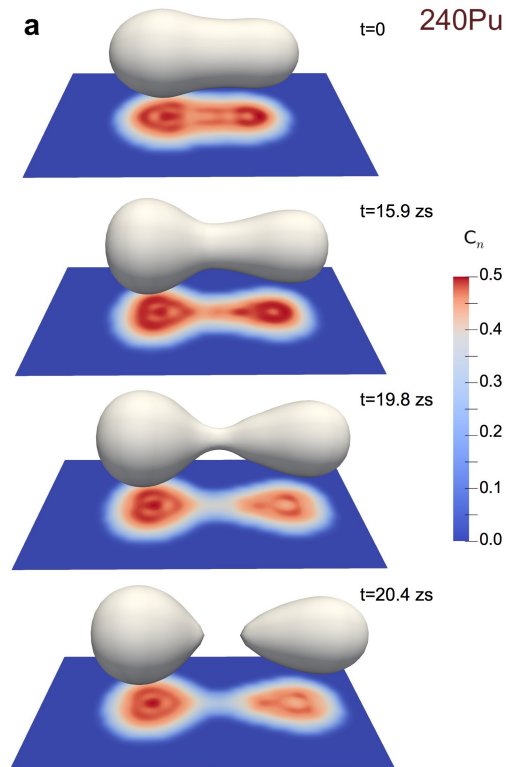


Γ_{fis} (障壁後のダイナミックス)にあまり依らない
→遷移状態理論の主要な仮定

cf. K.Hagino and G.F. Bertsch,
JPSJ 93, 064003 (2024).

