

➤ α 崩壊も原子核の変形による変形ポテンシャルで説明できないか?

前回の質問とその答え:

➤ α 崩壊は核分裂に含まれないのか?(両方は全く違う現象なのか?)

✓ そうですね。通常は α 崩壊と核分裂は違う取扱いをします。

ちぎれてからトンネルするか(α 崩壊)

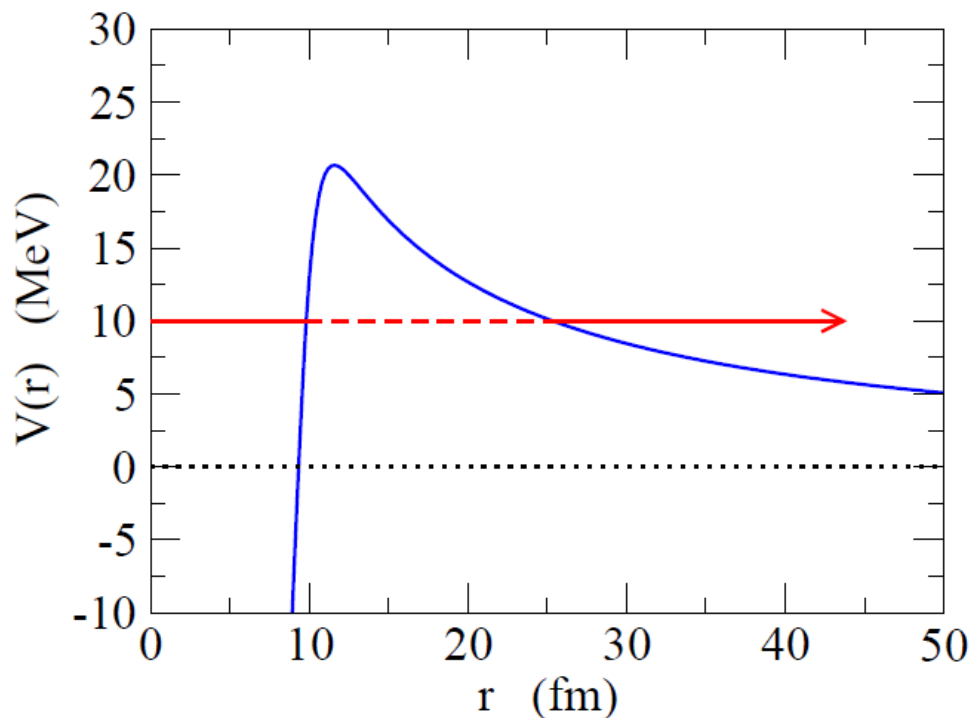
トンネルしてからちぎれるか(核分裂)の違い

➤ α 崩壊で $E_\alpha \rightarrow 0$ では更に寿命が長くなる?

^{232}Th : $E_\alpha = 4 \text{ MeV}$, $T_{1/2} = 1.4 \times 10^{10} \text{ 年} = 4.4 \times 10^{17} \text{ 秒}$

^{218}Th : $E_\alpha = 10 \text{ MeV}$, $T_{1/2} = 0.11 \mu\text{sec.} = 1.1 \times 10^{-7} \text{ 秒}$

✓ その通りです



$E_\alpha \rightarrow 0$ だと $P(E_\alpha) = 0$ なので
寿命は無限大

(トラップされたままで出てこれ
ないので寿命は無限大)

