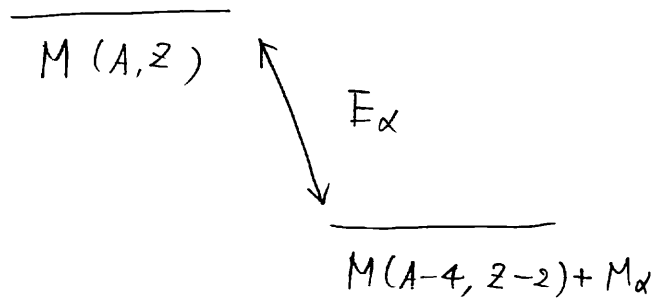


#### 四 $\alpha$ 崩壊に>117

実験的及び観測量:  $T_{1/2}$  と  $E_\alpha$



$E_\alpha$  が"わず"かに変化していても  $T_{1/2}$  が"何々"も変わる

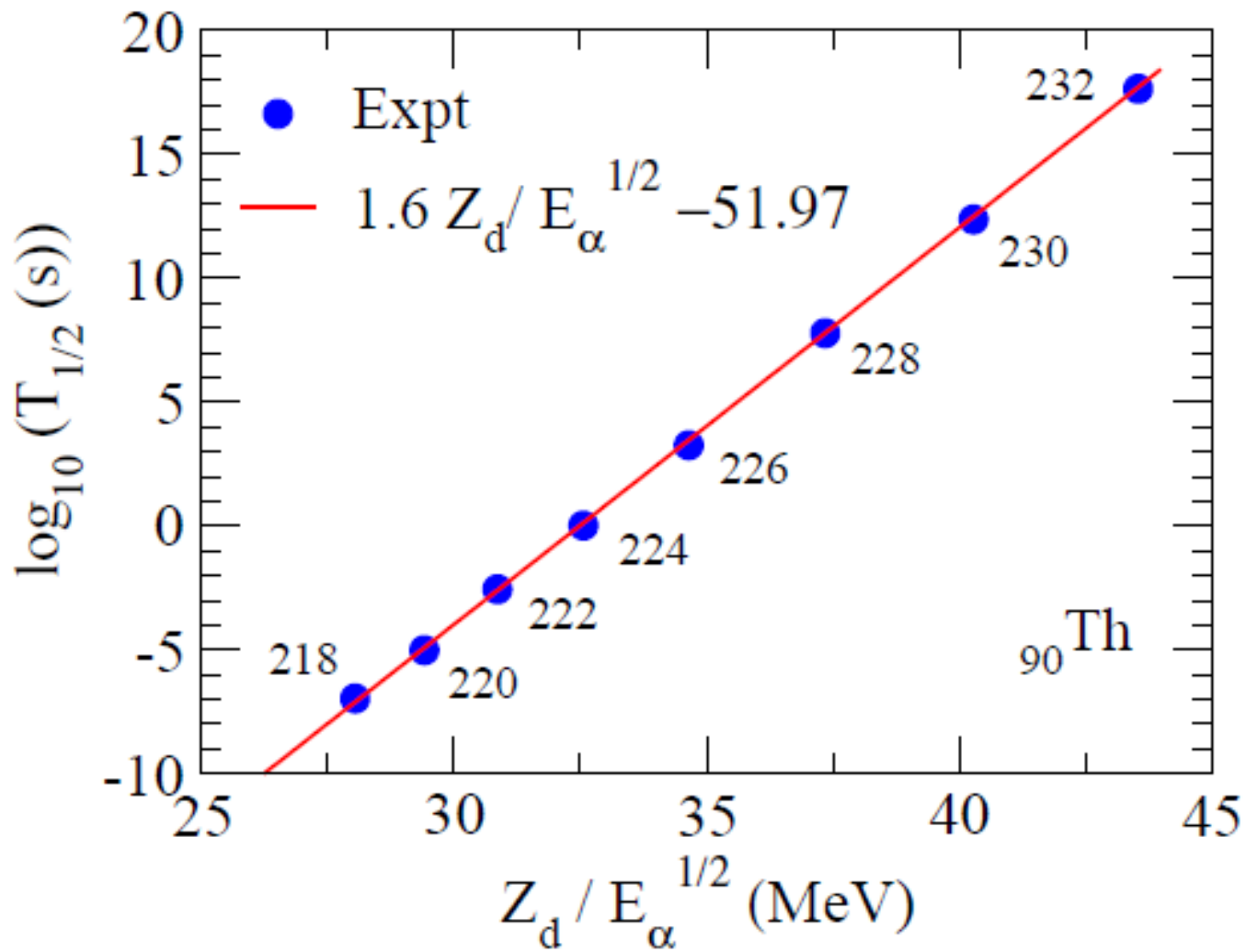
例)  $^{232}\text{Th}$ :  $E_\alpha = 4 \text{ MeV}$ ,  $T_{1/2} = 1.4 \times 10^{10} \text{ 年}$   
 $^{210}\text{Th}$ :  $E_\alpha = 10 \text{ MeV}$ ,  $T_{1/2} = 0.11 \mu\text{sec}$

→ トンネル効果を示唆 (ガモフ 1928年)

Geiger-Nuttall 則 (1911)

$$\log_{10} T_{1/2} \sim a + b \cdot \frac{Z-2}{\sqrt{E_\alpha}}$$

# $\alpha$ 崩壊: Geiger-Nuttal 則



cf. B. Buck, A.C. Merchant, and S.M. Perez, PRL65('90)2975

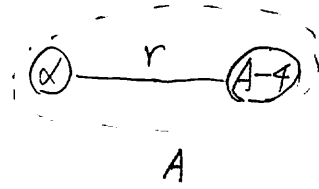
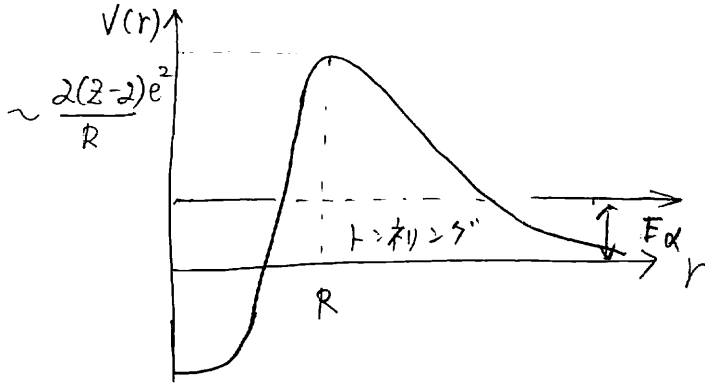
$$R = 1.1 \times (230^{1/3} + 4^{1/3}) = 8.49 \text{ fm}$$

$$\frac{2 \times 88}{R} e^2 = \frac{2 \times 88}{8.49} \times \frac{197}{137} = 29.8 \text{ MeV} \leftrightarrow 4 \sim 10 \text{ MeV}$$

$$R = 1.4 \times \dots \text{ \&LT;LTt}$$

$$V_b = 22.1 \text{ MeV}$$

2. ガモフによるα崩壊の説明



$$E_\alpha < \frac{2(2-2)e^2}{R}$$

→ トンネル効果による崩壊

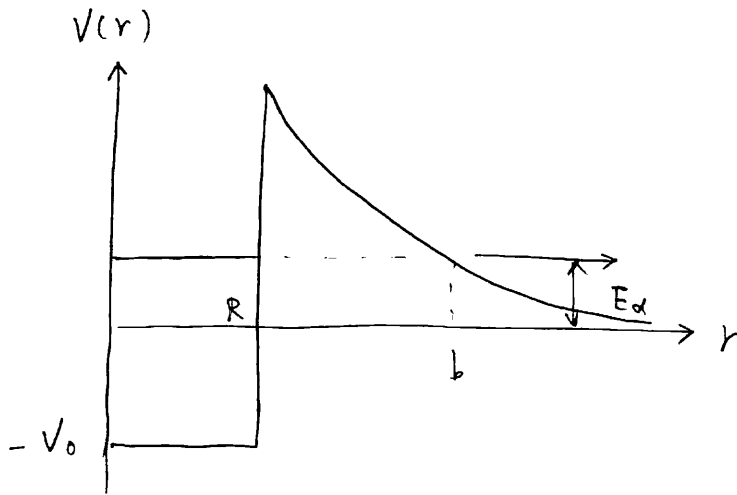
ガモフ:

$$\lambda = \omega \cdot P$$

$\omega$ : 単位時間当りにポテンシャル

を hit する数 (attempt frequency)