cf. 核反応における強吸収に対応

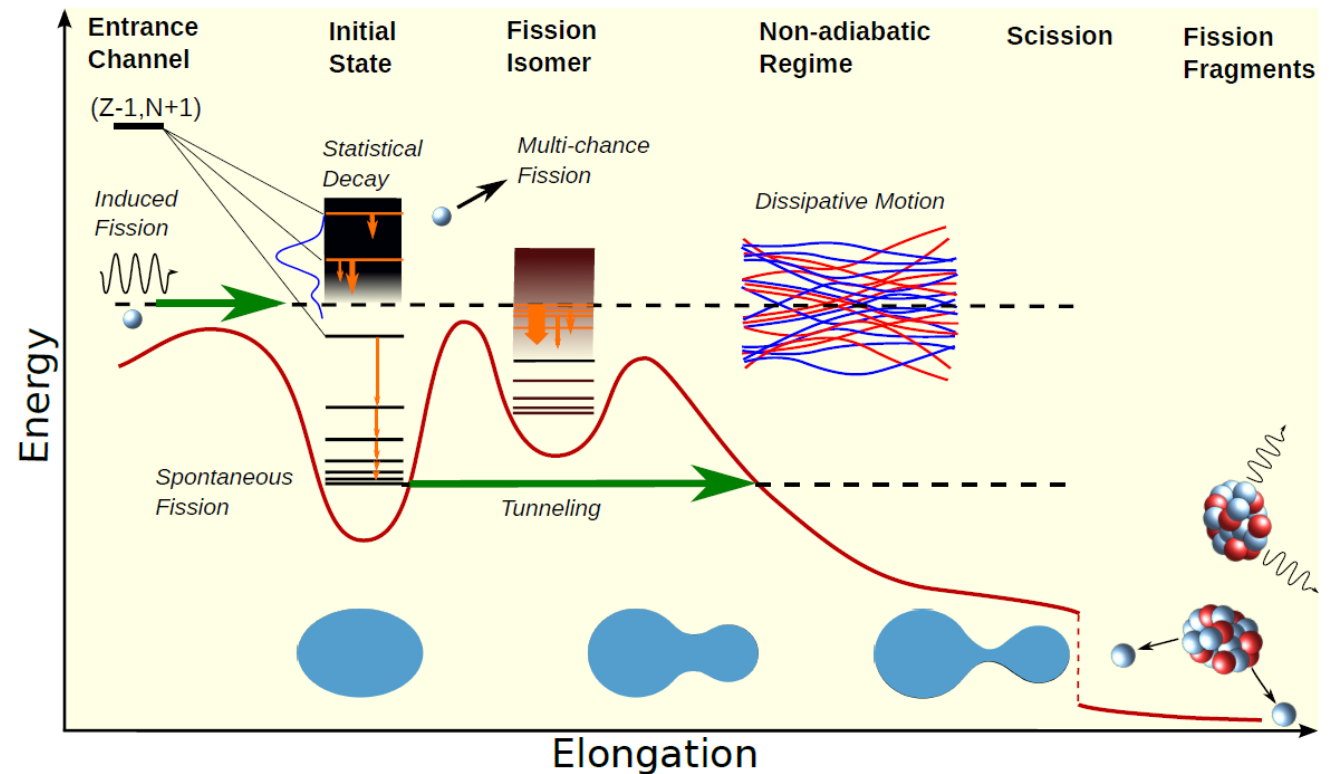
まとめ



- 超重元素
- r-プロセス元素合成
- 中性子過剰核の生成

核分裂＝多体系の大振幅運動

- 量子トンネル効果
- 散逸、量子開放系
- 量子複雑系

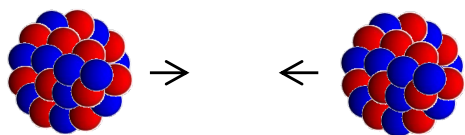


M. Bender et al., J. of Phys. G47, 113002 (2020)

全体のまとめ

重い原子核の量子多体ダイナミクス

→ 量子多体系ならではの面白い現象がいっぱい！



萩野浩一

京都大学大学院理学研究科



1. イントロダクション: 低エネルギー重イオン反応
2. クーロン障壁近傍の重イオン核融合反応と多体トンネル現象
3. 超重元素の物理
4. 核分裂の物理

原子核三者若手夏の学校2026、2026年8月2日～6日、プラザヴェルデ(静岡県沼津市)

崩壊幅に対するWKB公式

$$H_{\text{fis}} = -\frac{d}{dq} \left(\frac{\hbar^2}{2B(q)} \frac{d}{dq} \right) + V(q)$$

慣性質量 $B(q)$:

- 流体模型 (Werner-Wheeler質量)

K.T.R. Davies, A.J. Sierk, and J.R. Nix, PRC13, 2385 (1976)

- クランキング近似

$$B(q) = 2\hbar^2 \sum_{k \neq 0} \frac{|\langle k | \partial / \partial q | 0 \rangle|^2}{E_k - E_0} \quad \leftarrow \text{断熱摂動論 (Ring-Schuck, Sec. 12.3.7)}$$

- 局所RPA近似

$$|\Psi_k\rangle = \hat{O}_k |\Psi_0\rangle \leftarrow [\hat{H}, \hat{O}_k] |\Psi_0\rangle \sim \hbar\omega_k |\Psi_0\rangle$$

K. Washiyama, N. Hinohara,
T. Nakatsukasa,
PRC103, 014306 (2021)

$$\begin{aligned} Q_k &= \sqrt{\frac{1}{2M_k\omega_k}} (\hat{O}_k + \hat{O}_k^\dagger) \\ P_k &= -i\sqrt{\frac{M_k\omega_k}{2}} (\hat{O}_k - \hat{O}_k^\dagger) \end{aligned} \quad \rightarrow M_k$$

(補足) 断熱摂動論 (adiabatic perturbation theory) (Ring-Schuck, Sec. 12.3.7)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = H(t) |\Psi(t)\rangle \quad \leftarrow H(t) |k(t)\rangle = E_k(t) |k(t)\rangle$$

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_k a_k(t) e^{i\phi_k(t)} |k(t)\rangle; \quad \phi_k(t) = - \int^t dt' E_k(t')/\hbar$$

$$\rightarrow \dot{a}_l = - \sum_k \langle l | \frac{\partial}{\partial t} |k\rangle e^{i\phi_{kl}} a_k = -\dot{q} \sum_k \langle l | \frac{\partial}{\partial q} |k\rangle e^{i\phi_{kl}} a_k$$

$$\rightarrow a_l \sim - \frac{i\hbar \dot{q}}{E_l - E_0} \langle l | \frac{\partial}{\partial q} |0\rangle e^{i\phi_{0l}} \quad (dq/dt \text{ が小さい場合})$$

$$\rightarrow E(q, \dot{q}) = \langle \Psi(t) | H | \Psi(t) \rangle = \frac{1}{2} B(q) \dot{q}^2 + V(q)$$

$$B(q) = 2\hbar^2 \sum_{k \neq 0} \frac{|\langle k | \partial / \partial q | 0 \rangle|^2}{E_k - E_0}$$

(cranking mass)