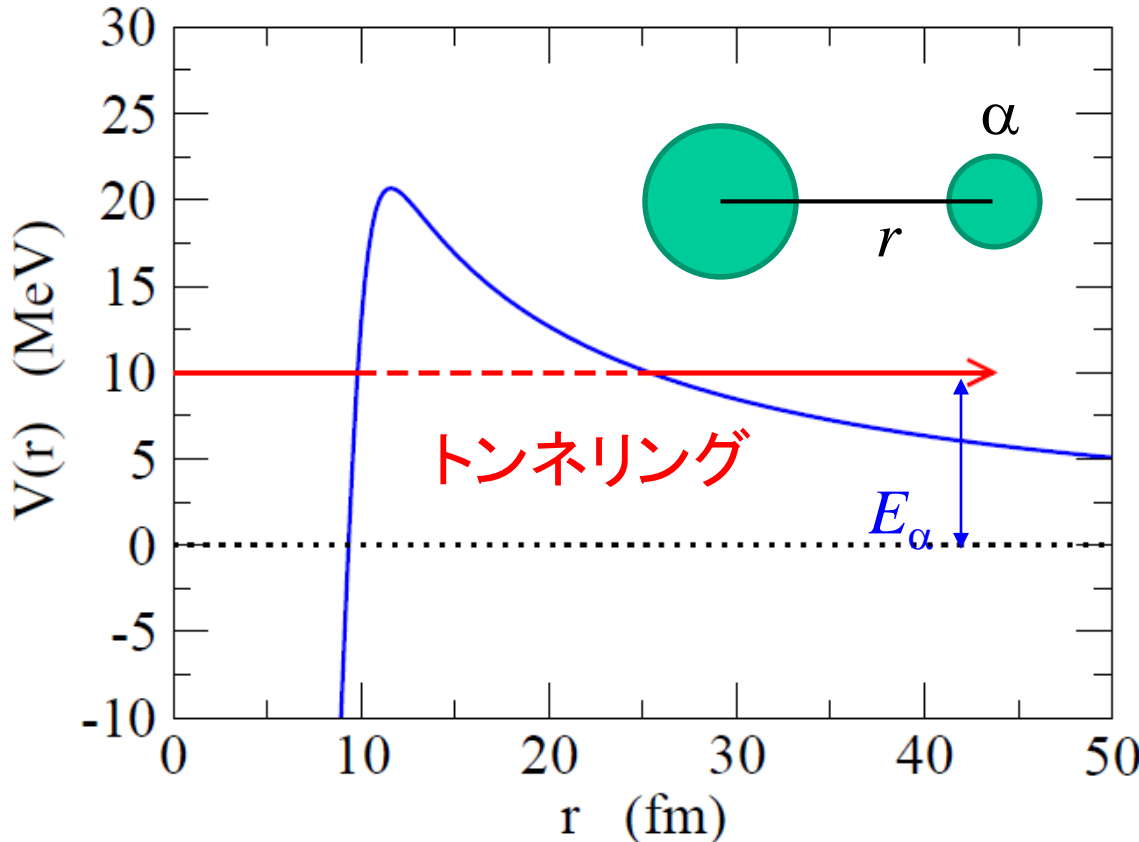
*トンネル確率が大きいと
さっと出てこれて寿命は
短くなる

➤ ガモフの理論では観測されたエネルギーに対して α 崩壊の確率が計算できるが、そもそも α 線のエネルギーを決める理論はあるのか？

$$\text{ガモフ: } \lambda = \omega \cdot P(E_\alpha)$$

