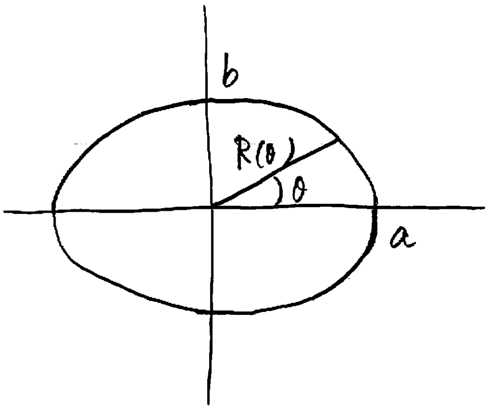
Department of Physics
[illegible] University

○ 回転楕円体と $Y_{20}(\theta)$



$$a = R_0(1+\varepsilon)$$
$$b = \frac{R_0}{\sqrt{1+\varepsilon}}$$

$$\begin{cases} x = R(\theta)\cos\theta \\ y = R(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

楕円の方程式 $\longrightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$

$$\Leftrightarrow \quad R(\theta)^2 \left(\left(\frac{\cos\theta}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin\theta}{b}\right)^2 \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{R(\theta)}{R_0}\right)^2 \underbrace{\left(\left(\frac{\cos\theta}{1+\varepsilon}\right)^2 + (1+\varepsilon)\sin^2\theta \right)}_{\parallel} = 1$$

$$(1+\varepsilon) + \left(\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^2 - (1+\varepsilon)\right)\cos^2\theta$$

(note) $\quad Y_{20}(\theta) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \cdot \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2\theta = \left(2 \cdot \sqrt{\frac{4\pi}{5}}\, Y_{20} + 1\right) \cdot \frac{1}{3}$$

$\Downarrow$

$$\left(\frac{R(\theta)}{R_0}\right)^2 \cdot \left[(1+\varepsilon) + \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^2 - (1+\varepsilon) \right) + \left(\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^2 - (1+\varepsilon) \right) \cdot \frac{2}{3}\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\, Y_{20}(\theta) \right] = 1$$

$\Downarrow$

$$\left(\frac{R(\theta)}{R_0}\right)^2 \left[1 + \cancel{\varepsilon} + \frac{1}{3}\left(\cancel{1} - 2\cancel{\varepsilon} - \cancel{1} - \cancel{\varepsilon} \right) + \left(\cancel{1} - 2\varepsilon - \cancel{1} - \varepsilon \right) \cdot \frac{2}{3}\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\, Y_{20} \right] \sim 1$$

$\Downarrow$

$$\left(\frac{R(\theta)}{R_0}\right)^2 \left[1 - 2\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\, \varepsilon\, Y_{20}(\theta) \right] \sim 1$$

$\Downarrow$

$$R(\theta) \sim R_0 \left[1 - 2\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\, \varepsilon\, Y_{20}(\theta) \right]^{-1/2}$$

$$\sim R_0 \left[1 + \sqrt{\frac{4\pi}{5}}\, \varepsilon \cdot Y_{20}(\theta) \right]$$

四 表面振動の量子化

$$H = \frac{1}{2}\sum_{\lambda\mu}\left\{ B_\lambda |\dot{\alpha}_{\lambda\mu}|^2 + C_\lambda |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \right\}$$

$$\xrightarrow[\text{正準量子化}]{} \quad H = \sum_{\lambda\mu} \hbar\omega_\lambda \left(b^\dagger_{\lambda\mu} b_{\lambda\mu} + \frac{1}{2} \right)$$

角運動量とその z 成分

$$\omega_\lambda = \sqrt{C_\lambda / B_\lambda}$$

$$[b_{\lambda\mu}, b_{\lambda'\mu'}] = 0, \quad [b_{\lambda\mu}, b^\dagger_{\lambda'\mu'}] = \delta_{\lambda\mu,\lambda'\mu'}$$

- 1フォノン状態

$$b^\dagger_{\lambda\mu}|0\rangle$$

角運動量 $I = \lambda,\ I_z = \mu$

パリティ $(-)^\lambda$

(note) $Y_{\lambda\mu}(-\hat{r}) = (-1)^\lambda Y_{\lambda\mu}(\hat{r})$

- 2フォノン状態

$$\frac{1}{\sqrt{2}} b^\dagger_{\lambda\mu} b^\dagger_{\lambda'\mu'} |0\rangle$$

角運動量のよい状態に組み直す

→ 角運動量 $\vec{\lambda}$ と $\vec{\lambda}'$ の合成

$$[b_\lambda^\dagger b_{\lambda'}^\dagger]^{(IM)} = \sum_{\mu\mu'} \underbrace{\langle \lambda\mu\,\lambda'\mu' | IM \rangle}_{\text{クレブシュ・ゴルダン係数}} b_{\lambda\mu}^\dagger\, b_{\lambda'\mu'}^\dagger$$