誘起核分裂:統計模型

簡単な導出: サドルに状態が1つだけの場合

詳細つり合い:

$$\rho_C(E^*)\Gamma_{CN\rightarrow f} = \rho_f(E)\Gamma_{f\rightarrow CN}$$

長さ L の箱 $\rightarrow$

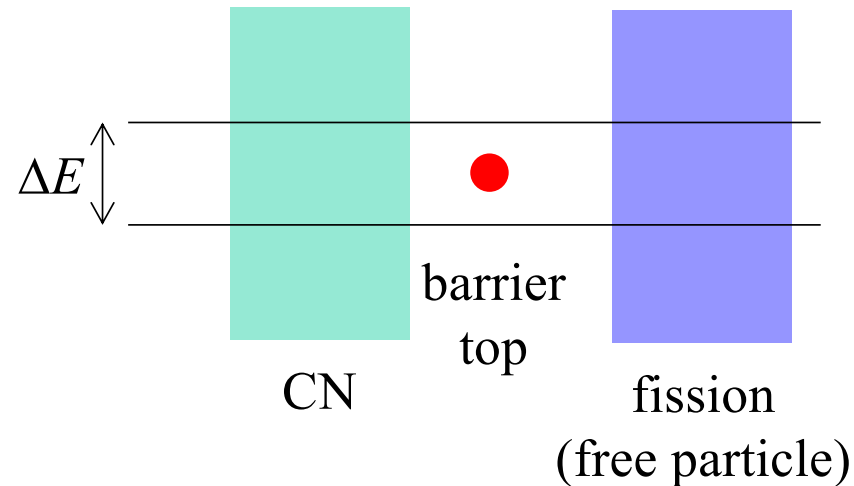
$$\phi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(kx) = \frac{-i}{\sqrt{2L}} (e^{ikx} - e^{-ikx})$$

$$kL = n\pi \rightarrow \frac{dk}{dn} = \frac{\pi}{L} \rightarrow \rho_f(E) = \left(\frac{dE}{dn}\right)^{-1} = \frac{mL}{k\pi\hbar}$$

$$\Gamma_{f\rightarrow C} = \left| \frac{-i}{\sqrt{2L}} e^{-ikx} \right|^2 T \frac{k\hbar}{m} = \frac{k\hbar T}{2Lm} = \frac{T}{2\pi} \left(\frac{k\pi\hbar}{mL} \right)$$



$$\Gamma_{CN\rightarrow f} = \frac{T}{2\pi\rho_C(E^*)}$$



(補足) $E^* \gg B_f$ で成り立つ近似式

$$\Gamma_f = \frac{1}{2\pi\rho_{\text{gs}}(E^*)} \int_0^{E^*-B_f} \rho_{\text{sd}}(E^* - B_f - K) dK$$

フェルミガス模型による準位密度: $\rho(E^*) \propto e^{2\sqrt{aE^*}}; \quad E^* = aT^2$

$$\Gamma_f = \frac{1}{2\pi e^{2\sqrt{aE^*}}} \int_0^{E^*-B_f} e^{2\sqrt{a(E^*-B_f-K)}} dK$$

$$\sim e^{2\sqrt{a(E^*-B_f)}(1-\frac{K}{2(E^*-B_f)})} = e^{2\sqrt{a(E^*-B_f)}} e^{-\sqrt{\frac{a}{E^*-B_f}}K}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E^*-B_f}{a}} e^{-2\sqrt{aE^*}} e^{2\sqrt{a(E^*-B_f)}} (1 - e^{-\sqrt{a(E^*-B_f)}})$$

$$\sim \sqrt{\frac{E^*}{a}} \sim e^{2\sqrt{aE^*}(1-\frac{B_f}{2E^*})} \sim 1$$

$$\sim \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E^*}{a}} e^{-\sqrt{\frac{a}{E^*}}B_f} \rightarrow \Gamma_f = \frac{T}{2\pi} e^{-B_f/T}$$

V.M. Strutinsky: PLB47, 121 (1973)

$$\Gamma_f \rightarrow \frac{\hbar\omega_0}{T} \frac{T}{2\pi} e^{-B_f/T} = \frac{\hbar\omega_0}{2\pi} e^{-B_f/T}$$

(補足) $E^* \gg B_f$ で成り立つ近似式

$$\Gamma_f = \frac{1}{2\pi e^{2\sqrt{aE^*}}} \int_0^{E^* - B_f} e^{2\sqrt{a(E^* - B_f - K)}} dK \sim \frac{T}{2\pi} e^{-B_f/T} \rightarrow \frac{\hbar\omega_0}{2\pi} e^{-B_f/T}$$