$P$ : トンネル効果の確率



$$\frac{1}{2} M \tilde{v}^2 = E + V_0$$

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & (r < R) \\ \frac{2,22 e^2}{r} & (r > R) \end{cases}$$

と単純化すると

$$\omega \sim \frac{\tilde{v}}{2R}, \quad P = e^{-2 \int_R^b \sqrt{\frac{2M}{\hbar^2} \left( \frac{2,22 e^2}{r} - E \right)}} dr$$

$$E = \frac{z_1 z_2 e^2}{b}$$

2

$$P = e^{-G}$$

$$G = 2 \int_R^b dr \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2} \left( \frac{z_1 z_2 e^2}{r} - E \right)}$$

$$= 2 \cdot \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}} \sqrt{z_1 z_2 e^2} \int_R^b \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}} dr$$

$$\sqrt{b} \left[ \cos^{-1} \sqrt{\frac{R}{b}} - \sqrt{\frac{R}{b} - \frac{R^2}{b^2}} \right]$$

$$\frac{\pi}{2} - 2 \cdot \sqrt{\frac{R}{b}} \quad (b \gg R)$$

$$\sim \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}} \sqrt{z_1 z_2 e^2} \cdot \sqrt{\frac{R}{b}} \left( \pi \sqrt{\frac{b}{R}} - 4 \right)$$

$$= \sqrt{\frac{2\mu R}{\hbar^2}} \cdot z_1 z_2 e^2 \left( \pi \sqrt{\frac{z_1 z_2 e^2}{RE}} - 4 \right)$$

$$\lambda = \lambda_0 e^{-\alpha \frac{Z_1}{\sqrt{E}} + \beta}$$

$$T_{1/2} = \frac{1}{\lambda} \cdot \log 2 = C \cdot e^{\alpha \frac{Z_1}{\sqrt{E}}}$$

$$\boxed{\log T_{1/2} = \log C + \alpha \cdot \frac{Z_1}{\sqrt{E}}} \leftarrow \text{Geiger-Nuttall}$$

(note)

$\beta \leftarrow R$  に依存

$\sim E$  と  $\lambda$  から  $R$  を決定できる

$$R = r_0 A^{1/3}$$

$$r_0 = 1.48 \text{ fm}$$

(note) 電子散乱の実験:  $r_0 = 1.1 \sim 1.2 \text{ fm}$

- ・ ポテンシャルが現実的にはもっと滑らか
- ・  $\alpha$  粒子の大きさ
- ・ 多体系の中で  $\alpha$  粒子が析出する確率  
( $\alpha$  spectroscopic factor)

$$A_{\alpha}^2 = |\langle \psi_i(A) | \psi_f(A-4) \cdot \varphi_{\alpha} \rangle|^2$$

### 3. 共鳴状態の理論

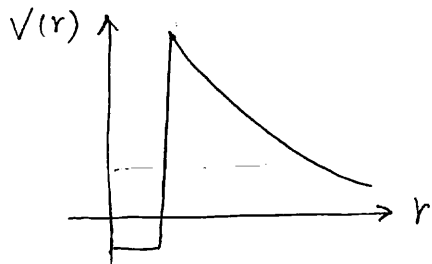
$$V(r) \xrightarrow{?} E_{res}, \Gamma$$

どう求めるか

共鳴幅  
"位"

連続スペクトルからどのように  
 $E_{res}$  を探すか?

#### 3.1. 共鳴散乱理論



$$u_l(r) \rightarrow e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})} - S_l e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})}$$

"  $e^{2i\delta_l}$

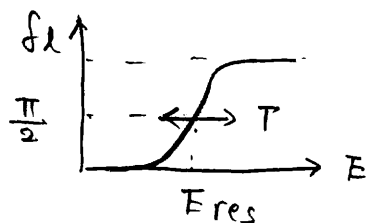
$$\psi(r) \rightarrow e^{ik \cdot r} + f(\theta) \cdot \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$f(\theta) = \sum_l (2l+1) \frac{S_l - 1}{2ik} P_l(\cos\theta)$$

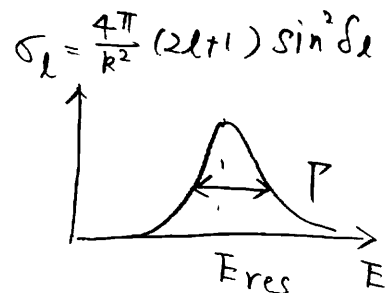
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

$$\sigma = \int d\Omega \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l$$

位相のずれが

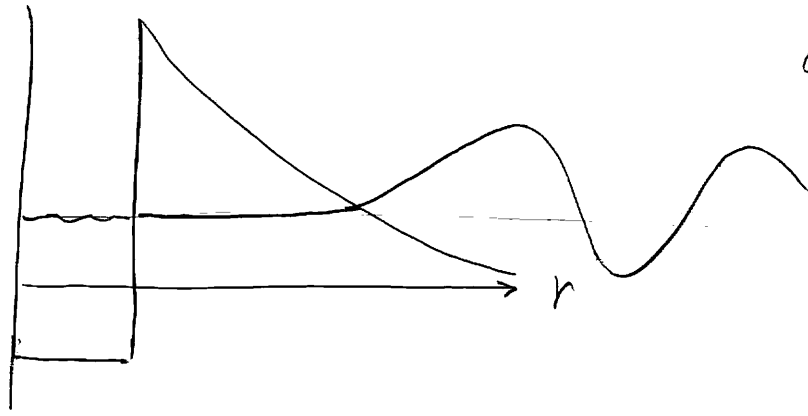


のよう大振るよう時

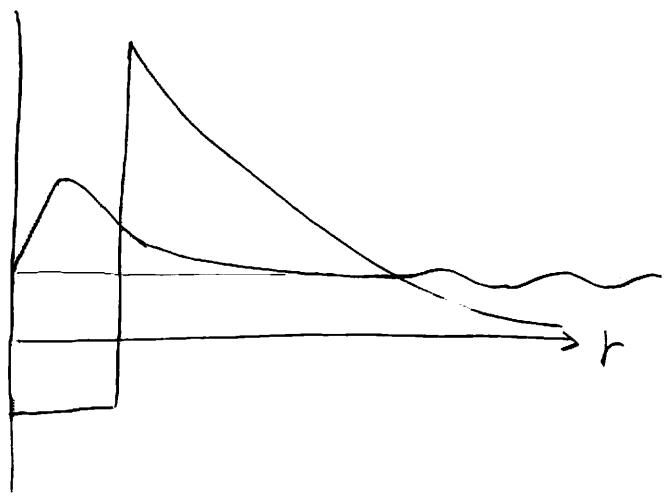


(共鳴散乱)

波動関数の振るまい



off-resonance



on-resonance

# 共鳴散乱理論

自由粒子の運動:  $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi = \frac{k^2\hbar^2}{2m}\psi$

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos\theta)$$

$$\rightarrow \frac{i}{2kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \left[ e^{-i(kr-l\pi/2)} - e^{i(kr-l\pi/2)} \right] P_l(\cos\theta)$$

