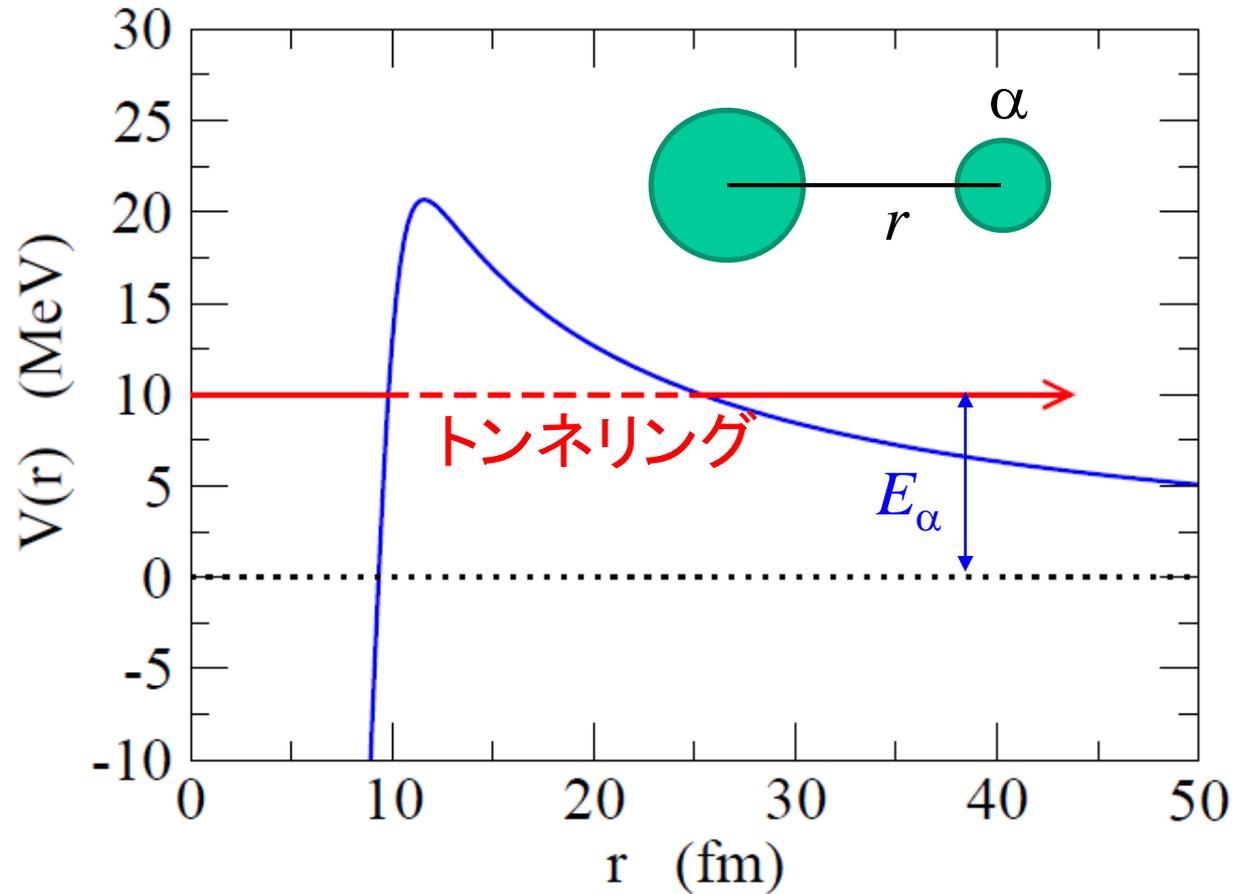


(おさらい)ガモフによる α 崩壊の説明



ガモフ:

$$\lambda = \omega \cdot P$$

ω : 単位時間当たりにポテンシャルの壁に当たる回数(試行周期)

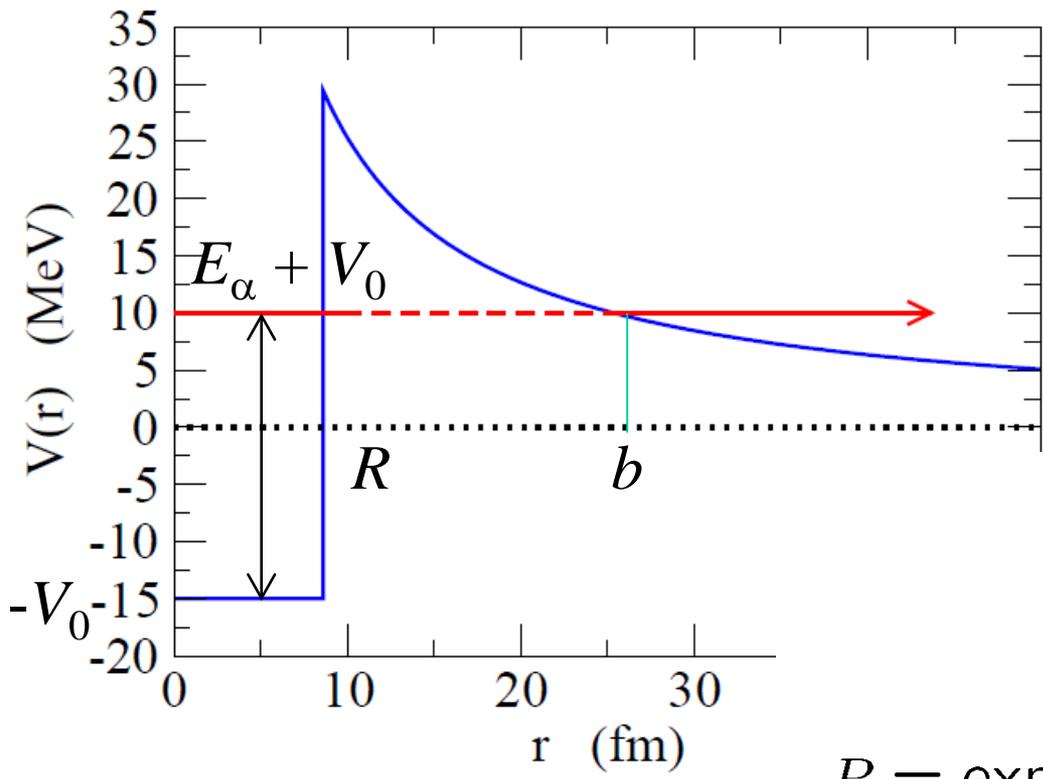
P : トンネル効果の確率

ガモフによる α 崩壊の説明

ガモフ: $\lambda = \omega \cdot P$

ω : 単位時間あたりにポテンシャルの壁に当たる回数 (試行周期)

P : トンネル効果の確率



$$V(r) = -V_0 \quad (r < R)$$
$$= \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \quad (r \geq R)$$

と単純化すると、

$$\omega = \frac{\tilde{v}}{2R}$$

$$\frac{1}{2} \mu \tilde{v}^2 = E_\alpha + V_0$$

$$P = \exp \left[-2 \int_R^b dr \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2} \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - E \right)} \right]$$

(補足) WKB 近似

1次元のシュレーディンガー方程式:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + (V(x) - E) \psi(x) = 0$$

→ $\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \frac{p^2(x)}{\hbar^2} \psi(x) = 0, \quad p(x) \equiv \sqrt{2m(E - V(x))}$

$\psi(x) = e^{iS(x)/\hbar}$ と仮定。

→ $\psi' = \frac{i}{\hbar} S' \psi$

$$\psi'' = \frac{i}{\hbar} S'' \psi - \frac{1}{\hbar^2} (S')^2 \psi$$

より $\frac{i}{\hbar} S'' - \frac{1}{\hbar^2} (S')^2 + \frac{p(x)^2}{\hbar^2} = 0$

(補足) WKB 近似

$$\frac{i}{\hbar} S'' - \frac{1}{\hbar^2} (S')^2 + \frac{p(x)^2}{\hbar^2} = 0$$

$S(x) = S_0(x) + \hbar S_1(x) + \hbar^2 S_2(x) + \dots$ と展開すると

$$S_0(x) = \pm \int^x p(x') dx'$$

$$S_1(x) = \frac{i}{2} \ln p(x) + \text{const.}$$



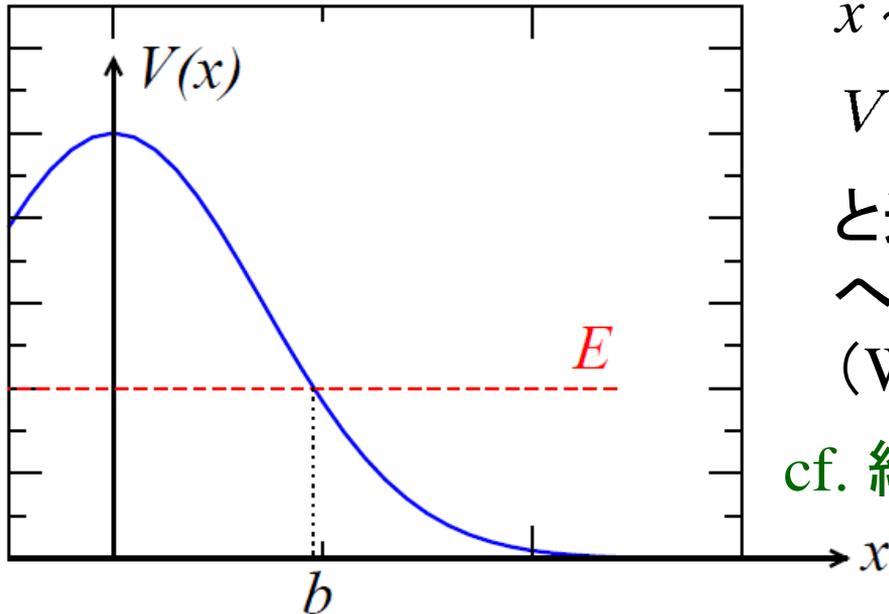
$$\psi(x) = e^{iS(x)/\hbar} = \frac{1}{\sqrt{p(x)}} e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int^x p(x') dx'}$$

(補足) WKB 近似

$$\psi(x) = e^{iS(x)/\hbar} = \frac{1}{\sqrt{p(x)}} e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int^x p(x') dx'}$$

この波動関数は $p(x) = 0$ となる点 x で破綻。

$$p(x) = \sqrt{2m(E - V(x))} \rightarrow V(x) = E \quad (\text{古典的転回点})$$



$x \sim b$ で

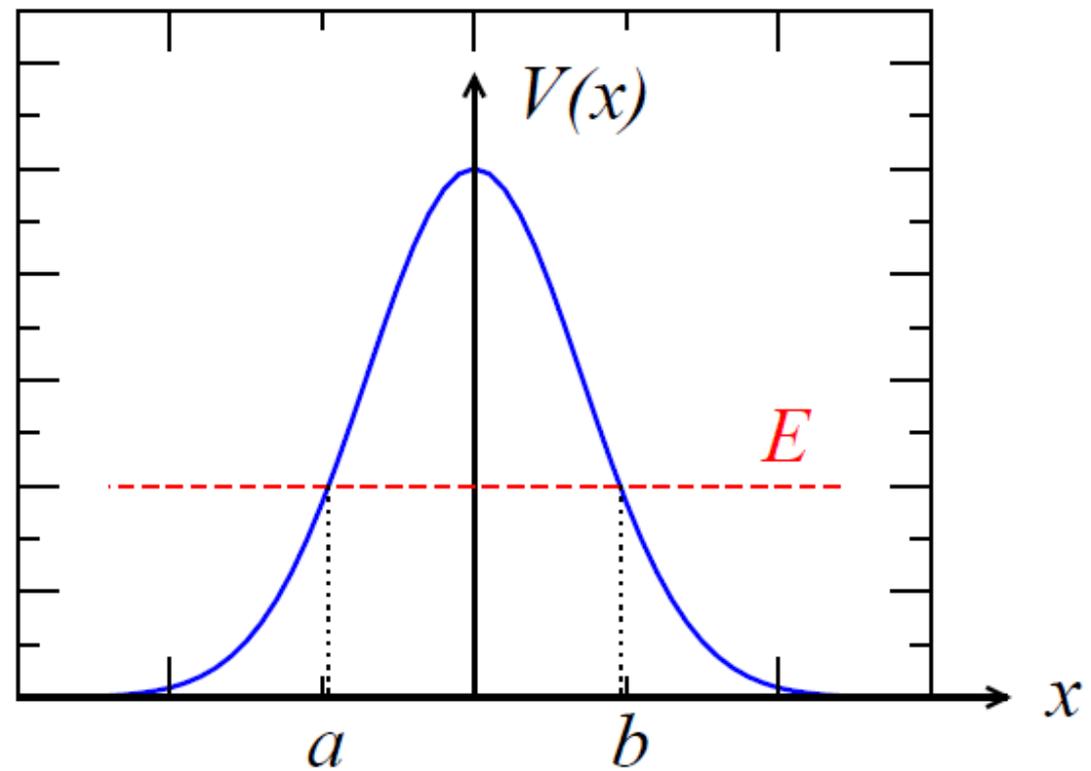
$$V(x) \sim V(b) + V'(b)(x - b)$$

と近似することで $x > b$ から $x < b$
へ波動関数を接続する
(WKB 接続公式)。

cf. 線形ポテンシャルの解: エアリー関数

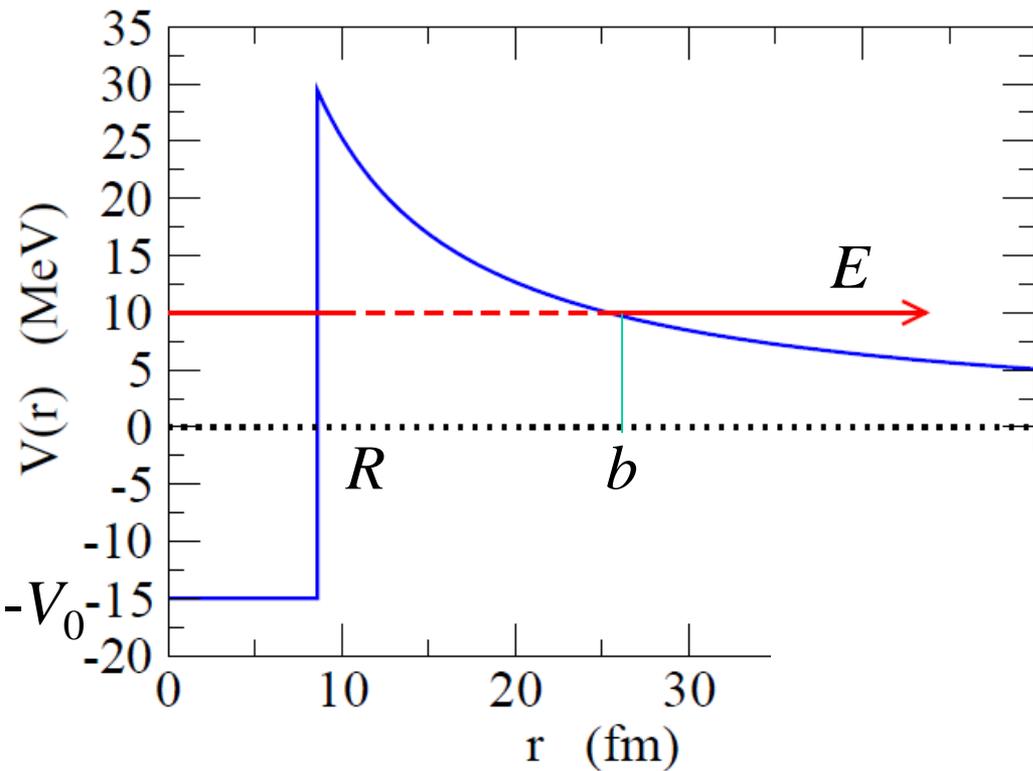
(補足) WKB 近似

WKB近似をトンネル確率に適用すると:



$$P(E) = \exp \left[-2 \int_a^b dx \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V(x) - E)} \right]$$

α 崩壊におけるトンネル確率



$$V(r) = -V_0 \quad (r < R)$$
$$= \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \quad (r \geq R)$$

と単純化すると、

$$E = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{b}$$

$$P = \exp \left[-2 \int_R^b dr \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2} \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - E \right)} \right]$$
$$= \exp \left[-2 \int_R^b dr \sqrt{\frac{2\mu Z_1 Z_2 e^2}{\hbar^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right)} \right]$$

$$P = e^{-G} \quad G \sim \sqrt{\frac{2\mu R}{\hbar^2} Z_1 Z_2 e^2} \left(\pi \sqrt{\frac{Z_1 Z_2 e^2}{RE}} - 4 \right)$$