$\lambda = \lambda' = 2$ の場合

$$[b_2^\dagger b_2^\dagger]^{(IM)} = \sum_{\mu\mu'} \langle 2\mu\, 2\mu' | IM \rangle b_{2\mu}^\dagger b_{2\mu'}^\dagger$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\mu\mu'} \Big\{ \langle 2\mu\, 2\mu' | IM \rangle b_{2\mu}^\dagger b_{2\mu'}^\dagger + \underbrace{\langle 2\mu'\, 2\mu | IM \rangle}_{= (-)^I \langle 2\mu\, 2\mu' | IM \rangle} \underbrace{b_{2\mu'}^\dagger b_{2\mu}^\dagger}_{= b_{2\mu}^\dagger b_{2\mu'}^\dagger} \Big\}$$

$$= \sum_{\mu\mu'} \frac{1}{2} (1 + (-)^I) \langle 2\mu\, 2\mu' | IM \rangle b_{2\mu}^\dagger b_{2\mu'}^\dagger$$

$\Downarrow$ I は偶数のみ

$2\hbar\omega$ ——— $0^+, 2^+, 4^+$

$\hbar\omega$ ——— 2^+

——— 0^+

Department of Physics
Tohoku University
Sendai Japan

▨ 角運動量の合成

・復習

$$[l_i, l_j] = i\varepsilon_{ijk} l_k$$

$$[l_x, l_y] = i l_z, \quad [l_y, l_z] = i l_x, \quad [l_z, l_x] = i l_y$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned}
[\vec{l}^2, l_z] &= [l_x^2 + l_y^2 + l_z^2, l_z] \\
&= l_x [l_x, l_z] + [l_x, l_z] l_x + l_y [l_y, l_z] + [l_y, l_z] l_y \\
&= -i l_x l_y - i l_y l_x + i l_y l_x + i l_x l_y \\
&= 0
\end{aligned}$$

↳ $\vec{l}^2$ と l_z の同時固有状態 $\longrightarrow |lm\rangle$

(note) 昇降演算子 $l_\pm \equiv l_x \pm i l_y$

$$l_\pm |lm\rangle = \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} \; |l\, m \pm 1\rangle$$

$$(l_+ |ll\rangle = 0, \quad l_- |l\, -l\rangle = 0)$$

Department of Physics
Tohoku University
Sendai Japan

・ 2角運動量和 $(\vec{L} = \vec{l_1} + \vec{l_2})$

状態の分類の仕方に2通り

i) $|l_1 m_1 ; l_2 m_2\rangle$

$\vec{l_1}^2, l_{1z}, \vec{l_2}^2, l_{2z}$ の同時固有状態,

ただし $\vec{L}^2$ の固有状態ではない。

(note)
$$\vec{L}^2 = \vec{l_1}^2 + \vec{l_2}^2 + 2\vec{l_1}\cdot\vec{l_2}$$
$$= \vec{l_1}^2 + \vec{l_2}^2 + 2l_{1z}l_{2z} + \underbrace{2l_{1x}l_{2x} + 2l_{1y}l_{2y}}$$

$$\| $$
$$(l_{1x} + il_{1y})(l_{2x} - il_{2y}) + (l_{1x} - il_{1y})(l_{2x} + il_{2y})$$
$$\| $$
$$l_{1+}l_{2-} + l_{1-}l_{2+}$$

$\rightsquigarrow$
$$\vec{L}^2|l_1 m_1 ; l_2 m_2\rangle = \alpha\,|l_1 m_1 ; l_2 m_2\rangle + \beta\,|l_1 m_1 + 1 ; l_2 m_2 - 1\rangle + \gamma\,|l_1 m_1 - 1 ; l_2 m_2 + 1\rangle$$

逆に言うと、

$$|LM;l_1 l_2\rangle \equiv \sum_{m_1 m_2} C^{(LM)}_{l_1 m_1 l_2 m_2} \, |l_1 m_1 ; l_2 m_2\rangle$$