ポテンシャルがある場合:  $\left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r}) - E \right] \psi = 0$

波動関数の漸近形

$$\psi(\mathbf{r}) \rightarrow \frac{i}{2kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \left[ e^{-i(kr-l\pi/2)} - \underline{S_l} e^{i(kr-l\pi/2)} \right] P_l(\cos\theta)$$

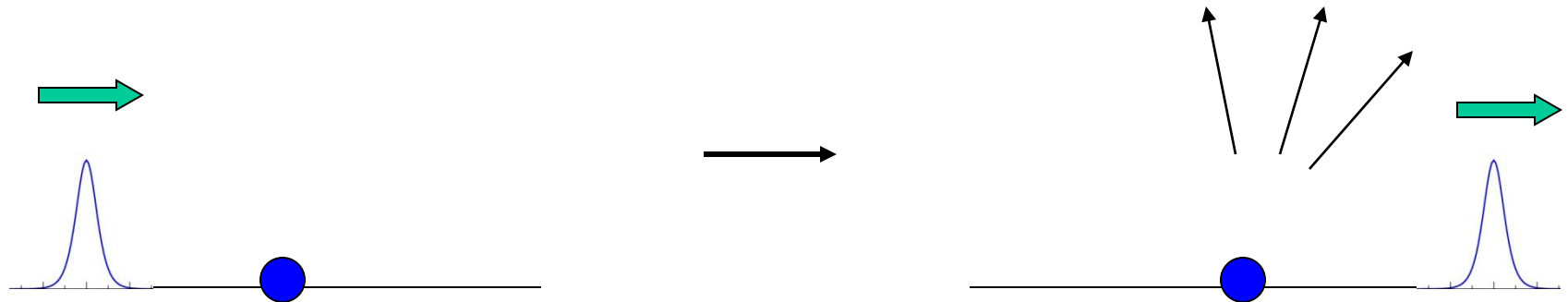
$$= e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \left[ \sum_l (2l+1) \frac{S_l - 1}{2ik} P_l(\cos\theta) \right] \frac{e^{ikr}}{r}$$

$f(\theta)$  (散乱振幅)



$$\psi(\mathbf{r}) \rightarrow e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \left[ \sum_l (2l+1) \frac{S_l - 1}{2ik} P_l(\cos\theta) \right] \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$= e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad = (\text{入射波}) + (\text{散乱波})$$



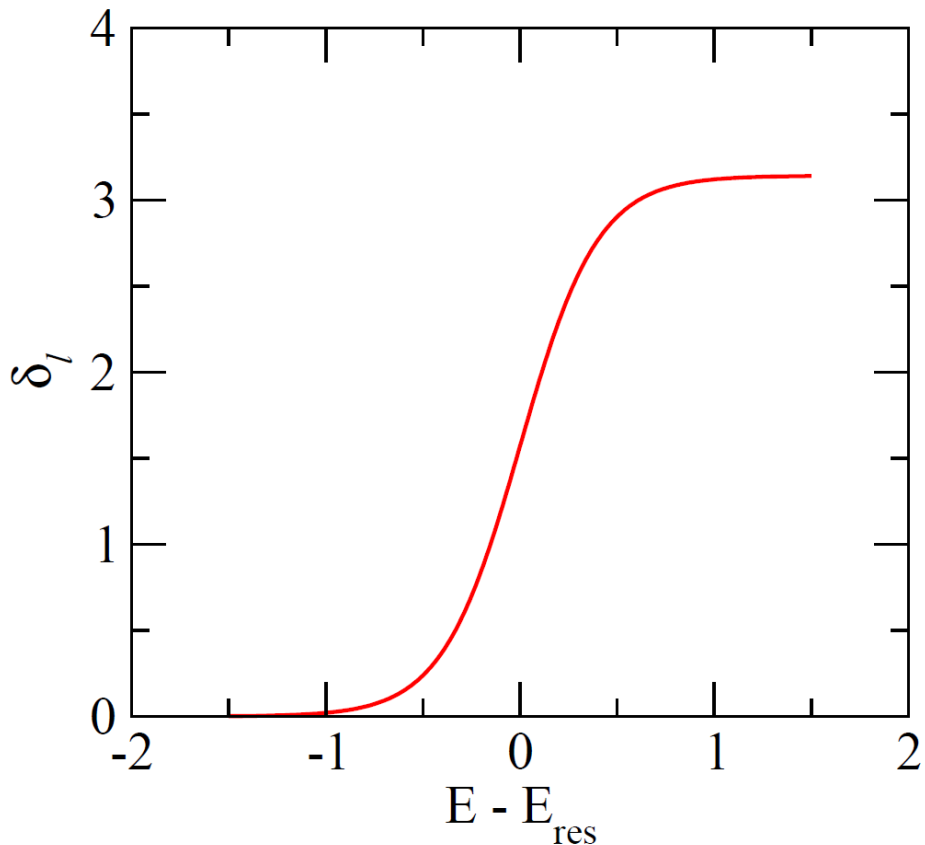
弾性散乱のみが起こる場合:  $|S_l| = 1$  (フラックスの保存)

$$S_l = e^{2i\delta_l}$$

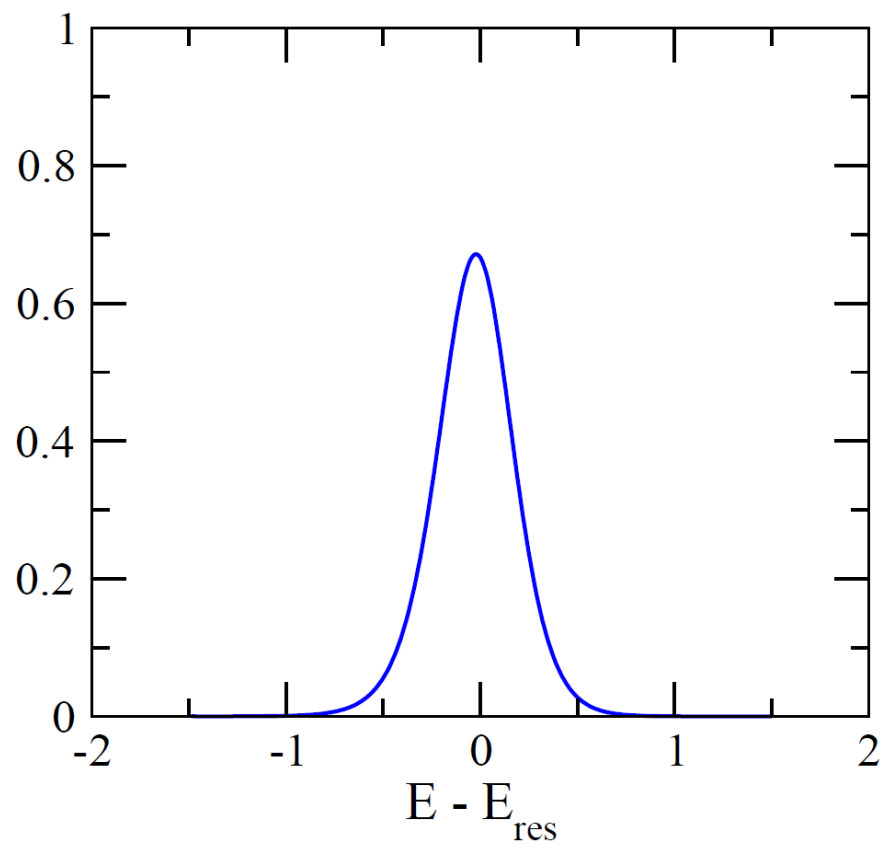
$\delta_l$  : 位相のずれ (phase shift)

弾性散乱の全散乱断面積:  $\sigma(E) = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l + 1) \sin^2 \delta_l(E)$

