

原子核の質量

原子核の基本的な物理量の一つ

例1) ベータ崩壊



- $Q_\beta = m({}^A_Z X_N)c^2 - [m({}^A_{Z+1} Y_{N-1})c^2 + m_e c^2]$ が電子と反ニュートリノの運動エネルギーに分配
- ベータ崩壊の確率は Q_β に大きく依存
天体で起こるベータ崩壊では質量の見積もりが重要

例2) 核融合反応

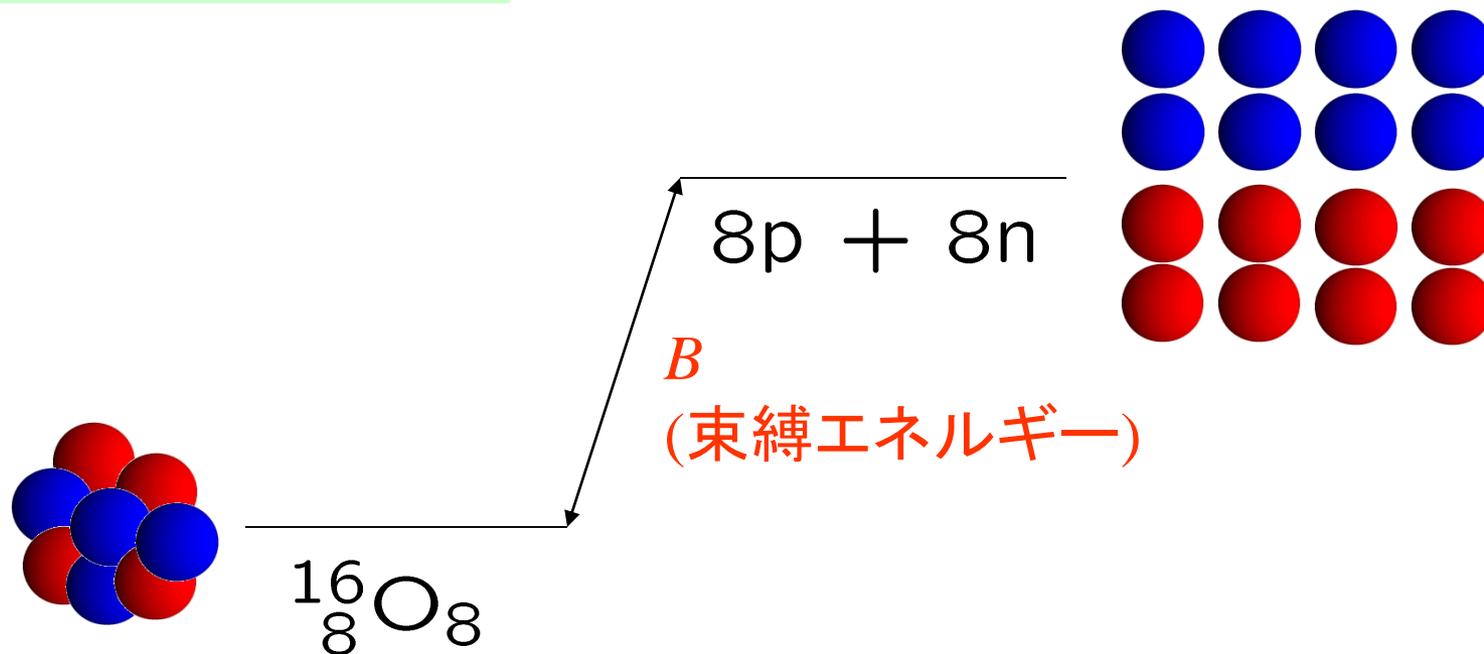


生成される ${}^{279}113$ の励起エネルギー

$$E^* = m({}^{70}\text{Zn})c^2 + m({}^{209}\text{Bi})c^2 + E_{\text{beam}}(\text{cm}) - m({}^{279}113)c^2$$

- ✓ ${}^{278}113$ の崩壊の様子は E^* に大きく依存
(超重元素の生成率に大きく影響)

