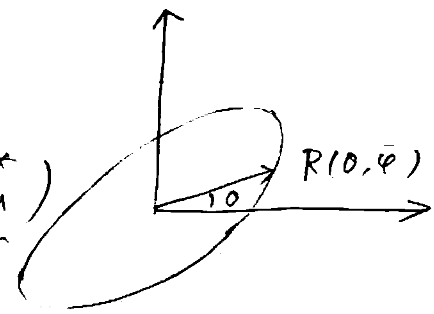
▨ 原子核の変形と回転, 振動について

1. 変形パラメーター

一般に (θ,φ) の任意の関数は $Y_{\lambda\mu}(\theta,\varphi)$ で展開が可.

$$R(\theta,\varphi)=R_0\Big(1+\sum_{\lambda,\mu}\alpha_{\lambda\mu}\underbrace{Y^*_{\lambda\mu}}_{=(-)^{\mu}Y_{\lambda-\mu}}\Big)$$



・簡単のため $\lambda=2$ に限定（四重極変形）

$$R(\theta,\varphi)=R_0\Big(1+\sum_{\mu=-2}^{2}\alpha_{2\mu}\,Y^*_{2\mu}(\theta,\varphi)\Big)$$

$$Y_{20}\propto 3\cos^2\theta-1$$
$$Y_{2\pm1}\propto \sin\theta\cos\theta\, e^{\pm i\varphi}$$
$$Y_{2\pm2}\propto \sin^2\theta\, e^{\pm 2i\varphi}$$

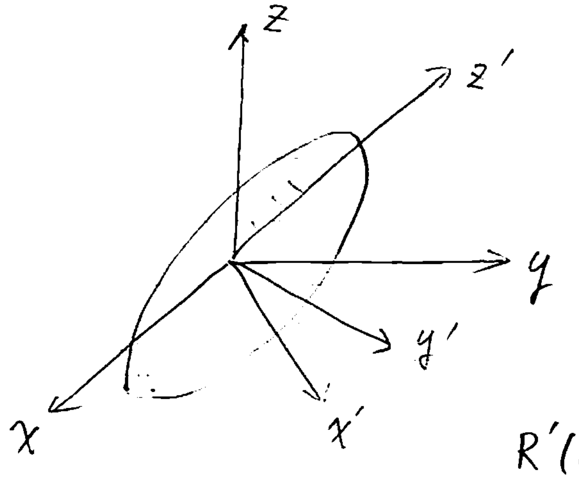
(note) $\theta\to\pi-\theta$

$$Y_{20}\to Y_{20}$$
$$Y_{2\pm2}\to Y_{2\pm2}$$
$$Y_{2\pm1}\to -Y_{2\pm1}$$

$\varphi\to\pi-\varphi$

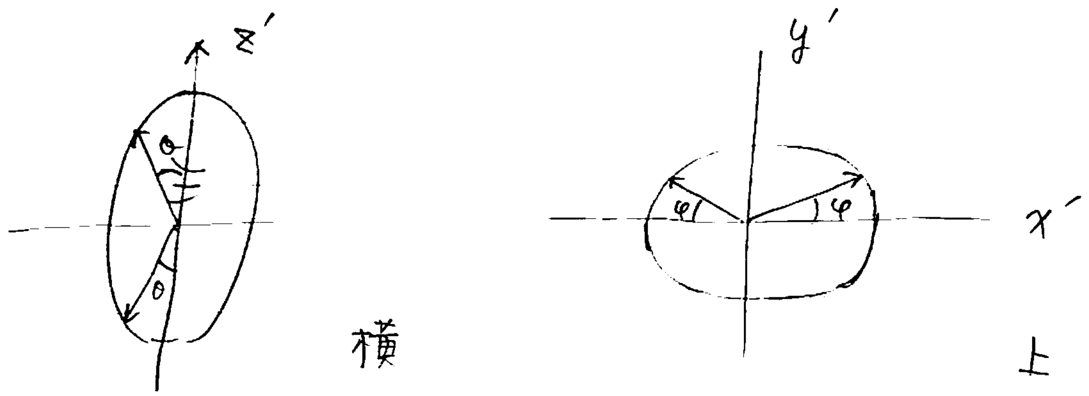
$$Y_{20}\to Y_{20}$$
$$Y_{2\pm2}\to Y_{2\mp2}$$

軸をとり直すことによって表現がより簡単になる
(物体固定系への座標変換)



$$R'(\theta', \varphi') = R_0 \left(1 + \sum_{\mu=-2}^{2} a_{2\mu} Y_{2\mu}^{*}(\theta', \varphi')\right)$$

・キウィ・フルーツを想像.



