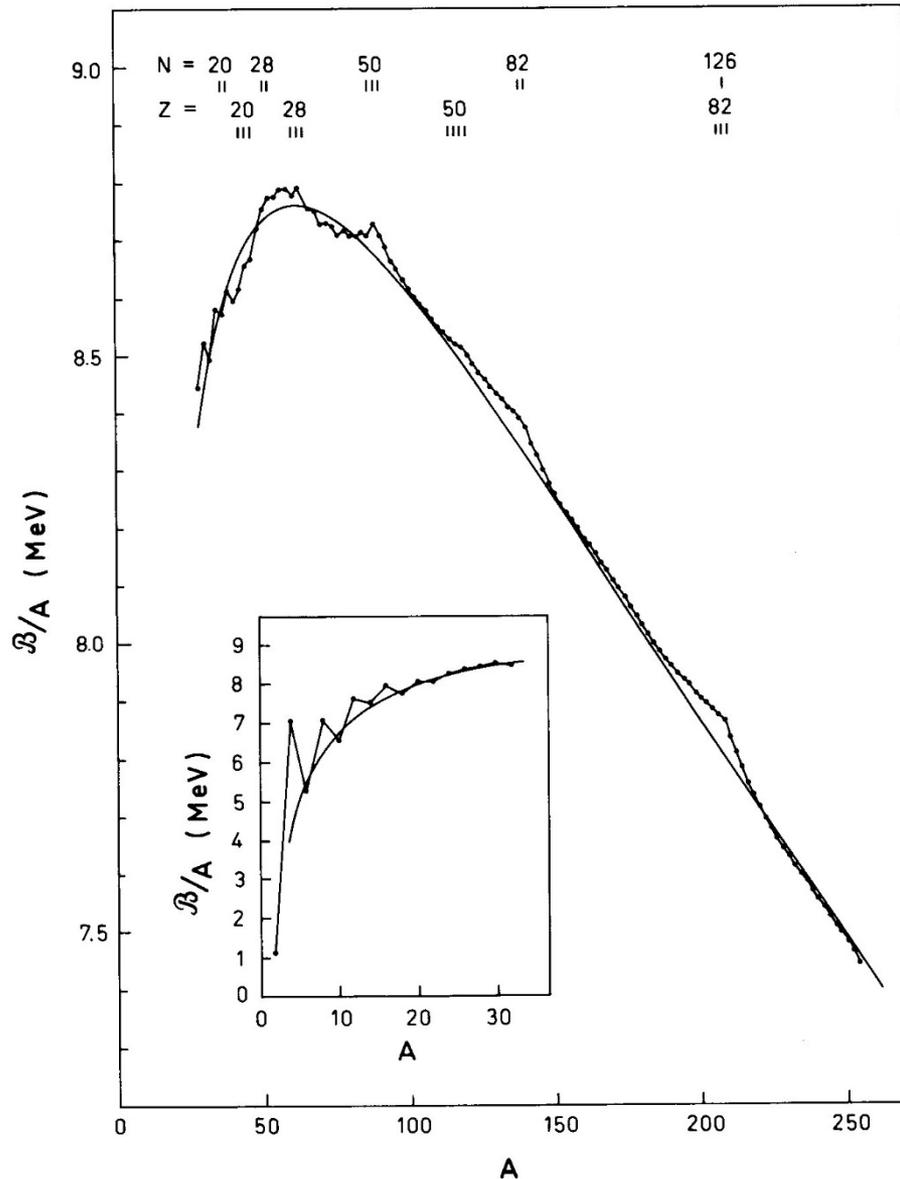


(前回のおさらい)

$$B(N, Z) = B_{\text{macro}}(N, Z) + B_{\text{micro}}(N, Z)$$



### •スムーズな関数

$$B_{\text{macro}}(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}$$

### •ゆらぎ (2つの起源)

$$B_{\text{micro}} = B_{\text{pair}} + B_{\text{shell}}$$

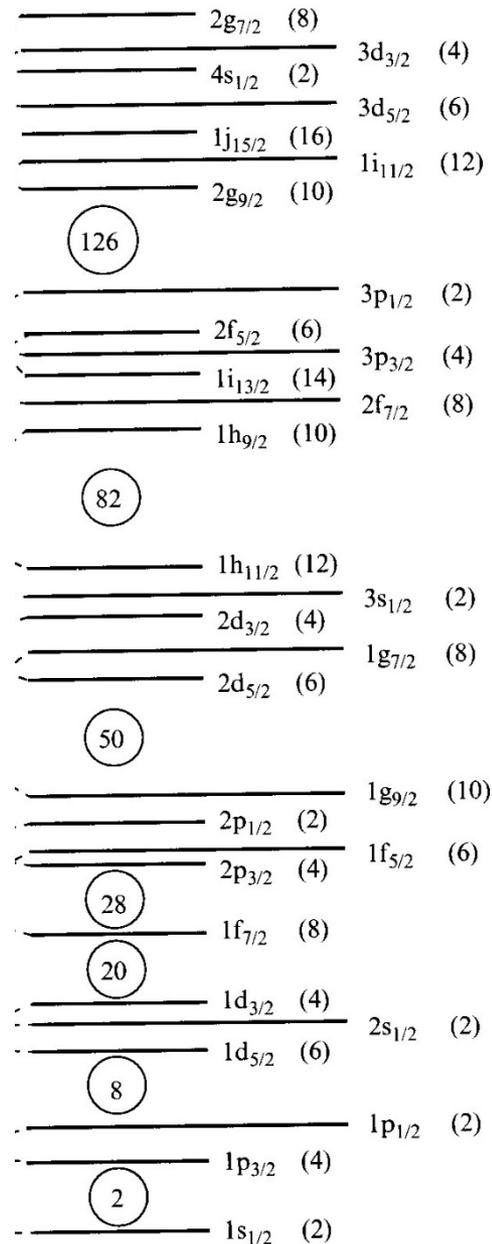
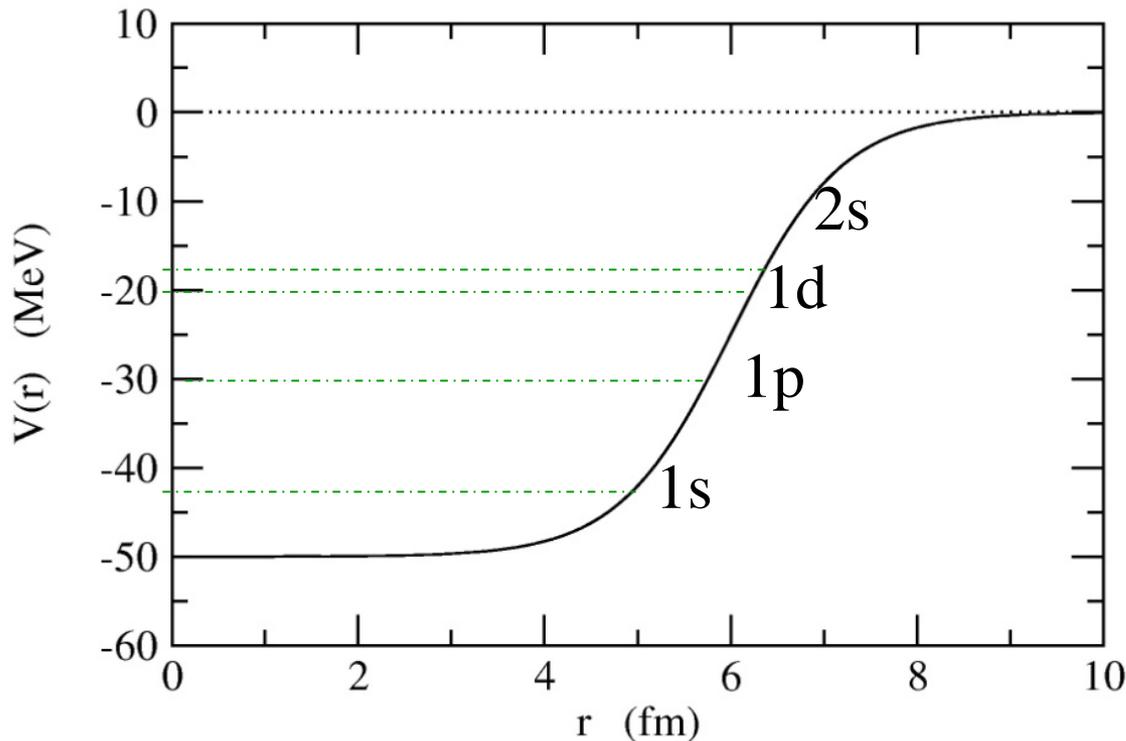
対相関      殻構造

液滴模型:

$$B_{\text{LDM}} = B_{\text{macro}} + B_{\text{pair}}$$

# 殻構造(魔法数)の理解:

- ✓ ポテンシャル中の独立粒子描像
- ✓ スピン・軌道力

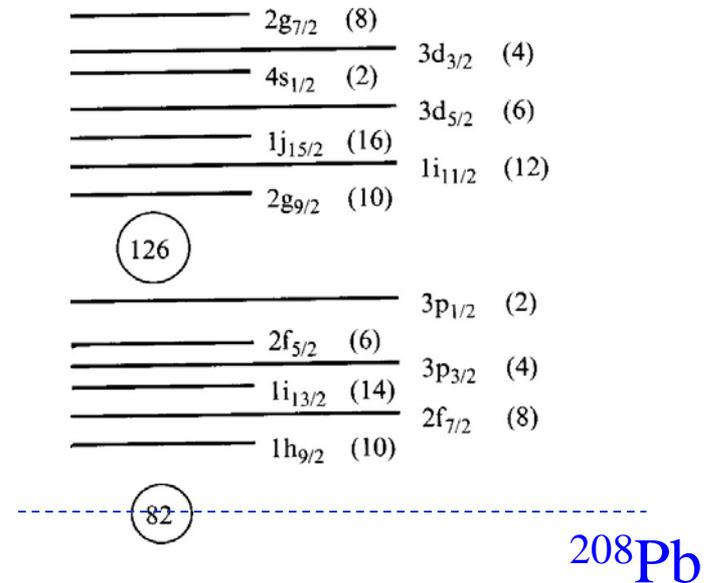
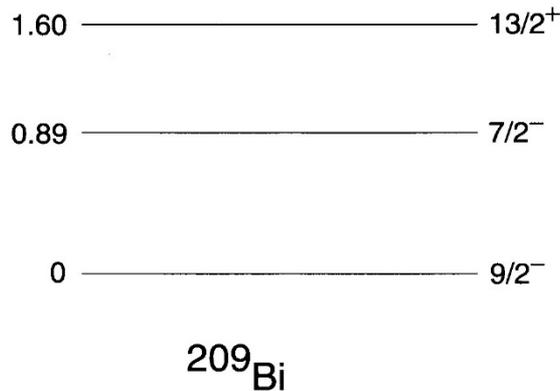
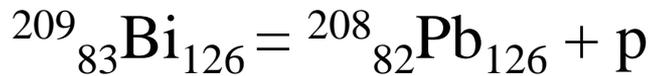