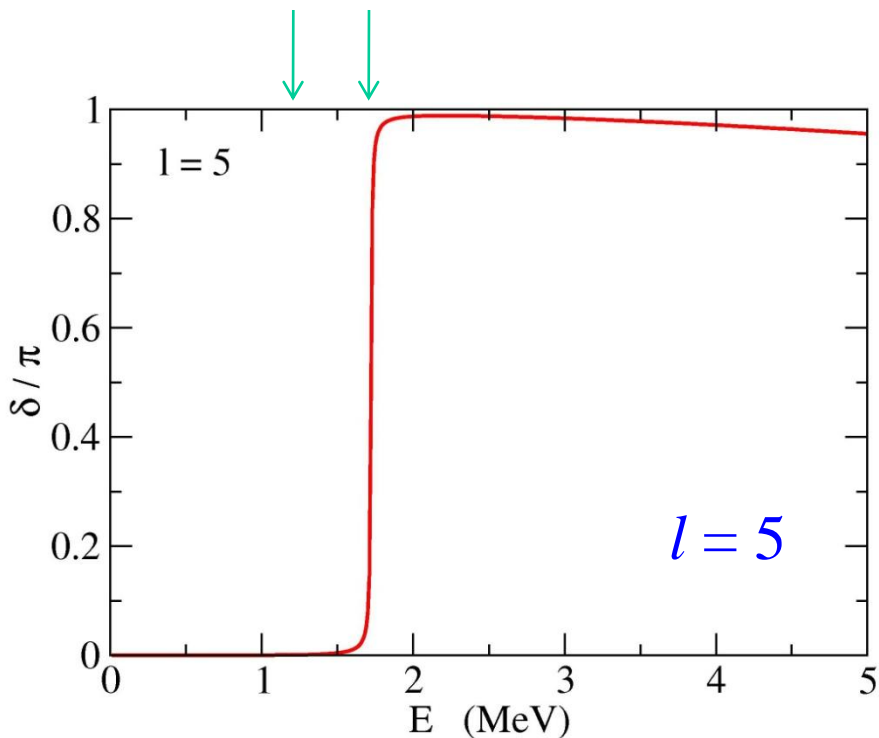
ある  $l$  で位相のずれが  
下のようになったとすると



散乱の断面積は下のよ  
うになる(共鳴散乱)



# 位相のずれのエネルギー 依存性と共鳴状態

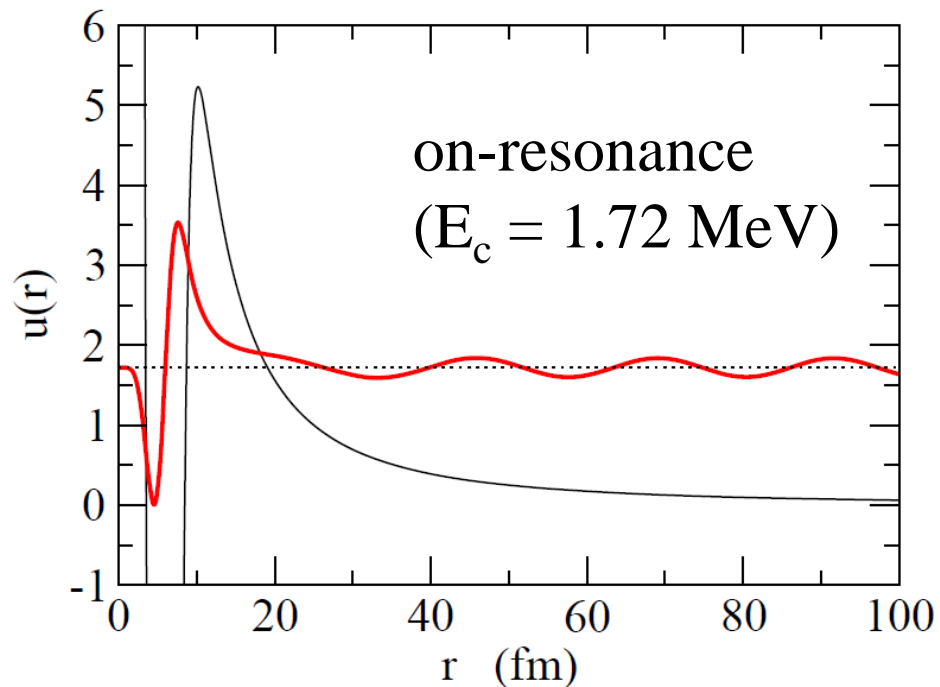
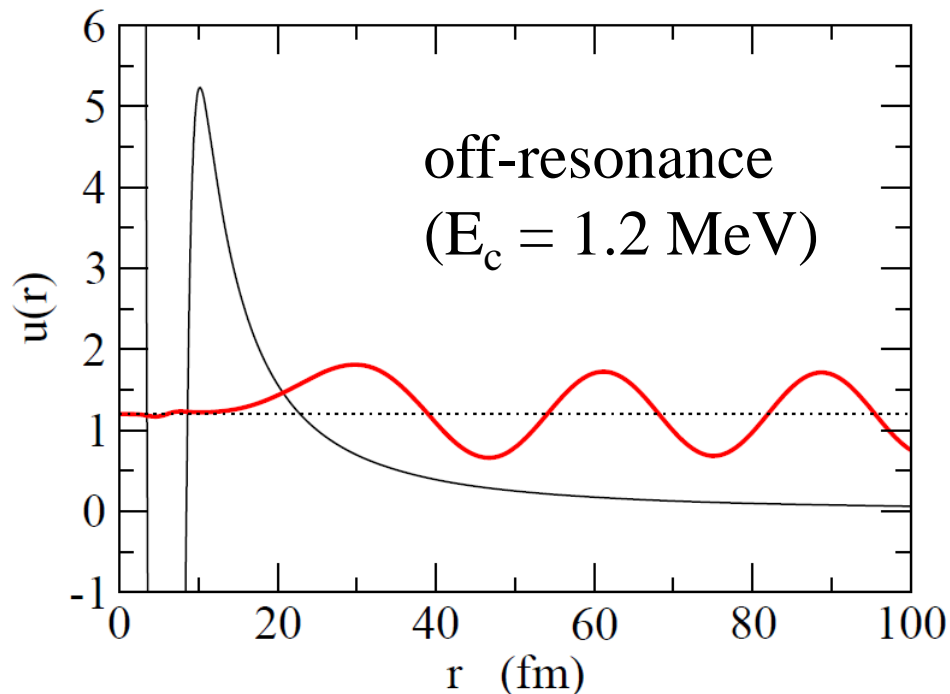