と軸をとる。

$$R'(\theta', \varphi') = R'(\pi - \theta', \varphi')$$

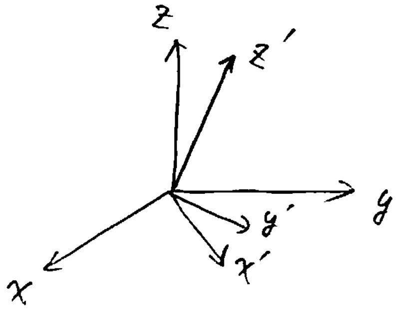
$$\longrightarrow a_{21} = a_{2-1} = 0 \qquad (Y_{2\pm1} \to -Y_{2\pm1})$$

$$R'(\theta', \varphi') = R'(\theta', \pi - \varphi')$$

$$\longrightarrow a_{22} = a_{2-2} \qquad (Y_{2\pm2} \to Y_{2\mp2})$$

↓ 5つの自由度 $\alpha_{2\mu}$ $(\mu = -2 \sim 2)$ の代わりに

形の自由度 2 (a_{20}, a_{22}) + 軸を指定する角度 3
（オイラー角）



（z'軸を指定するのに2つの角度 + z'軸のまわりにどれだけ回転させるかで1つの角度）

$$a_{20} \equiv \beta \cos \gamma$$
$$a_{22} = a_{2-2} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma$$

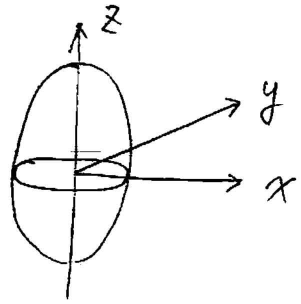
↓

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left\{ 1 + \beta \cos \gamma \, Y_{20}(\theta) + \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma \left(Y_{22}(\theta,\varphi) + Y_{2-2}(\theta,\varphi) \right) \right\}$$

$$= R_0 \left\{ 1 + \beta \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \left(\cos \gamma (3\cos^2\theta - 1) + \sqrt{3} \sin \gamma \sin^2\theta \cos 2\varphi \right) \right\}$$

（ダッシュは省略）

○ 球形からのずれ



$$\delta R_z = R(0,0) - R_0 = R_0\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\,\beta\cos\gamma$$

$$\delta R_x = R(\tfrac{\pi}{2},0) - R_0 = R_0\beta\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\,(-\cos\gamma+\sqrt{3}\sin\gamma) = R_0\beta\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\,\cos(\gamma-\tfrac{2\pi}{3})$$

$$\delta R_y = R_0\beta\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\,\cos(\gamma+\tfrac{2\pi}{3})$$

↓

$$(\delta R_x)^2+(\delta R_y)^2+(\delta R_z)^2 = R_0^2\beta^2\cdot\frac{5}{4\pi}\cdot\frac{3}{2}$$

↓ β ⟷ 球形からのずれの度合を表す（変形度）

(note) $\gamma=0$ の時

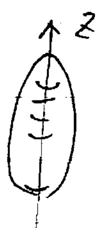
$R(\theta) = R_0(1+\beta Y_{20}(\theta))$

← φ 依存性なし
"軸対称変形"

↓

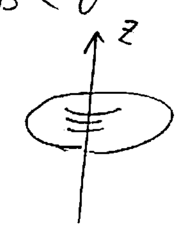
γ ⟷ 軸対称からのずれを表す

$\beta>0$



プロレート変形

$\beta<0$



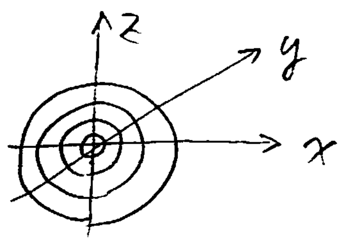
オブレート変形

(note) $\gamma = \frac{\pi}{3}$ の時

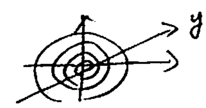
$$\delta R_y = -R_0 \beta \sqrt{\frac{5}{4\pi}}$$