Woods-Saxon plus  
spin-orbit coupling

# 殻構造(魔法数)の理解:

- ✓ ポテンシャル中の独立粒子描像
- ✓ スピン・軌道力

殻模型: 閉核 + 1核子  
は非常にうまくいく

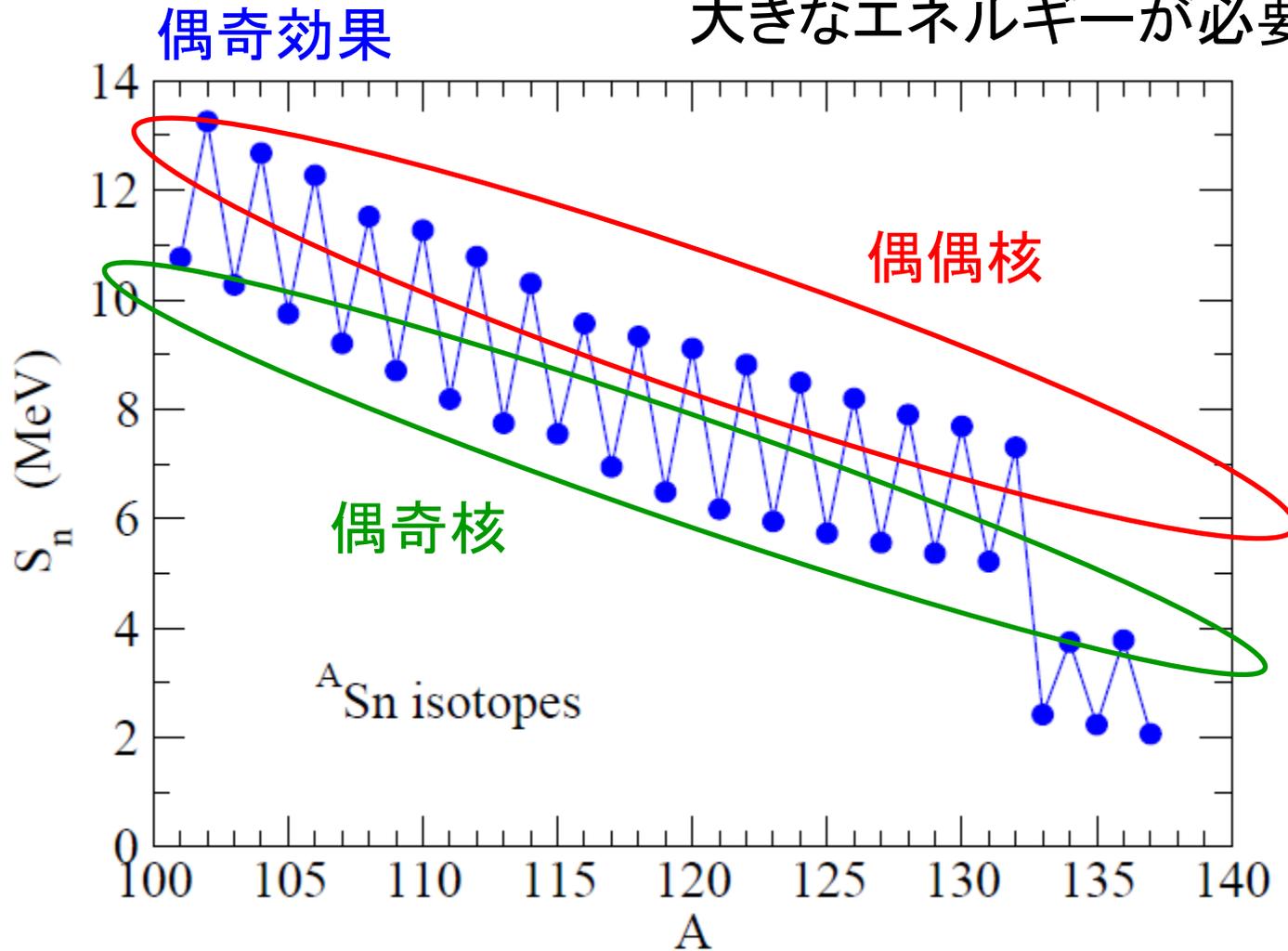


殻構造 → 原子核の変形

でもその前に今週は対相関について

# 対相関エネルギー

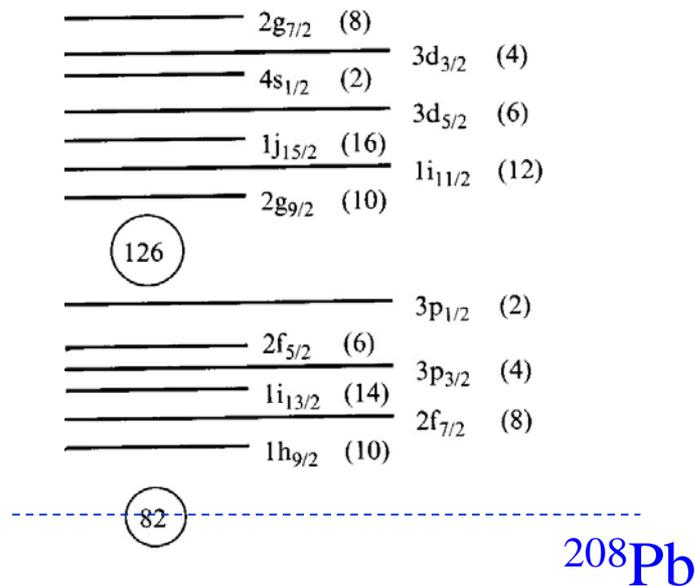
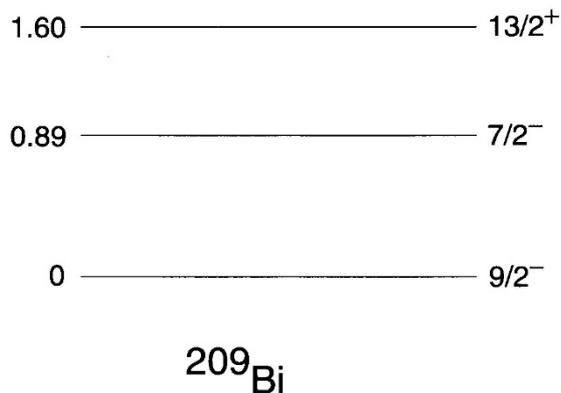
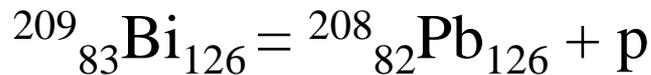
偶数個の中性子から1つ中性子  
を取る方が奇数個から取るより  
大きなエネルギーが必要: 対相関



1n separation energy:  $S_n (A,Z) = B(A,Z) - B(A-1,Z)$

# 対相関

殻模型：閉核+1核子は非常にうまくいく



閉核+2核子  
だとどうなる？



独立粒子模型から予測される状態:

$$E = 0: [h_{9/2} \otimes h_{9/2}]^I \quad (I = 0, 2, 4, 6, 8)$$

$$E = 0.89 \text{ MeV}: [h_{9/2} \otimes f_{7/2}]^I \quad (I = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$$

→ 1 MeV 以下の励起エネルギーに 13 個の状態



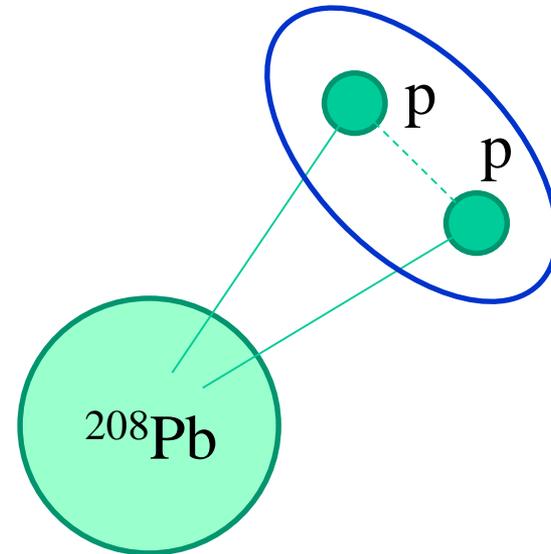
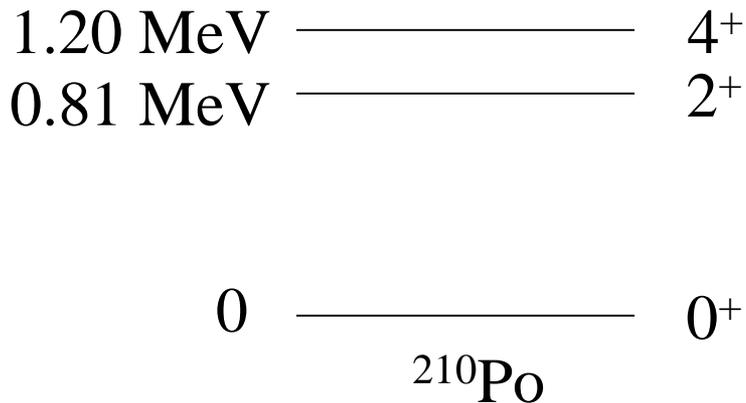
### 独立粒子模型の予測:

$$E = 0: [h_{9/2} \otimes h_{9/2}]^I \quad (I = 0, 2, 4, 6, 8)$$

$$E = 0.89 \text{ MeV}: [h_{9/2} \otimes f_{7/2}]^I \quad (I = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$$

→ 1 MeV 以下の励起エネルギーに 13 個の状態

### 実際に観測されたスペクトル:



↔ 陽子間の相互作用の効果

$$H = \sum_i T_i + \sum_{i < j} v_{ij} \rightarrow H = \sum_i (T_i + V_i) + \underbrace{\sum_{i < j} v_{ij} - \sum_i V_i}_{\text{平均からのずれ (残留相互作用)}}$$

平均からのずれ  
(残留相互作用)

残留相互作用は完全に無視してもよいのか？

→ 開殻原子核では重要な役割を果たす  
ことが知られている(ペアリング)

## 対相関(ペアリング)

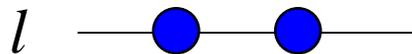
$$H = \sum_{i=1}^A \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + V_{\text{HF}}(i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} v(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) - \sum_i V_{\text{HF}}(i)$$

簡単のために、残留相互作用としてデルタ関数を仮定してみる  
(超短距離力)

$$\begin{aligned} v_{\text{res}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &\sim -g \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= -g \frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{r r'} \sum_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^*(\hat{\mathbf{r}}) Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}}') \end{aligned}$$

摂動論で残留相互作用の効果を見積もってみる:

非摂動な波動関数(基底状態を考える):

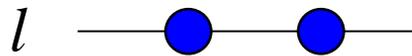


$$|(ll)LM\rangle = \sum_{m,m'} \langle l m l m' | LM \rangle \psi_{lm}(\mathbf{r}) \psi_{lm'}(\mathbf{r}')$$

$$\longrightarrow \Delta E_L = \langle (ll)LM | v_{\text{res}} | (ll)LM \rangle$$

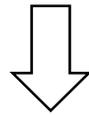
## 対相関(ペアリング)

$$\begin{aligned}v_{\text{res}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &\sim -g \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= -g \frac{\delta(r - r')}{rr'} \sum_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^*(\hat{\mathbf{r}}) Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}}')\end{aligned}$$



$$|(ll)LM\rangle = \sum_{m,m'} \langle l m l m' | LM \rangle \psi_{lm}(\mathbf{r}) \psi_{lm'}(\mathbf{r}')$$

$$\psi_{lm}(\mathbf{r}) = R_l(r) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$$



残留相互作用によるエネルギー変化:

$$\begin{aligned}\Delta E_L &= \langle (ll)LM | v_{\text{res}} | (ll)LM \rangle \\ &= -g I_r^{(l)} \frac{(2l+1)^2}{4\pi} \begin{pmatrix} l & l & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2\end{aligned}$$

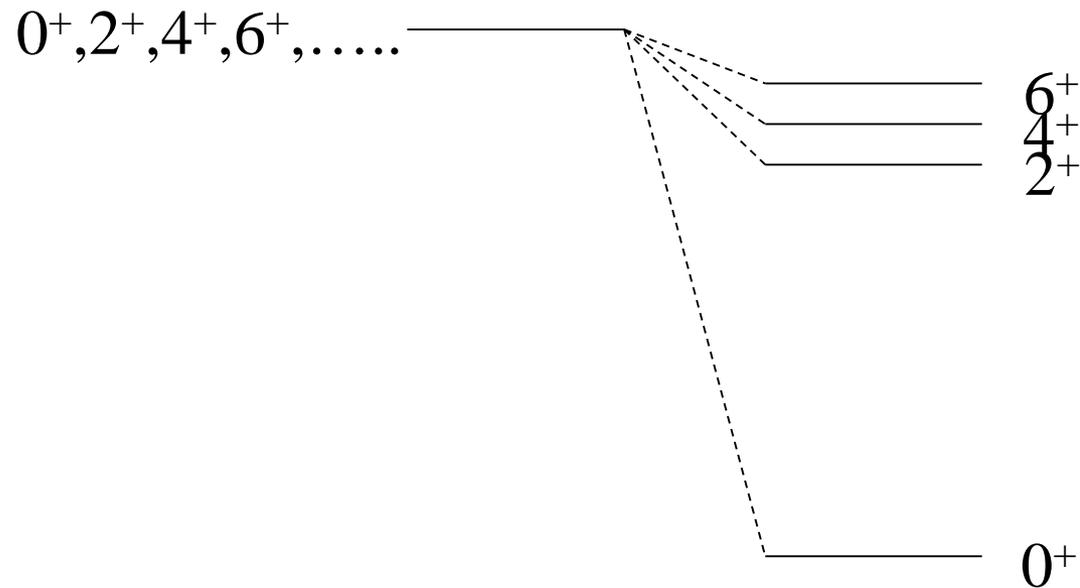
$$I_r^{(l)} = \int_0^\infty r^2 dr (R_l(r))^4$$

(参考) “3j” 記号

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix} \equiv \frac{(-1)^{j_1-j_2+M}}{\sqrt{2J+1}} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle$$

$$\Delta E_L = -g I_r^{(l)} \frac{(2l+1)^2}{4\pi} \begin{pmatrix} l & l & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \equiv -g I_r^{(l)} \frac{A(l; L)}{4\pi}$$