原子核の質量



$$m(N, Z)c^2 = Zm_p c^2 + Nm_n c^2 - B$$

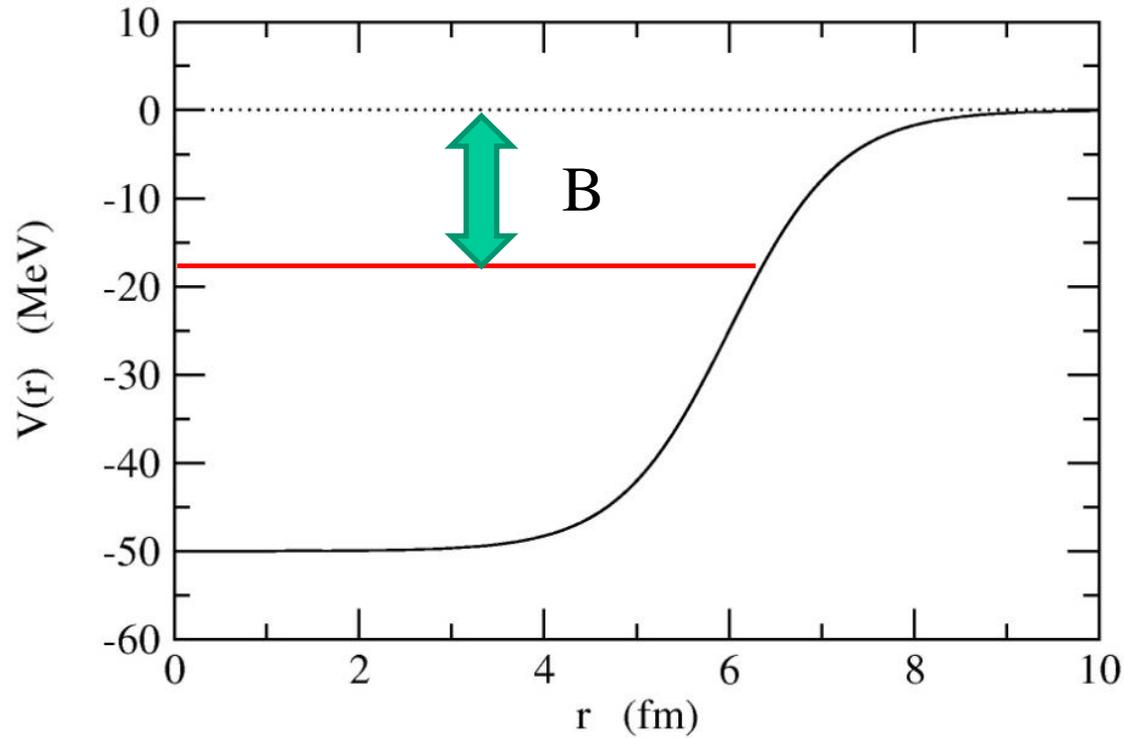
束縛エネルギー

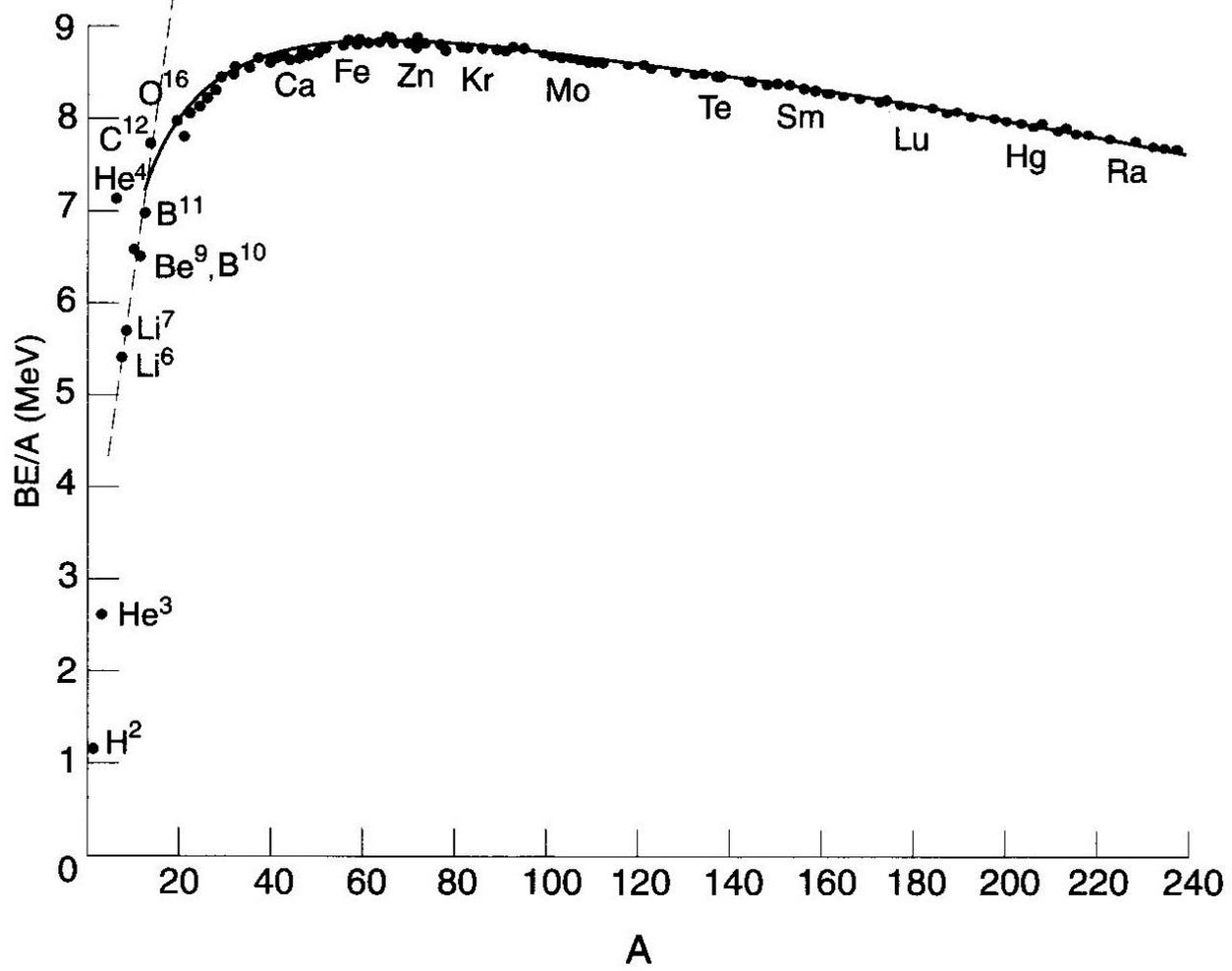
* 束縛エネルギーが大きいほど安定(質量が軽い)

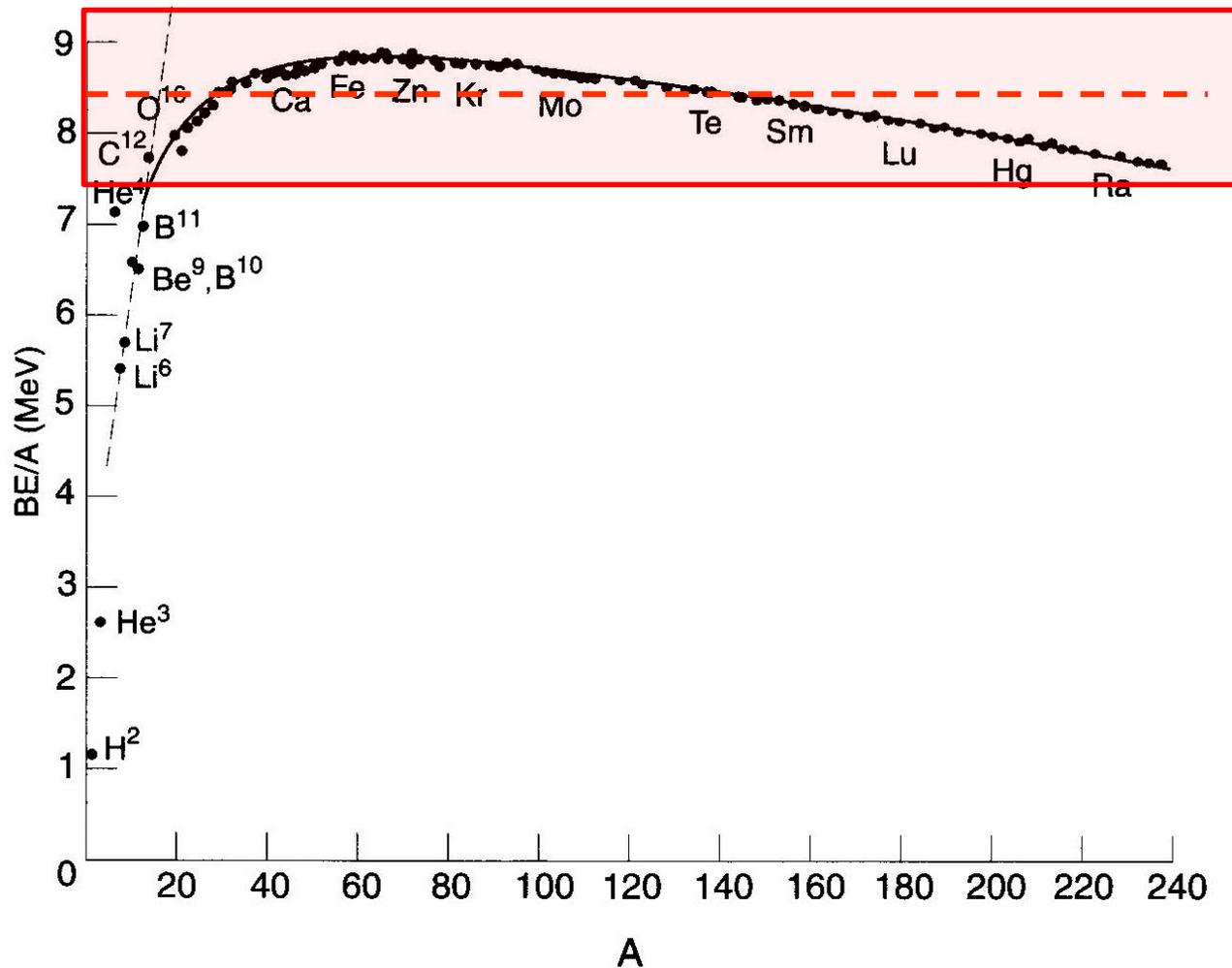
cf. 2粒子系の場合:



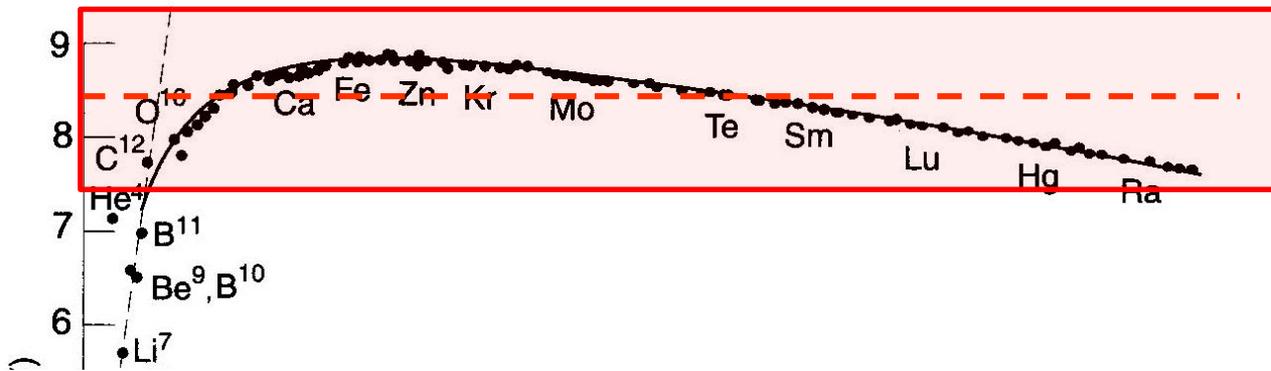
$$Mc^2 = m_1c^2 + m_2c^2 - B$$





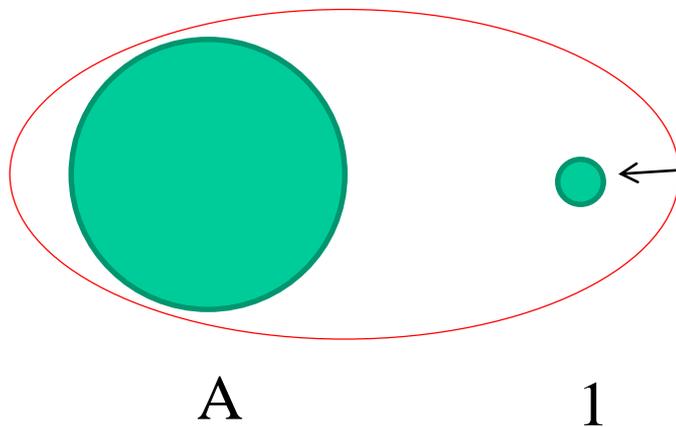


1. $B(N,Z)/A \sim 8.5 \text{ MeV} (A > 12) \iff$ 短距離力 (核子間相互作用)



1. $B(N,Z)/A \sim 8.5 \text{ MeV} (A > 12)$

これは、粒子を1つ増やすと、束縛エネルギーは一定の量 ($\sim 8.5 \text{ MeV}$)しか増えないことを意味している。



この核子は決まった個数の核子としか相互作用しない (短距離力)

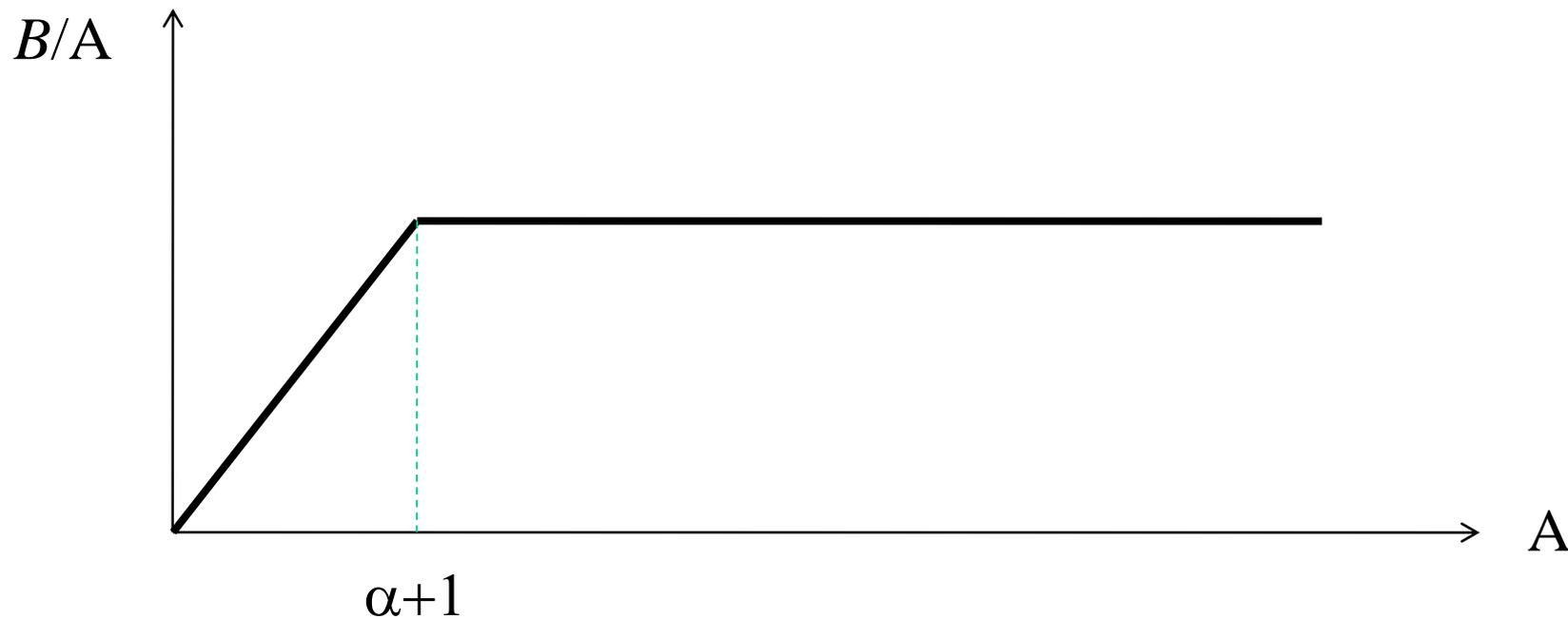
もし全ての核子と相互作用するとすると (長距離力)

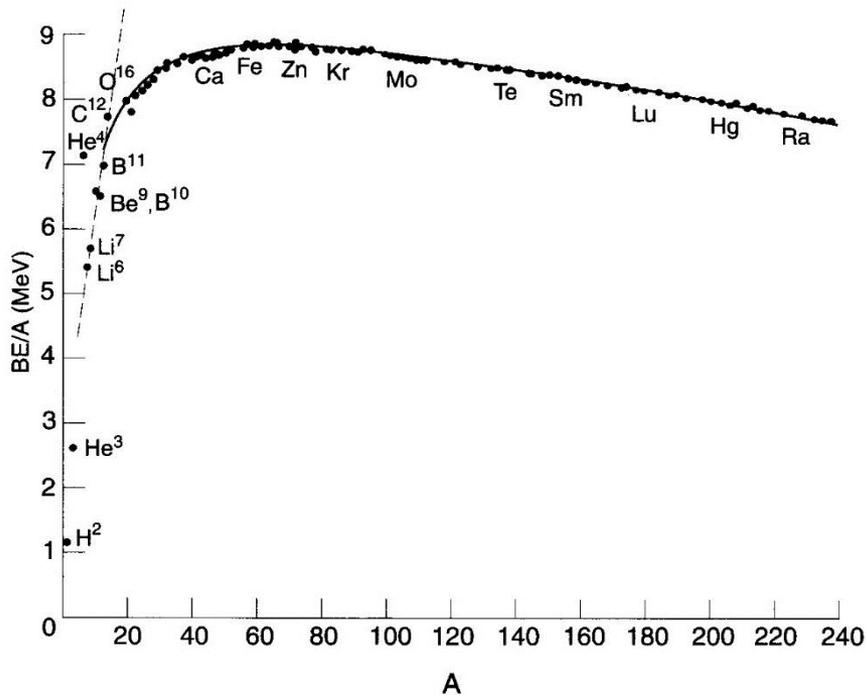
$$B \propto A(A-1)/2 \quad \curvearrowright \quad B/A \propto A \quad \text{となるはず。。。。}$$