(note) $R \rightarrow 0$ では

$$G \sim \sqrt{\frac{2\mu R}{\hbar^2} Z_1 Z_2 e^2} \left(\pi \sqrt{\frac{Z_1 Z_2 e^2}{RE}} \right) = \pi Z_1 Z_2 e^2 \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2 E}} = 2\pi \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} \equiv \eta(E)$$

$$P(E) \sim e^{-2\pi\eta(E)}$$

ゾンマーフェルト
パラメーター

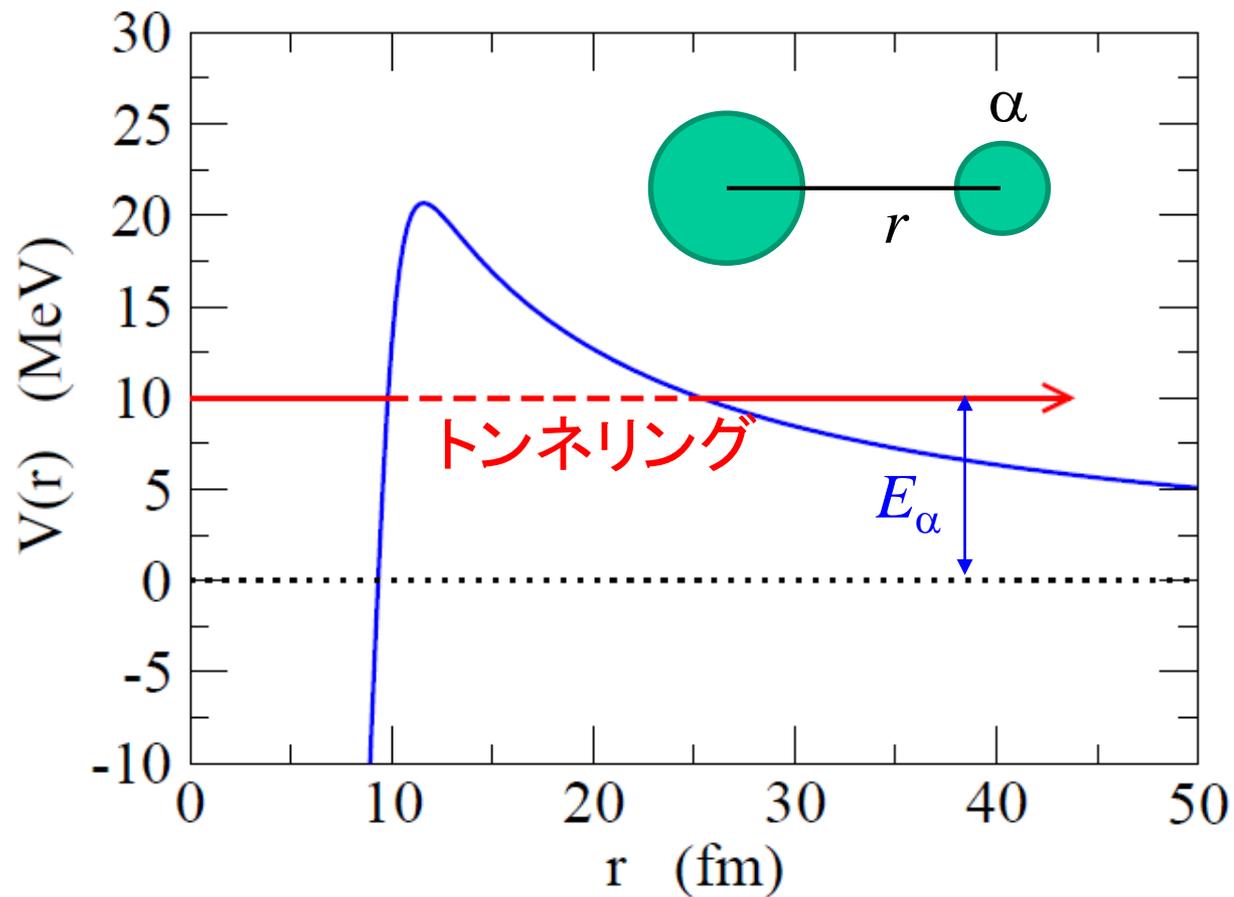
$Z_1=2, Z_2=88, \mu = 4m_N$ とすると

$$E = 4 \text{ MeV} \text{ で } \eta = 27.85, P(E) = 1.00 \times 10^{-76}$$

$$E = 10 \text{ MeV} \text{ で } \eta = 17.62, P(E) = 8.60 \times 10^{-49}$$

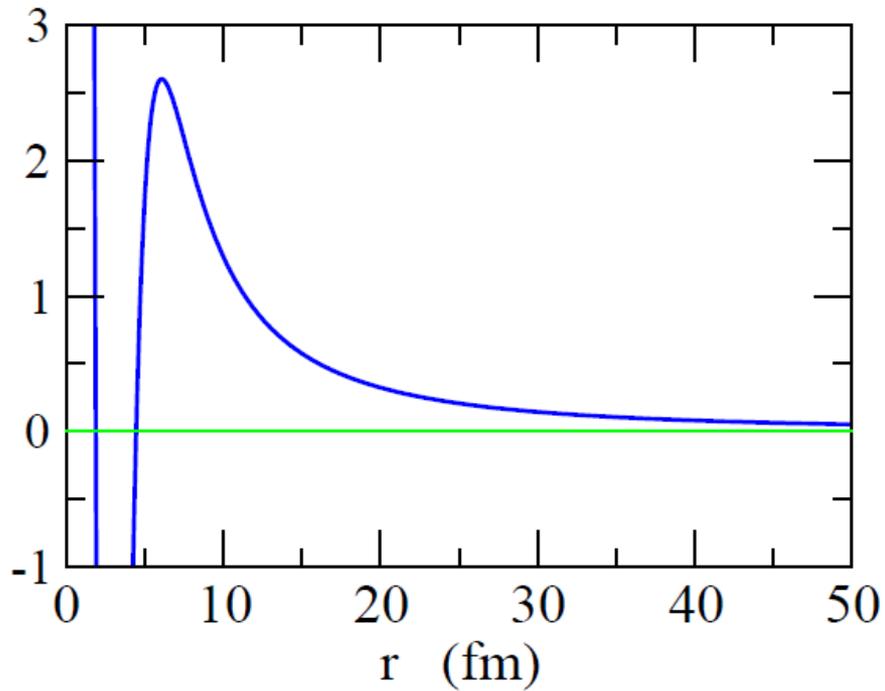
(約28ケタの違い)

共鳴状態の量子力学



この状態は準束縛状態 = 共鳴状態

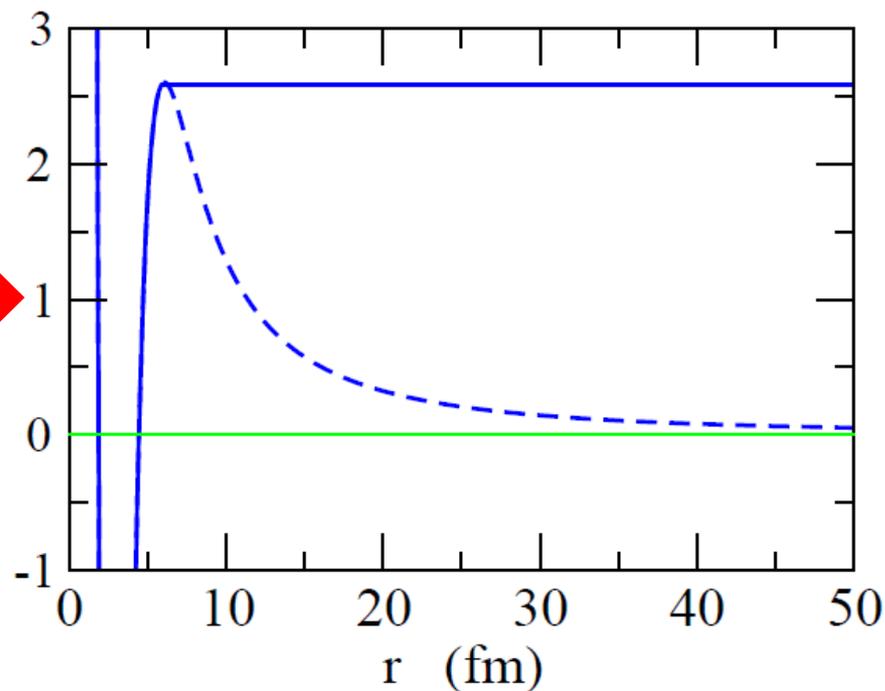
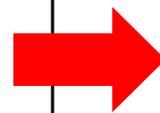
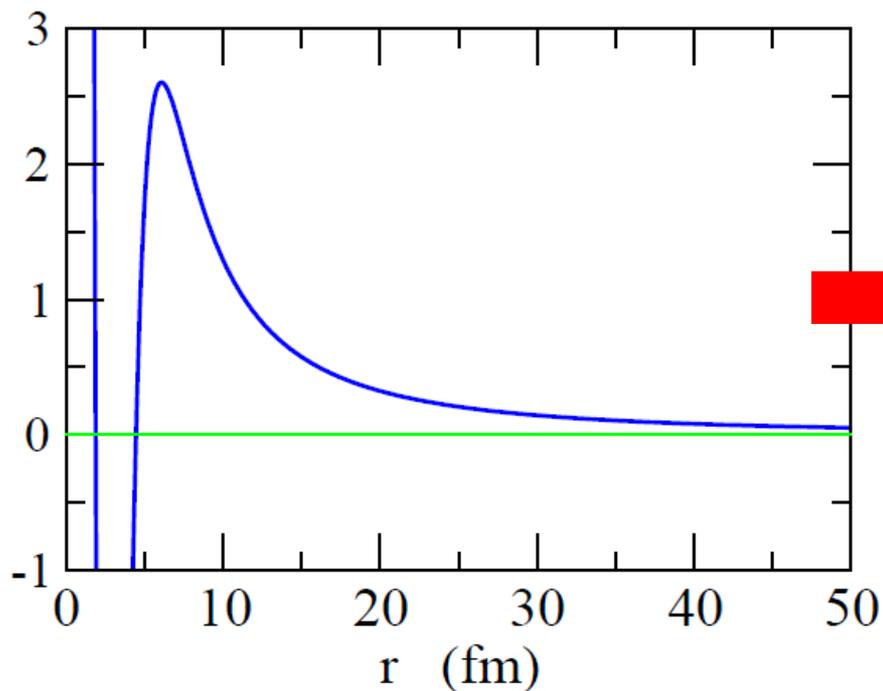
準束縛状態(共鳴状態)とは?



実際のポテンシャル

束縛状態は $E < 0$ の領域のみ

準束縛状態(共鳴状態)とは?



実際のポテンシャル

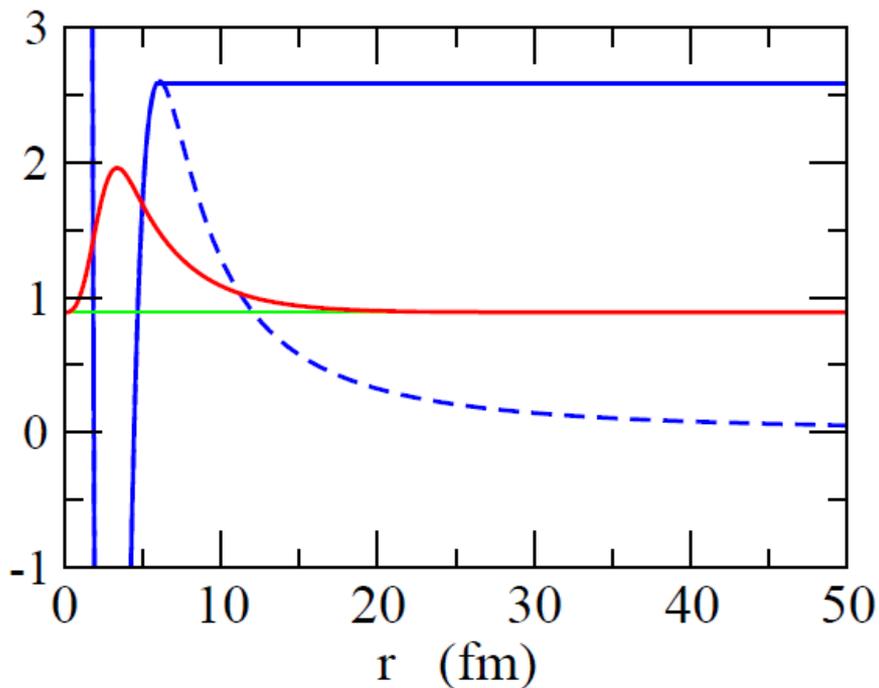
束縛状態は $E < 0$ の領域のみ

このようにポテンシャルを
変更すると

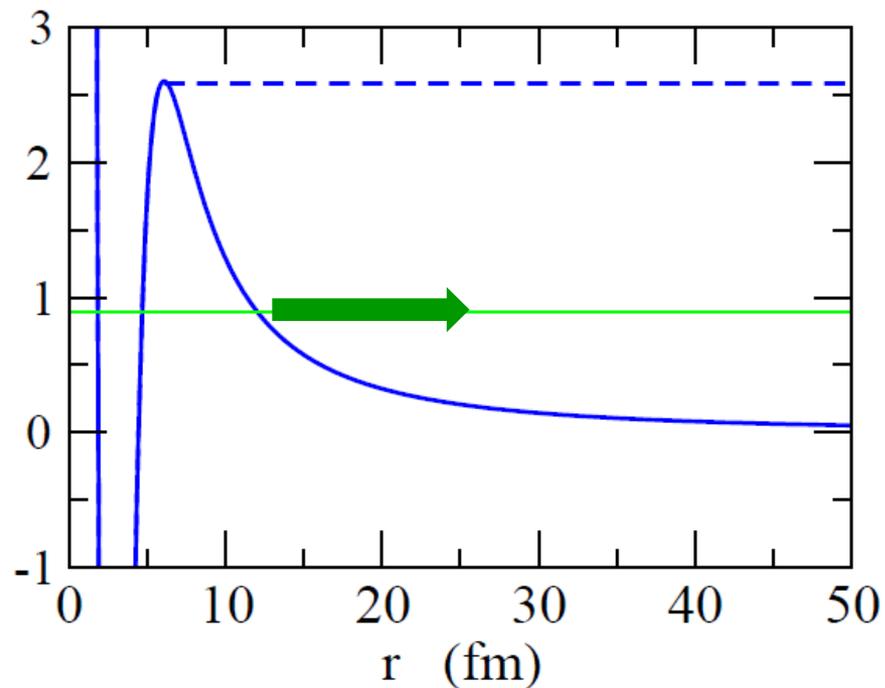
→ $E > 0$ でも束縛状態が
できる

= 準束縛(準安定)状態

準束縛状態(共鳴状態)とは?



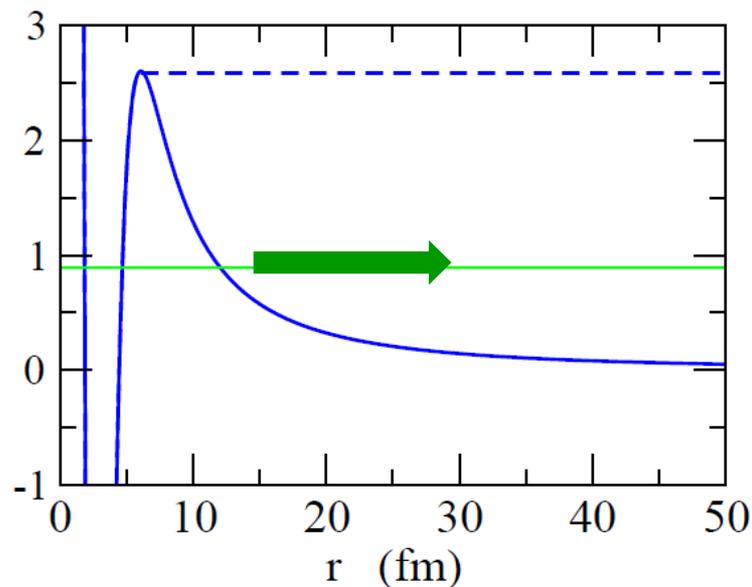
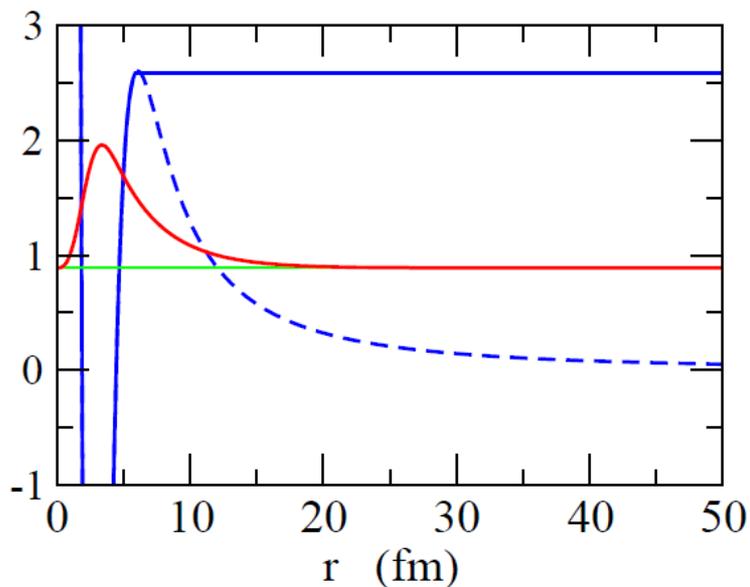
束縛状態 = 無限の寿命



実際には有限の寿命で
障壁をトンネルし崩壊

「準束縛(準安定)状態」

ガモフ状態



トンネル効果で波動関数が
 沁み出し、**外向きの波として崩壊**

$$\begin{aligned}
 u(r) &\sim r^{l+1} && (r \rightarrow 0) \\
 &\rightarrow \mathcal{N} e^{i(kr - l\pi/2)} && (r \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