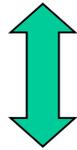
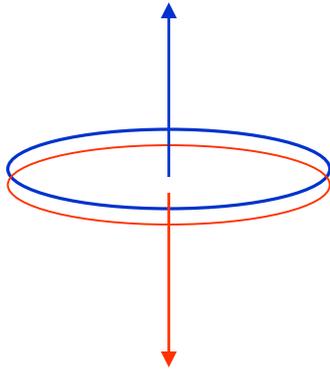
$A(l; L)$	$L=0$	$L=2$	$L=4$	$L=6$	$L=8$
$l=2$	5.00	1.43	1.43	---	---
$l=3$	7.00	1.87	1.27	1.63	---
$l=4$	9.00	2.34	1.46	1.26	1.81



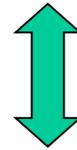
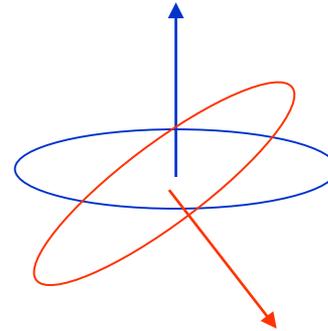
残留相互  
作用なし

残留相互  
作用あり

## 単純な解釈:



$L=0$  対

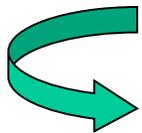
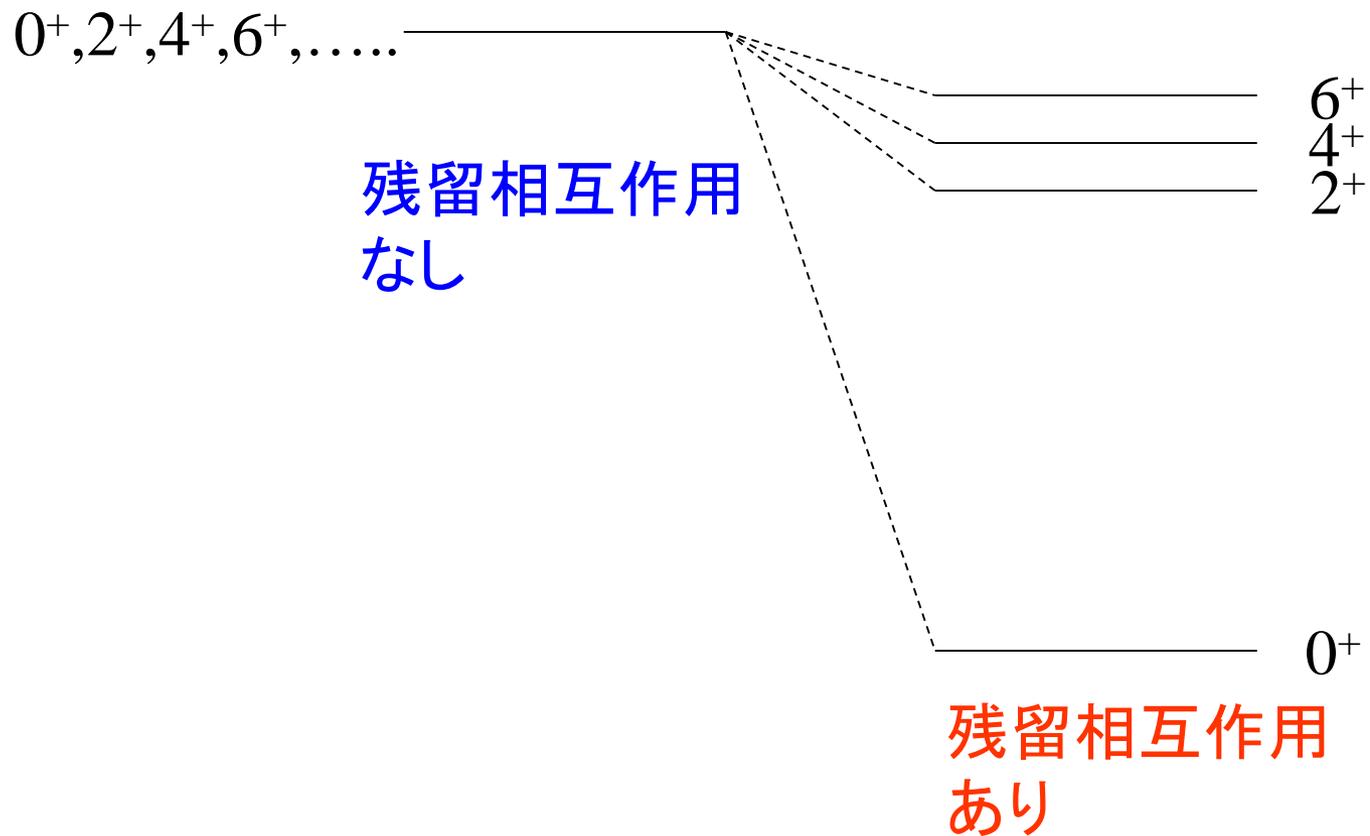


$L \neq 0$  対

$L=0$  のとき空間的な重なりが最大

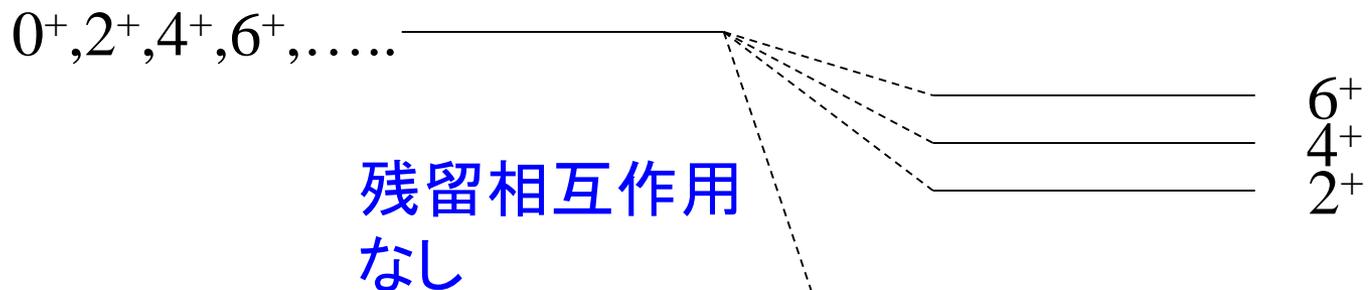
“対相関”

(note)  $L=2j$  対はパウリ原理に抵触

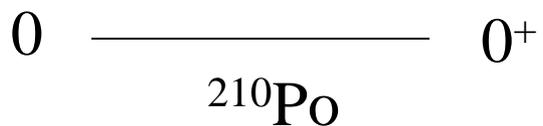
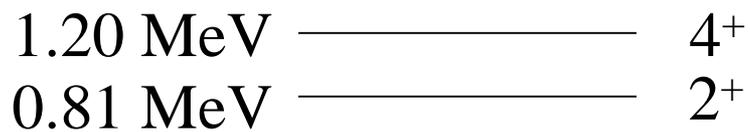


## 原子核の基底状態のスピ

- 偶偶核:  $0^+$
- 偶奇核: 最外殻粒子のスピ

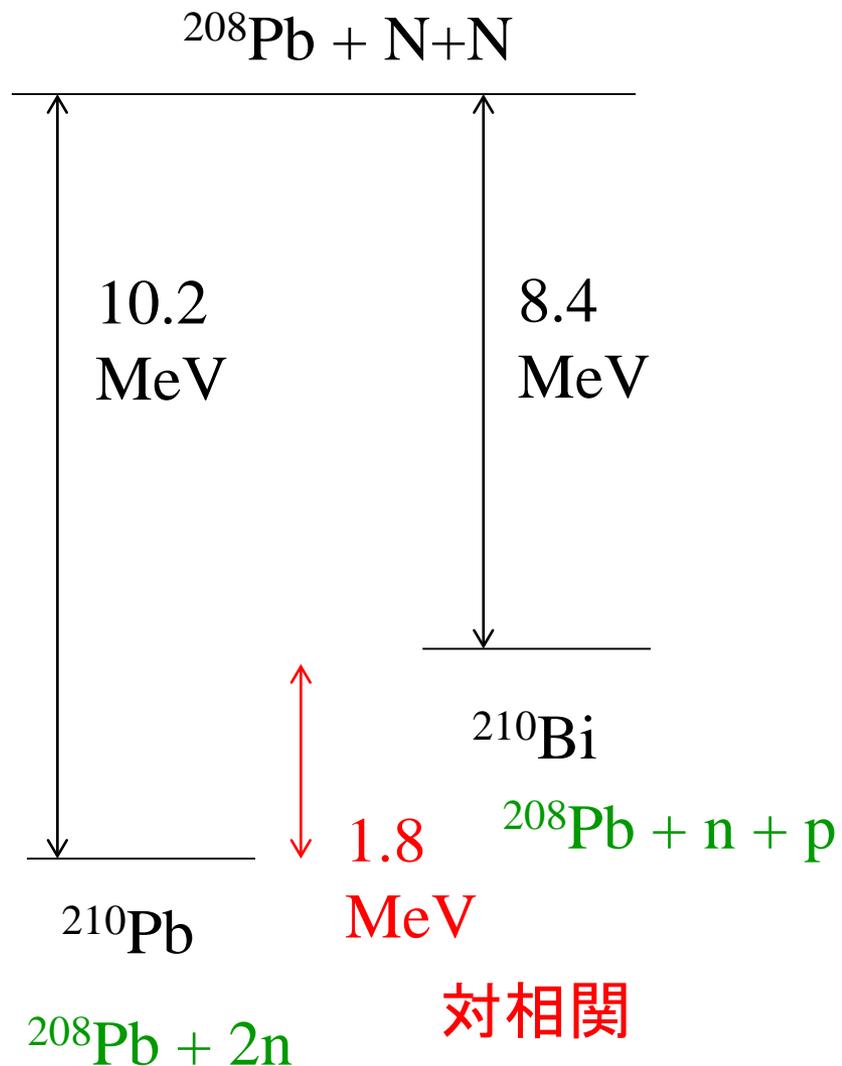
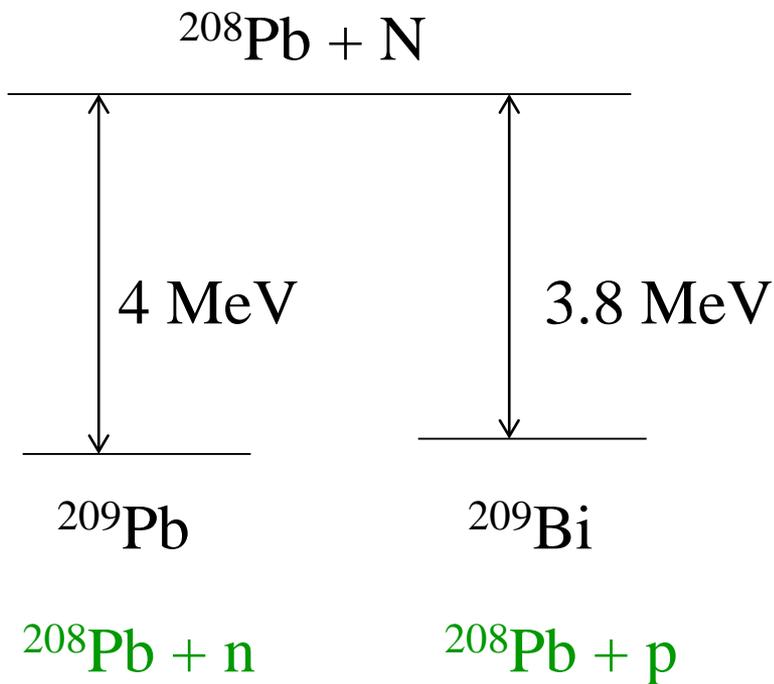


実際に観測されたスペクトル:

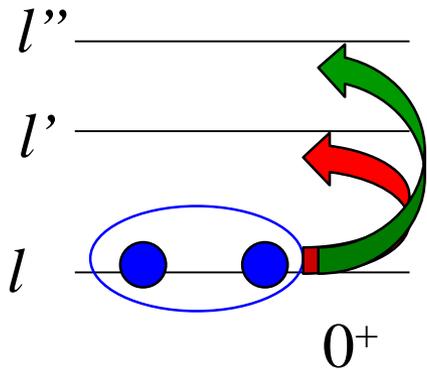


残留相互作用あり

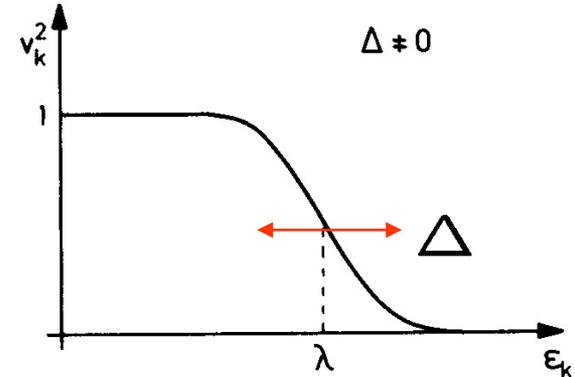
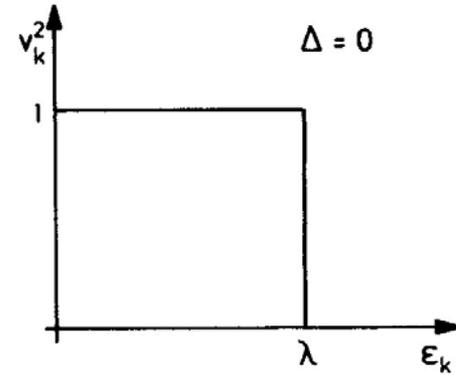
# 質量の関係(偶奇性による質量差)



# 波動関数:



Occupation probability



$$\begin{aligned}
 |\Psi_{0+}\rangle &= |(ll)L=0\rangle \\
 &+ \sum_{l'} \frac{\langle (l'l')L=0 | v_{res} | (ll)L=0 \rangle}{2\epsilon_l - 2\epsilon_{l'}} |(l'l')L=0\rangle + \dots
 \end{aligned}$$

各軌道は部分的にのみ占有されることになる  
cf. BCS 理論

## 質量公式(偶奇性による質量差)

2つの陽子または2つの中性子がスピン0を組むと束縛が大きくなる

例:

束縛エネルギー (MeV)

$${}^{210}_{82}\text{Pb}_{128} = {}^{208}_{82}\text{Pb}_{126} + 2n \quad 1646.6$$

$${}^{210}_{83}\text{Bi}_{127} = {}^{208}_{82}\text{Pb}_{126} + n + p \quad 1644.8$$

$${}^{209}_{82}\text{Pb}_{127} = {}^{208}_{82}\text{Pb}_{126} + n \quad 1640.4$$

$${}^{209}_{83}\text{Bi}_{126} = {}^{208}_{82}\text{Pb}_{126} + p \quad 1640.2$$

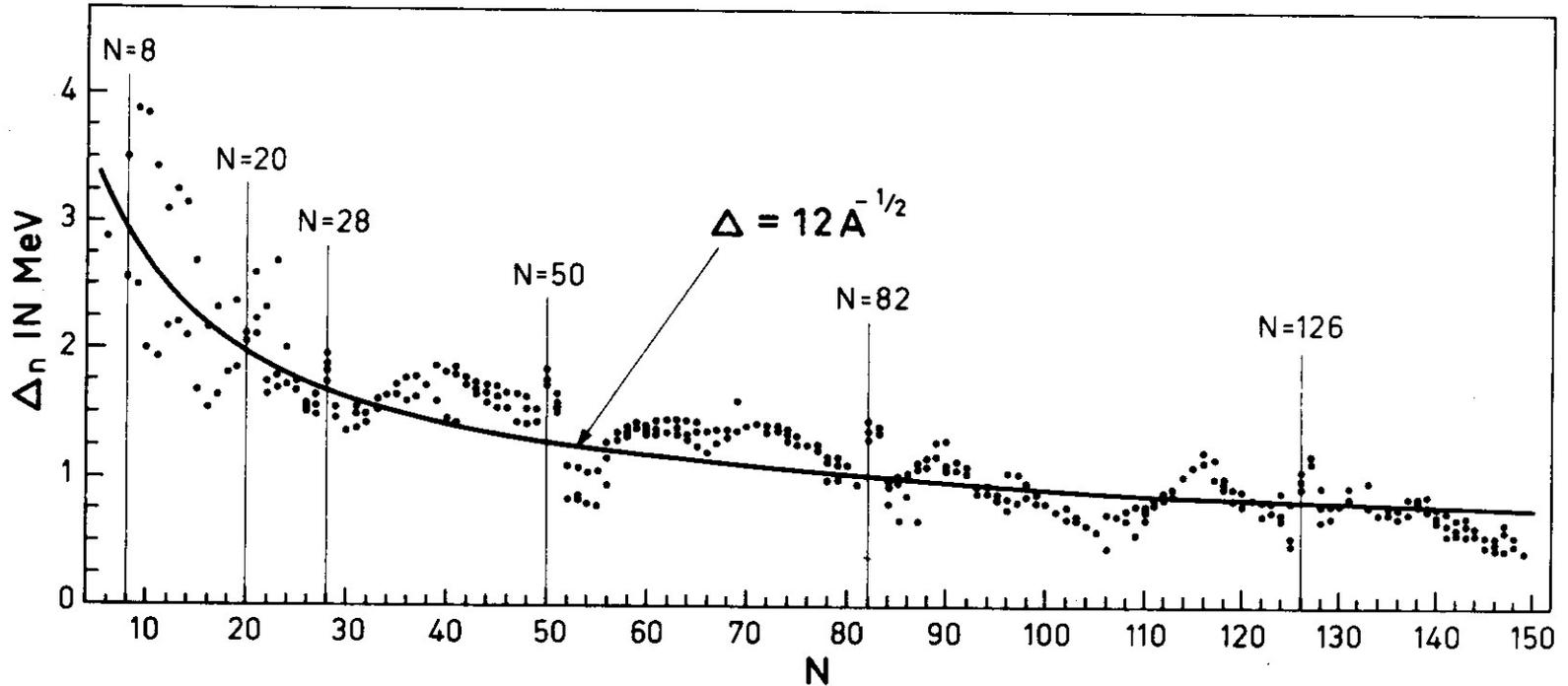
$B_{\text{pair}} = \Delta$	(for even – even)	偶偶
$= 0$	(for even – odd)	偶奇 or 奇偶
$= -\Delta$	(for odd – odd)	奇奇

$$B(N-1, Z) = B(N, Z) + \lambda_n + \Delta_n \quad : \text{even-even}$$

$$B(N, Z) \quad : \text{odd-even}$$

$$B(N+1, Z) = B(N, Z) - \lambda_n + \Delta_n \quad : \text{even-even}$$

であれば、  $\Delta_n = [B(N+1, Z) - 2B(N, Z) + B(N-1, Z)] / 2$

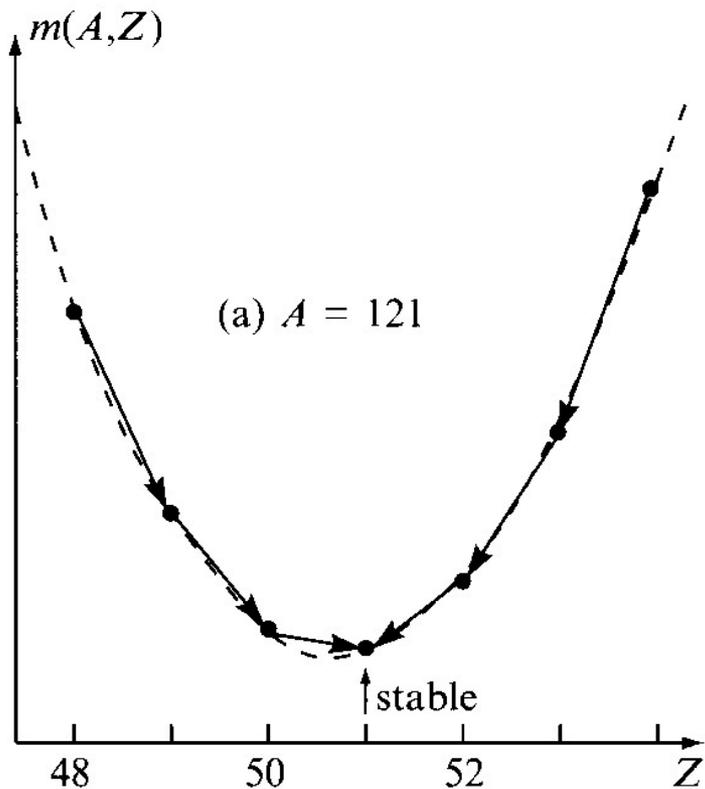


$$\Delta_n \sim \frac{12}{\sqrt{A}} \text{ MeV}$$

# β-安定線

$$B(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}$$

$$m(A, Z) = f(A) + a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_{\text{sym}} \frac{(A - 2Z)^2}{A}$$



安定核 (beta-安定線)

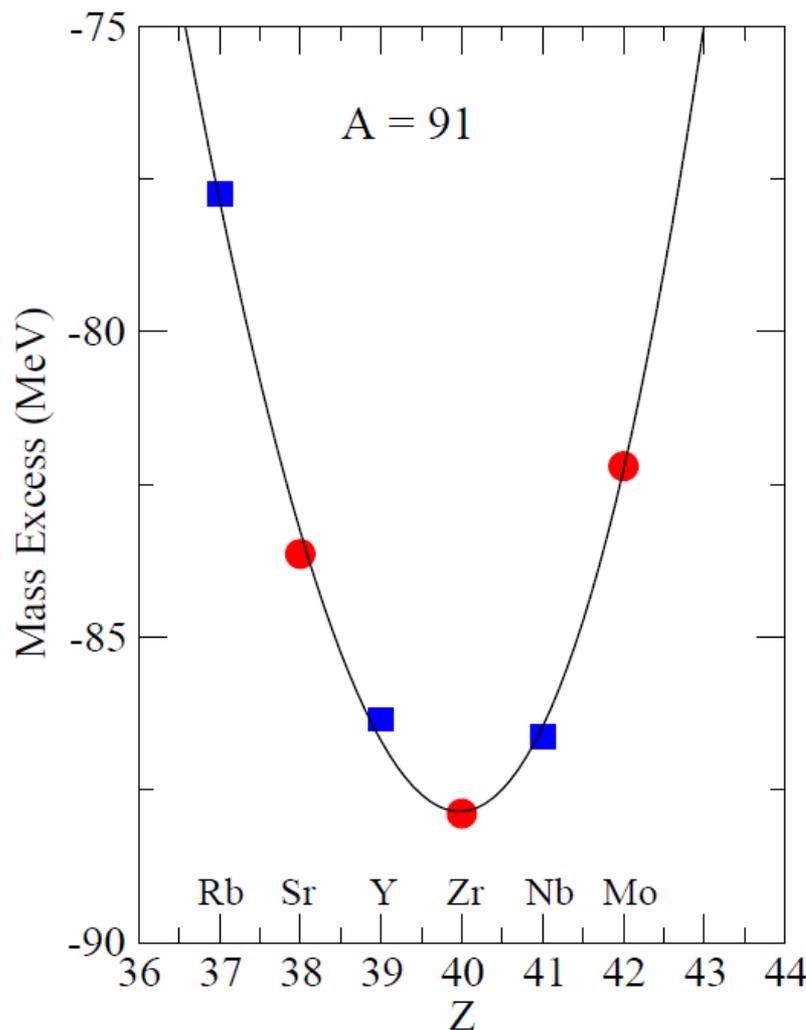
$$\left. \frac{\partial m}{\partial Z} \right|_{A=\text{const.}} = 0$$

$$Z = \frac{4a_{\text{sym}}}{2a_C/A^{1/3} + 8a_{\text{sym}}/A}$$

$$\Rightarrow Z < A/2$$

ここに対相関を考慮するとどうなるか?

$$\begin{aligned}
 B_{\text{pair}} &= \Delta && (\text{for even - even}) \\
 &= 0 && (\text{for even - odd}) \\
 &= -\Delta && (\text{for odd - odd})
 \end{aligned}$$