1つの核子が α 個の核子とのみ相互作用するとすると、

$$B \sim \alpha A/2 \longrightarrow B/A \sim \alpha/2 \text{ (const.)}$$

ただし、 $A < \alpha + 1$ の時は、すべての核子対が相互作用するので、
 $B/A \propto A$





この図から α の値を読み取ると、
 $\alpha \sim 10$ くらい。

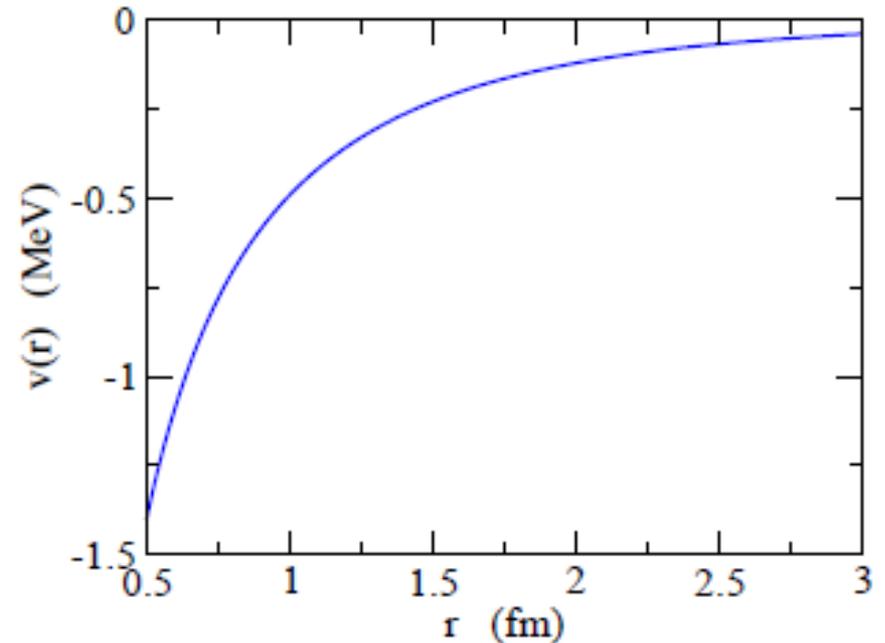


核力の到達距離は、
 $1.1 \times 10^{1/3} = 2.37 \text{ fm}$ 程度。

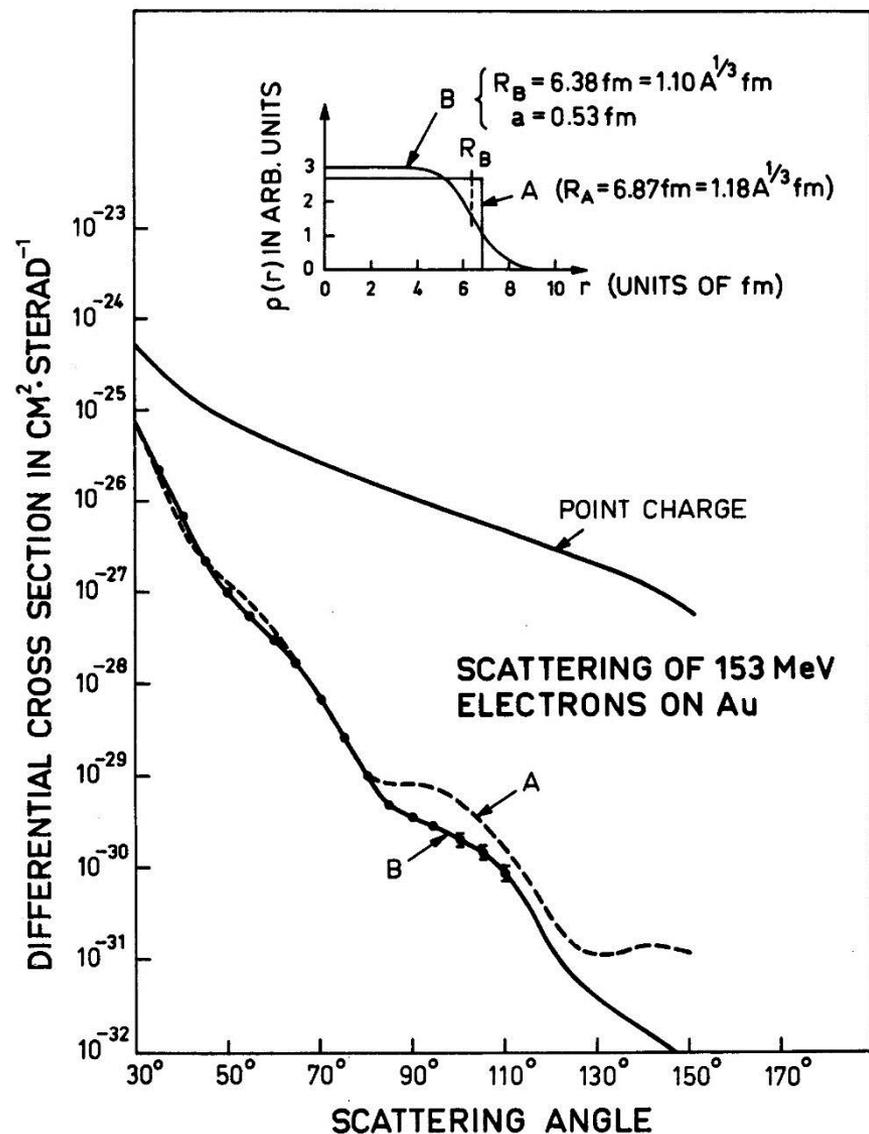
湯川相互作用:

$$v(r) = -g \frac{e^{-\kappa r}}{r}$$

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\hbar}{m_{\pi}c} = 1.41 \text{ fm}$$

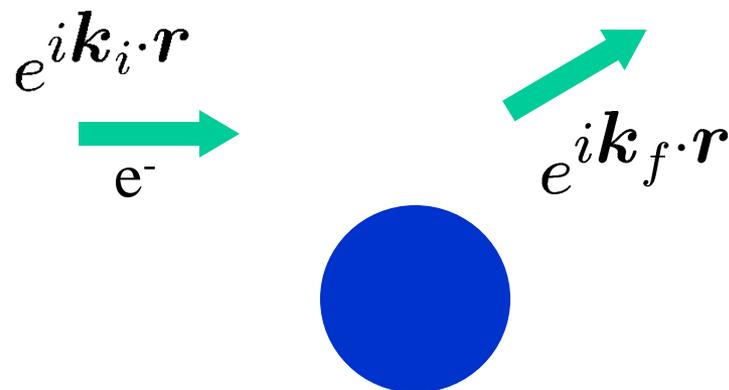


電荷分布： $R \sim 1.1A^{1/3}$ fm の根拠



高エネルギー
電子散乱

ボルン近似:



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z_P^2 e^4}{(4E \sin^2 \theta/2)^2} |F(\mathbf{q})|^2$$

形状因子 (form factor)

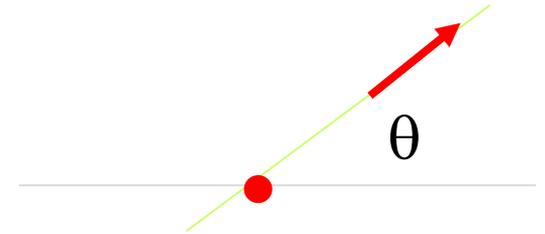
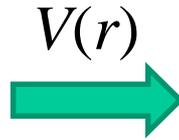
$$F(\mathbf{q}) = \int e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

(密度のフーリエ変換)

量子3の復習：ボルン近似

$$\psi_f(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{p}_f \cdot \mathbf{r} / \hbar}$$

$$\psi_i(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r} / \hbar}$$



$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + \underbrace{V(r)}_{\text{摂動}} - E \right) \psi(\mathbf{r}) = 0$$

摂動

弾性散乱に対する全遷移率:

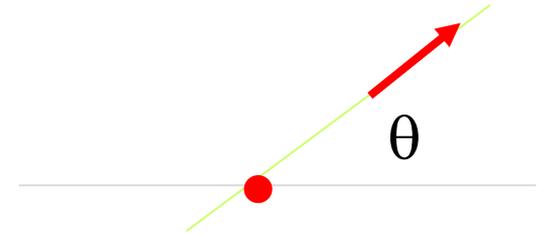
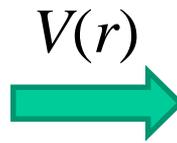
$$\begin{aligned} W_{fi} &= \frac{2\pi}{\hbar} \int \frac{d\mathbf{p}_f}{(2\pi\hbar)^3} |\langle \psi_f | V | \psi_i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i) \\ &= \frac{\mu p_i}{4\pi^2 \hbar^4} \int d\Omega |\tilde{V}(\mathbf{q})|^2 \end{aligned}$$