共鳴幅



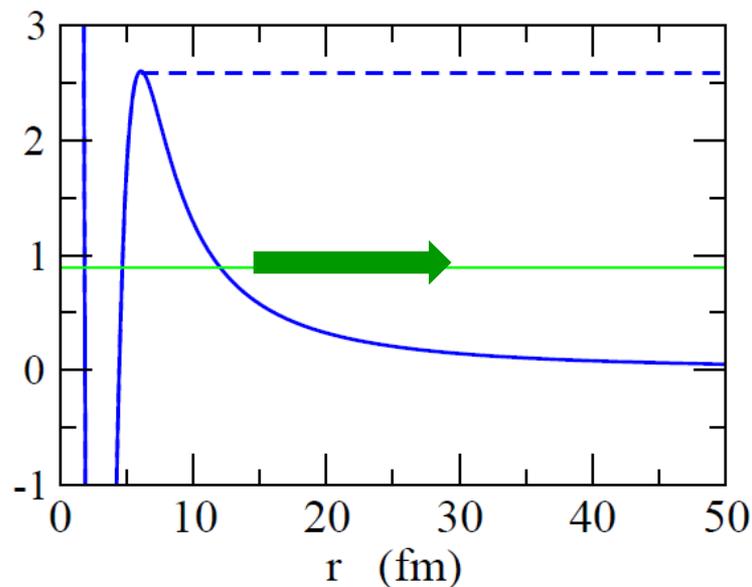
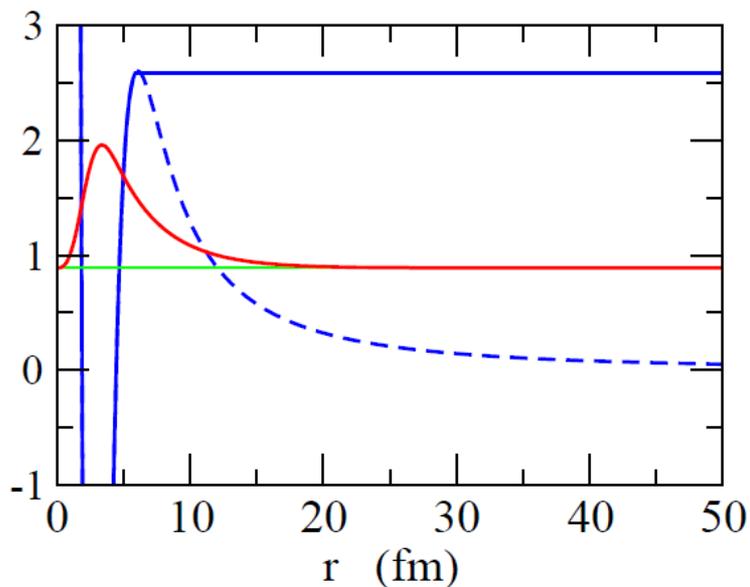
$$E \rightarrow E_R - i \frac{\Gamma}{2}$$



共鳴エネルギー

⇒ エネルギーを複素数にしなければならない:

ガモフ状態



$$E \rightarrow E_R - i\frac{\Gamma}{2}$$

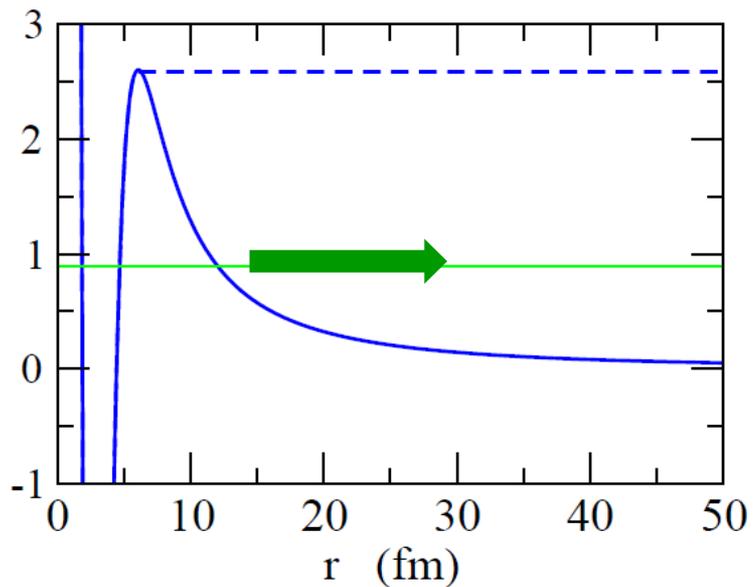
生き残り確率:

$$\begin{aligned}
 P(t) &= |\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|^2 \\
 &= |\langle \psi(0) | e^{-iHt/\hbar} | \psi(0) \rangle|^2 \\
 &= |\langle \psi(0) | e^{-i(E_R - i\Gamma/2)t/\hbar} | \psi(0) \rangle|^2 \\
 &= e^{-\Gamma t/\hbar} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\hbar/\Gamma \text{ が準安定状態の寿命}}
 \end{aligned}$$

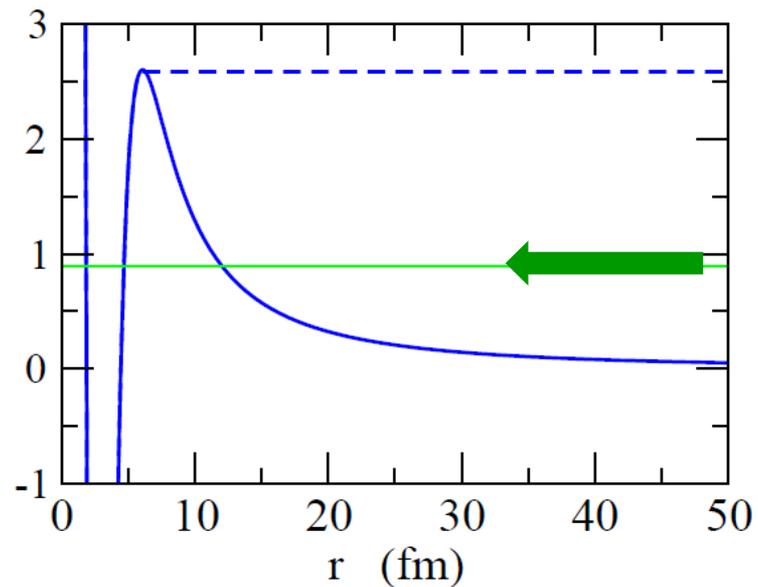
トンネル効果で波動関数が
 沁み出し、**外向きの波として崩壊**

共鳴状態と弾性散乱(共鳴散乱)

準安定状態の崩壊



このエネルギーで外から
粒子を衝突させると?



共鳴散乱

共鳴状態と弾性散乱(共鳴散乱)

自由粒子の運動:

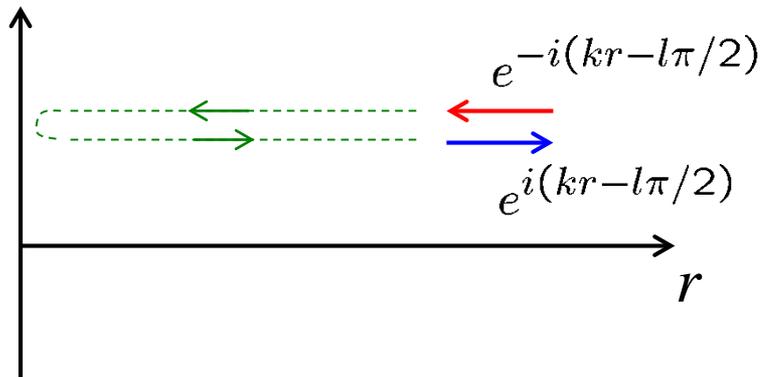
$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - E\right)\psi(\mathbf{r}) = 0$$

✓ 解:

$$\psi(\mathbf{r}) \propto j_l(kr)Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$$

✓ 遠方での振る舞い:

$$\begin{aligned} j_l(kr) &\rightarrow \frac{1}{kr} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) \\ &= \frac{-1}{2ikr} \left(e^{-i(kr-l\pi/2)} - e^{i(kr-l\pi/2)} \right) \end{aligned}$$



共鳴状態と弾性散乱(共鳴散乱)

自由粒子の運動:

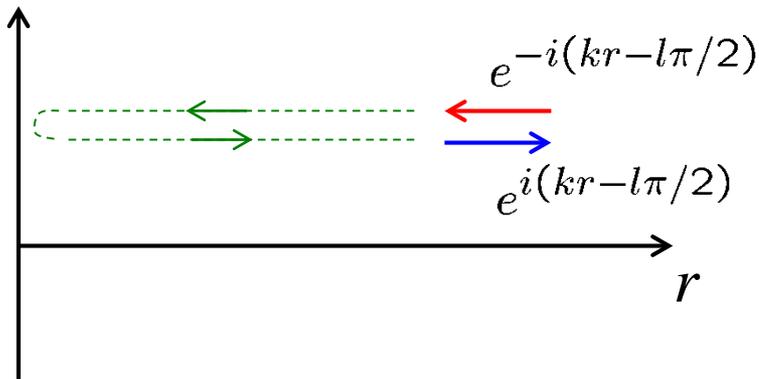
$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - E\right)\psi(\mathbf{r}) = 0$$

✓解:

$$\psi(\mathbf{r}) \propto j_l(kr)Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$$

✓遠方での振る舞い:

$$\begin{aligned} j_l(kr) &\rightarrow \frac{1}{kr} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) \\ &= \frac{-1}{2ikr} \left(e^{-i(kr-l\pi/2)} - e^{i(kr-l\pi/2)} \right) \end{aligned}$$



ポテンシャル中の運動:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r) - E\right)\psi(\mathbf{r}) = 0$$

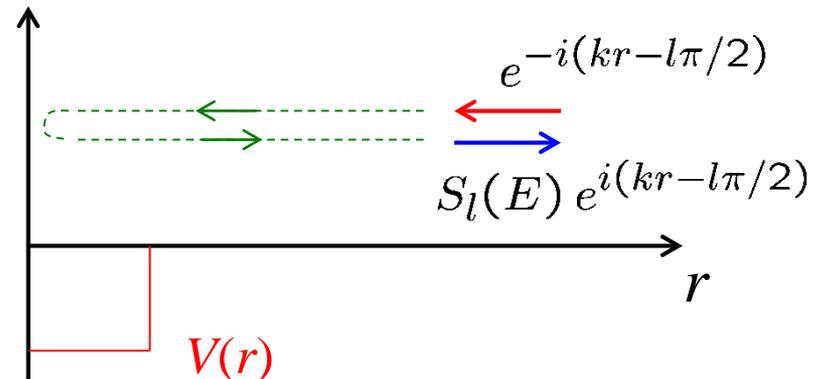
✓解:

$$\psi(\mathbf{r}) \propto R_l(r)Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$$

✓遠方での振る舞い:

$$R_l(r) \rightarrow \frac{-1}{2ikr} \left(e^{-i(kr-l\pi/2)} - S_l(E) e^{i(kr-l\pi/2)} \right)$$

* 吸収がなければ $|S_l(E)| = 1$



共鳴状態と弾性散乱(共鳴散乱)

自由粒子の運動:

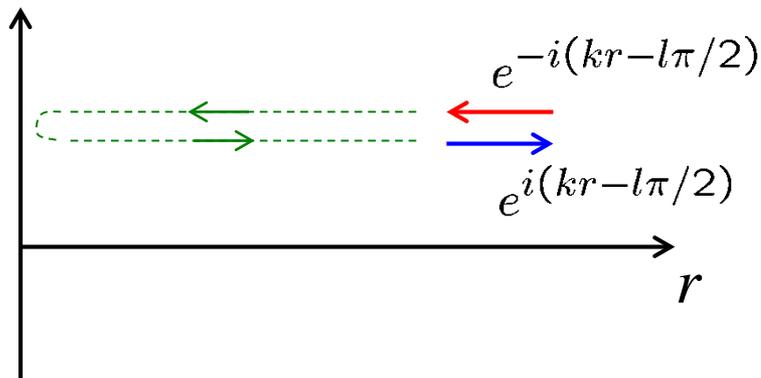
$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - E\right)\psi(\mathbf{r}) = 0$$

✓解:

$$\psi(\mathbf{r}) \propto j_l(kr)Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$$

✓遠方での振る舞い:

$$\begin{aligned} j_l(kr) &\rightarrow \frac{1}{kr} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) \\ &= \frac{-1}{2ikr} \left(e^{-i(kr-l\pi/2)} - e^{i(kr-l\pi/2)} \right) \end{aligned}$$



ポテンシャル中の運動:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r) - E\right)\psi(\mathbf{r}) = 0$$

✓解:

$$\psi(\mathbf{r}) \propto R_l(r)Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$$

✓遠方での振る舞い:

$$R_l(r) \rightarrow \frac{-1}{2ikr} \left(e^{-i(kr-l\pi/2)} - S_l(E) e^{i(kr-l\pi/2)} \right)$$

* 吸収がなければ $|S_l(E)| = 1$

位相のずれ (phase shift)

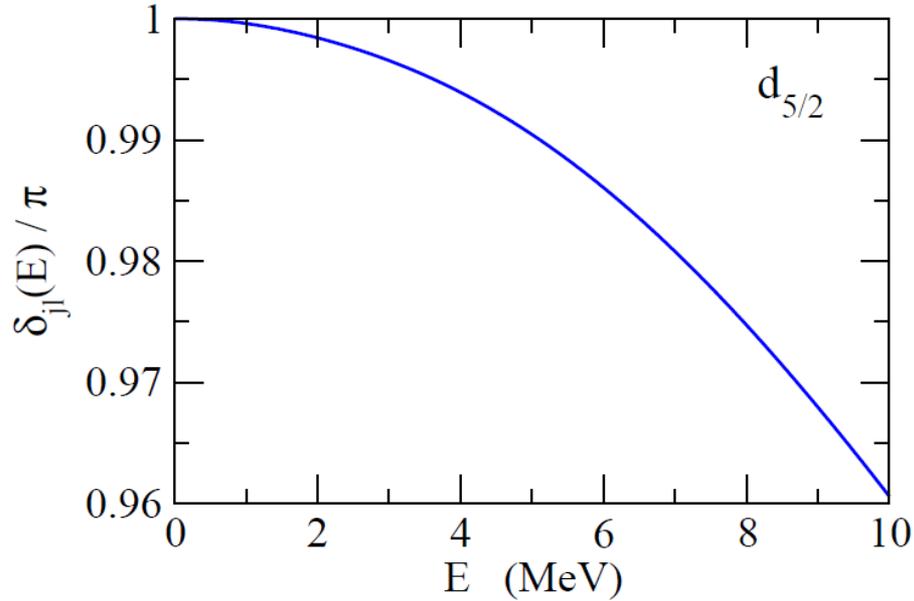
$$S_l(E) = e^{2i\delta_l(E)}$$



$$R_l(r) \rightarrow -\frac{e^{i\delta_l(E)}}{kr} \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l(E))$$

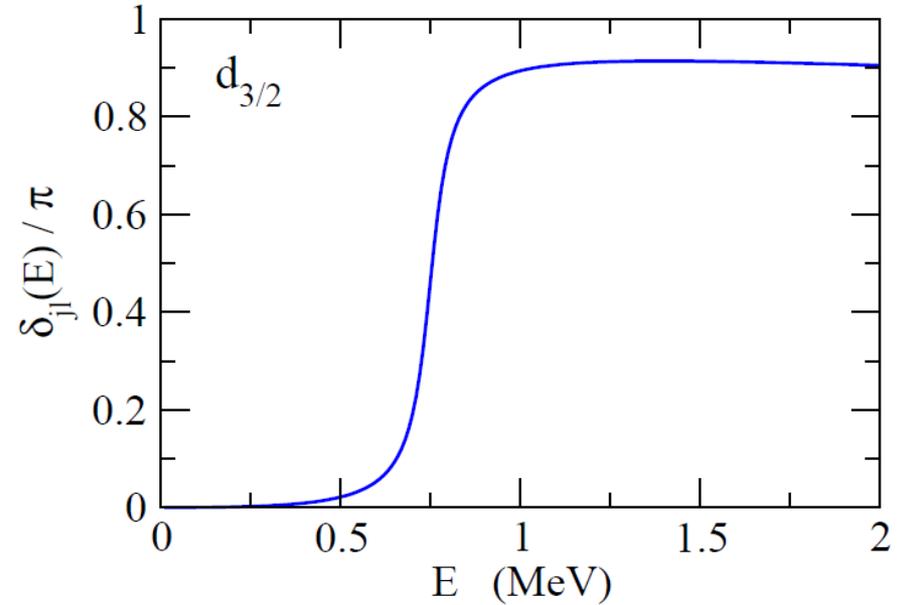
共鳴があると位相のずれはどう振る舞う?