$$V_0 = -50 \text{ MeV}$$

$$R_0 = 1.27 * 200^{1/3} \text{ fm}$$

$$a = 0.67 \text{ fm}$$

$$\mu = 200 m_N / 201$$



➤ off-resonance では

- 波動関数は障壁の外側で大きな振幅
- トンネル効果による障壁内部にしみ込む

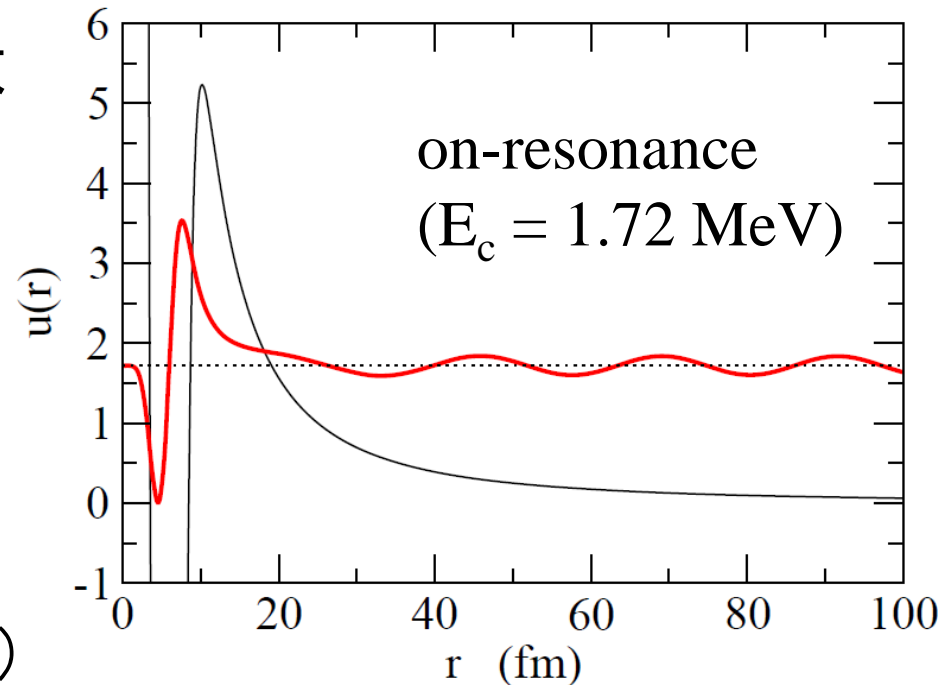
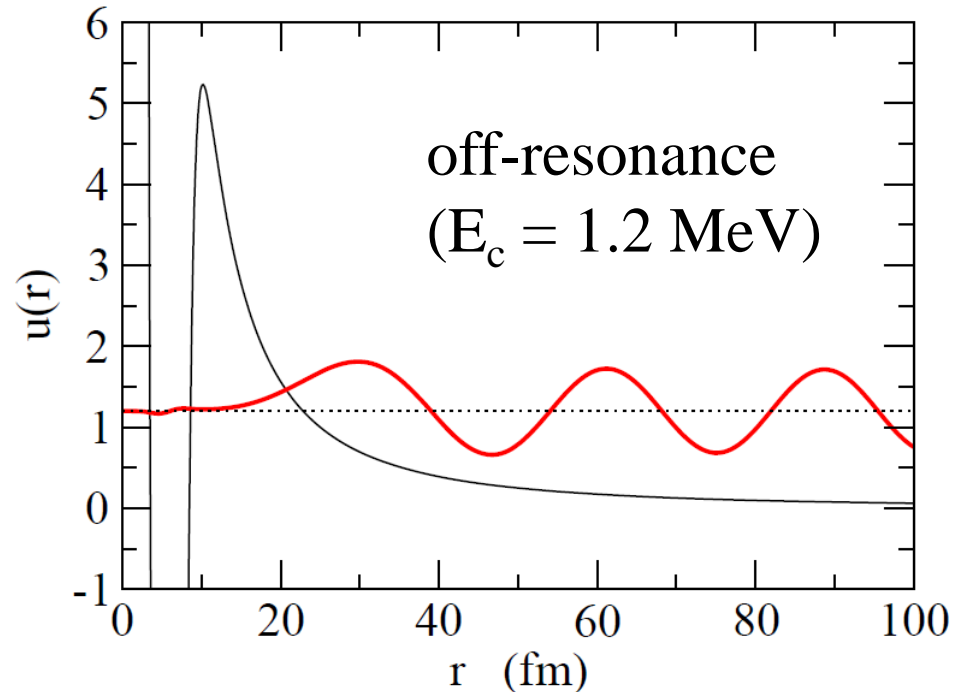
➤ on-resonance では

- 波動関数は障壁内部で束縛状態のように振る舞う
- 障壁にトラップされた波動関数がトンネル効果により障壁の外側にしみ出る
- 準安定状態

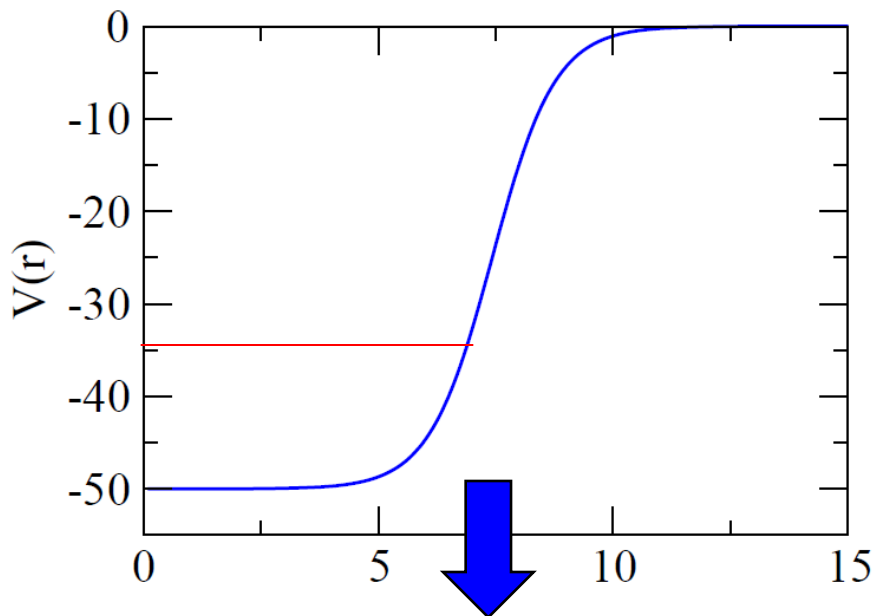


$\alpha$ 崩壊と同じ描像

陽子放出崩壊(陽子過剰核)



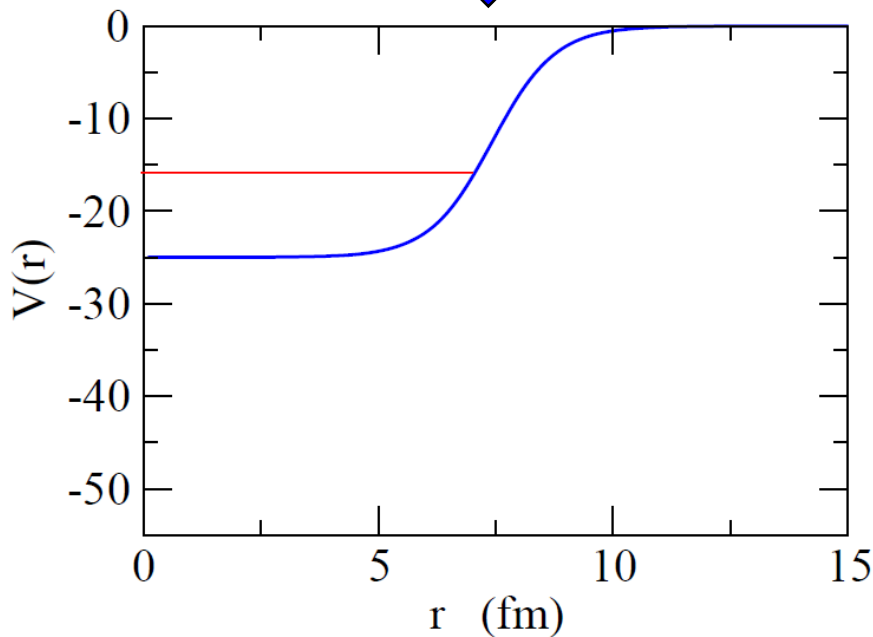
## (補足) 共鳴状態と束縛状態の関係



ポテンシャルを浅くしていくと  
束縛状態のエネルギーは上がる



やがて束縛状態は共鳴状態へと  
連続的に変化  
(従って共鳴状態は連続状態に  
埋め込まれた束縛状態とも言える。)



### 3.2. カ"エフ状態

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V(r) - E \right] u_l(r) = 0$$

$$u_l(r) \sim \begin{cases} r^{l+1} & (r \rightarrow 0) \\ e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} & (r \rightarrow \infty) \end{cases}$$