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{r} e^{i(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f) \cdot \mathbf{r} / \hbar} V(r) \equiv \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} V(r)$$

量子3の復習：ボルン近似

$$\psi_f(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{p}_f \cdot \mathbf{r} / \hbar}$$

$$\psi_i(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r} / \hbar}$$



$$W_{fi} = \frac{\mu p_i}{4\pi^2 \hbar^4} \int d\Omega |\tilde{V}(\mathbf{q})|^2$$

運動量移行



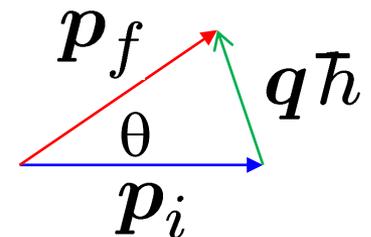
$$\tilde{V}(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{r} e^{i(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f) \cdot \mathbf{r} / \hbar} V(\mathbf{r}) \equiv \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} V(\mathbf{r})$$

入射フラックス: $j_{\text{inc}} = \rho_i v = p_i / \mu$



$$\sigma = \frac{W_{fi}}{j_{\text{inc}}} = \int d\Omega \frac{\mu^2}{4\pi^2 \hbar^4} |\tilde{V}(\mathbf{q})|^2$$

$$= \frac{d\sigma}{d\Omega}$$



$$q\hbar = 2p_i \sin \frac{\theta}{2}$$

弹性散乱

$$V(r) = -e^2 \int d\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

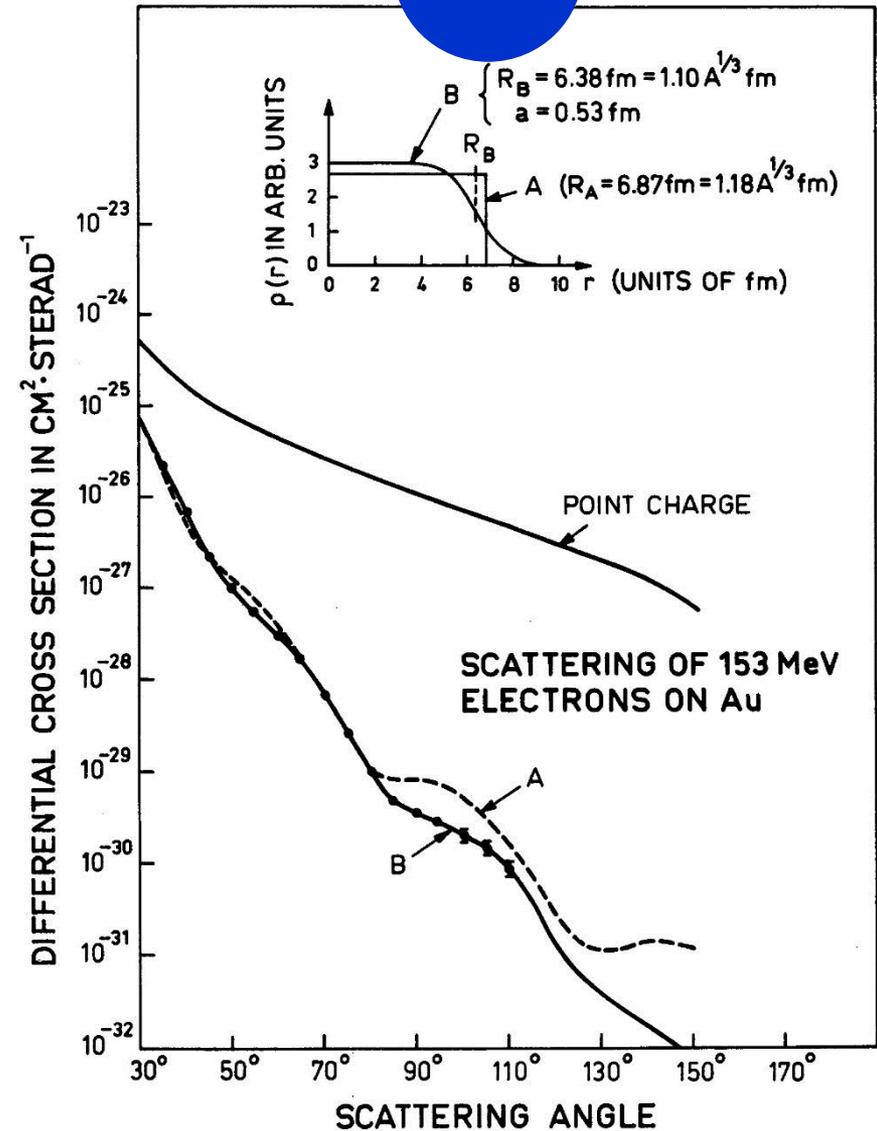
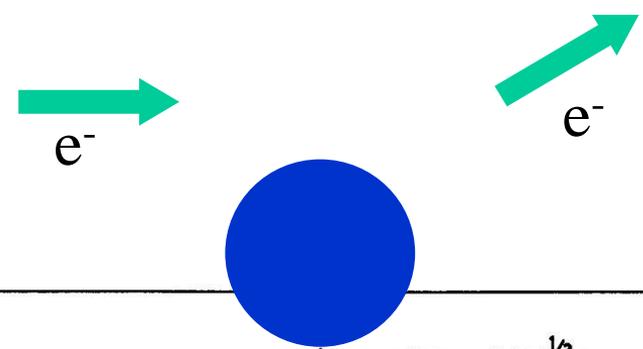
$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{Z_P^2 e^4}{(4E \sin^2 \theta/2)^2} |F(\mathbf{q})|^2 \\ &= \left(\frac{d\sigma_{\text{Ruth}}}{d\Omega} \right) |F(\mathbf{q})|^2 \end{aligned}$$

形状因子

$$F(\mathbf{q}) = \int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

* relativistic correction:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{Ruth}}}{d\Omega} &\rightarrow \frac{d\sigma_{\text{Mott}}}{d\Omega} \\ &= \frac{d\sigma_{\text{Ruth}}}{d\Omega} \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ &\sim \frac{d\sigma_{\text{Ruth}}}{d\Omega} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (v \rightarrow c) \end{aligned}$$