共鳴がない場合



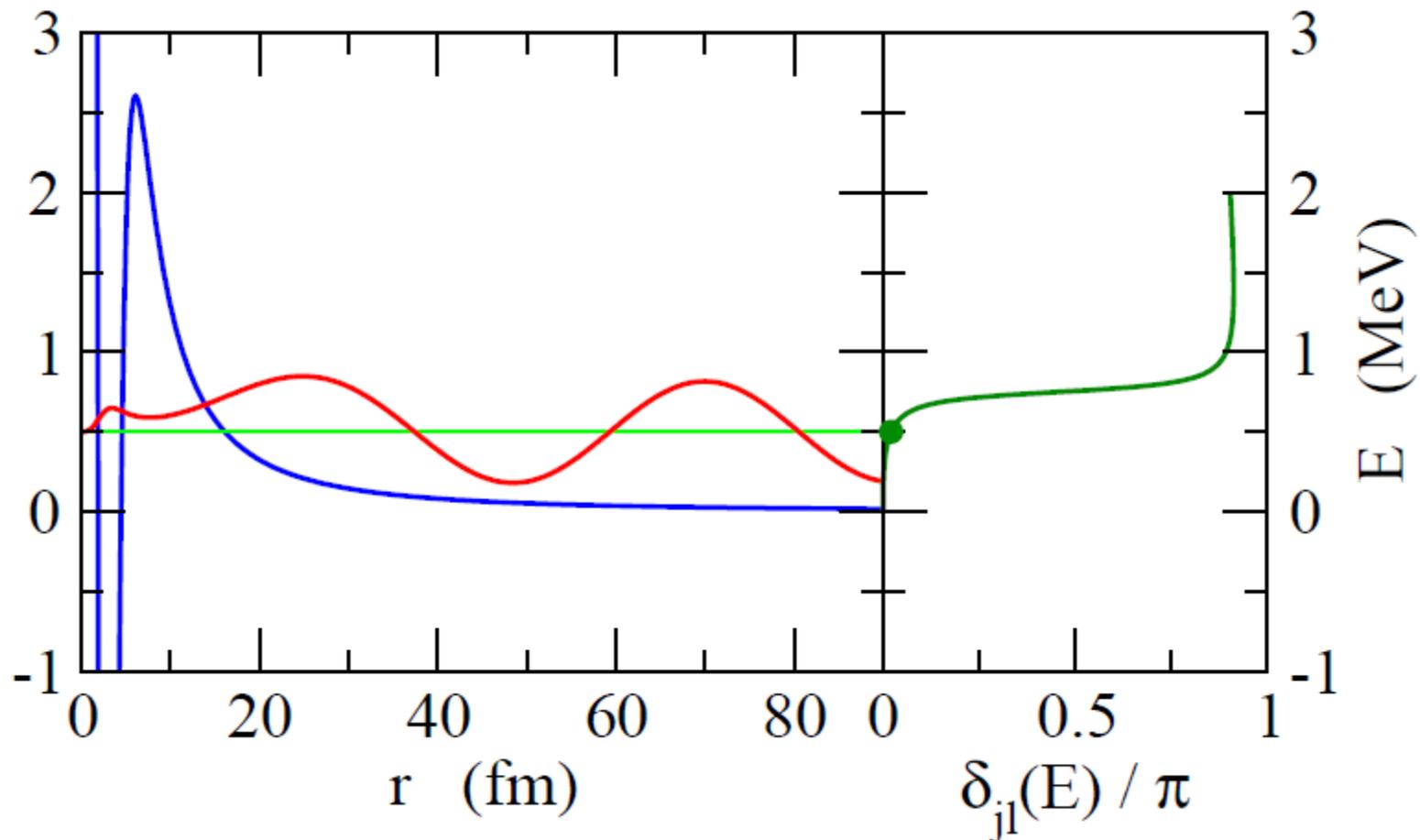
E に対してゆるやかな
振る舞い

共鳴がある場合



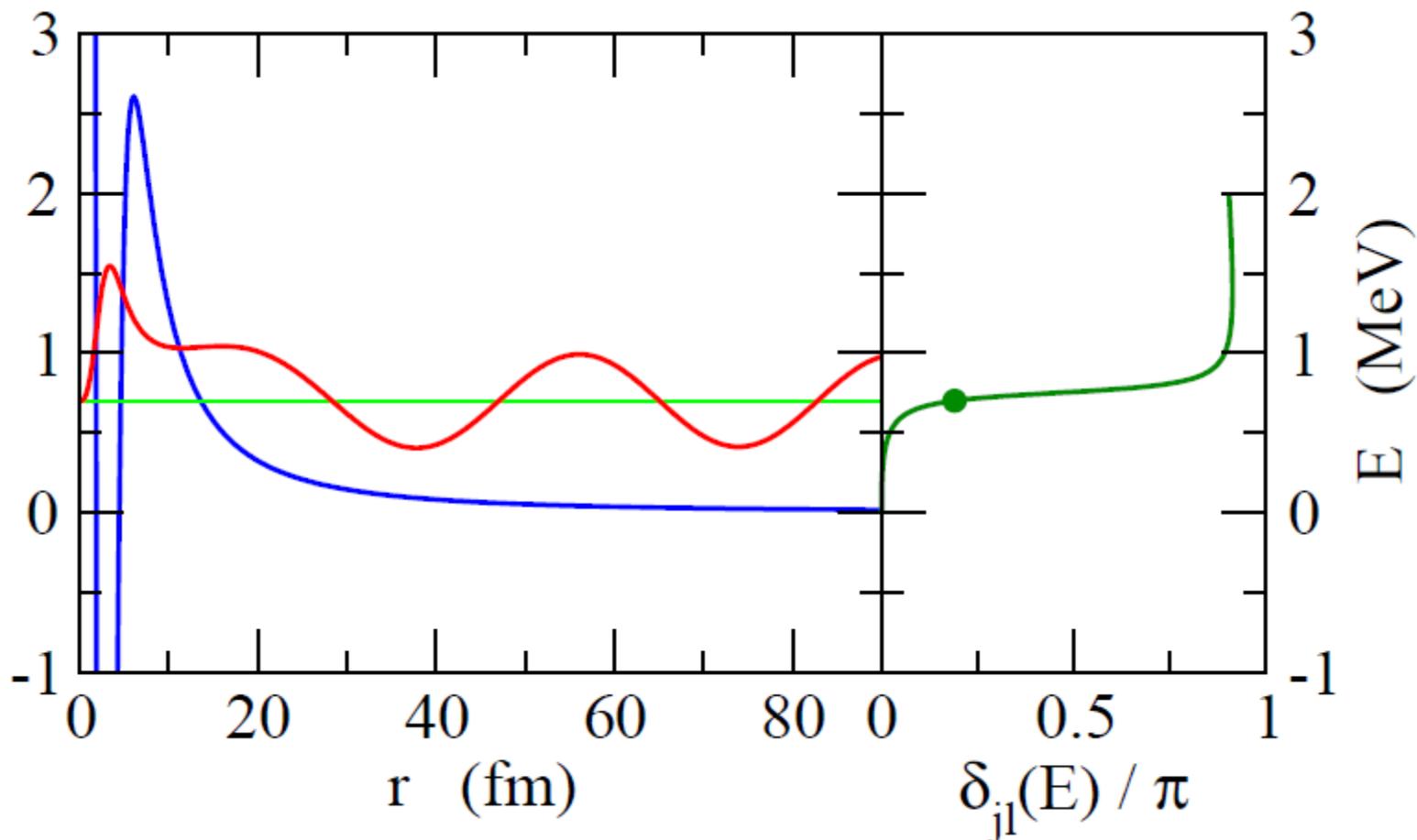
共鳴エネルギーで急に
位相のずれが立ち上がる

それでは波動関数は?



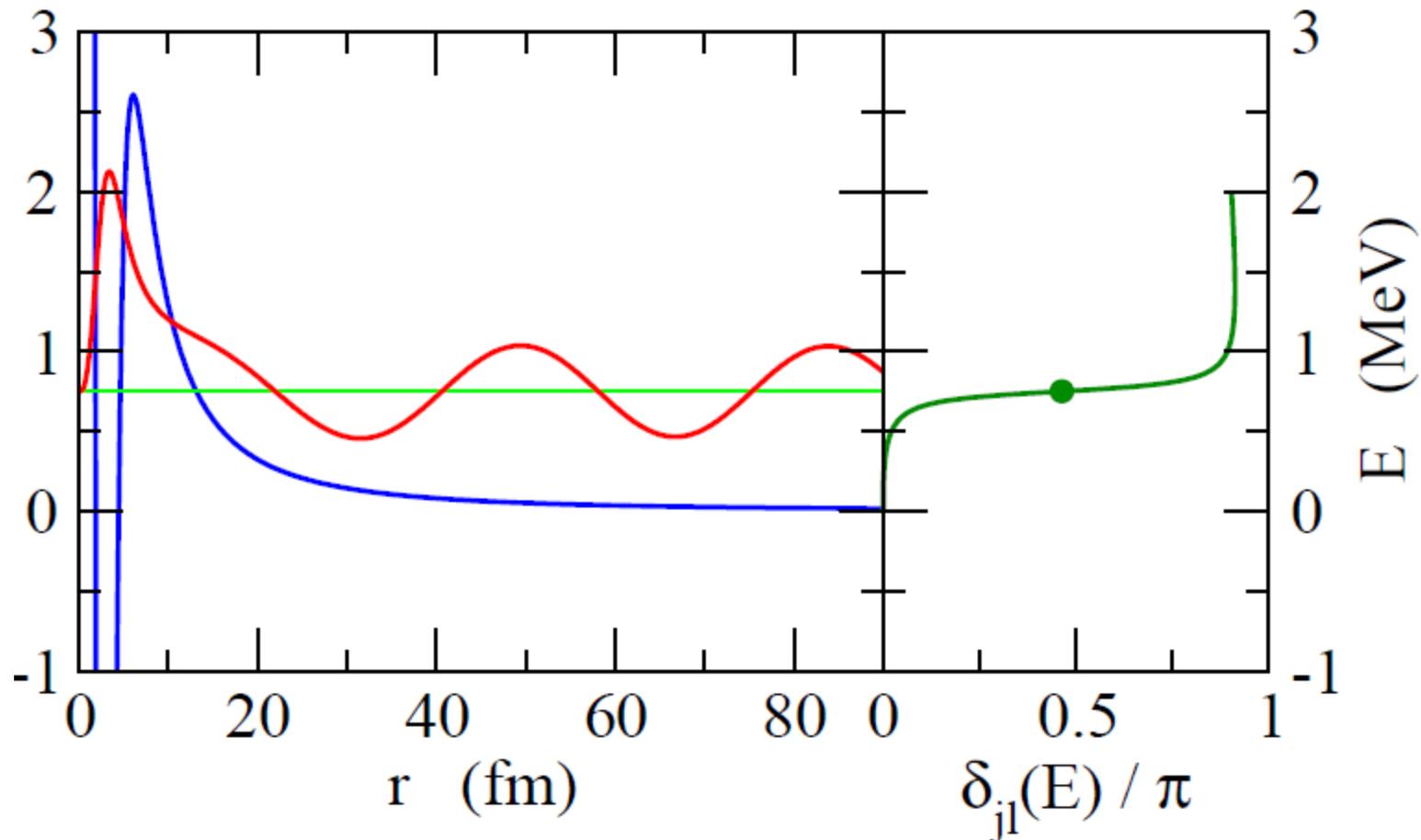
$$rR_{jl}(r) \rightarrow \sqrt{\frac{2m}{\pi k \hbar^2}} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{jl}(E)\right); \quad \int dr \psi_E(r) \psi_{E'}^*(r) = \delta(E - E')$$

それでは波動関数は?



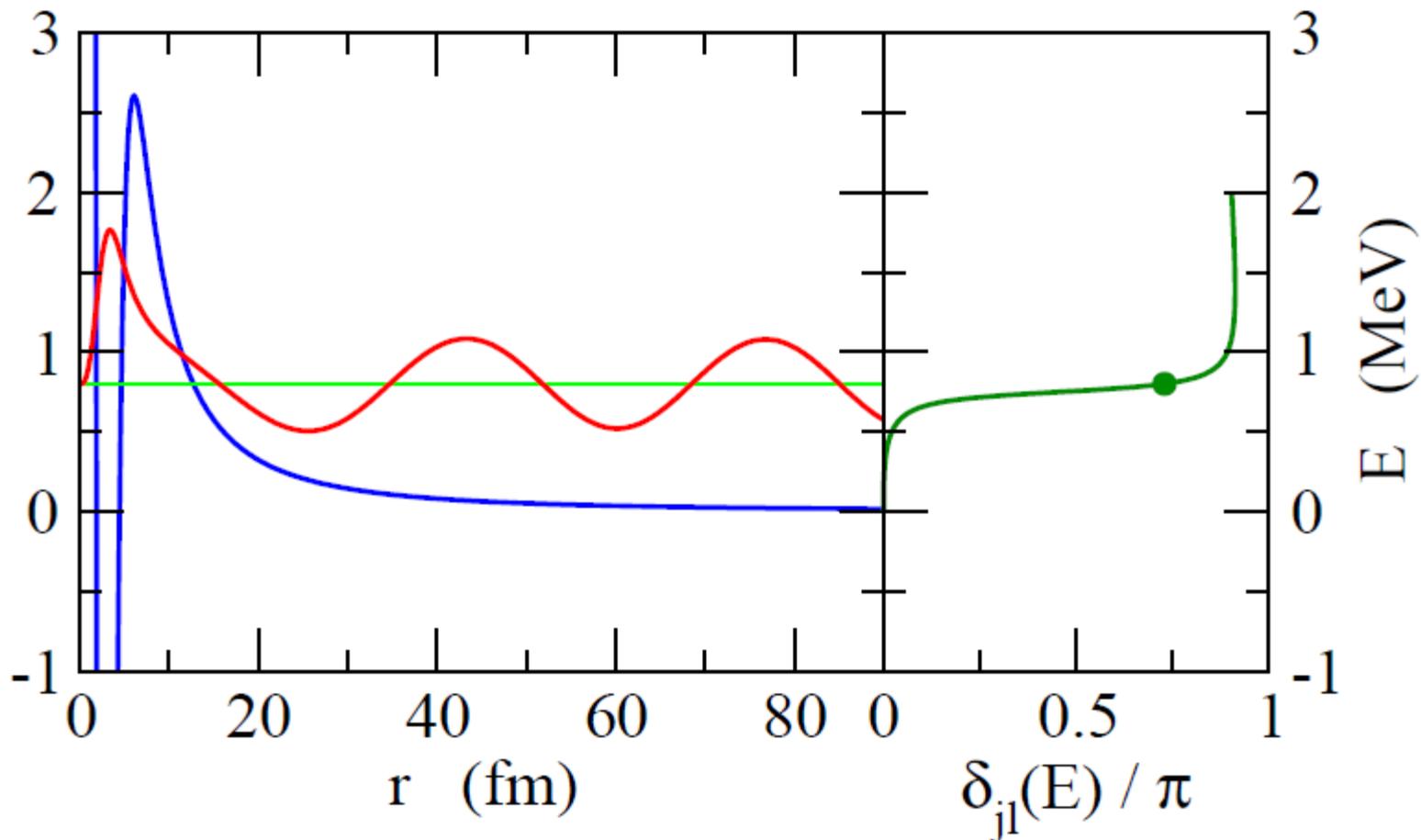
$$rR_{jl}(r) \rightarrow \sqrt{\frac{2m}{\pi k \hbar^2}} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{jl}(E)\right); \quad \int dr \psi_E(r) \psi_{E'}^*(r) = \delta(E - E')$$

それでは波動関数は?



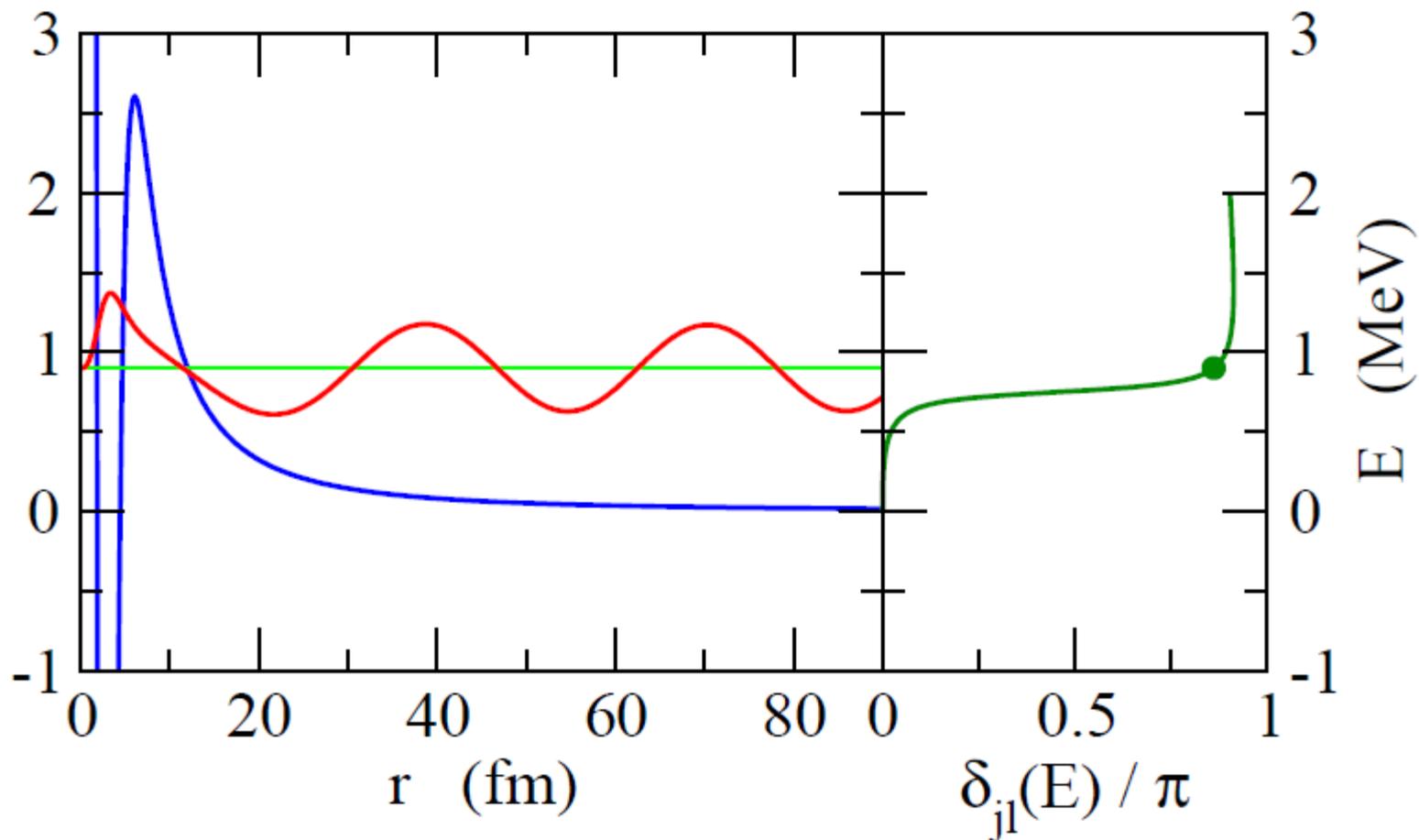
$$rR_{jl}(r) \rightarrow \sqrt{\frac{2m}{\pi k \hbar^2}} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{jl}(E)\right); \quad \int dr \psi_E(r) \psi_{E'}^*(r) = \delta(E - E')$$

それでは波動関数は?