同時に漸近式のためには

$$E = E_{\text{res}} - i \frac{\Gamma}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{(note)} \quad I(t) &= |\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|^2 \\ &= |\langle \psi(0) | e^{-iHt/\hbar} | \psi(0) \rangle|^2 \\ &= e^{-\Gamma t/\hbar}. \end{aligned}$$

## (参考)ガモフ状態

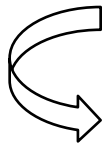
$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + V_{\text{cent}}(r) + V(r) - E \right] u(r) = 0$$

共鳴状態の境界条件として、

- 原点正則
- 遠方で外向き波

を課す。

$$\begin{aligned} u(r) &\sim r^{l+1} && (r \rightarrow 0) \\ &\rightarrow \mathcal{N}(G_l(kr) + iF_l(kr)) && (r \rightarrow \infty) \end{aligned}$$



エネルギーを複素数にしなければならない

$$E \rightarrow E_R - i\frac{\Gamma_0}{2} \longleftarrow \text{共鳴幅}$$

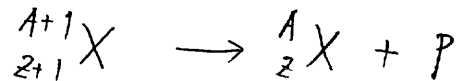
↑  
共鳴エネルギー

## 4. 陽子放出崩壊

S. Åberg et al.,  
Phys. Rev. C 56 (1977)  
1762

陽子過剰核 ( $Z \gg N$ )

→ 陽子を放出して崩壊



$\alpha$ 崩壊と類似の現象

- ・ 実験技術の進歩に伴い、過去10年間で次々と発見
  - ・  $\alpha$ 崩壊より“純粹な”トンネル現象  
(cf.  $\alpha$ が「析出」する確率)
  - ・ mass が軽い
    - 遠心力の効果が入
    - proton decay を用いて exotic な原子核の性質が調べられる
- s.p. level  
変形  
振動 ) など



# 陽子ドリップ線を越えた原子核の陽子放出崩壊

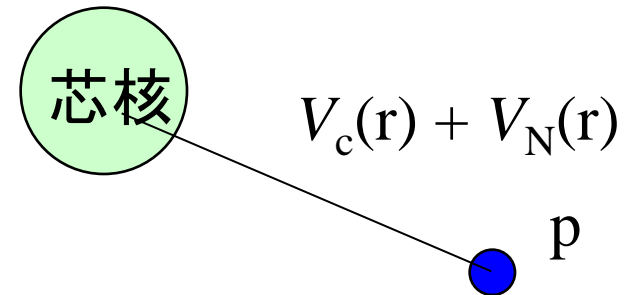
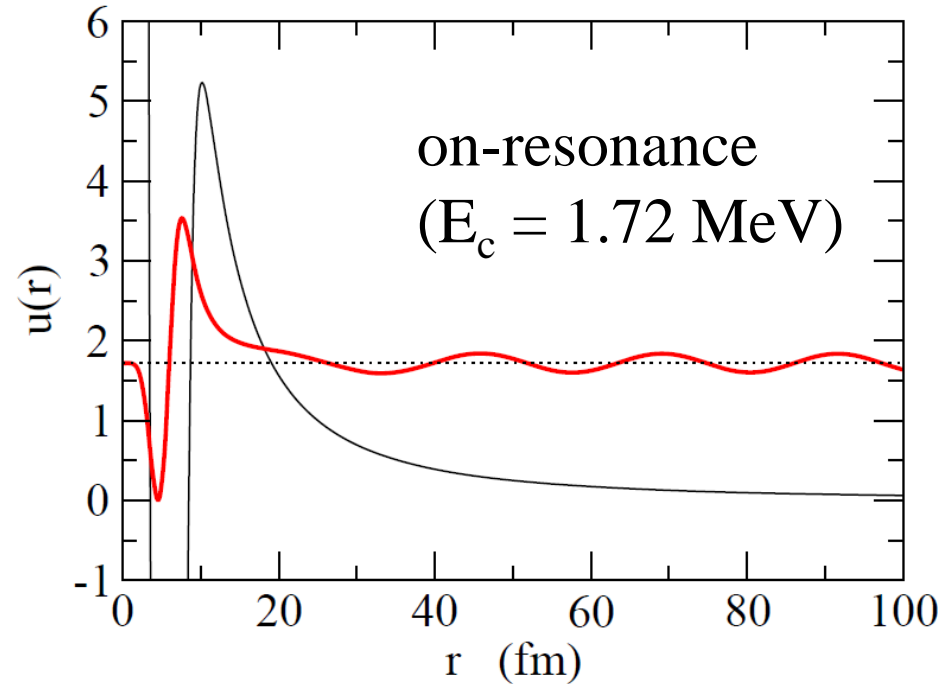
## ▶ 共鳴状態の波動関数

- 波動関数は障壁内部で束縛状態のように振る舞う
- 障壁にトラップされた波動関数がトンネル効果により障壁の外側にしみ出る
- 準安定状態

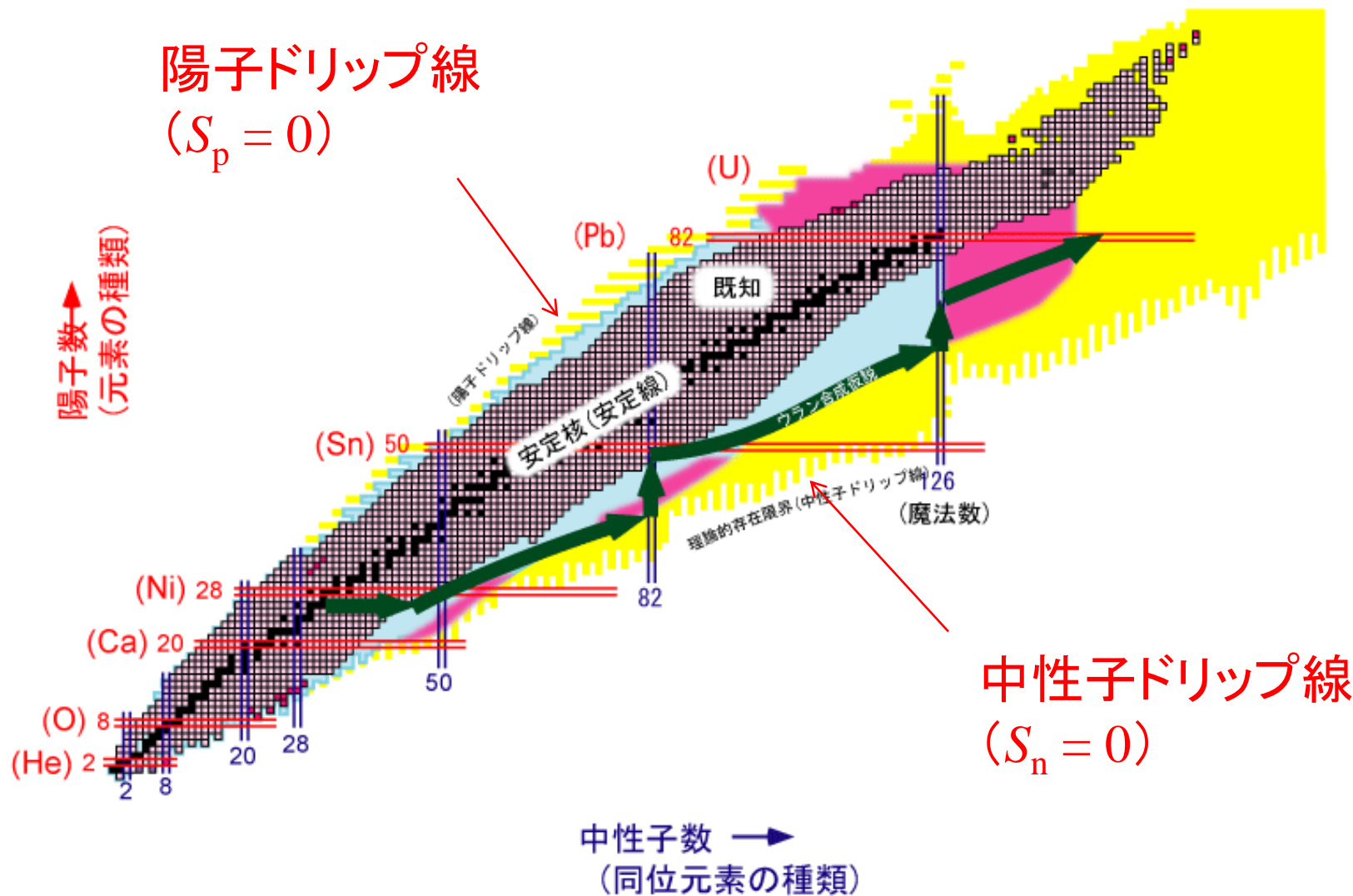


$\alpha$ 崩壊と同じ描像

陽子放出崩壊(陽子過剰核)