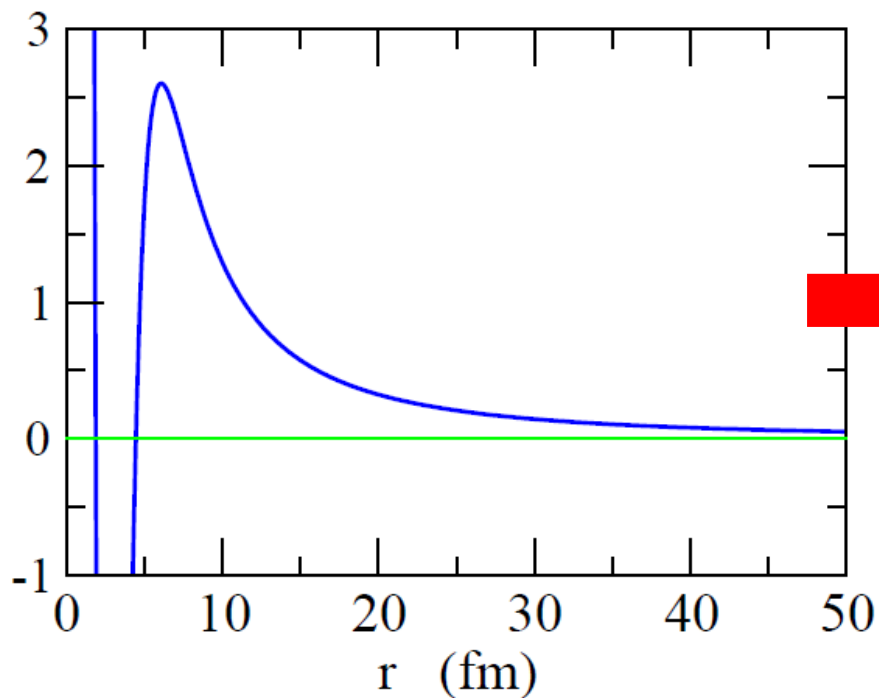
✓ いい質問です！

「共鳴状態の量子論」



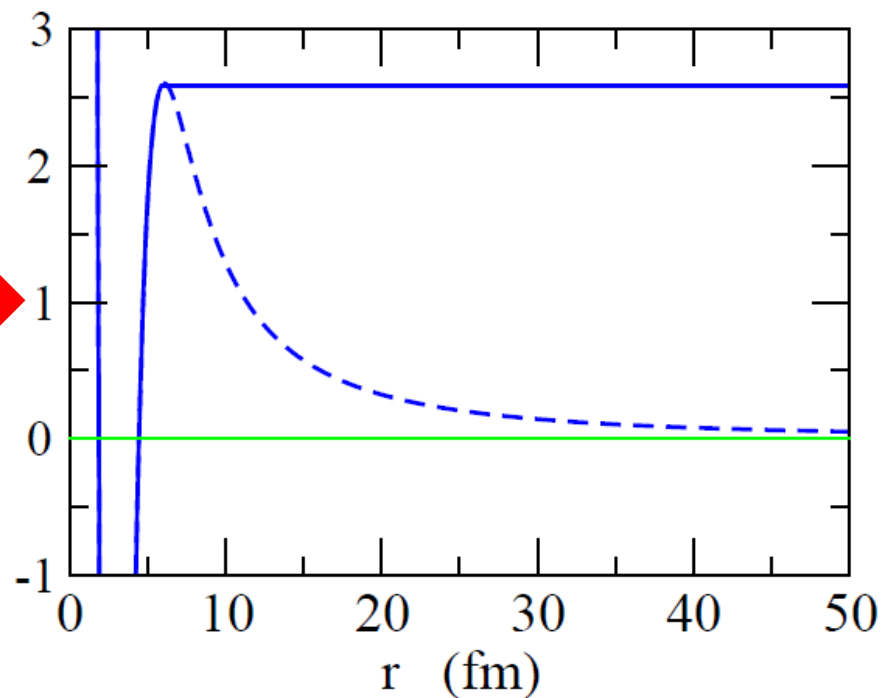
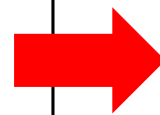
この状態は準束縛状態
= 共鳴状態

準束縛状態(共鳴状態)とは?