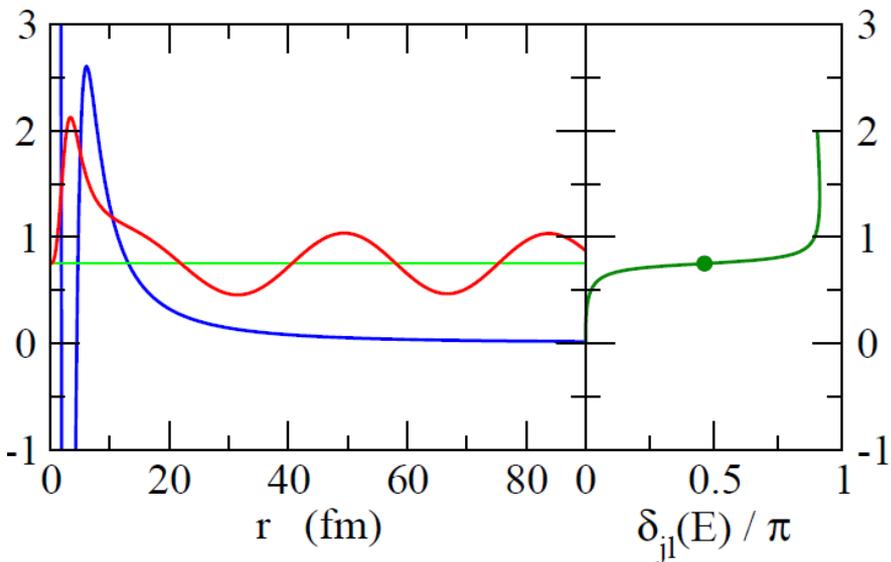
$$rR_{jl}(r) \rightarrow \sqrt{\frac{2m}{\pi k \hbar^2}} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{jl}(E)\right); \quad \int dr \psi_E(r) \psi_{E'}^*(r) = \delta(E - E')$$

それでは波動関数は?



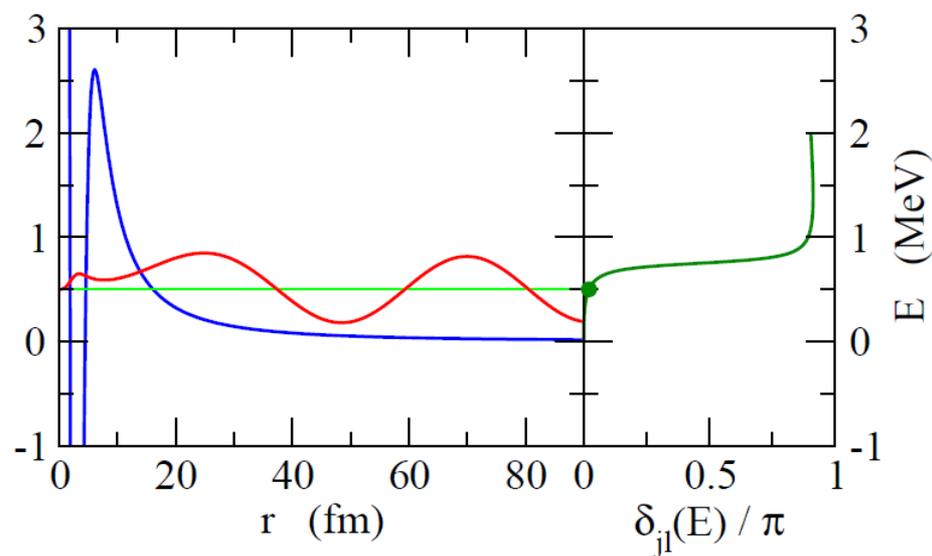
$$rR_{jl}(r) \rightarrow \sqrt{\frac{2m}{\pi k \hbar^2}} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{jl}(E)\right); \quad \int dr \psi_E(r) \psi_{E'}^*(r) = \delta(E - E')$$

それでは波動関数は?



on-resonance:

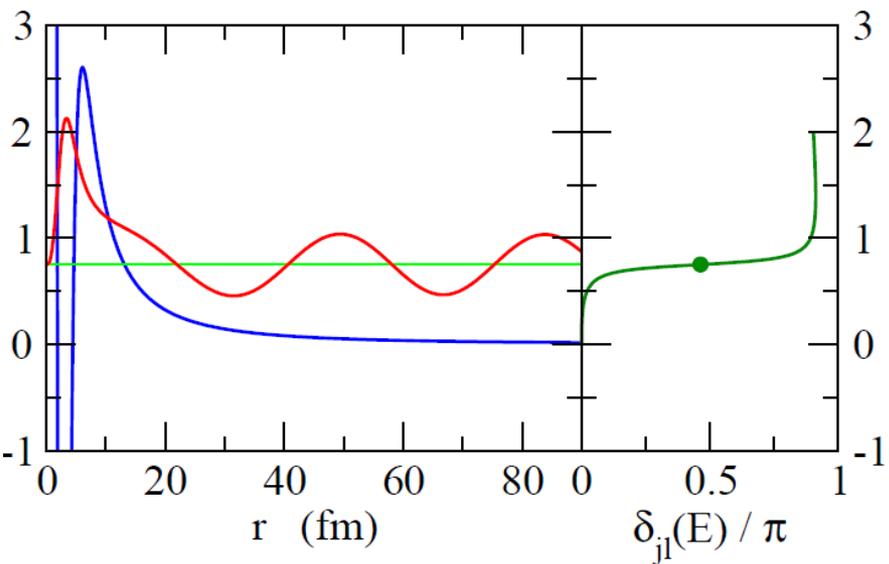
波動関数は障壁の内側で
大きな振幅



off-resonance:

障壁の内側では振幅が
小さい

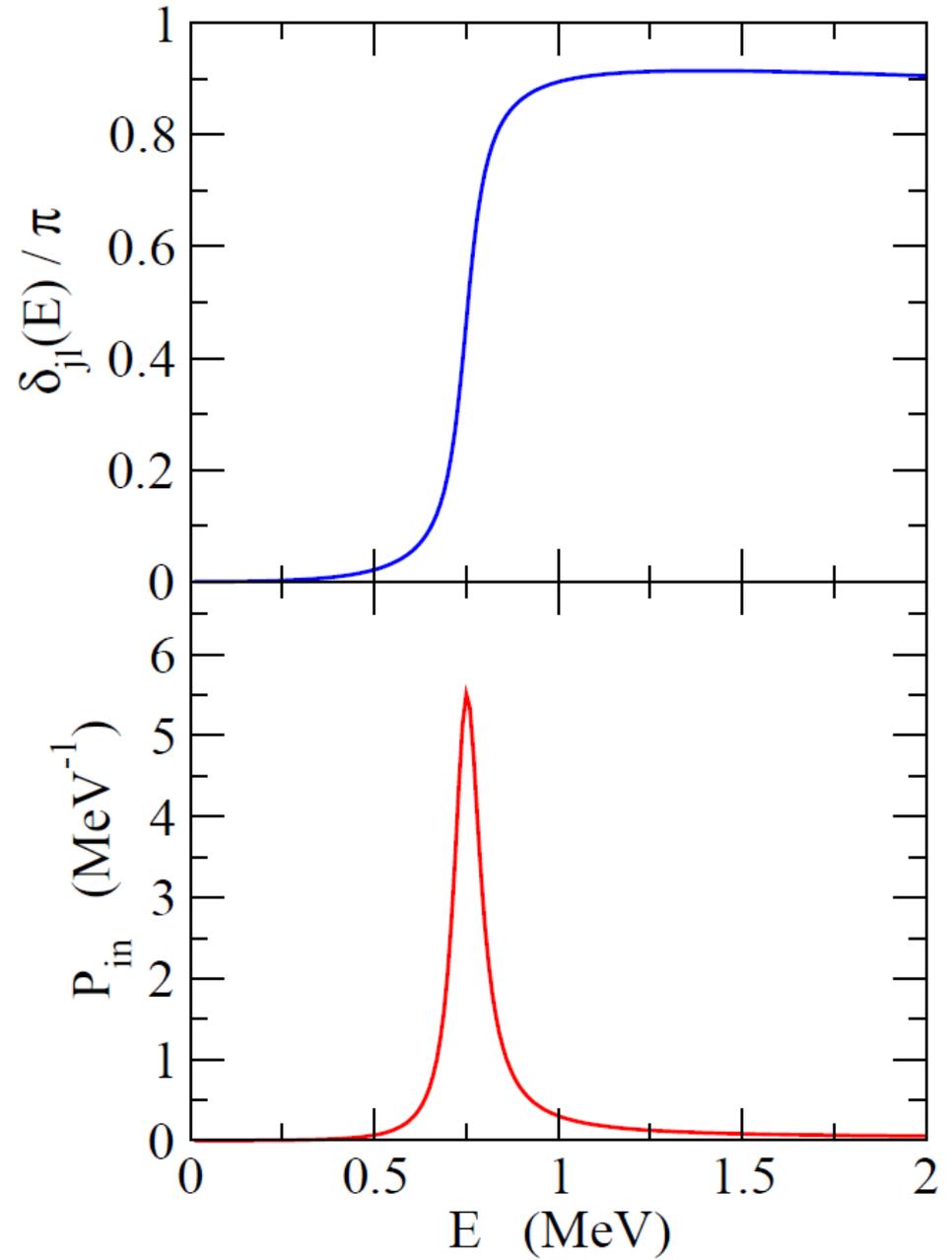
それでは波動関数は?



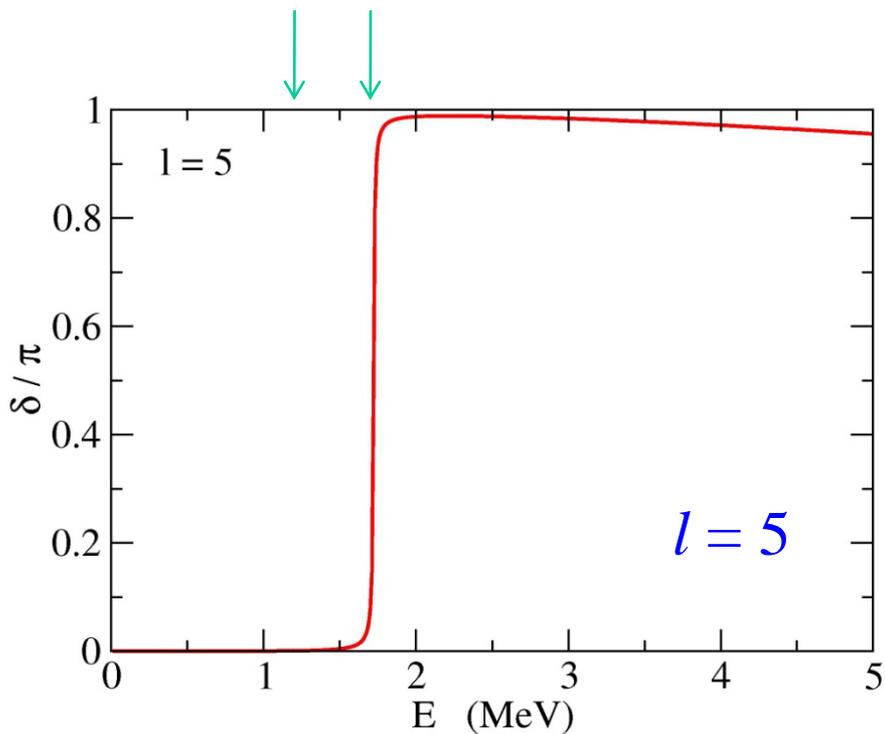
on-resonance:
波動関数は障壁の内側で
大きな振幅

障壁内部の存在確率

$$P_{in} \equiv \int_0^{r_b} r^2 dr |R_{jl}(r)|^2$$



もう少し極端な例:

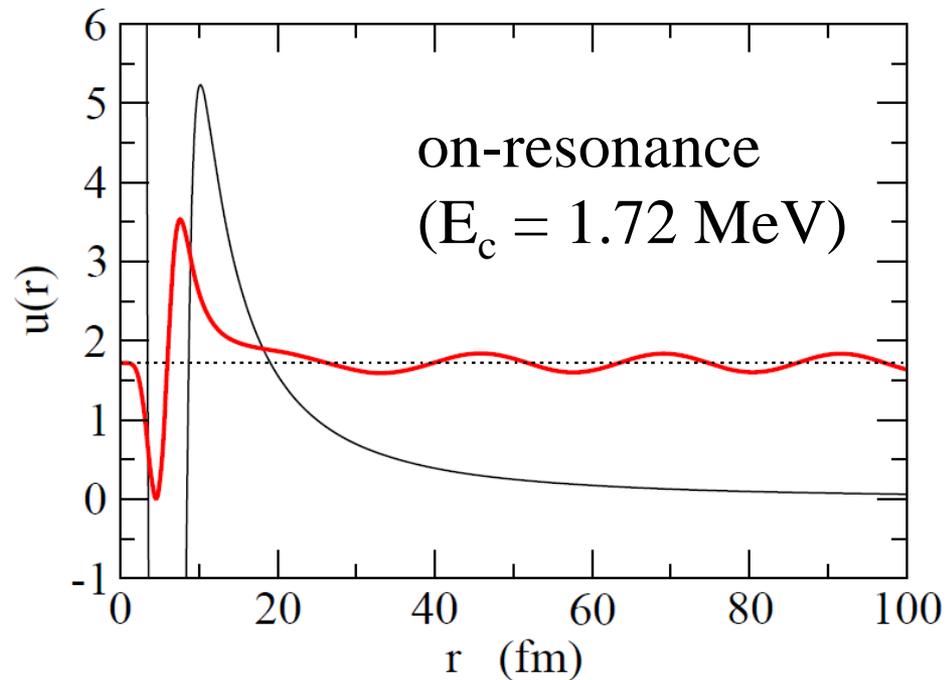
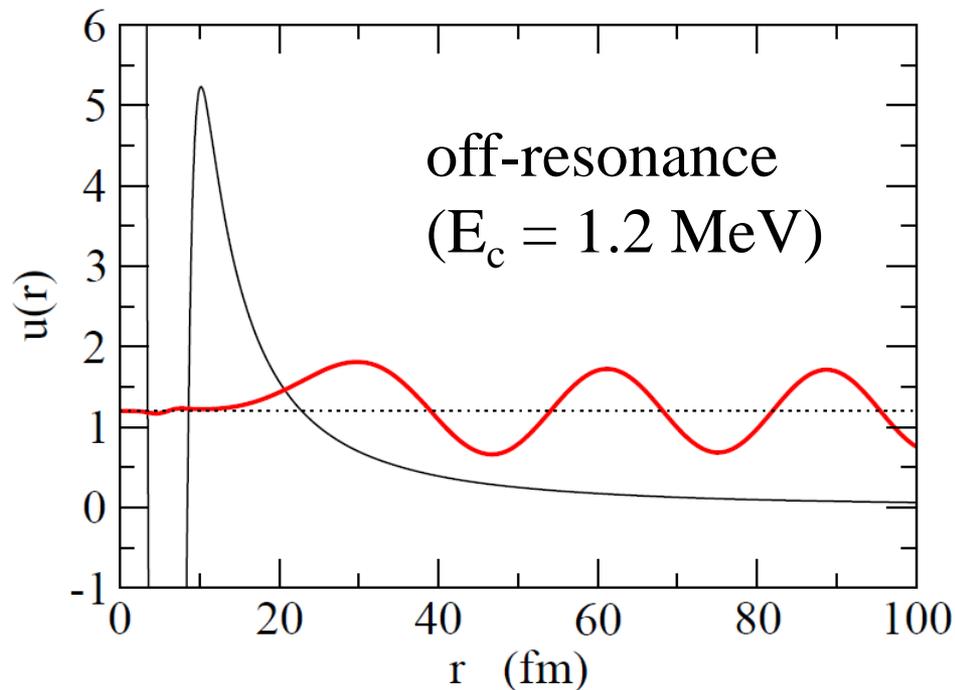