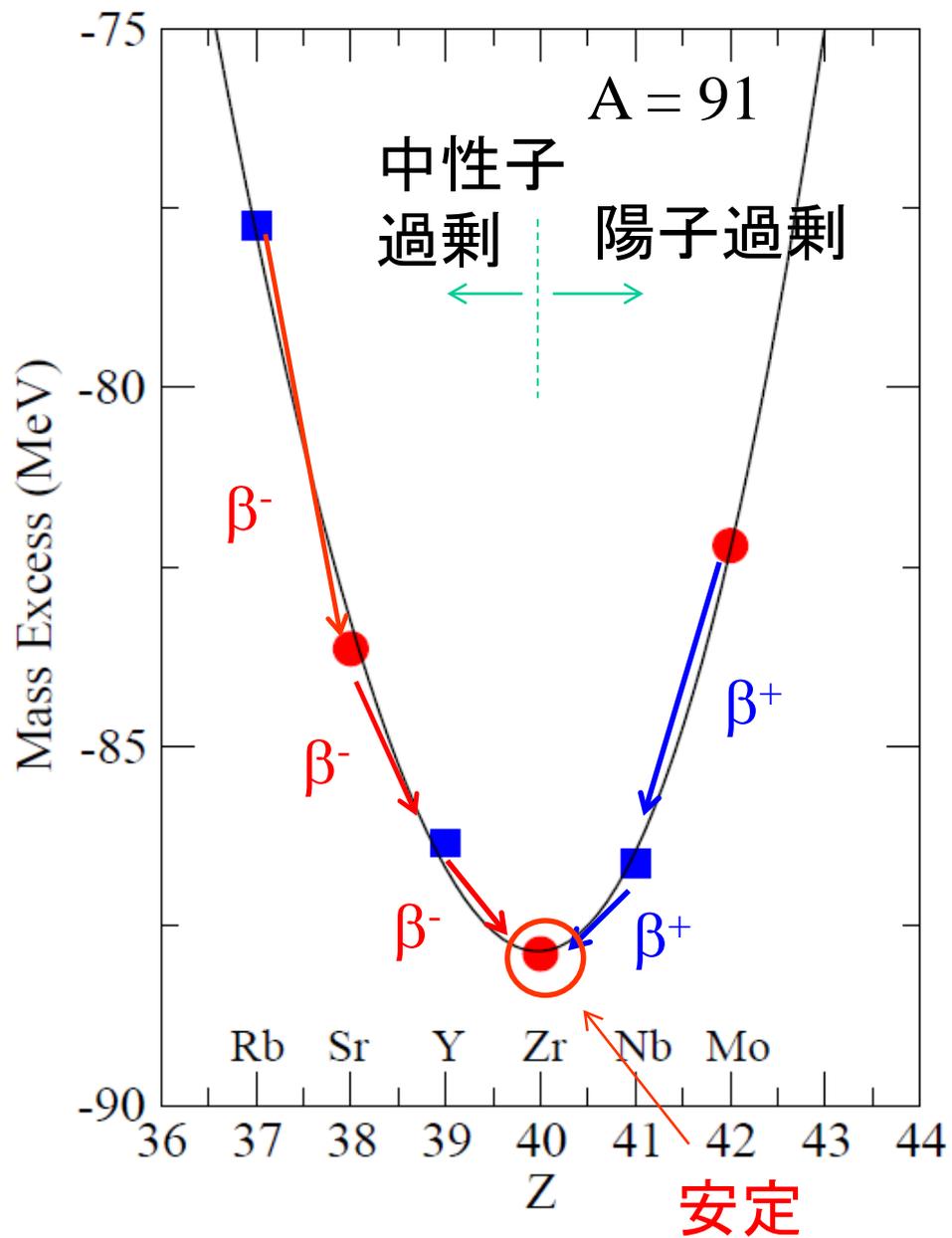
$$B_{\text{LDM}} = B_{\text{macro}} + B_{\text{pair}}$$

Aが奇数の場合

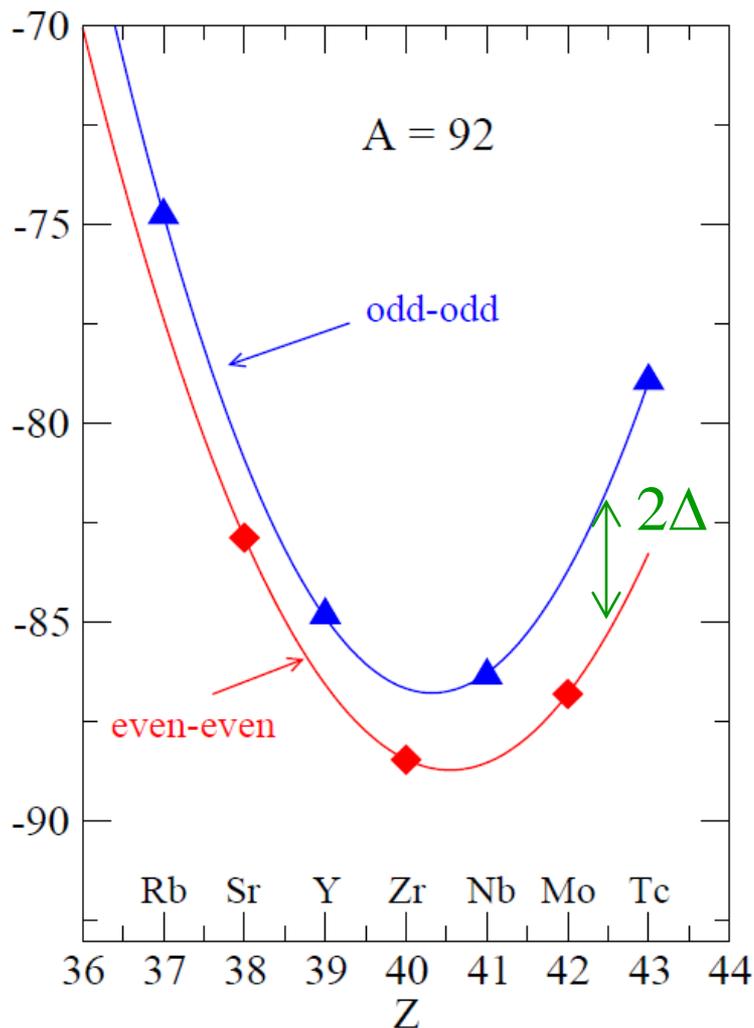
even-odd 核の場合、 $B_{\text{pair}}=0$   
なので今までと同じ

mass excess (縦軸)は  
 $M(A,Z) - Au$  という定義

$u$  は原子質量単位で  $^{12}\text{C}$  の  
質量が  $12u$  という定義



$$\begin{aligned}
 B_{\text{pair}} &= \Delta && (\text{for even - even}) \\
 &= 0 && (\text{for even - odd}) \\
 &= -\Delta && (\text{for odd - odd})
 \end{aligned}$$

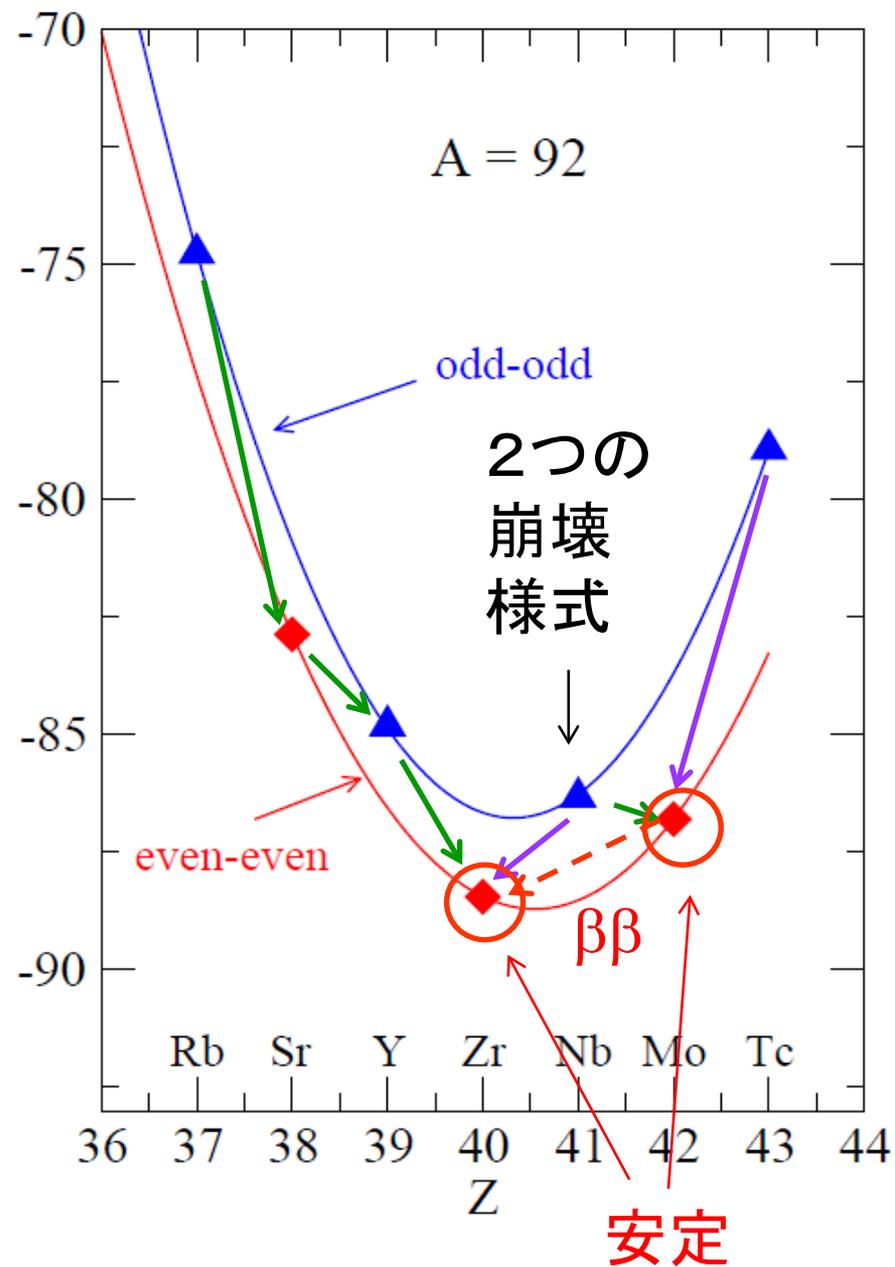
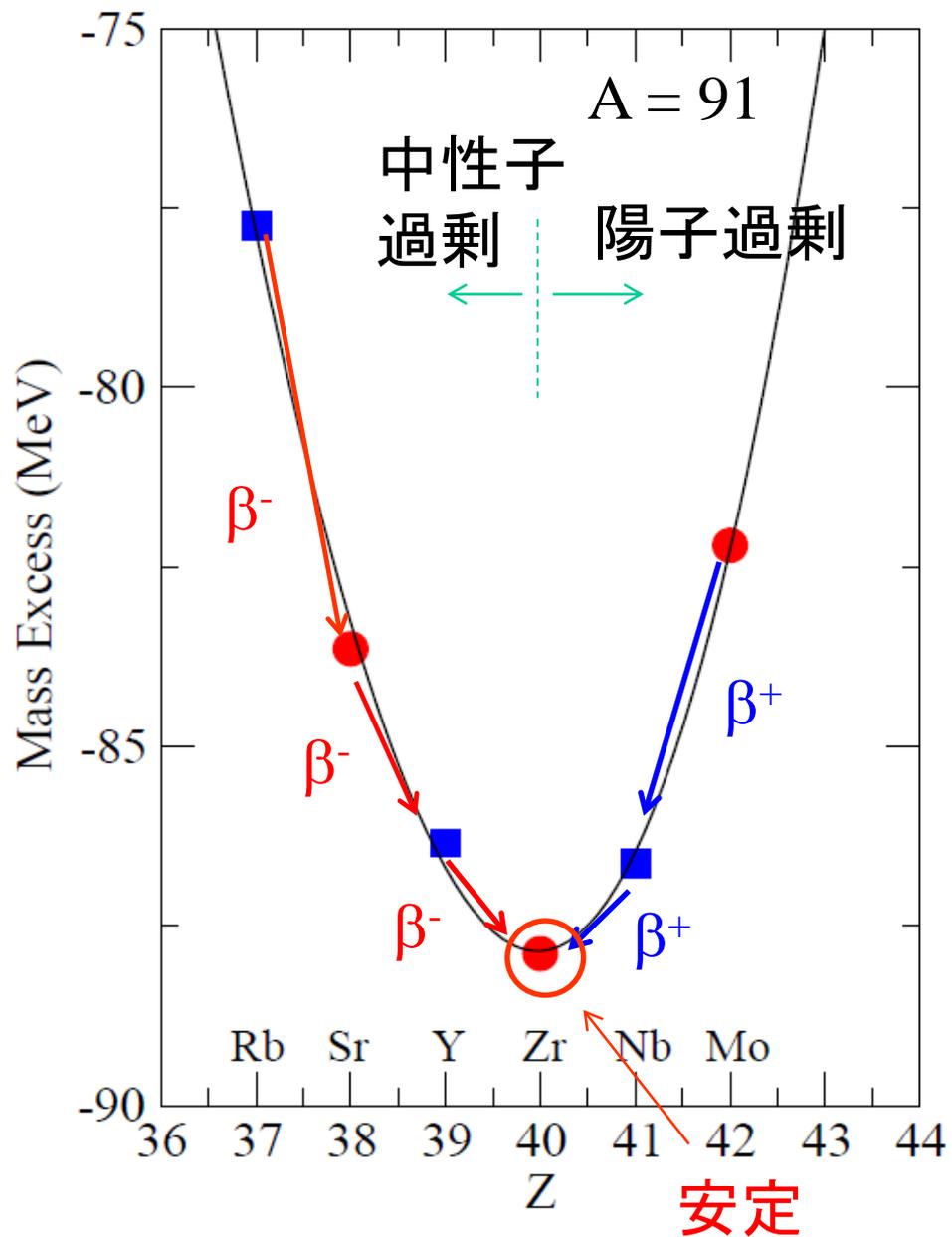