という線形結合をとれば、$\vec{L}^2$, L_z, $\vec{l_1}^2$, $\vec{l_2}^2$ の同時固有状態を作ることができる。ただし、m_1, m_2 は和をとるので指定できない（l_{1z}, l_{2z} の固有状態ではなくなる）。

$$\vec{L}^2 |LM; l_1 l_2\rangle = L(L+1) |LM; l_1 l_2\rangle$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{L}^2 \sum_{m_1' m_2'} C^{(LM)}_{l_1 m_1' l_2 m_2'} |l_1 m_1' ; l_2 m_2'\rangle$$

$$= L(L+1) \sum_{m_1 m_2} C^{(LM)}_{l_1 m_1 l_2 m_2} |l_1 m_1 ; l_2 m_2\rangle$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sum_{m_1' m_2'} \boxed{\langle l_1 m_1 ; l_2 m_2 | \vec{L}^2 | l_1 m_1' ; l_2 m_2'\rangle} \, C^{(LM)}_{l_1 m_1' l_2 m_2'}$$

$$= L(L+1) \, C^{(LM)}_{l_1 m_1 l_2 m_2}$$

この行列を対角化すれば $C^{(LM)}_{l_1 m_1 l_2 m_2}$ を求めることができる。

状態の分類法　その2

ii) $|LM; l_1, l_2\rangle$

全角運動量 $\vec{L}^2$, L_z, 及び $\vec{l_1}^2$, $\vec{l_2}^2$ の
同時固有状態
但し l_{1z}, l_{2z} の固有状態ではない

i) と ii) の関係

$$|LM; l_1 l_2\rangle = \sum_{m_1, m_2} C^{(LM)}_{l_1 m_1 l_2 m_2} |l_1 m_1; l_2 m_2\rangle$$

$\parallel$

クレブシュ・ゴルダン係数

$\langle l_1 m_1 \, l_2 m_2 | LM\rangle$

同様に

$$|l_1 m_1 \, l_2 m_2\rangle = \sum_{LM} \langle l_1 m_1 \, l_2 m_2 | LM\rangle |LM; l_1 l_2\rangle$$

例）スピン 1/2 とスピン 1/2 の合成

分類法 i)； $|\uparrow\uparrow\rangle,\ |\uparrow\downarrow\rangle,\ |\downarrow\uparrow\rangle,\ |\downarrow\downarrow\rangle$

の4つ

分類法 ii)：
$$|S=1, M=1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$$
$$|S=1, M=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$
$$|S=1, M=-1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$$
$$|S=0, M=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

の4つ

どちらの分類法でも同じ数の状態数

- 一般に状態の総数は $(2l_1+1)\cdot(2l_2+1)$ コ
- L の最大値は $L_{max} = l_1 + l_2$
  最小値は $L_{min} = |l_1 - l_2|$

例）$l_1 = 3,\ l_2 = 1$ の場合

分類法 i) $|33;11\rangle,\ |33;10\rangle,\ |33;1-1\rangle,$
$|32;11\rangle,\ |32;10\rangle,\ |32,1,-1\rangle$
……

計 $7\times 3 = 21$ 個

分類法 ii) $L = 2, 3, 4$

$L=4 \rightarrow 2L+1 = 9$
$L=3 \rightarrow 2L+1 = 7$
$L=2 \rightarrow 2L+1 = 5$

21 個

Department of Physics
Tohoku University
Sendai Japan

クレブシュ・ゴルダン係数の性質

$$\langle l_1 m_1 l_2 m_2 | L M \rangle = (-1)^{l_1+l_2-L} \langle l_2 m_2 l_1 m_1 | L M \rangle$$

(例)

$$|S=1, M=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

$$|S=0, M=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

$$\langle \tfrac{1}{2} \tfrac{1}{2} \tfrac{1}{2} -\tfrac{1}{2} | 1 0 \rangle = 1/\sqrt{2}$$

$$\langle \tfrac{1}{2} -\tfrac{1}{2} \tfrac{1}{2} \tfrac{1}{2} | 1 0 \rangle = (-)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1} \langle \tfrac{1}{2} \tfrac{1}{2} \tfrac{1}{2} -\tfrac{1}{2} | 1 0 \rangle$$

$$= 1/\sqrt{2}$$

$$\langle \tfrac{1}{2} \tfrac{1}{2} \tfrac{1}{2} -\tfrac{1}{2} | 0 0 \rangle = 1/\sqrt{2}$$

$$\langle \tfrac{1}{2} -\tfrac{1}{2} \tfrac{1}{2} \tfrac{1}{2} | 0 0 \rangle = (-)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-0} \langle \tfrac{1}{2} \tfrac{1}{2} \tfrac{1}{2} -\tfrac{1}{2} | 0 0 \rangle$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}$$