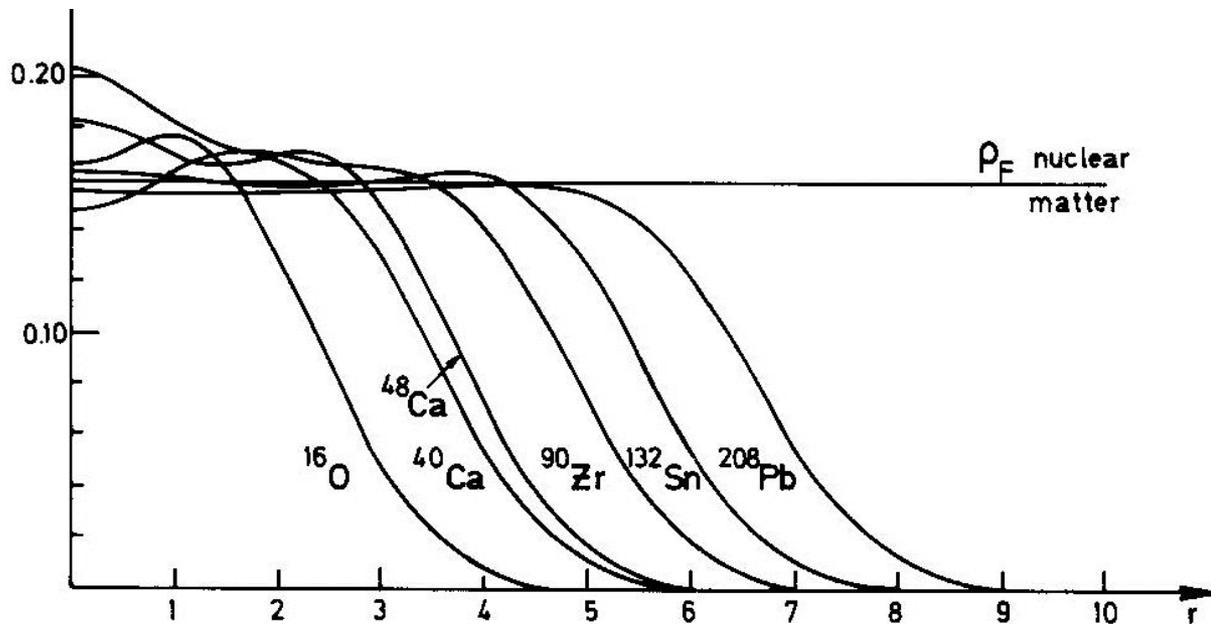
電子と原子核の相互作用:

$$V(\mathbf{r}) = - \int d\mathbf{r}' \rho_{\text{ch}}(\mathbf{r}') \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

(note) $\nabla^2 V(\mathbf{r}) = 4\pi e^2 \rho_{\text{ch}}(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned} M_{fi} &= \langle \psi_f | V | \psi_i \rangle = \int d\mathbf{r} \psi_f^*(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) \psi_i(\mathbf{r}) \\ &= \int d\mathbf{r} e^{i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f) \cdot \mathbf{r}} V(\mathbf{r}) \equiv \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} V(\mathbf{r}) \\ &= \underbrace{-\frac{4\pi e^2}{q^2}}_{\uparrow} \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \rho_{\text{ch}}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

(部分積分2回)



フェルミ分布

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp[(r - R_0)/a]}$$

$\rho_0 \sim 0.17 \text{ (fm}^{-3}\text{)}$ ← 原子核の飽和性

$R_0 \sim 1.1 \times A^{1/3} \text{ (fm)}$

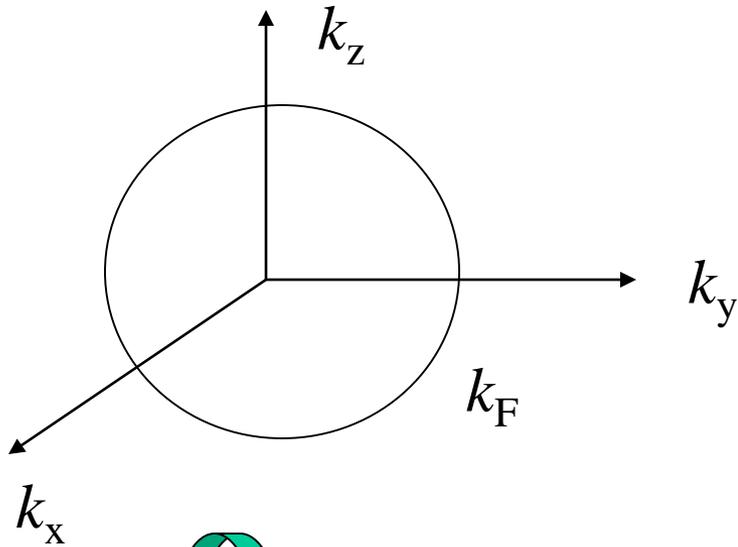
$a \sim 0.57 \text{ (fm)}$

cf. 核子の感じるポテンシャルも同じような形。下から軌道を詰めていくとフェルミ・エネルギーは約 -8.5 MeV

→ ポテンシャルの深さは?

運動量分布

フェルミ・ガス近似



$$\begin{aligned}\rho &= 2 \times 2 \times 4\pi \int_0^{k_F} \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3} \\ &= \frac{2}{3\pi^2} k_F^3\end{aligned}$$

(note: スピン・アイソスピンに関する縮退度)



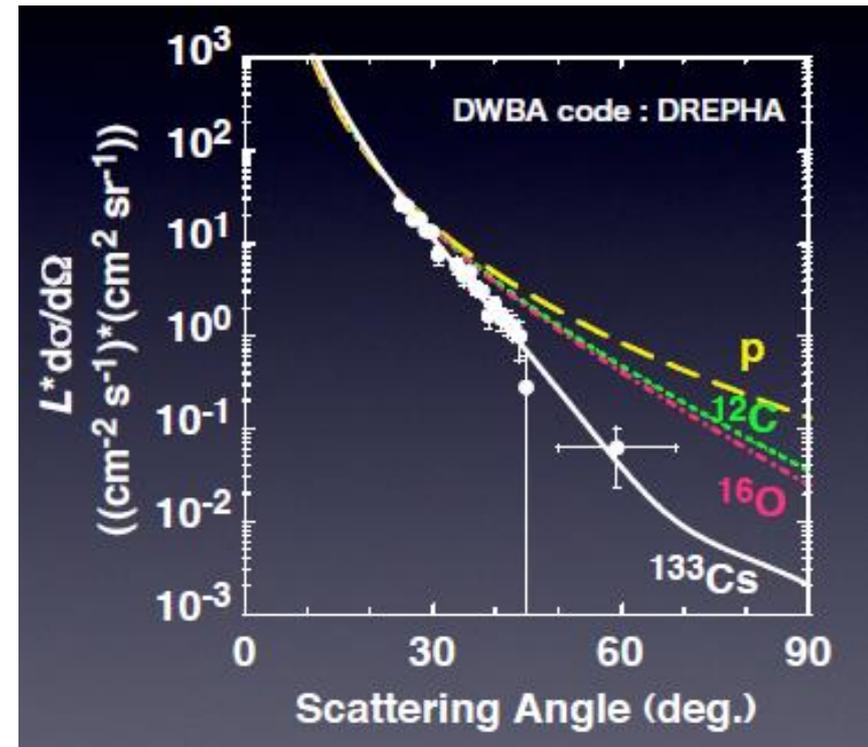
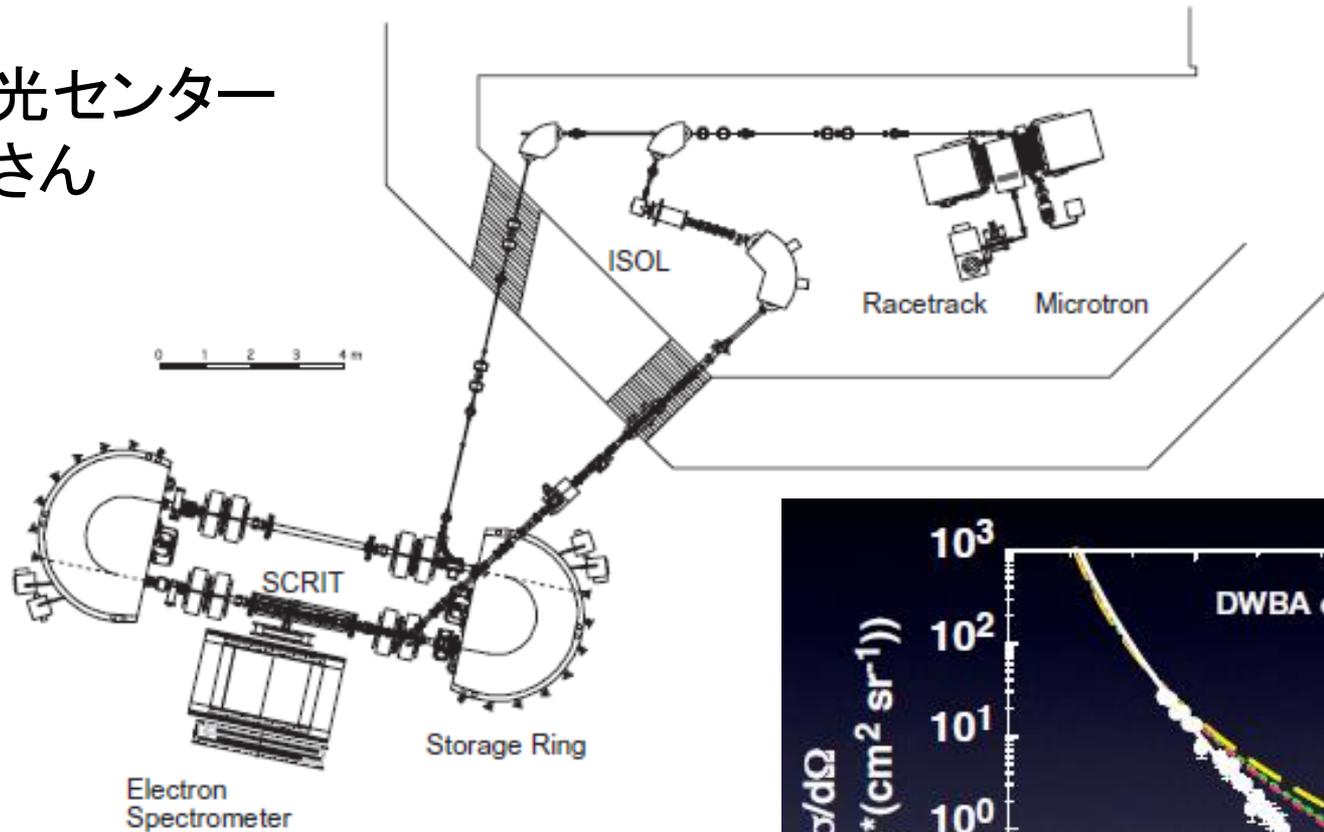
$$k_F \sim 1.36 \quad (\text{fm}^{-1})$$