次に A が偶数の場合

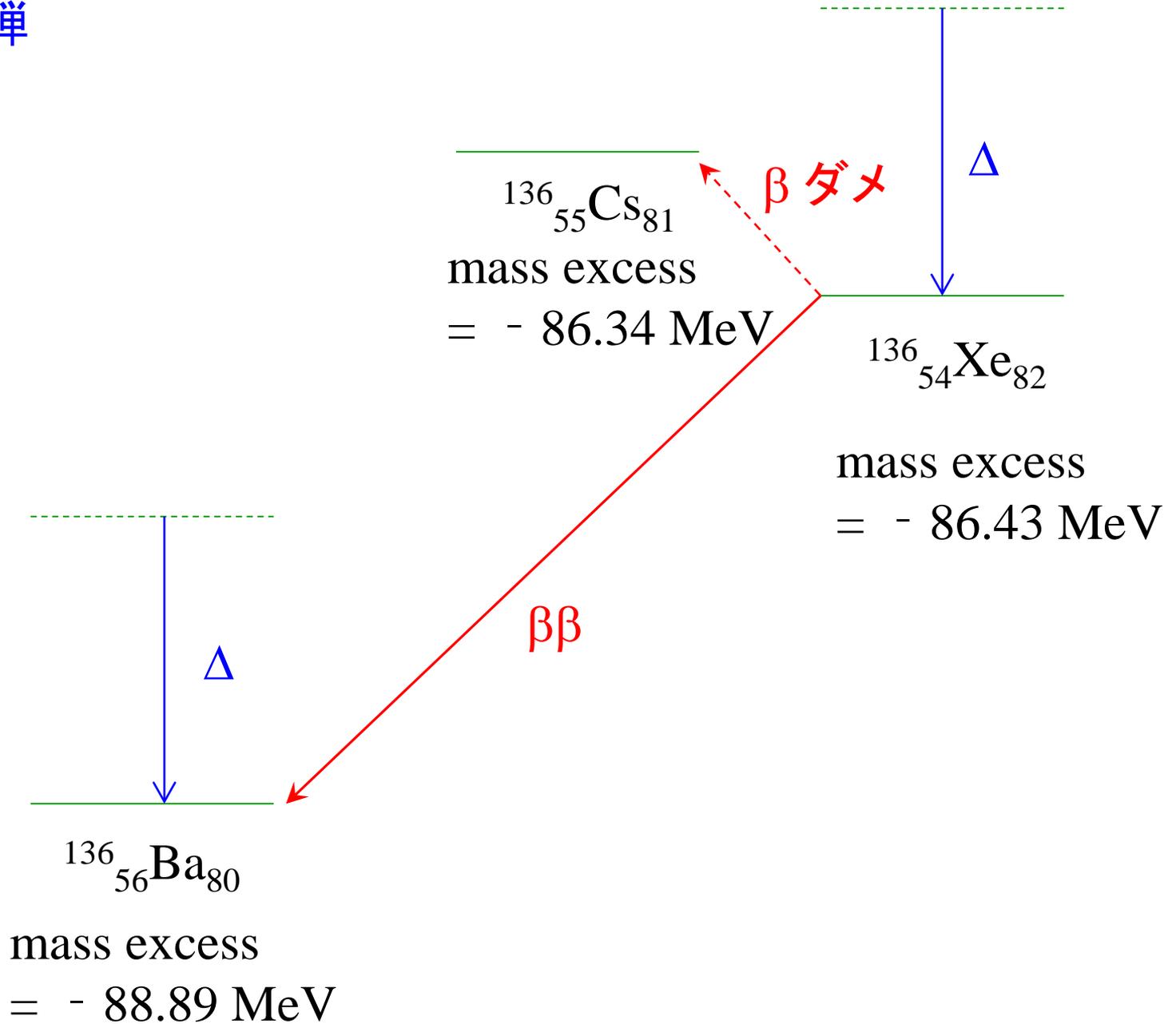
A が偶数の場合、even-even 核  
と odd-odd 核でエネルギーの違う  
2つの2次曲線ができる