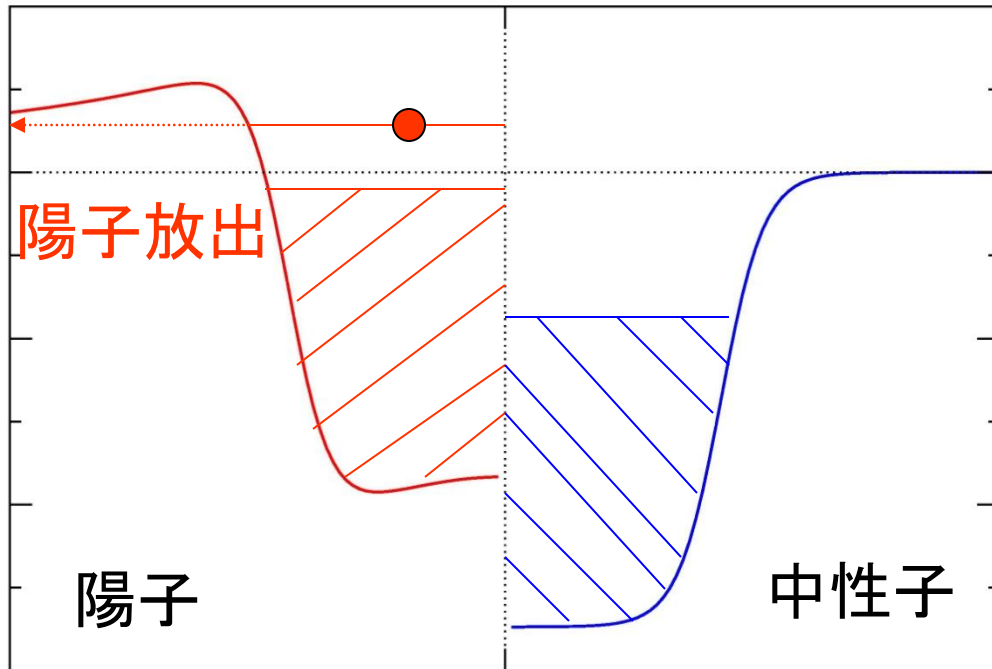


# 陽子ドリップ線を越えた原子核の陽子放出崩壊



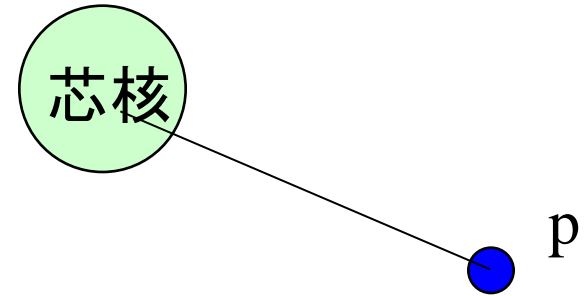
# 陽子放出崩壊

陽子ドリップ線を越えた原子核



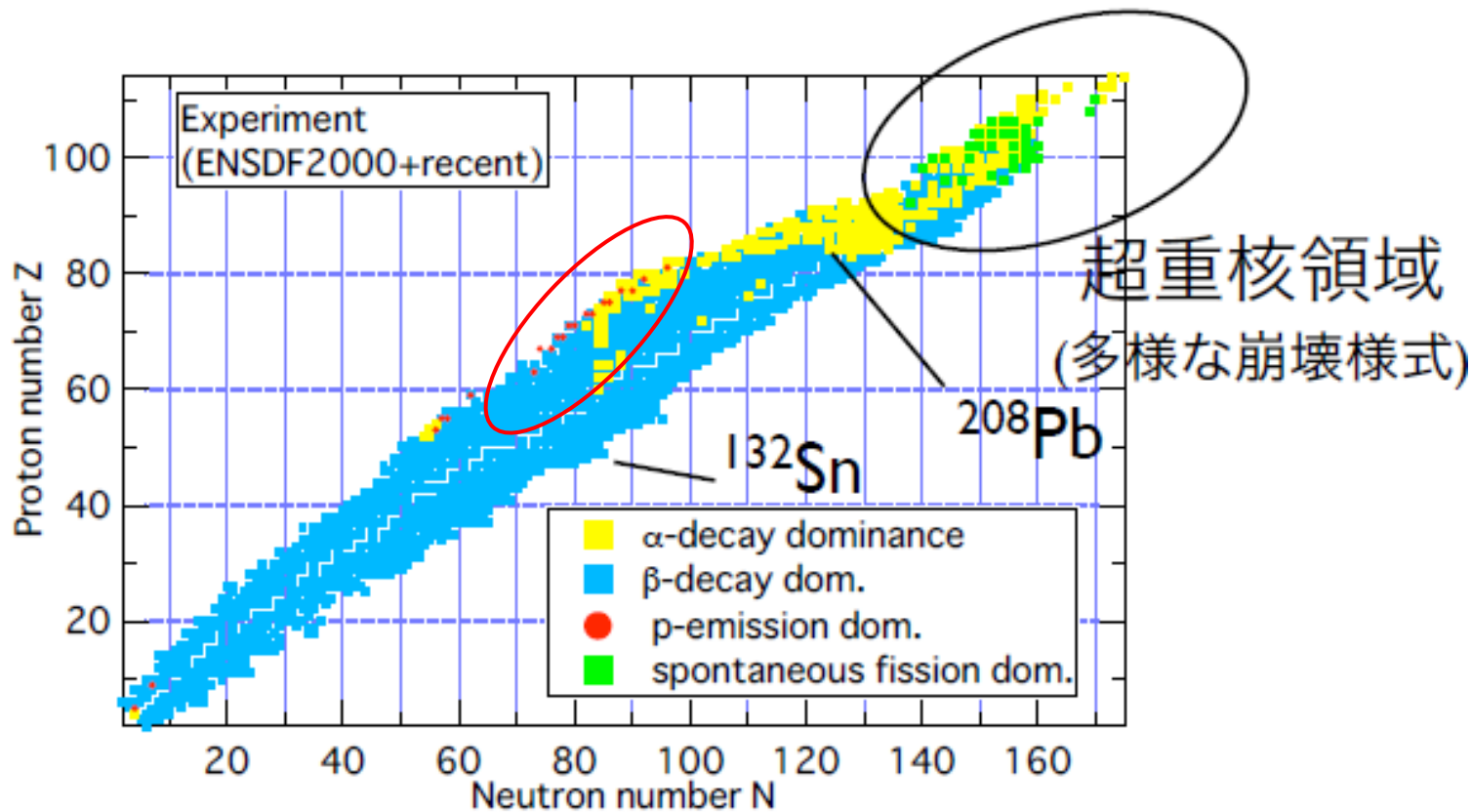
陽子: クーロン障壁にトラップ  
(障壁をトンネルしなければならない)