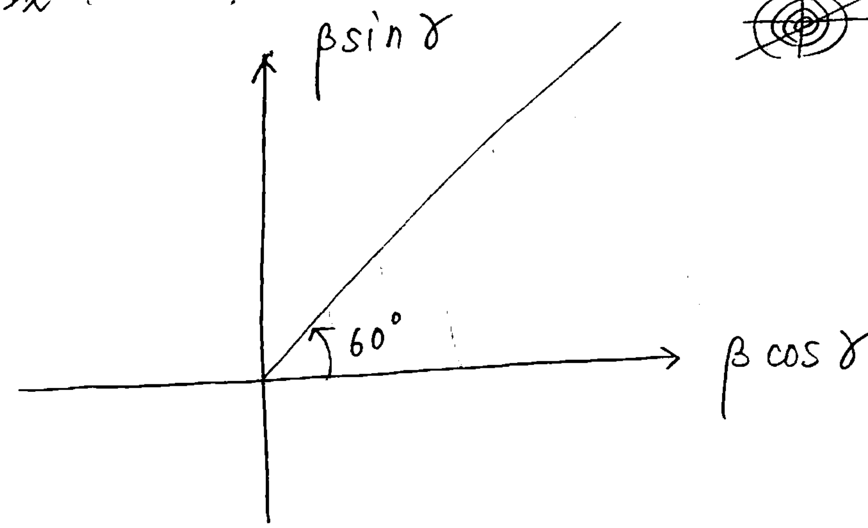
$$\delta R_x = \delta R_z = \frac{1}{2} R_0 \beta \sqrt{\frac{5}{4\pi}}$$

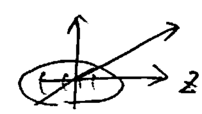
← y軸まわりの軸対称変形



↘ $\beta \geq 0, \quad 0 \leq \gamma \leq 60°$ で全ての四重極変形を表現できる.







2. 回転と慣性モーメント

$$T = \frac{1}{2} B \sum_{\mu} |\dot{\alpha}_{2\mu}|^2$$

→ 物体固定系への変換

$$T = \cdots = T_{rot} + T_{vib}$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} \mathcal{J}_k \omega_k^2$$

(物体固定軸まわりの回転)

↔ 物体固定軸の時間変化

$$\mathcal{J}_k = 4B\beta^2 \sin^2\left(\gamma - \frac{2\pi}{3} k\right)$$

$$T_{vib} = \frac{1}{2} B \left(\dot{\beta}^2 + \beta^2 \dot{\gamma}^2\right)$$

形状の時間変化 (振動)

・rotational part

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} \mathcal{J}_k \omega_k^2 \underset{\text{量子化}}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{3} \frac{I_k^2}{2\mathcal{J}_k}$$

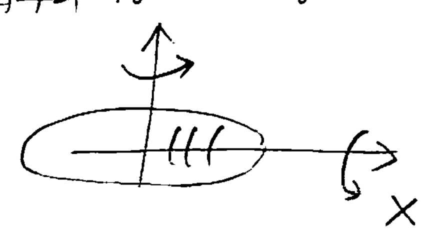
* 以下，軸対称変形のみを考える ($\gamma=0$)

↓

$$\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2 , \quad \mathcal{J}_3 = 0$$

↕

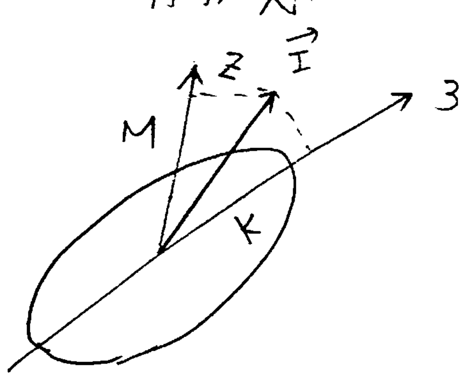
量子力学的には対称軸周りの回転はない。



$$\Downarrow \quad T_{rot} = \frac{I_1^2 + I_2^2}{2\mathcal{J}} = \frac{\vec{I}^2 - I_3^2}{2\mathcal{J}}$$