$$\iff \frac{v_F}{c} = \frac{k_F \cdot \hbar c}{mc^2} = 0.285$$

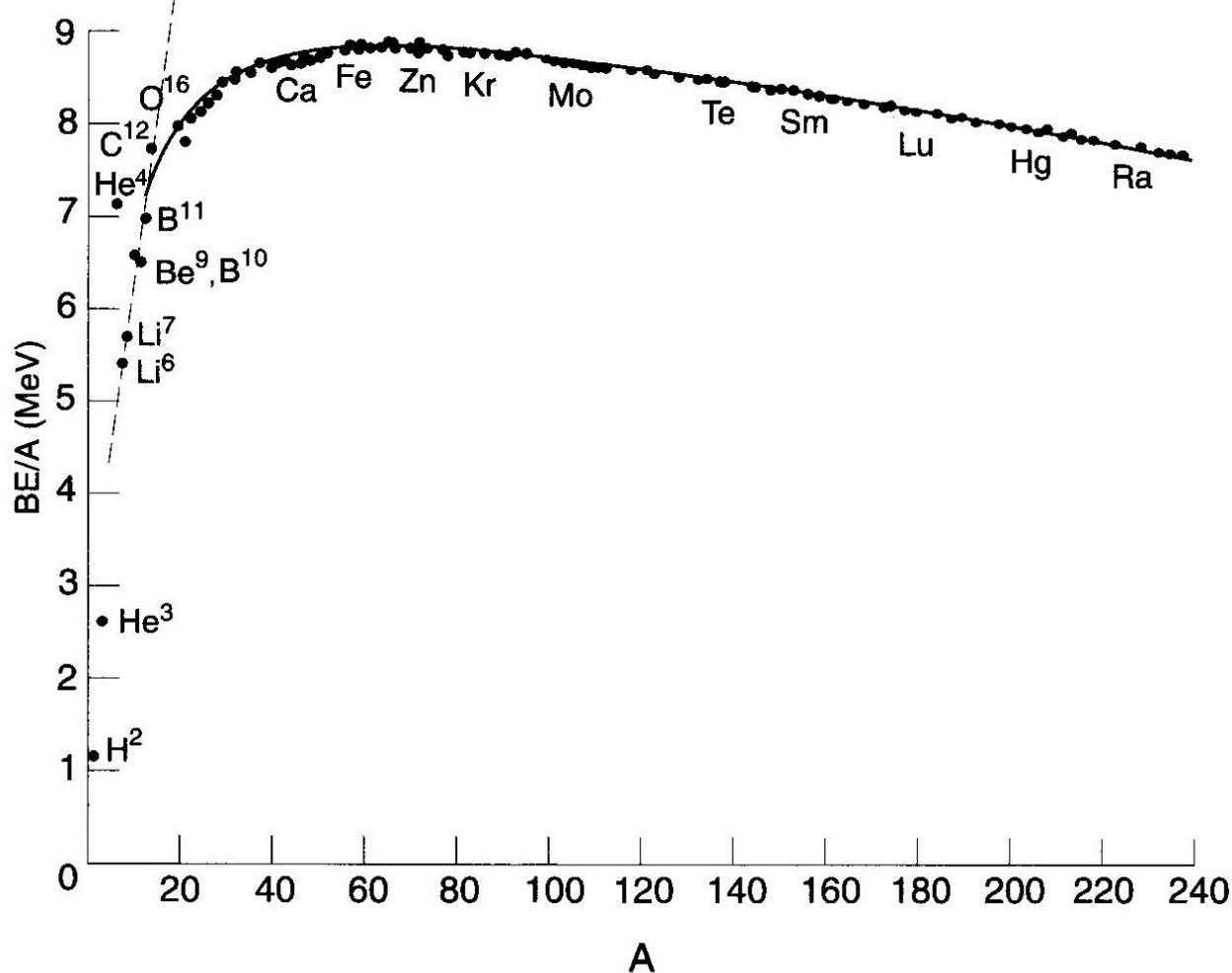
$$\text{フェルミ・エネルギー: } \epsilon_F = \frac{k_F^2 \hbar^2}{2m} \sim 37 \quad (\text{MeV})$$

cf. 不安定核の電子散乱 (SCRIT)