$$V_0 = -50 \text{ MeV}$$

$$R_0 = 1.27 * 200^{1/3} \text{ fm}$$

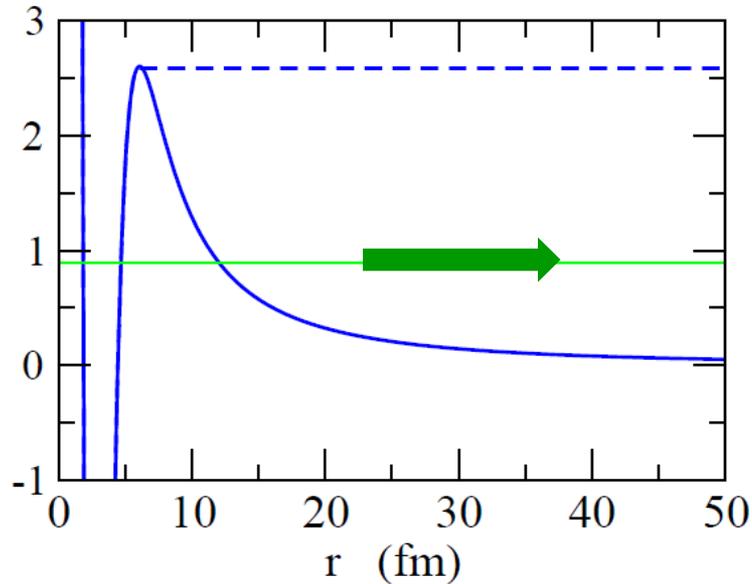
$$a = 0.67 \text{ fm}$$

$$\mu = 200 m_N / 201$$



ガモフ状態と散乱状態の関係

ガモフ状態

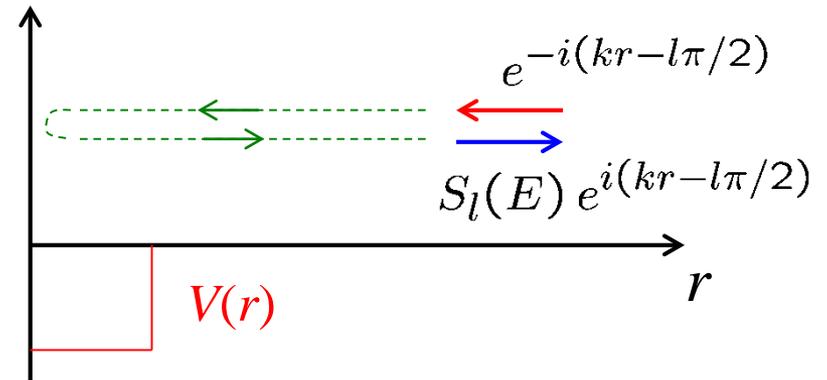


外向波境界条件

$$u_l(r) \rightarrow \mathcal{N} e^{i(kr - l\pi/2)}$$

$$E \rightarrow E_R - i\frac{\Gamma}{2}$$

散乱状態



散乱の境界条件

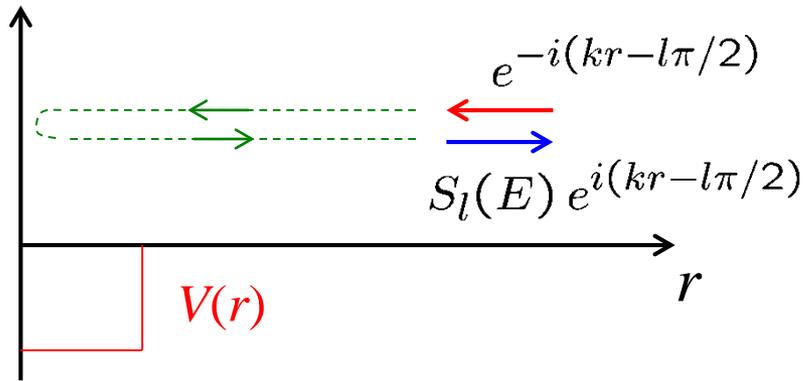
$$u_l(r) \rightarrow \mathcal{N} \left(e^{-i(kr - l\pi/2)} - S_l(E) e^{i(kr - l\pi/2)} \right)$$

$$S_l(E) = e^{2i\delta_l(E)}$$

E : real

ガモフ状態と散乱状態の関係

散乱状態



散乱の境界条件

$$u_l(r) \rightarrow \mathcal{N} \left(e^{-i(kr-l\pi/2)} - S_l(E) e^{i(kr-l\pi/2)} \right)$$

$$S_l(E) = e^{2i\delta_l(E)}$$

E : real

もし、 $S_l(E)$ が発散するような E があれば、

$$u_l(r) \sim \tilde{\mathcal{N}} e^{i(kr-l\pi/2)} \quad (\text{外向波})$$

ただし、エネルギー E を複素平面へ解析接続しなければならない:

$$E \rightarrow E_R - i\frac{\Gamma}{2}$$

➡ ガモフ状態 **↔** S 行列の極 (ポール)

Breit-Wigner の公式

S-行列が $\epsilon = E_R - i\frac{\Gamma}{2}$ で極を持つとすると、

$$S(E) = e^{2i\delta_0(E)} \cdot \frac{E - \epsilon^*}{E - \epsilon} \quad \leftarrow |S(E)| = 1$$

$\delta_0(E)$ は E のゆるやかな関数 (background phase shift)



Breit-Wigner の公式

$$\delta(E) = \delta_r(E) + \delta_0(E) = \tan^{-1} \left(\frac{\Gamma}{2(E_R - E)} \right) + \delta_0(E)$$

$$S(E) = e^{2i\delta(E)}$$

Breit-Wigner の公式 (詳細版)

S-行列が $\epsilon = E_R - i\frac{\Gamma}{2}$ で極を持つとすると、

$$S(E) = e^{2i\delta_0(E)} \cdot \frac{E - \epsilon^*}{E - \epsilon} \quad \leftarrow |S(E)| = 1$$

$\delta_0(E)$ は E のゆるやかな関数 (background phase shift)

$E - \epsilon^* = c e^{i\delta_r(E)}$ とすると、

$$S(E) = e^{2i\delta_0(E)} \cdot \frac{c e^{i\delta_r(E)}}{c e^{-i\delta_r(E)}} = e^{2i\delta_0(E)} e^{2i\delta_r(E)}$$

$$E - \epsilon^* = E - E_R - i\Gamma/2 = c e^{i\delta_r} = c(\cos \delta_r + i \sin \delta_r)$$

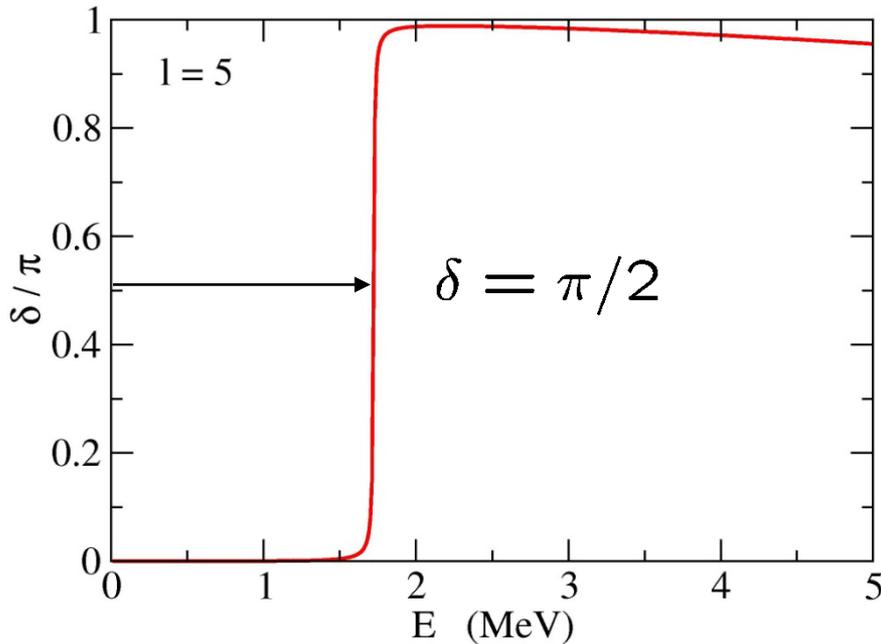
$$\rightarrow \tan \delta_r = \frac{\sin \delta_r}{\cos \delta_r} = \frac{-\Gamma/2}{E - E_R}$$



$$\delta(E) = \delta_r(E) + \delta_0(E) = \tan^{-1} \left(\frac{\Gamma}{2(E_R - E)} \right) + \delta_0(E)$$

Breit-Wigner の公式

幅が狭ければ、位相のずれが $\pi/2$ を切る時に共鳴



Breit-Wigner formula:

$$\delta(E) = \tan^{-1} \frac{\Gamma}{2(E_R - E)} + \delta_0(E)$$

$$\Rightarrow \delta(E_R) \sim \pi/2$$

$$\Gamma = \frac{2}{\delta'(E_R)}$$

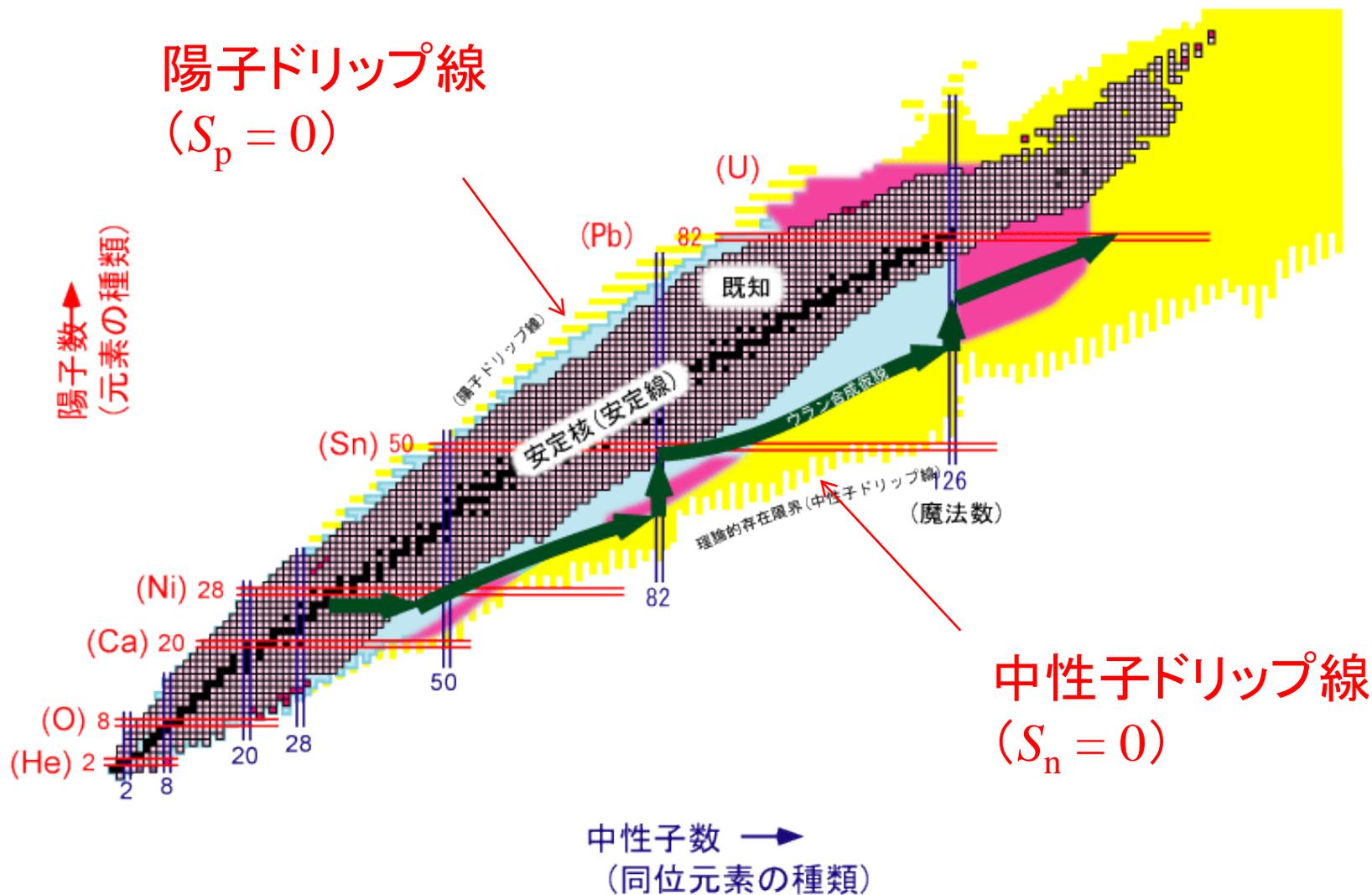
$$V_0 = -50 \text{ MeV}$$

$$R_0 = 1.27 * 200^{1/3} \text{ fm}$$

$$a = 0.67 \text{ fm}$$

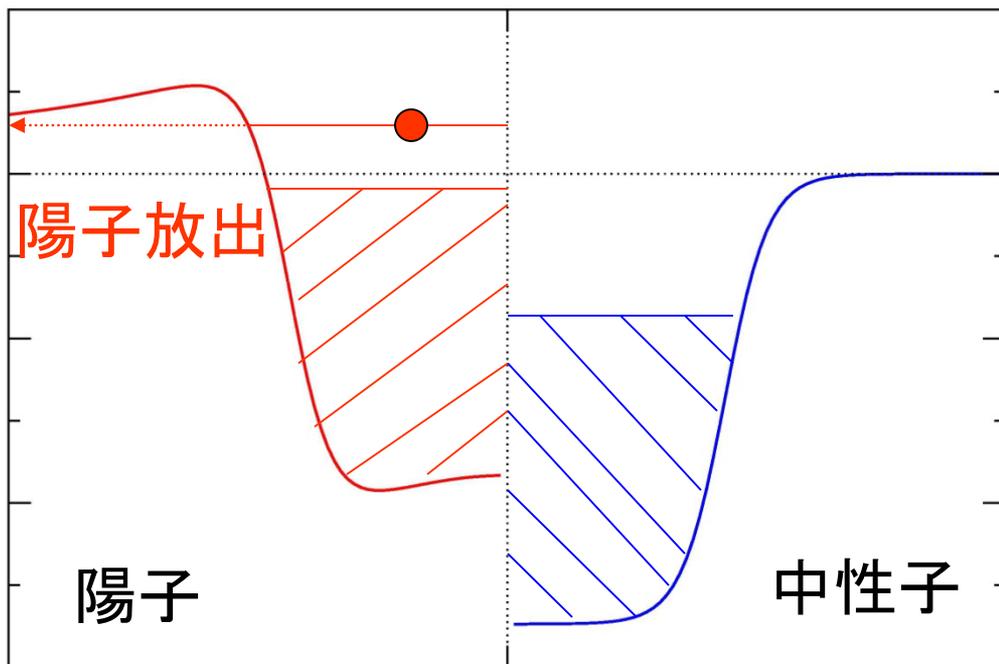
$$\mu = 200 m_N / 201$$

陽子ドリップ線を越えた原子核の陽子放出崩壊



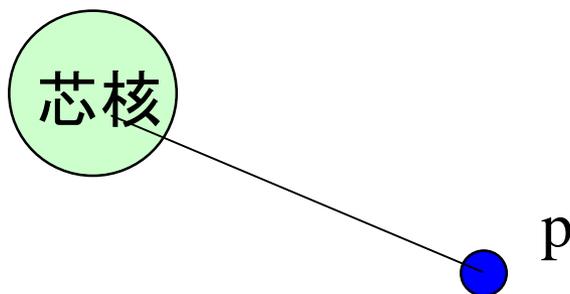
陽子放出崩壊

陽子ドリップ線を超えた原子核



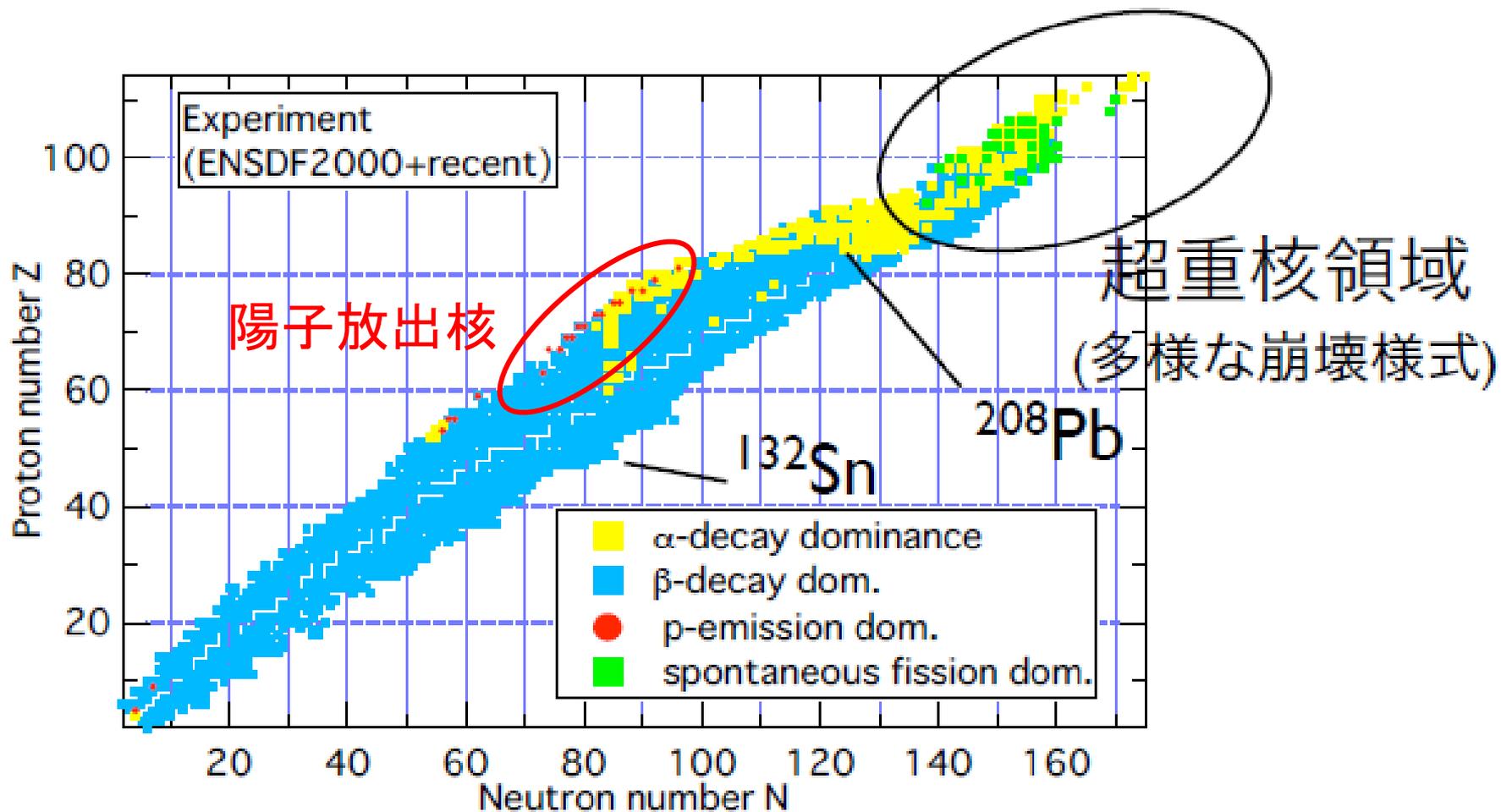
陽子: クーロン障壁にトラップ
(障壁をトンネルしなければならない)