⇓

固有状態は $\vec{I}^2$, $\underset{M}{\underset{\shortparallel}{I_z}}$, $\underset{K}{\underset{\shortparallel}{I_3}}$ の同時固有状態



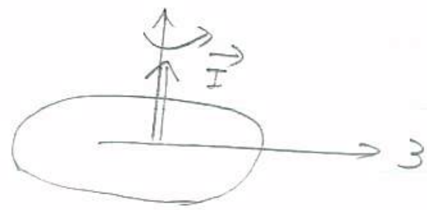
$$|IMK\rangle = \sqrt{\frac{2I+1}{8\pi^2}}\; D^{I}_{MK}(\Omega)$$

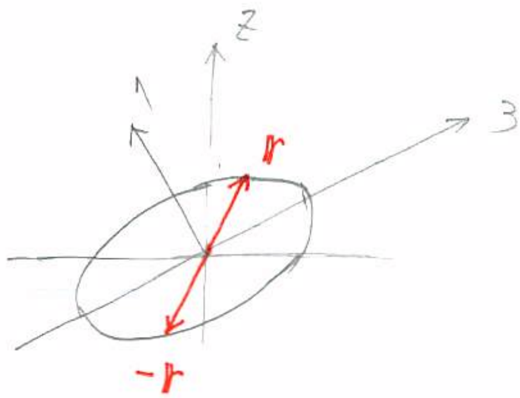
Wigner の D 関数　　回転演算子

$$D^{I}_{MK} \equiv \langle IM|\hat{R}(\Omega)|IK\rangle$$

K = 0 のとき

$$D^{I}_{M\,K=0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2I+1}}\; Y^{*}_{IM}$$





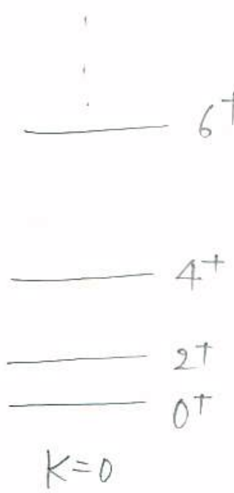
$$Y_{IM}(\hat{r}) = Y_{IM}(-\hat{r})$$
$$= (-)^{M}\, Y_{IM}(\hat{r})$$

⇓

M は偶数

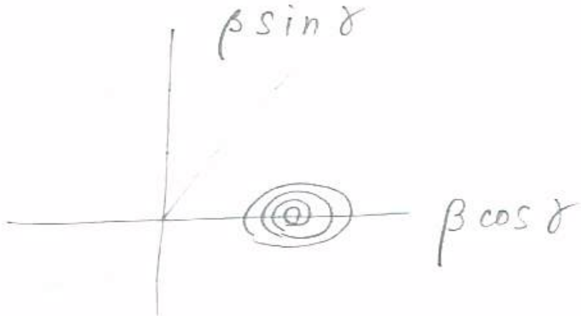
(note) 偶々核の基底状態は $I^{\pi} = 0^{+}$ → $K = 0$

基底状態バンド



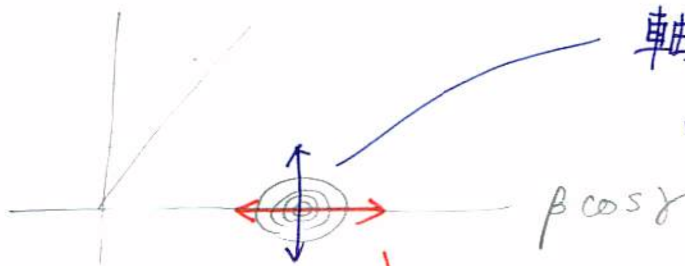
$$E_I = \frac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathcal{J}}$$

3. 振動運動



軸対称変形
$\leftrightarrow$ $\gamma = 0$ 上に エネルギー
極小点

極小点まわりの
2つの振動モード



軸対称を破る振動 $\leftrightarrow$ $Y_{2\pm 2}$
$\leftrightarrow$ $K=2$
"γ 振動"

軸対称を保つ振動 $\leftrightarrow$ Y_{20}
$\leftrightarrow$ $K=0$
"β 振動"