↕

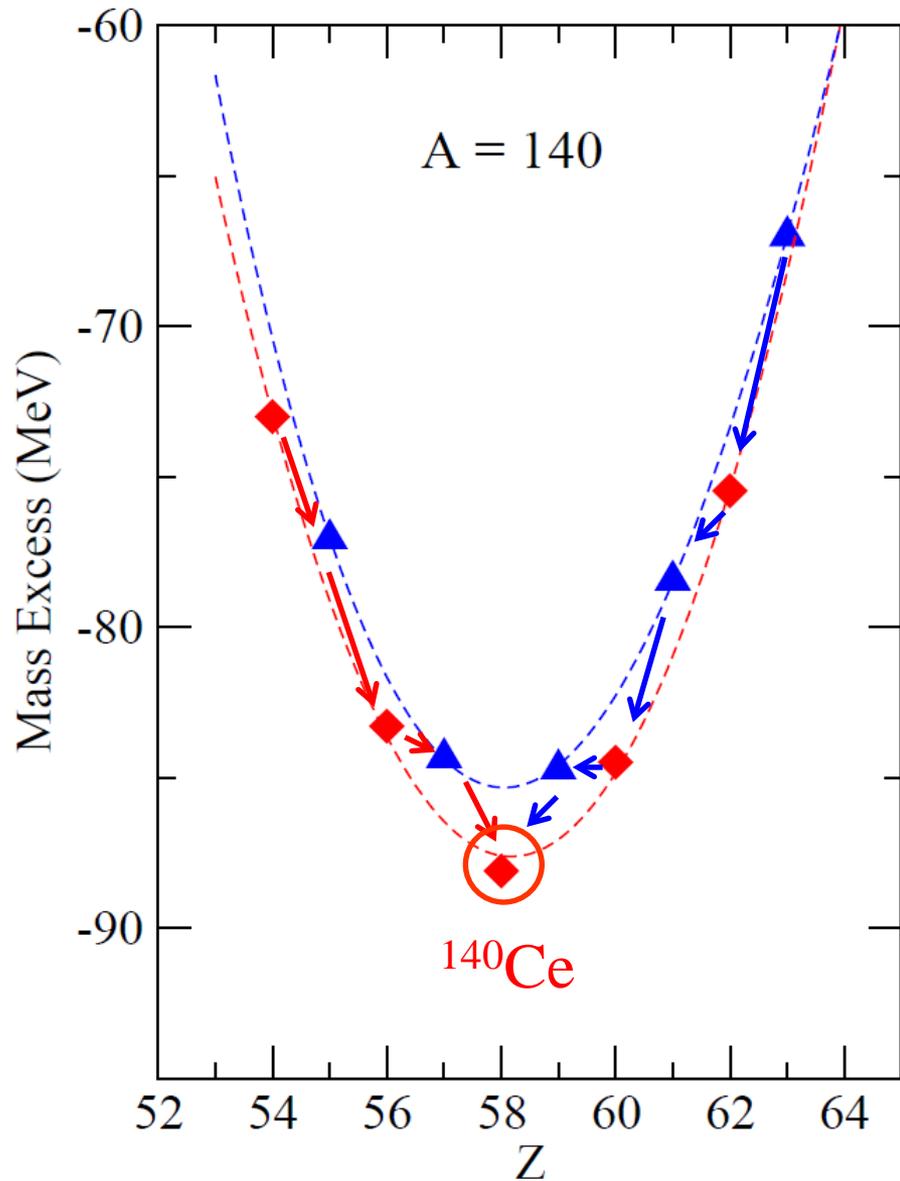
2重 $\beta$ 崩壊



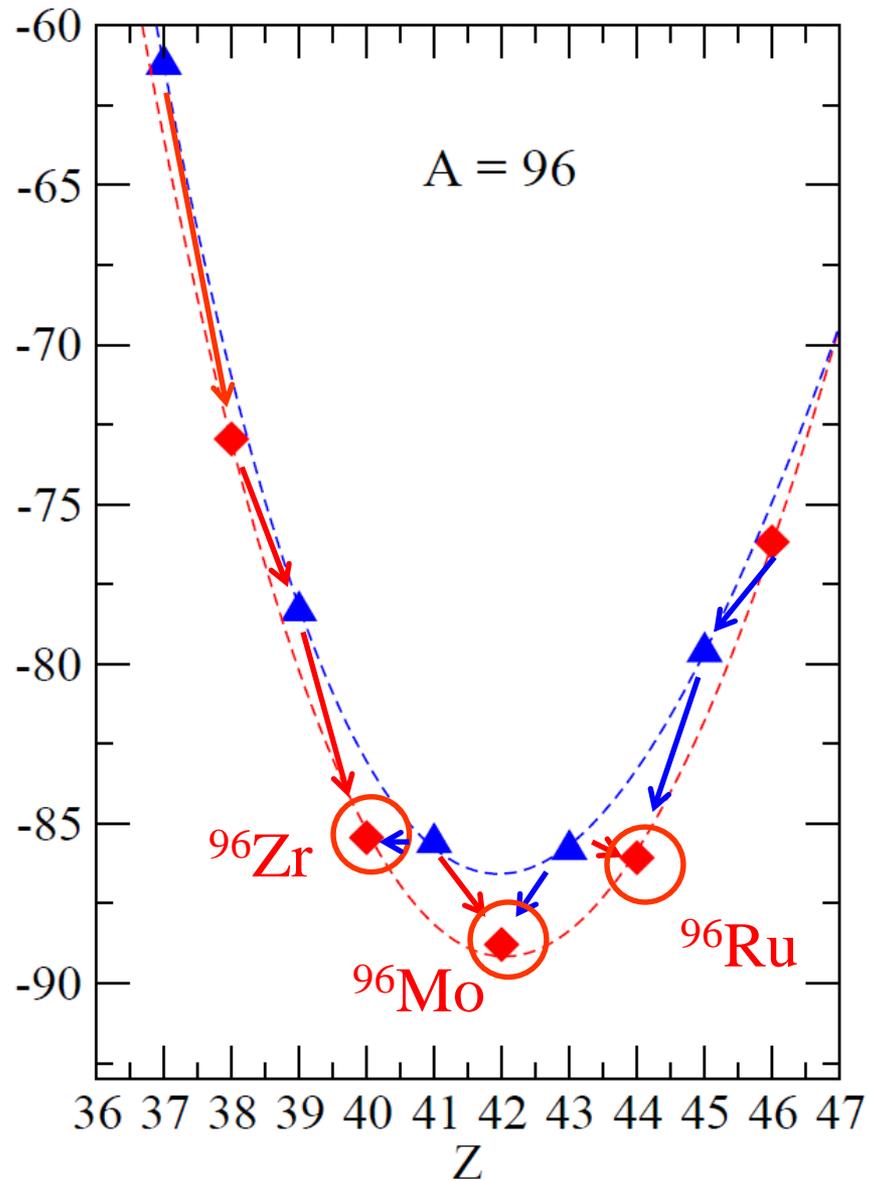
# カムランド禅



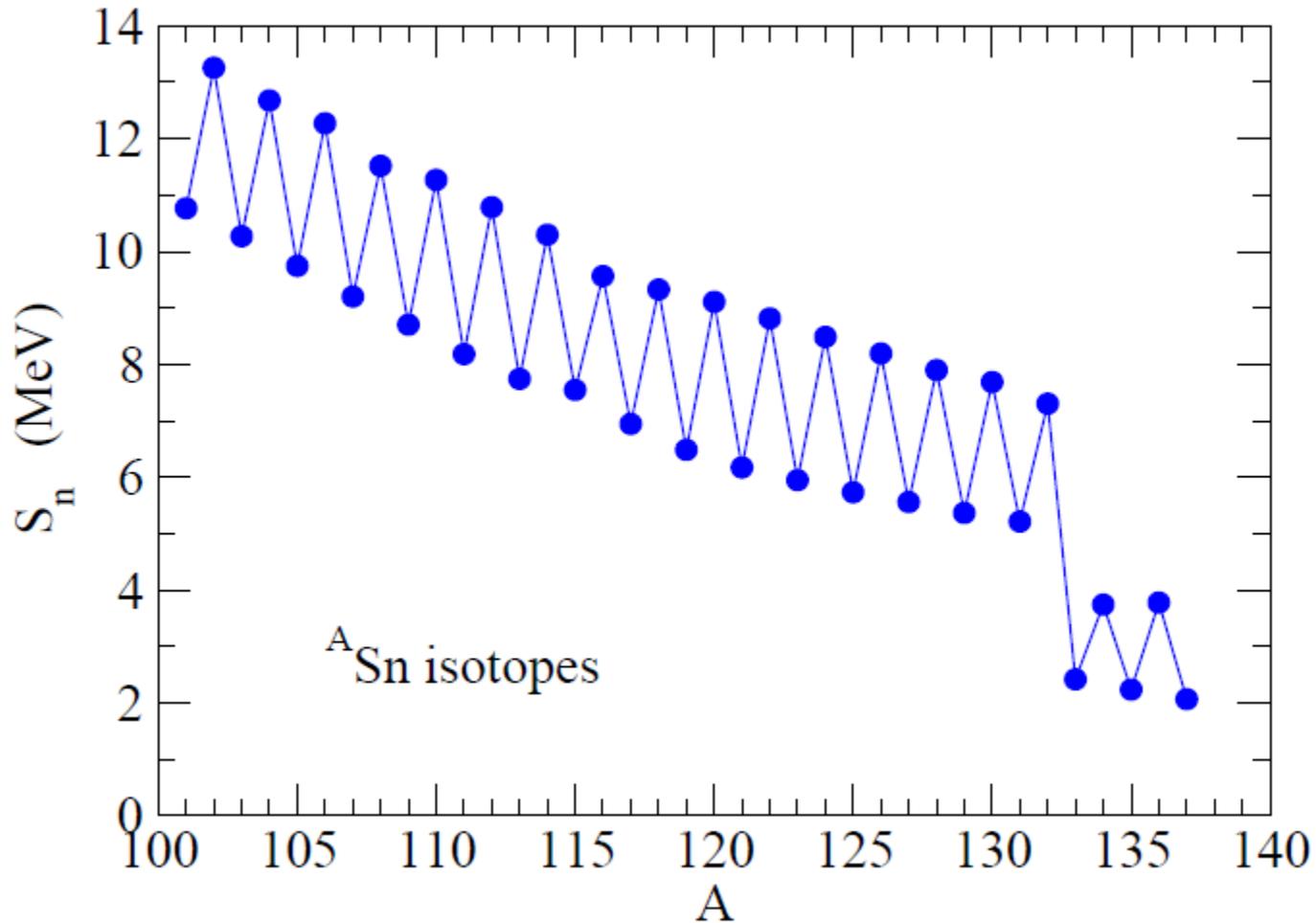
安定核が1つの場合



安定核が3つの場合



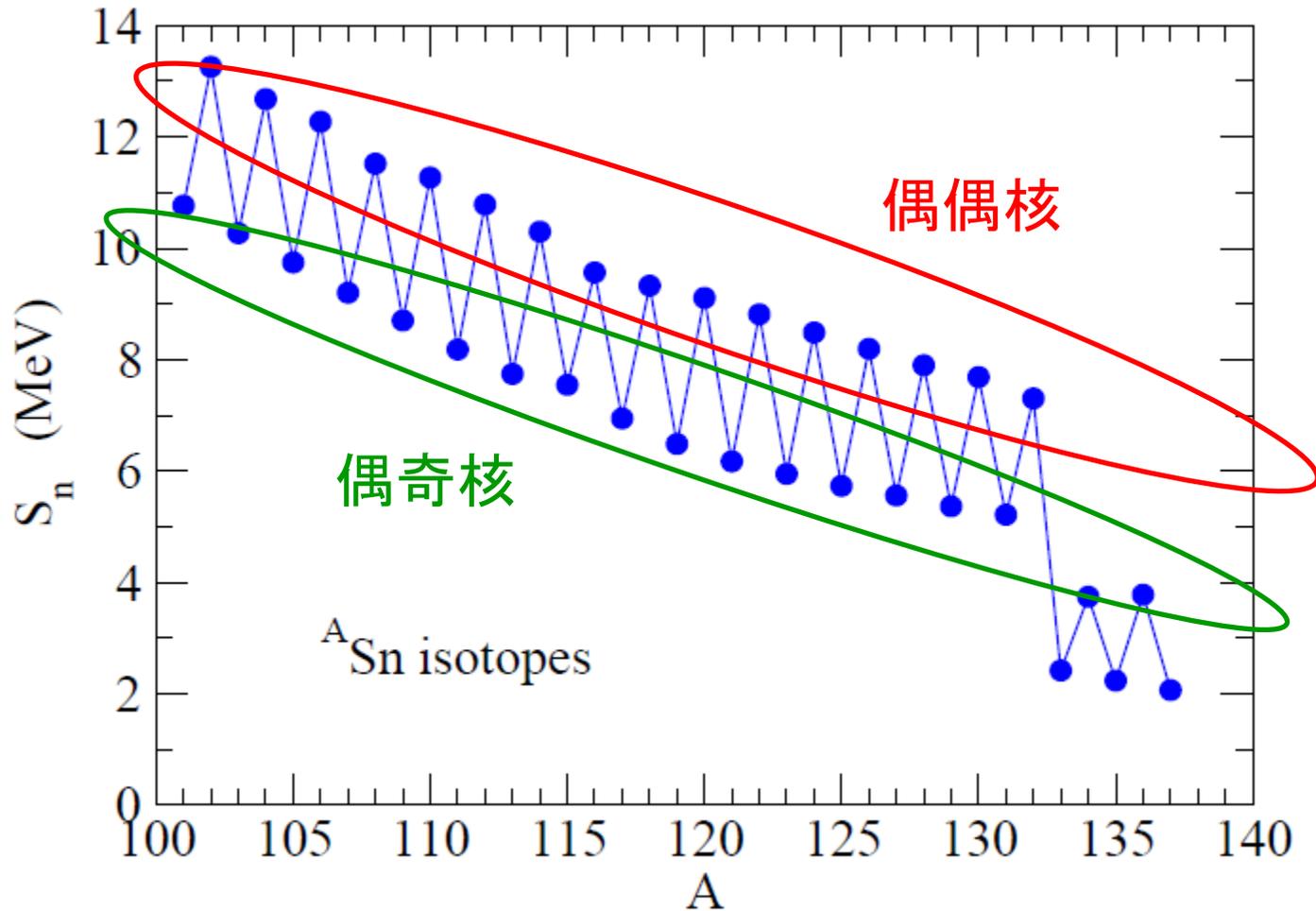
## 分離エネルギーにおける偶奇効果



1n separation energy:  $S_n (A,Z) = B(A,Z) - B(A-1,Z)$

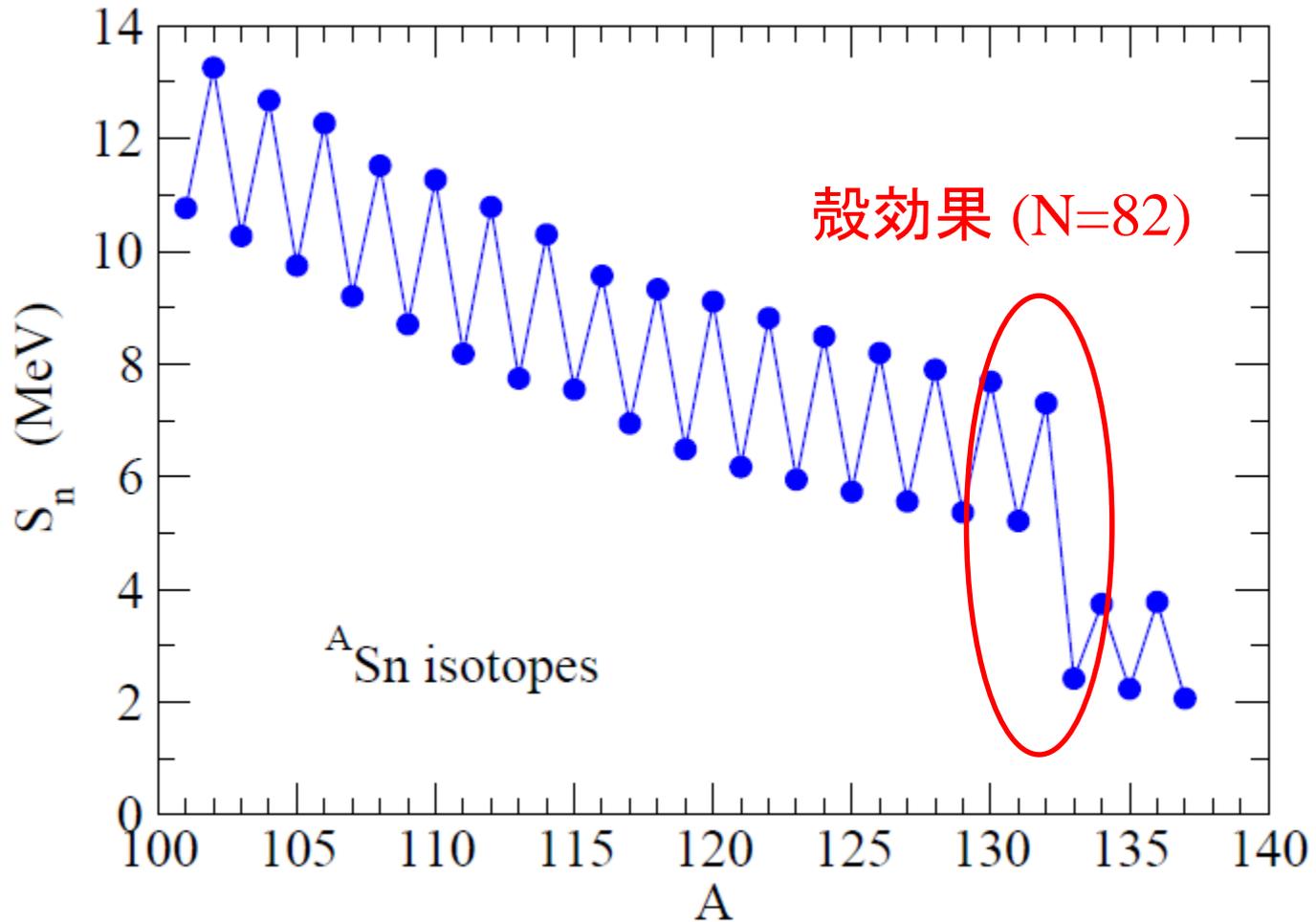
偶数個の中性子から1つ中性子  
を取る方が奇数個から取るより  
大きなエネルギーが必要