電子光センター
須田さん



T. Suda et al.,
PTEP 2012, 03C008 (2012)
PRL102, 102501 (2009)

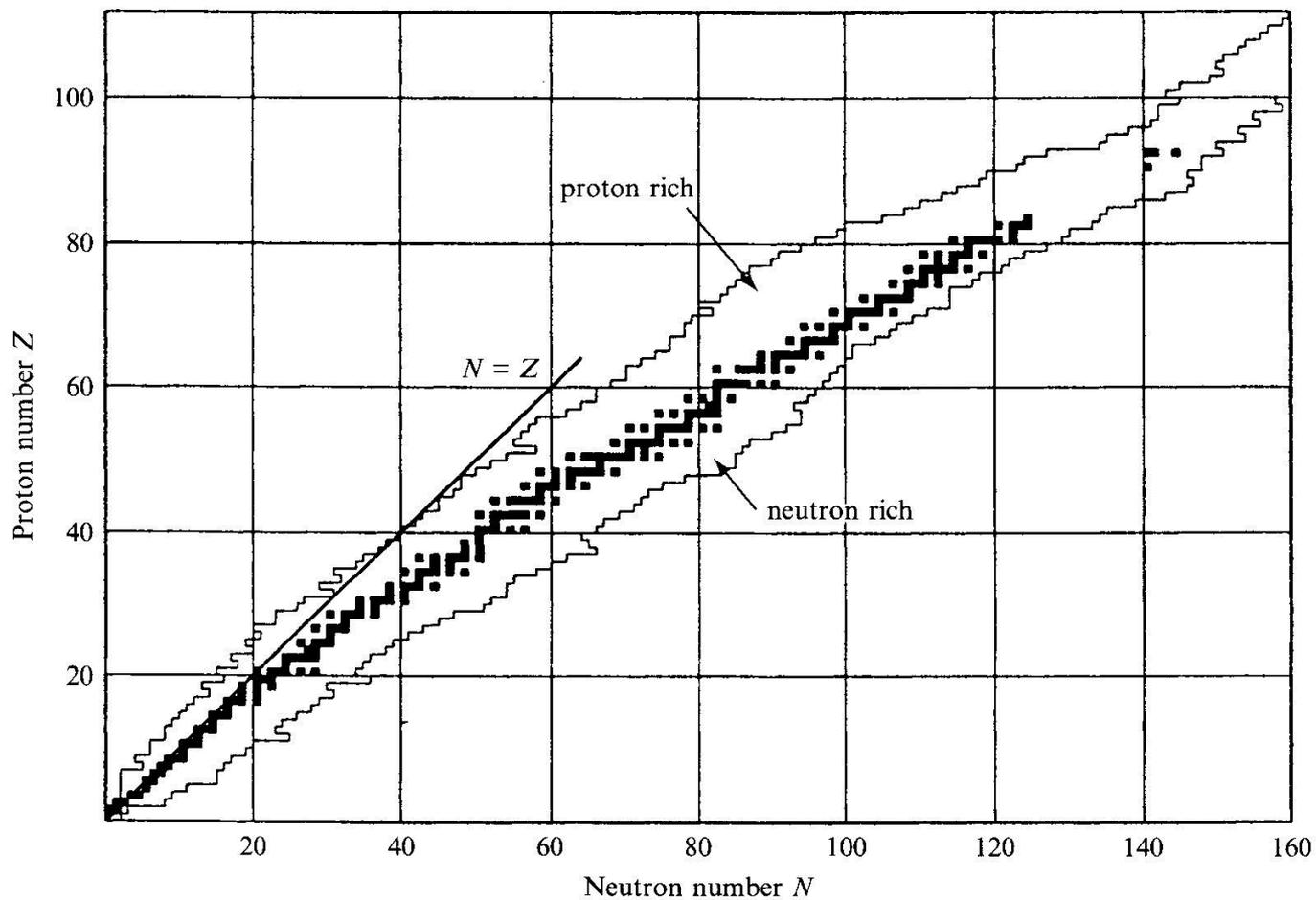


1. $B(N,Z)/A \sim 8.5 \text{ MeV}$ ($A > 12$) \iff 短距離力(核子間相互作用)

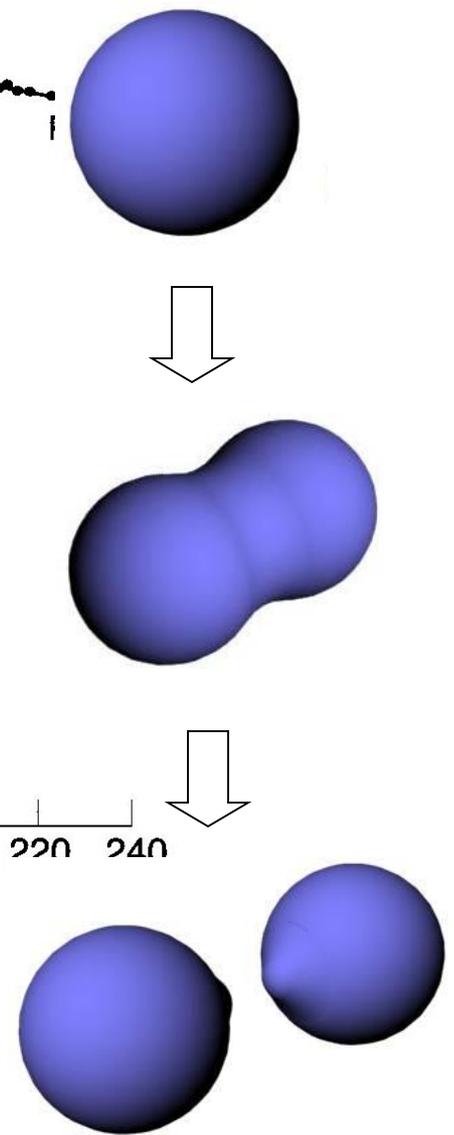
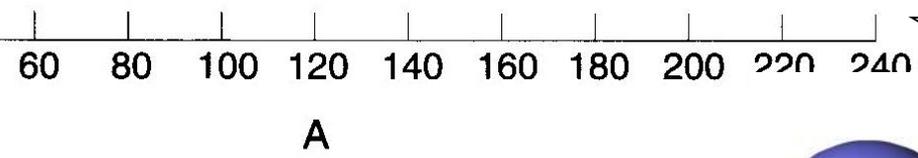
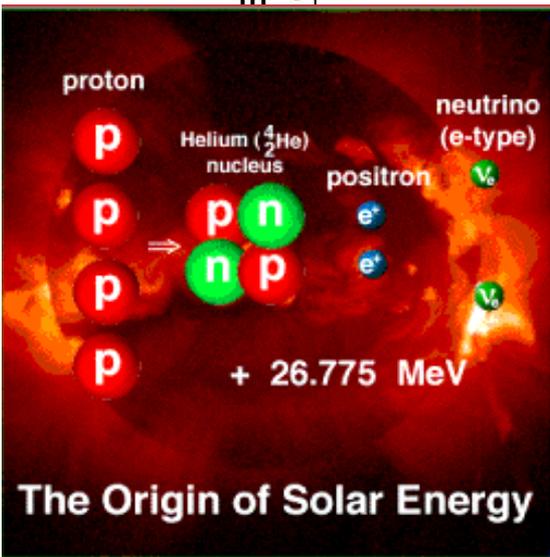
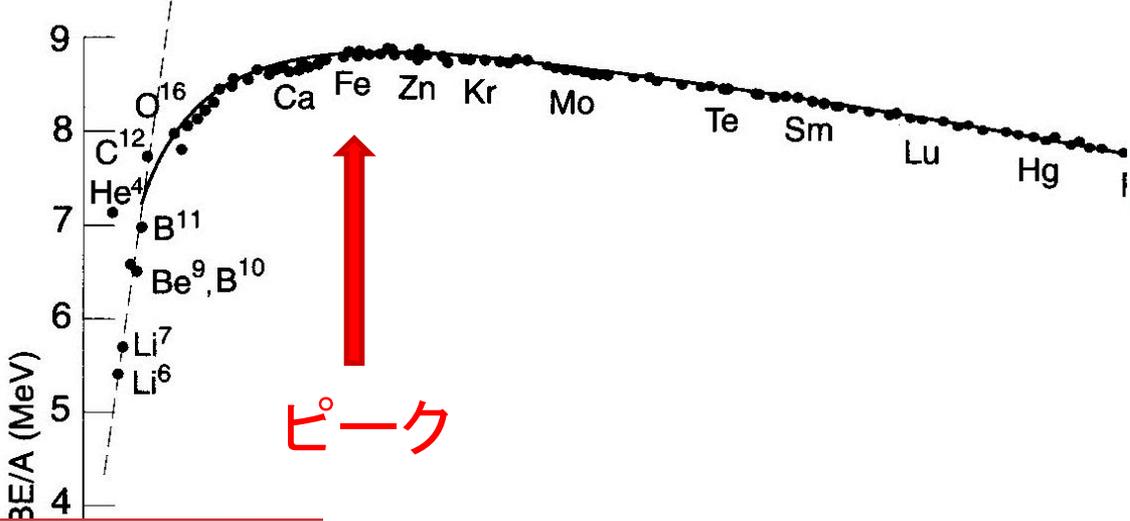
2. 重い原子核に対してはクーロン力の影響

← B/A が A に比例して減少
(長距離力(クーロン力)がはたらいっている証拠)

核图表



安定核: $N \geq Z$



- 軽い核は核融合した方が安定
- 重い核は核分裂した方が安定