→ 非常に幅の狭い
(長寿命な) 共鳴状態



多くの(基底状態)陽子放出核が発見

実験の観測量: 陽子の放出エネルギー E_p と崩壊半減期 $T_{1/2}$



小浦寛之氏 (JAEA)
のスライドより

A ~ 150-160 領域における 典型的な値

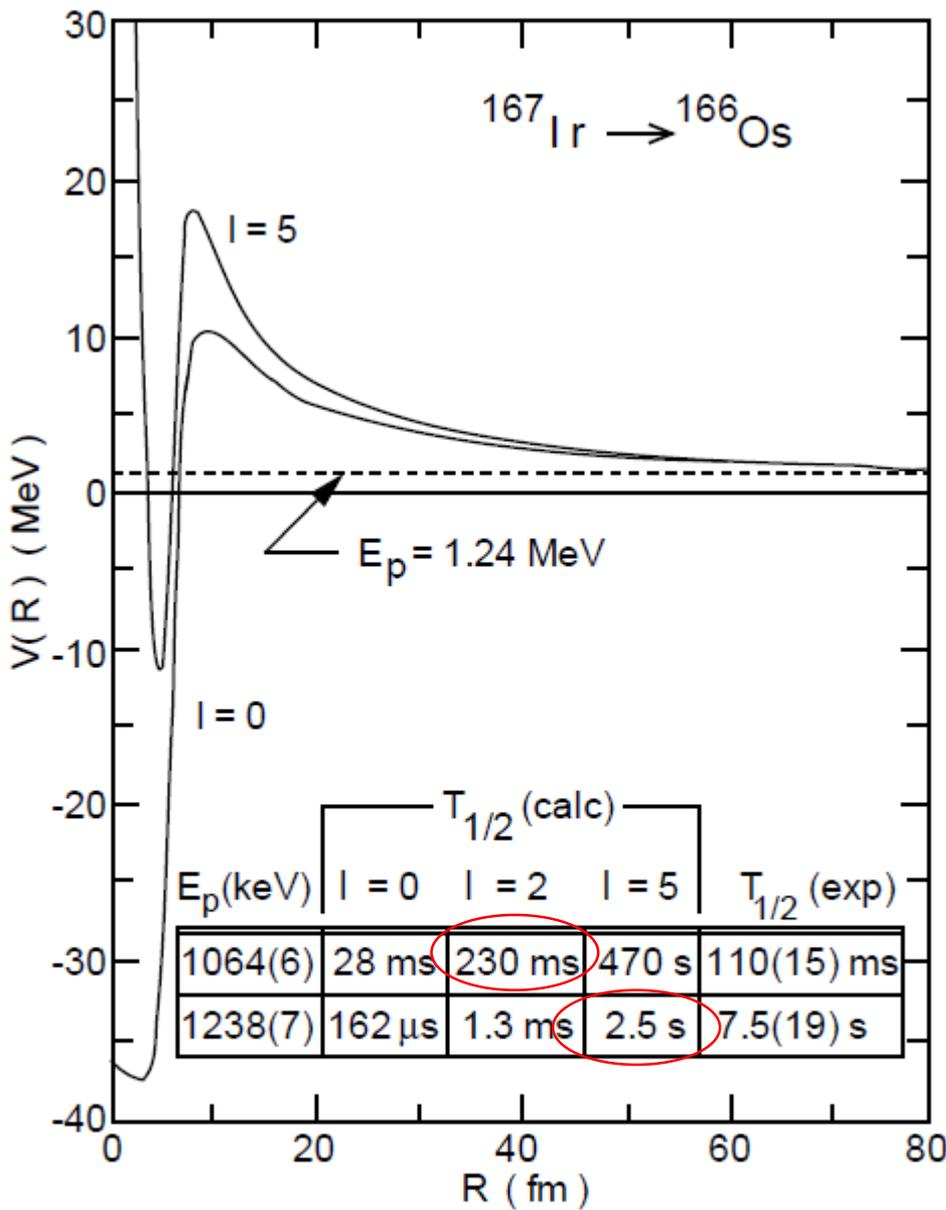
$$V_b \sim 10 \text{ MeV } (l=0)$$

$$E_p \sim 1 \text{ MeV}$$

$$R_{\text{turn}}: 80 \sim 100 \text{ fm}$$

$$\Gamma: 10^{-18} \sim 10^{-22} \text{ MeV}$$

$$T_{1/2}: 100 \mu\text{s} \sim 1 \text{ sec}$$



陽子放出崩壊の一つの特徴：
半減期が l に敏感

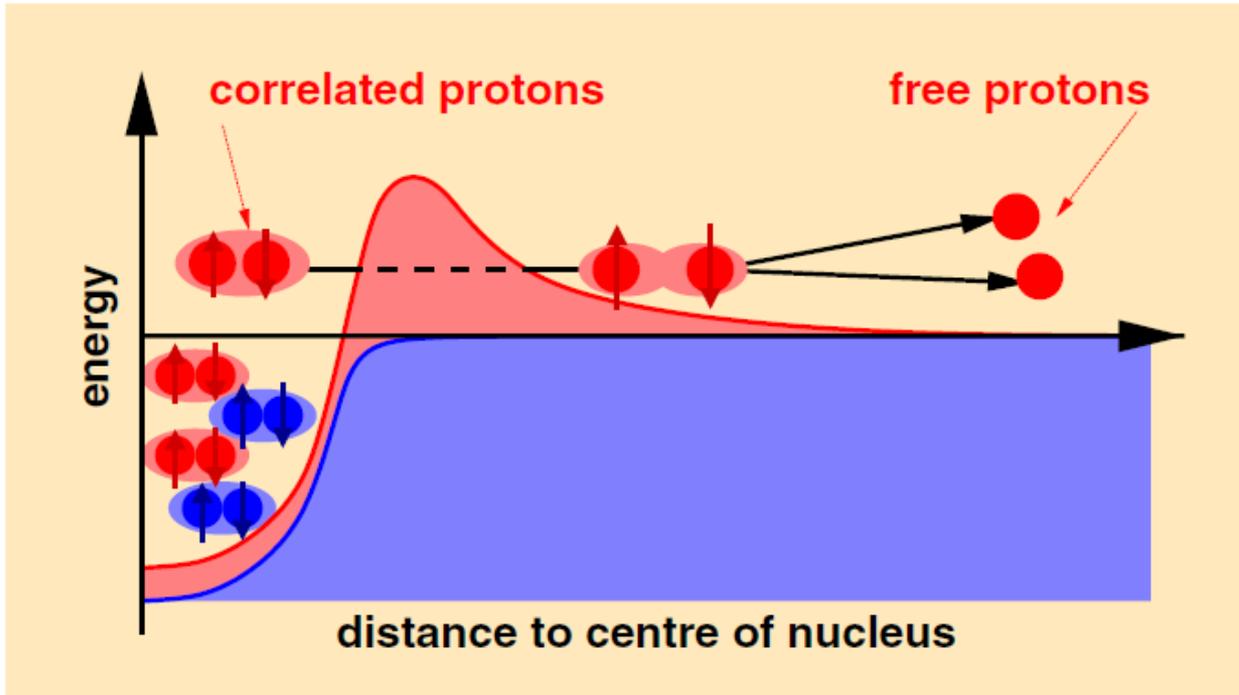


陽子崩壊を通じて陽子過剰核
の陽子一粒子状態の l を決定
できる

Figure 3 Proton-nucleus potential calculated for the proton emitter ^{167}Ir . The inset shows the proton-decay half-lives calculated using the WKB approximation for three values of the angular momentum ℓ , compared to the experimental values for the ground and isomeric transitions.

2陽子放出崩壊

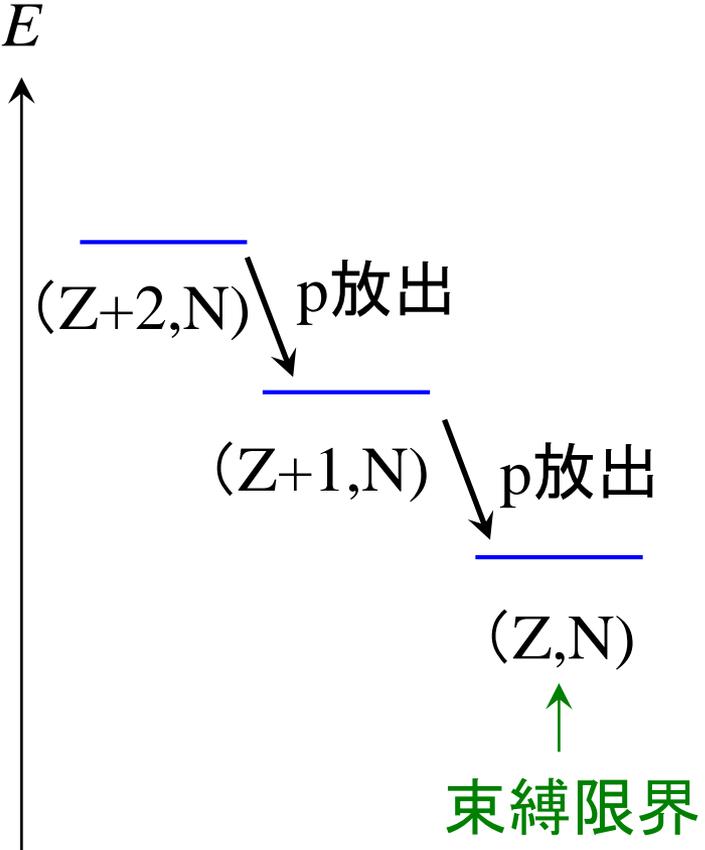
最近では陽子が2つ出てくる崩壊も観測されている



B. Blank and M. Ploszajczak, Rep. Prog. Phys. 71('08)046301

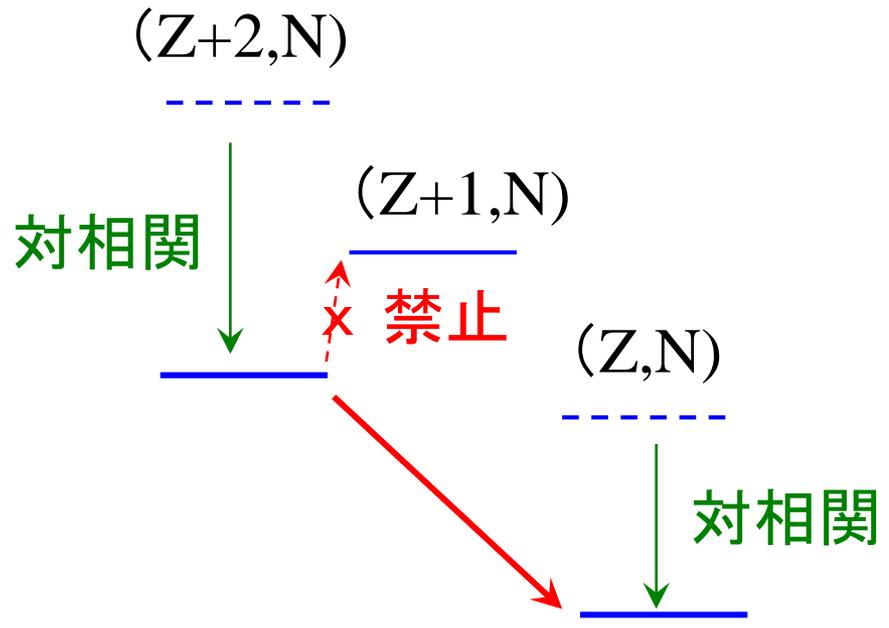
- ✓ 放出2陽子のエネルギー分布や角度分布から相関が見えるか?
- ✓ クーロン3体系(終状態相互作用)
 - ・理論的取扱いが難しい
 - ・基底状態の相関をどのくらい乱すか

「正真正銘の」2核子放出崩壊



連続的な2核子放出
(1核子放出が2回起きる)

もしZが偶数だと

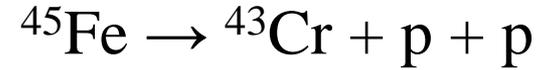


直接 (Z+2, N) から (Z, N) に遷移

「正真正銘の」2核子放出崩壊

寿命が十分長ければ(例えば 10^{-14} 秒以上)
「放射性」2陽子放出崩壊

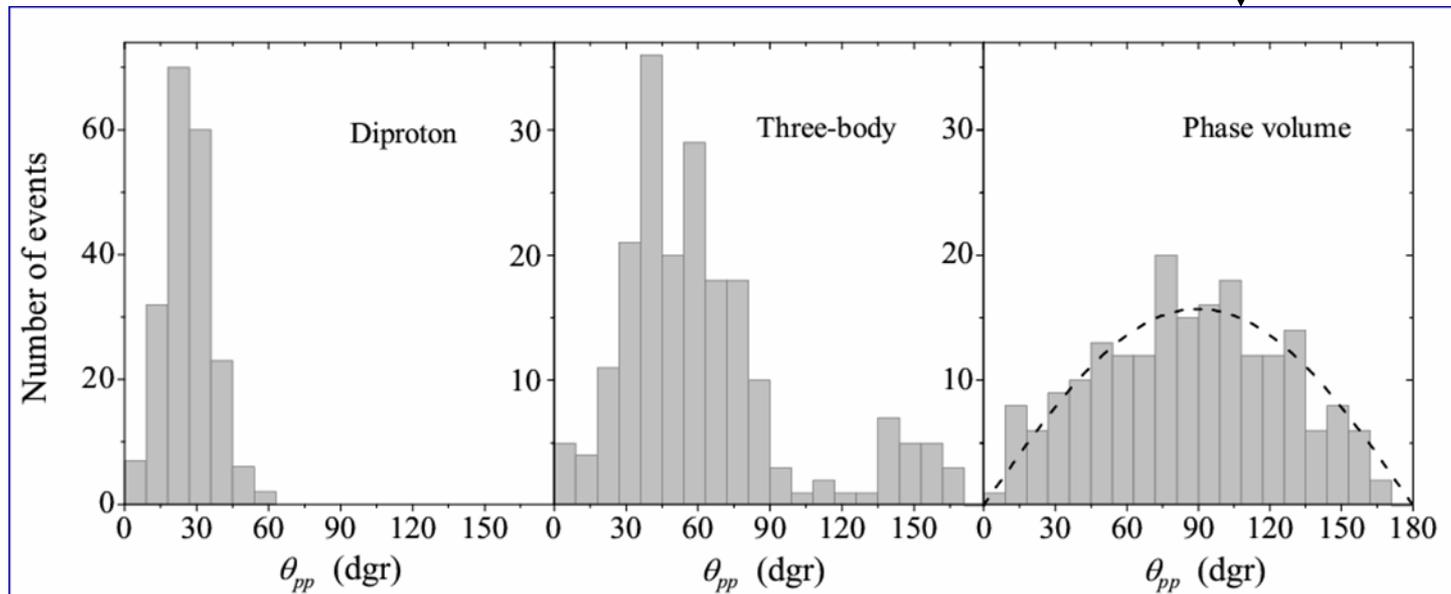
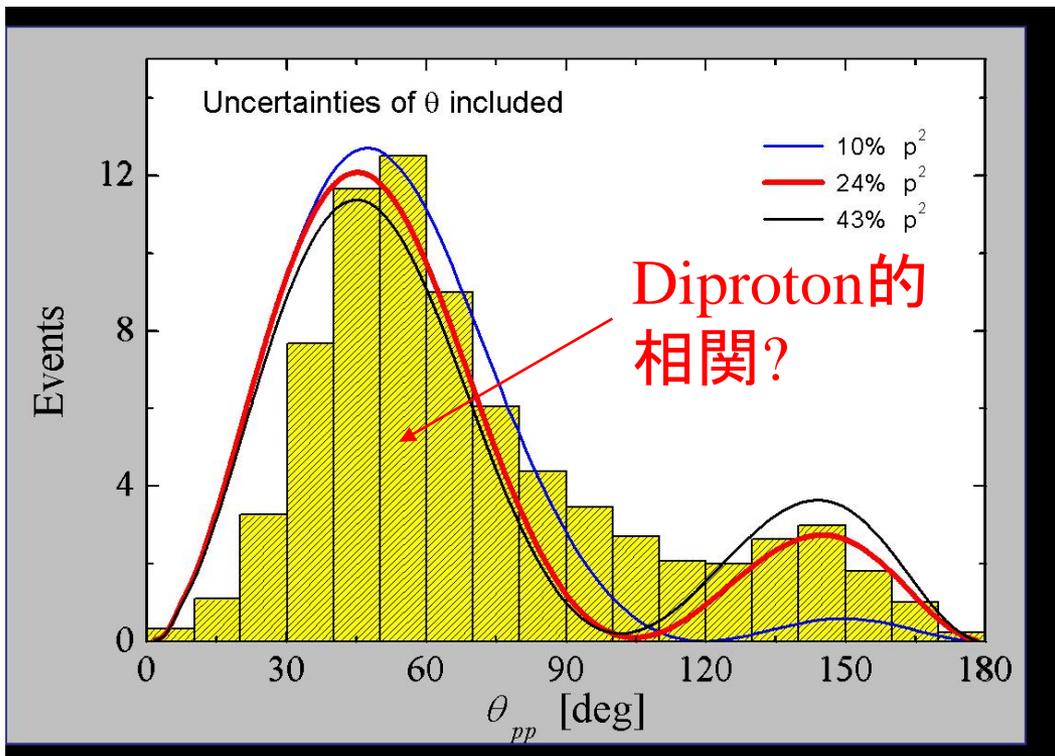
^{45}Fe 核の場合