even-odd staggering



1n separation energy:  $S_n (A,Z) = B(A,Z) - B(A-1,Z)$

even-odd staggering



1n separation energy:  $S_n (A,Z) = B(A,Z) - B(A-1,Z)$

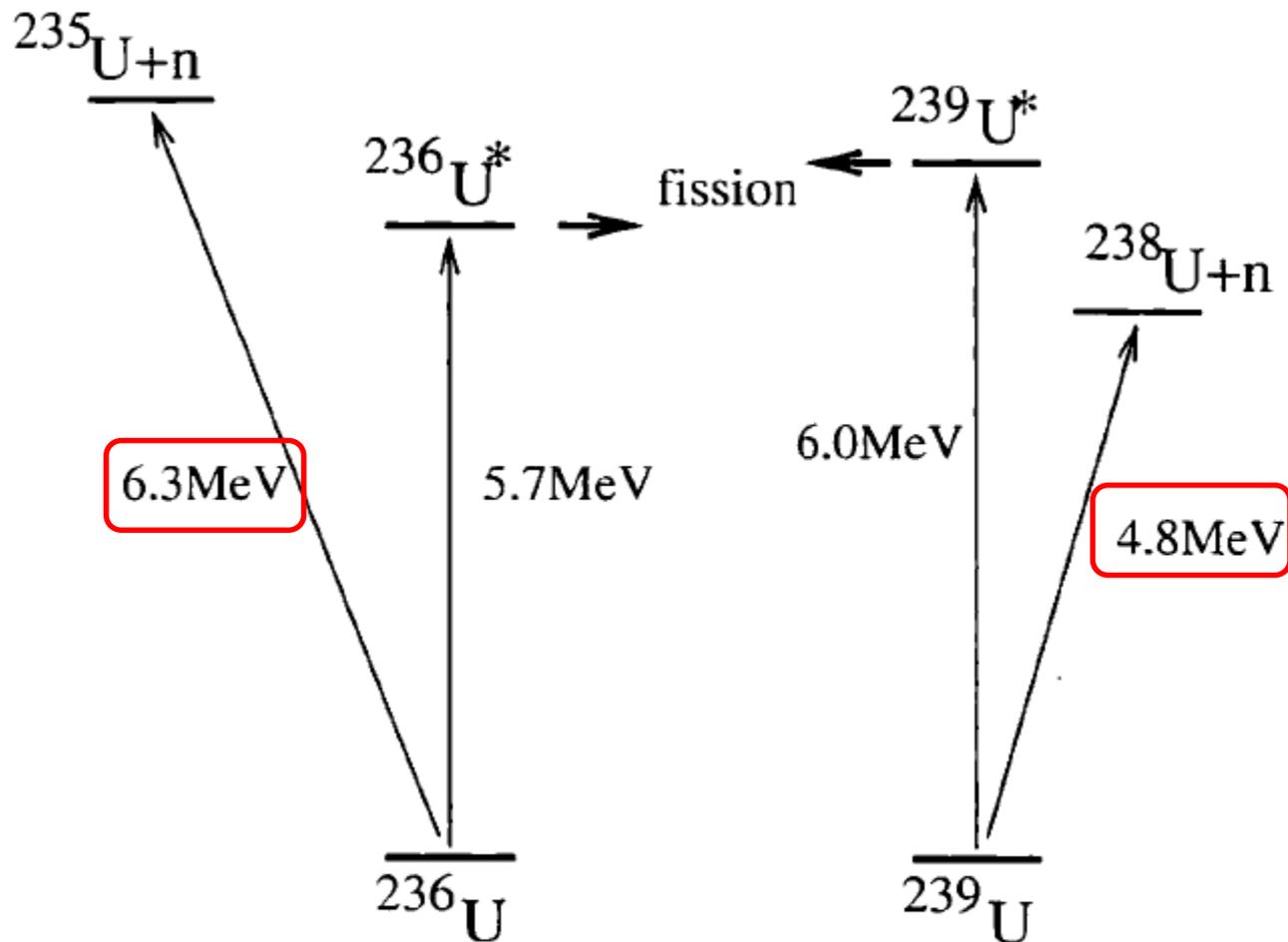


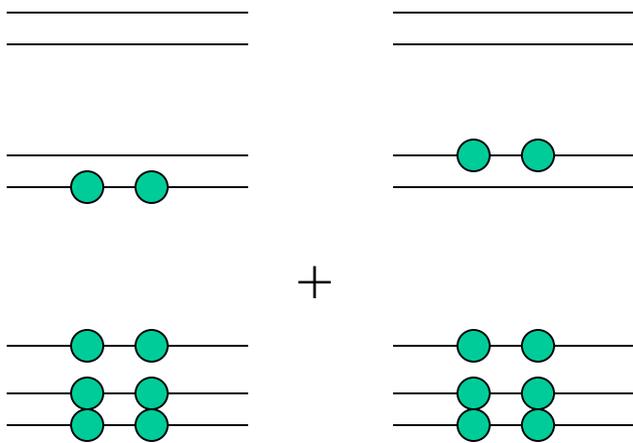
Fig. 6.6. Levels of the systems  $A = 236$  and  $A = 239$  involved in the fission of  $^{236}\text{U}$  and  $^{239}\text{U}$ . The addition of a motionless (or thermal) neutron to  $^{235}\text{U}$  can lead to the fission of  $^{236}\text{U}$ . On the other hand, fission of  $^{239}\text{U}$  requires the addition of a neutron of kinetic energy  $T_n = 6.0 - 4.8 = 1.2 \text{ MeV}$ .

核分裂障壁の高さと1中性子分離エネルギーの関係

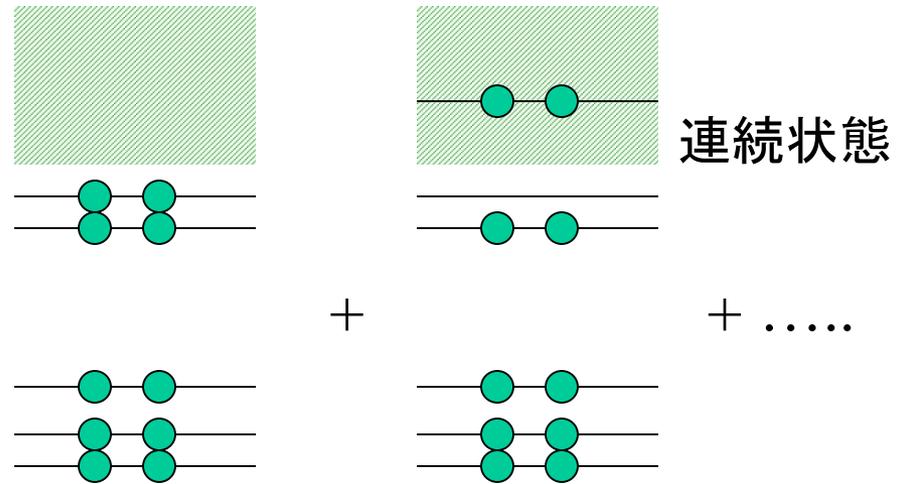
# 弱束縛核における対相関

$$H = \sum_i T_i + \sum_{i < j} v_{ij} \rightarrow H = \sum_i (T_i + V_i) + \underbrace{\sum_{i < j} v_{ij} - \sum_i V_i}_{\text{平均からのずれ (残留相互作用)}}$$

平均からのずれ  
(残留相互作用)



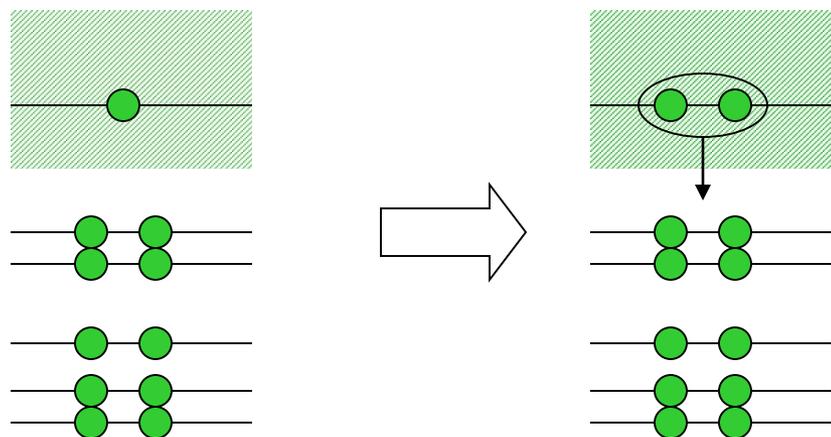
安定な原子核  
→ 超流動状態



弱く束縛された系

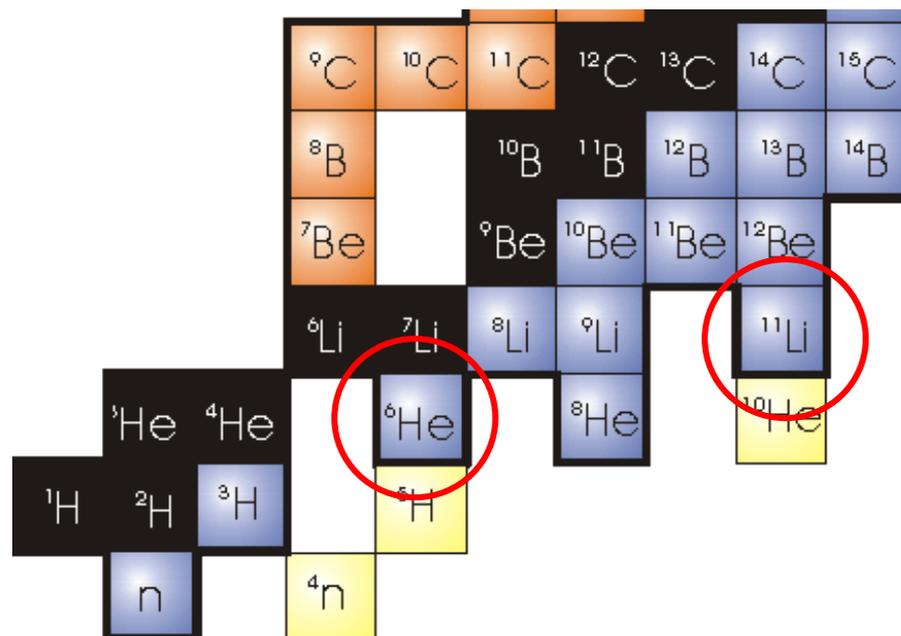
# ボロミアン原子核

残留相互作用 → 引力



不安定

安定



“ボロミアン核”

## ボロミアン核の構造

- ✓ 多体相関のため non-trivial
- ✓ 多くの注目を集めている

## ボロミアンって何?



ボロメオ家(13世紀イタリア)の紋章

3つの輪はつながっているけど、どれか1つをはずすとバラバラになる

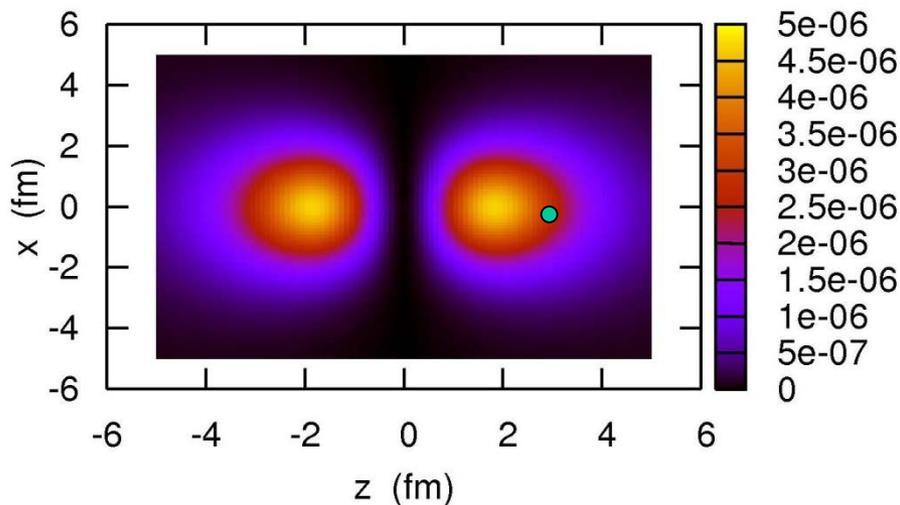
「ボロミアン・リング」



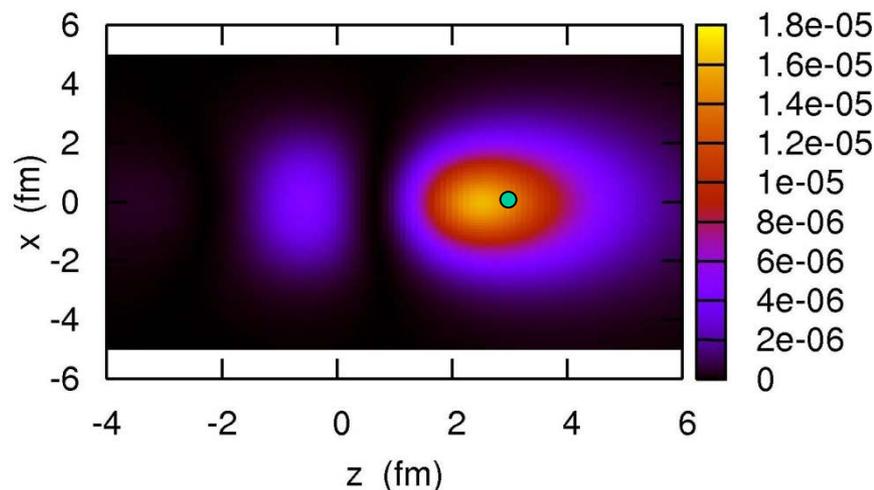
# 対相関力がある場合とない場合の比較 ( $^{11}\text{Li} = ^9\text{Li} + n + n$ )

$^{11}\text{Li}$  1つの外殻中性子を  $(z_1, x_1) = (3.4 \text{ fm}, 0)$  に置いたときの  
もう一つの外殻中性子の分布

対相関がない場合  $[1p_{1/2}]^2$



対相関がある場合



- 対相関がないと、 $z$  と  $-z$  で対称的な分布。片方の中性子がどこにいても分布は変わらない。
- 対相関があると、2つの中性子は近くにいる。1つの中性子の場所が変わると、もう1つも変わる。

「ダイニュートロン相関」