→ 非常に幅の狭い  
(長寿命な) 共鳴状態



多くの(基底状態)陽子放出核がオークリッジやアルゴンヌ研究所で発見

実験の観測量: 陽子の放出エネルギー  $E_p$  と崩壊半減期  $T_{1/2}$



小浦寛之氏 (JAEA)  
の slides より

## A ~ 150-160 領域における 典型的な値

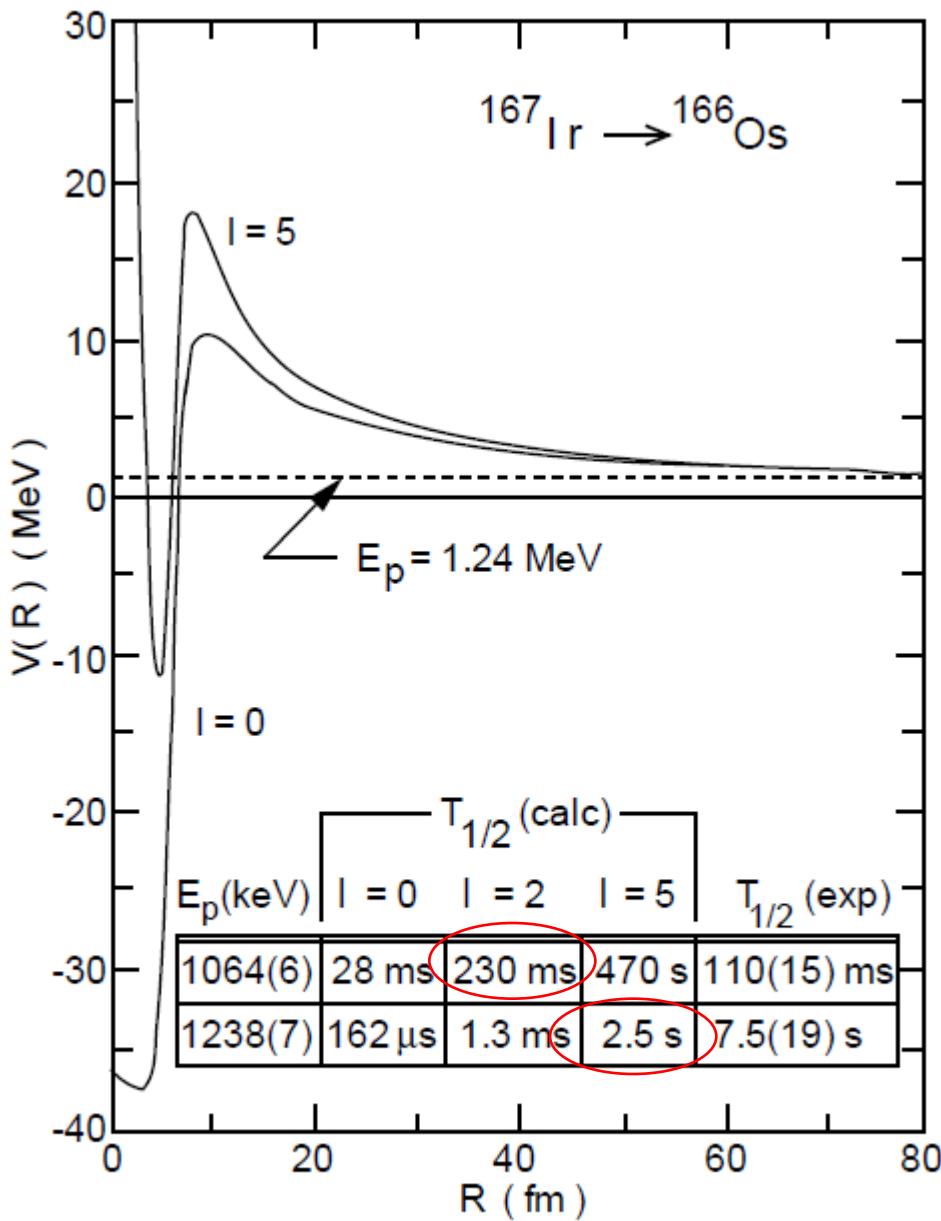
$$V_b \sim 10 \text{ MeV } (l=0)$$

$$E_p \sim 1 \text{ MeV}$$

$$R_{\text{turn}}: 80 \sim 100 \text{ fm}$$

$$\Gamma: 10^{-18} \sim 10^{-22} \text{ MeV}$$

$$T_{1/2}: 100 \mu\text{s} \sim 1 \text{ sec}$$



陽子放出崩壊の一つの特徴：  
半減期が  $l$  に敏感



陽子崩壊を通じて陽子過剰核  
の陽子一粒子状態の  $l$  を決定  
できる

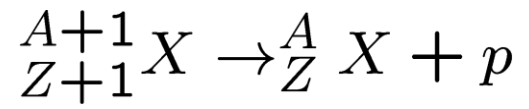
Figure 3 Proton-nucleus potential calculated for the proton emitter  $^{167}\text{Ir}$ . The inset shows the proton-decay half-lives calculated using the WKB approximation for three values of the angular momentum  $\ell$ , compared to the experimental values for the ground and isomeric transitions.

# $\alpha$ 崩壊との相違点

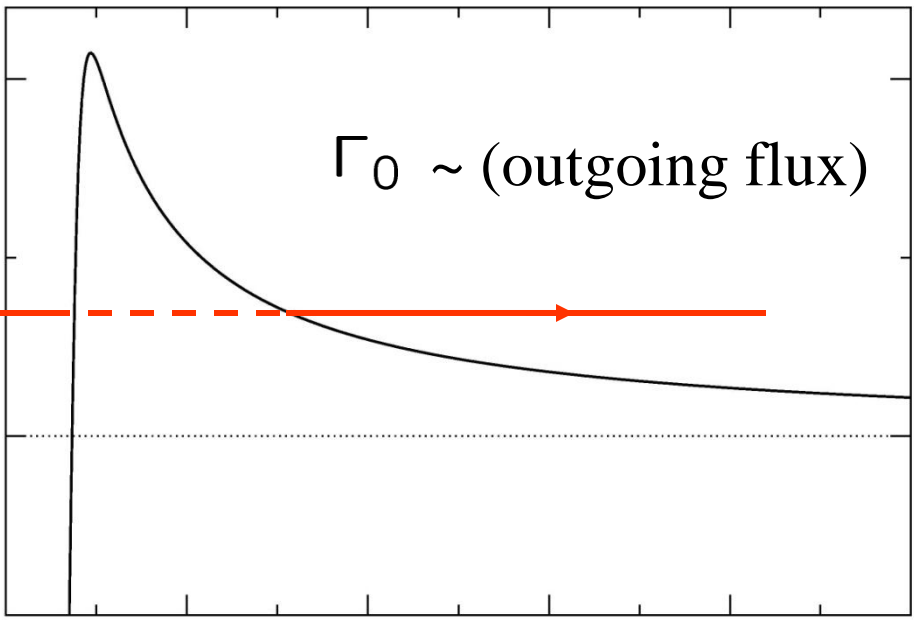
## 1. 換算質量 $\mu$ が小さい

- ➡  $l$  の依存性が強い(遠心力ポテンシャル)
- ➡ 陽子の一粒子状態の情報を得ることができる  
(偶々核の $\alpha$ 崩壊では  $l=0$  がメイン)

## 2. 分光学的因子 (spectroscopic factor) がずっと単純



$$\Gamma = \Gamma_0 \cdot S$$
$$S = |\langle (A+1) | (A) + 1 \rangle|^2$$



- $S$ : 特定の状態が(多体の)波動関数の中に存在する確率
- 陽子崩壊: 軌道の占有確率
  - $\alpha$ 崩壊:  $\alpha$ 粒子が析出する確率  
(とても複雑)