K. Miernik et al.,
PRL99 ('07) 192501

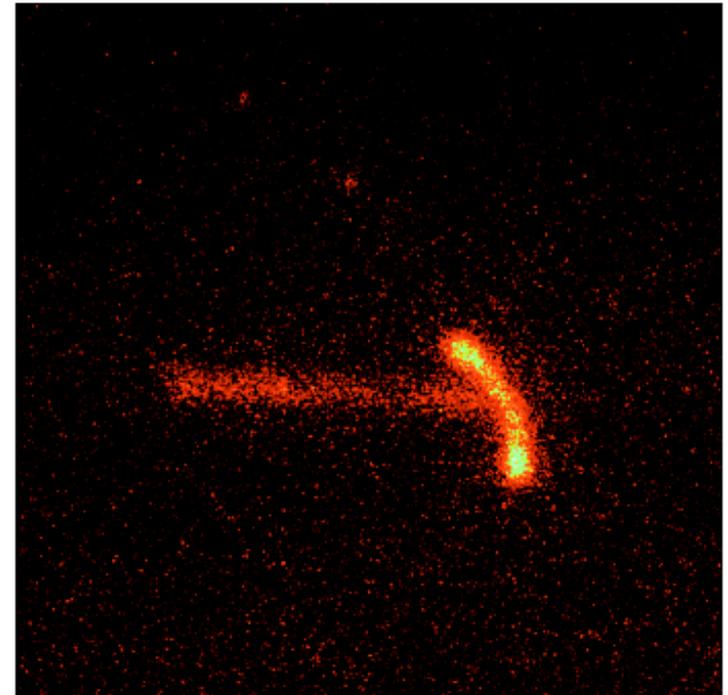
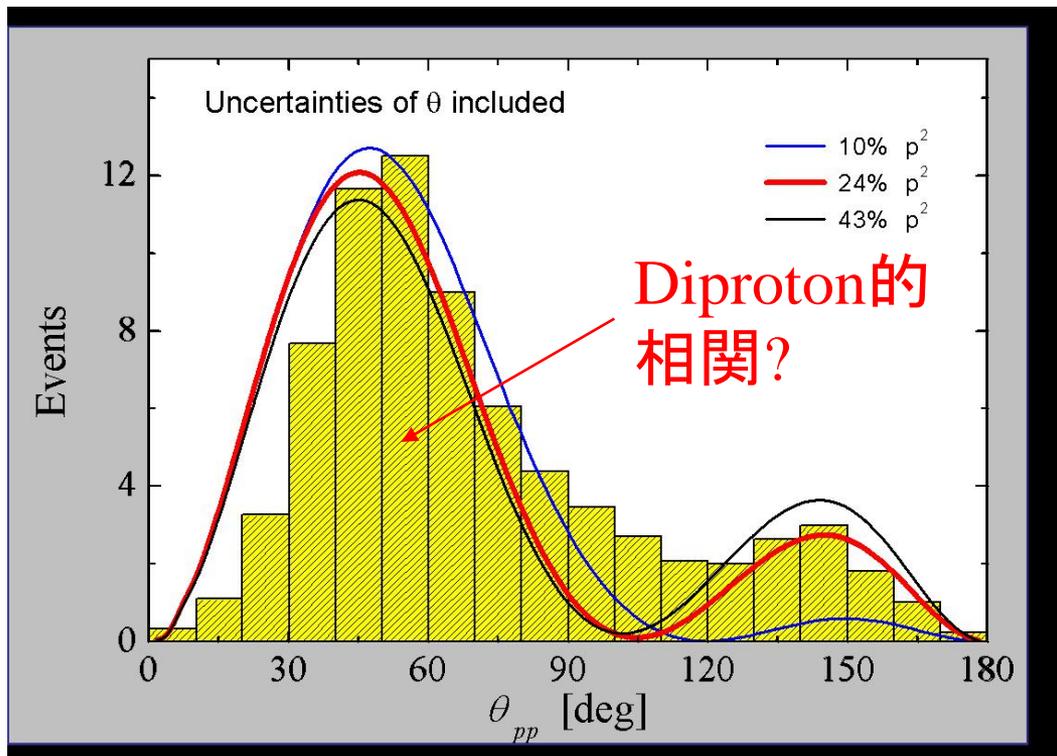
← 実験データ

理論計算 (Grigorenko)



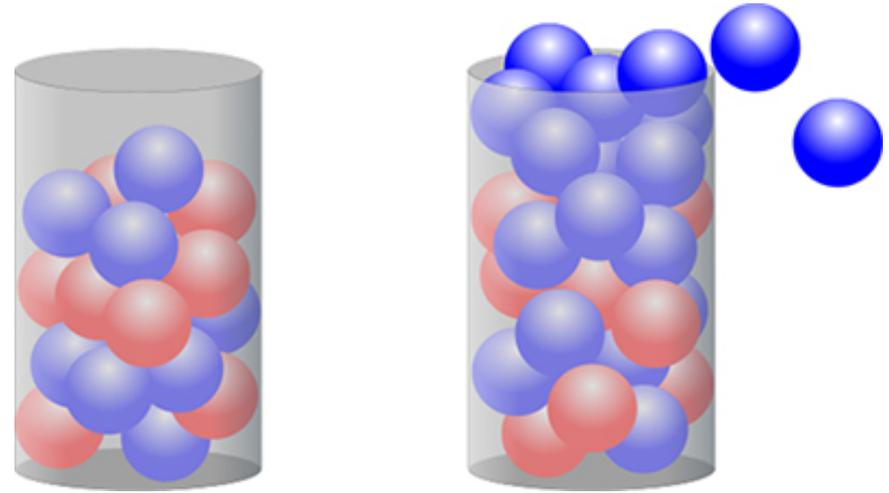
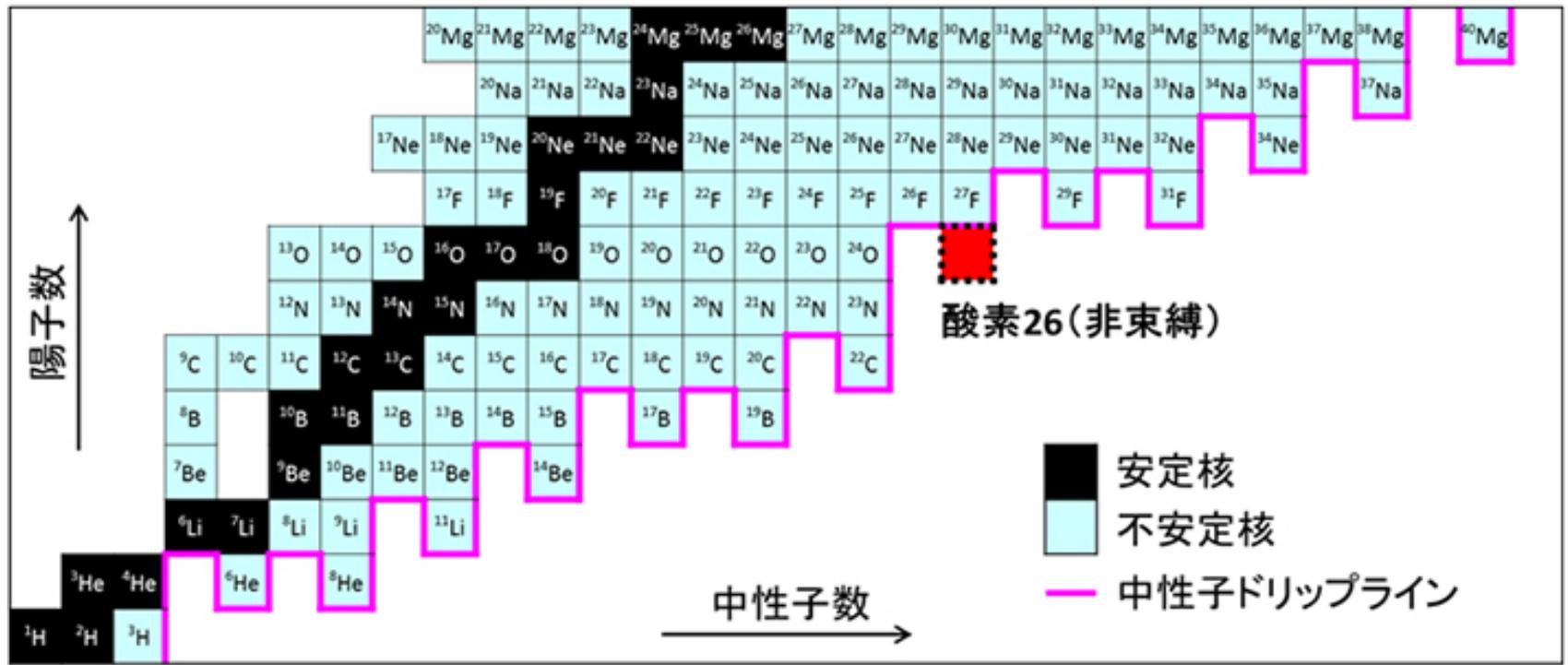
^{45}Fe 核の場合

K. Miernik et al.,
PRL99 ('07) 192501

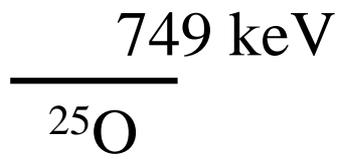
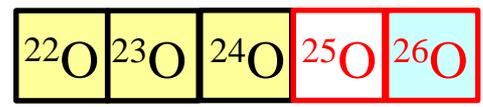
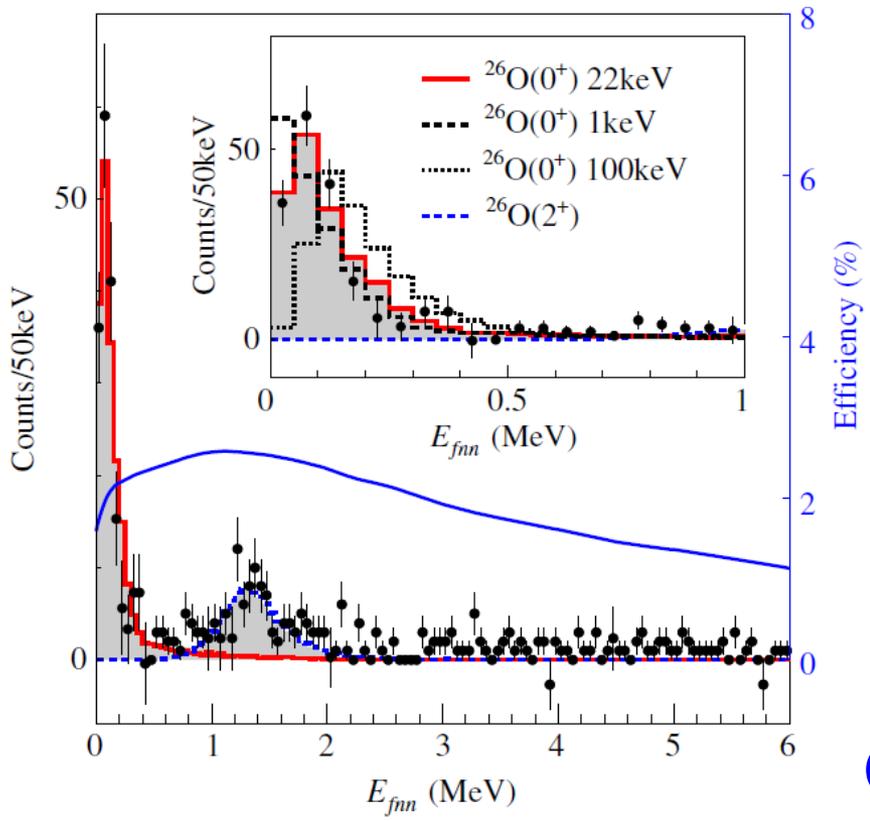


ガス・チェンバーの中
を走らせて CCD カメラ
で写真をとる

もっと最近では、中性子ドリップ線の向こう側の原子核の $2n$ 崩壊も。



もっと最近では、中性子ドリップ線の向こう側の原子核の 2n 崩壊も。

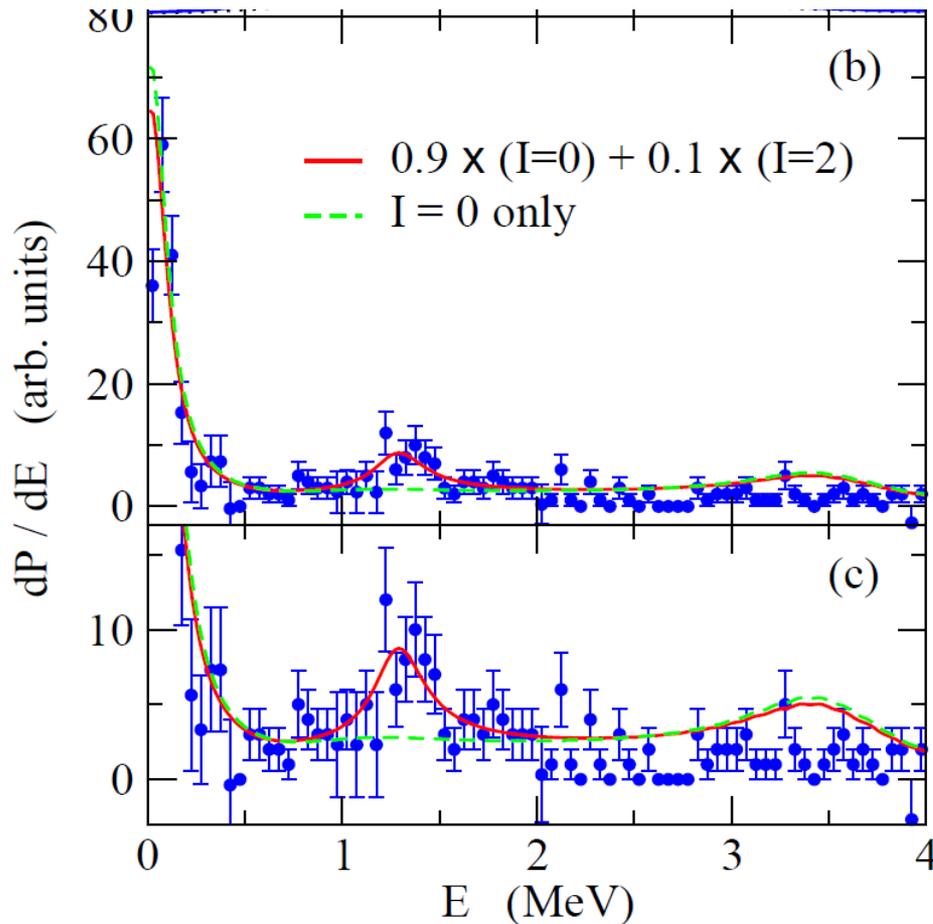


(neutron drip line)

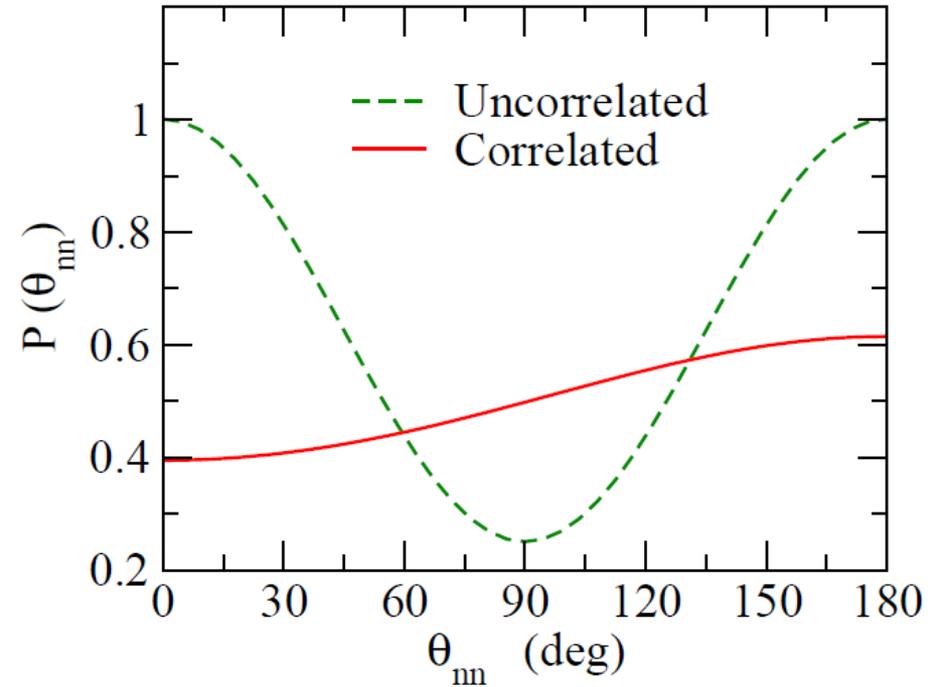
Y. Kondo et al., PRL116 ('16) 102503

3体模型 ($^{26}\text{O} = ^{24}\text{O} + n + n$) による理論解析

K.H. and H. Sagawa,
- PRC89 ('14) 014331
- PRC93 ('16) 034330



放出2中性子の角度相関



相関 \rightarrow 逆方向 ($\theta = 180$ 度)
への放出が増大