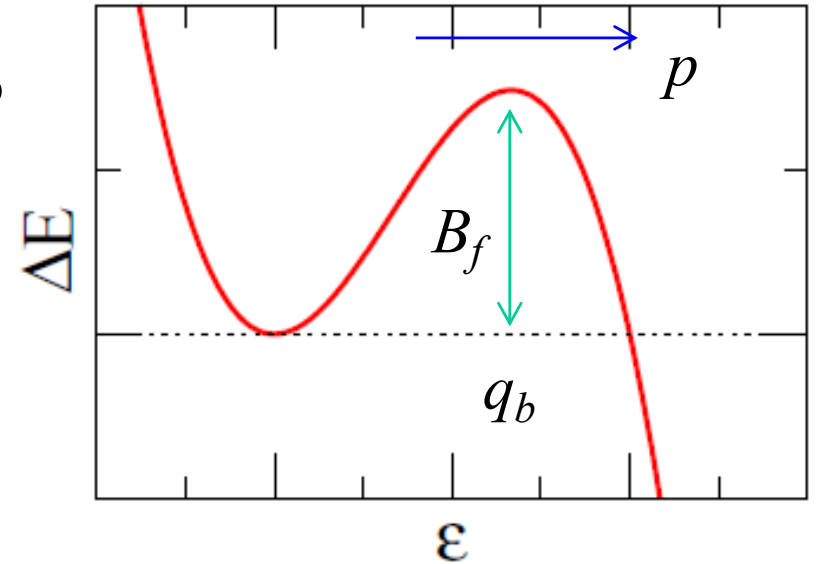
古典的な導出法: サドル点におけるフラックスを計算する

$$\Gamma = \frac{\int dp dq e^{-\beta(\frac{p^2}{2m} + V(q))} \delta(q - q_b) \frac{p}{m} \theta(p)}{\int dp dq e^{-\beta(\frac{p^2}{2m} + V(q))}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta p^2/2m} = \sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}}, \quad \int_0^{\infty} dp p e^{-\beta p^2/2m} = \frac{m}{\beta},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq e^{-\beta V(q)} \delta(q - q_b) = e^{-\beta B_f}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{-\beta V(q)} \sim \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{-\beta \frac{1}{2} m \omega_0^2 (q - q_0)^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{m\beta\omega_0^2}}$$

$$\rightarrow \Gamma_f = \frac{\hbar\omega_0}{2\pi} e^{-\beta B_f}$$



自由エネルギーとの関係

分配関数: $Z = \int dp dq e^{-\beta(\frac{p^2}{2m} + V(q))} = \sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}} \int dq e^{-\beta V(q)}$

$$\rightarrow \text{Im}F = \text{Im} \left(-\frac{\ln Z}{\beta} \right) = -\frac{\omega_0}{2\omega_b\beta} e^{-\beta B_f} \quad \longrightarrow \quad \Gamma = -\frac{\hbar\omega_b\beta}{\pi} \text{Im}F = -\frac{2}{\hbar} \frac{T_c}{T} \text{Im}F$$
$$\left(k_B T_c = \frac{\hbar\omega_b}{2\pi} \right)$$

自由エネルギーとの関係

分配関数: $Z = \int dp dq e^{-\beta(\frac{p^2}{2m} + V(q))} = \sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}} \int dq e^{-\beta V(q)}$

$q=q_0$ からの寄与: $\int_{-\infty}^{\infty} dq e^{-\beta V(q)} \sim \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{-\beta \frac{1}{2} m \omega_0^2 (q-q_0)^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{m\beta\omega_0^2}}$

$q=q_b$ からの寄与: $\int_{-\infty}^{\infty} dq e^{-\beta V(q)} \sim \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{-\beta(B_f - \frac{1}{2} m \omega_b^2 (q-q_b)^2)}$

複素 q へ解析接続 $= e^{-\beta B_f} \cdot i \int_0^{\infty} dq' e^{-\beta \frac{1}{2} m \omega_b^2 q'^2} = e^{-\beta B_f} \cdot \frac{i}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{m\beta\omega_b^2}}$

$\rightarrow Z = \sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{m\beta\omega_0^2}} + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{m\beta\omega_b^2}} e^{-\beta B_f} \right) = \frac{2\pi}{\beta\omega_0} \left(1 + \frac{i}{2} \frac{\omega_0}{\omega_b} e^{-\beta B_f} \right)$

$\left(k_B T_c = \frac{\hbar\omega_b}{2\pi} \right)$

$\rightarrow \text{Im} F = \text{Im} \left(-\frac{\ln Z}{\beta} \right) = -\frac{\omega_0}{2\omega_b\beta} e^{-\beta B_f} \rightarrow \Gamma = -\frac{\hbar\omega_b\beta}{\pi} \text{Im} F = -\frac{2}{\hbar} \frac{T_c}{T} \text{Im} F$