実際のポテンシャル

束縛状態は $E < 0$ の領域のみ

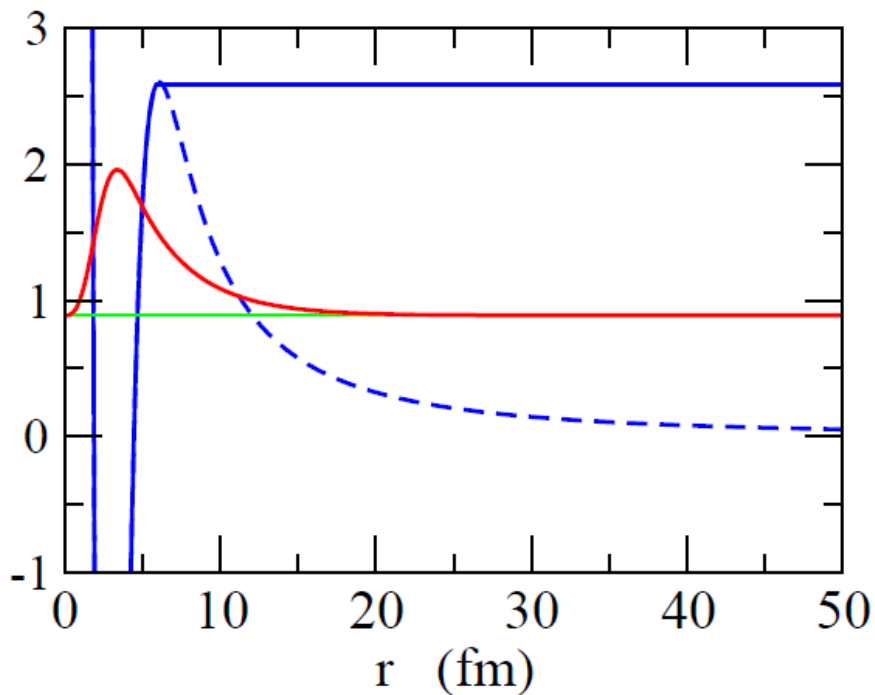


このようにポテンシャルを
変更すると

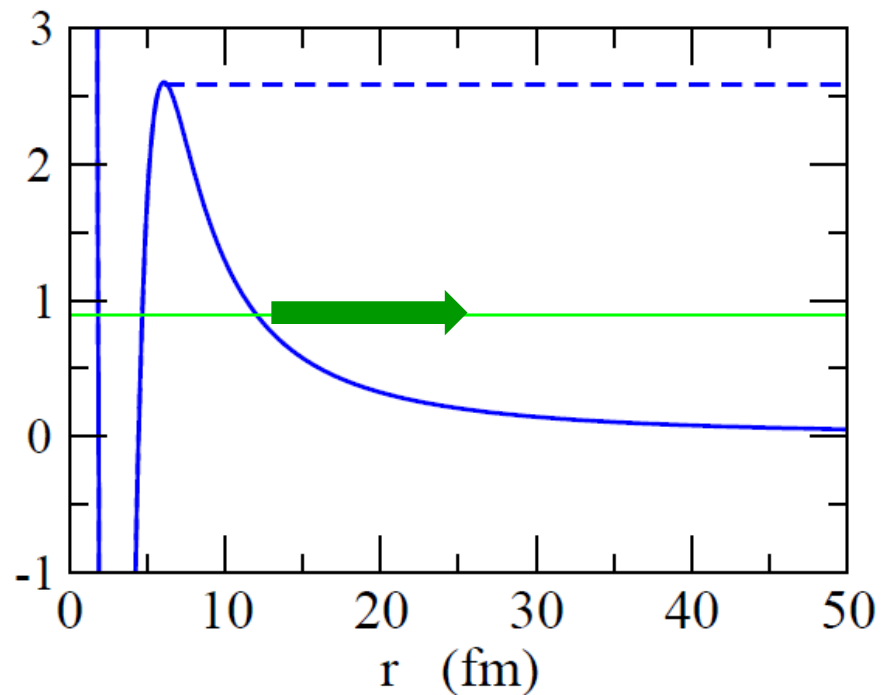
→ $E > 0$ でも束縛状態が
できる

= 準束縛(準安定)状態

準束縛状態(共鳴状態)とは?



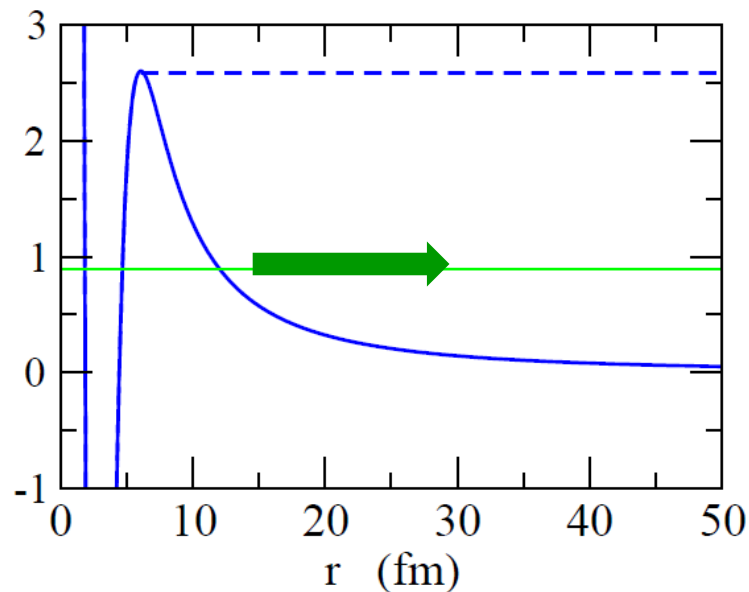
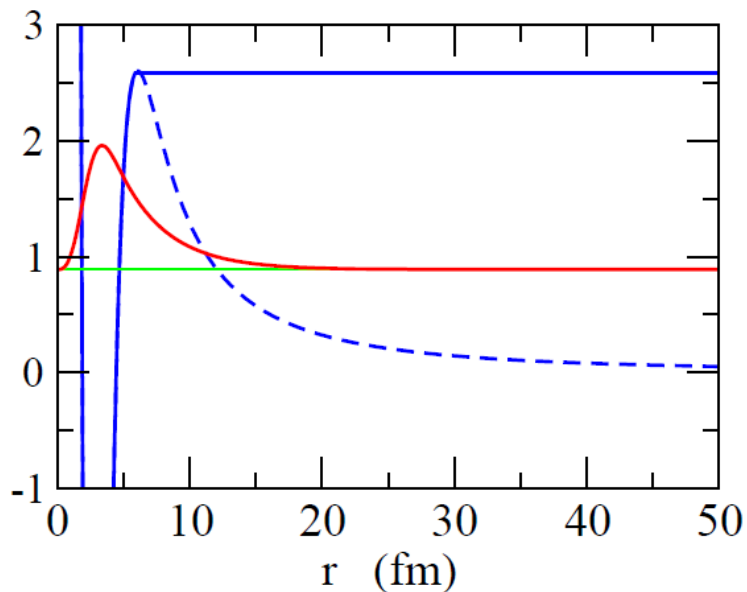
束縛状態 = 無限の寿命



実際には有限の寿命で
障壁をトンネルし崩壊

「準束縛(準安定)状態」

ガモフ状態



トンネル効果で波動関数が
 沁み出し、**外向きの波として崩壊**

$$\begin{aligned}
 u(r) &\sim r^{l+1} && (r \rightarrow 0) \\
 &\rightarrow \mathcal{N} e^{i(kr - l\pi/2)} && (r \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

共鳴幅



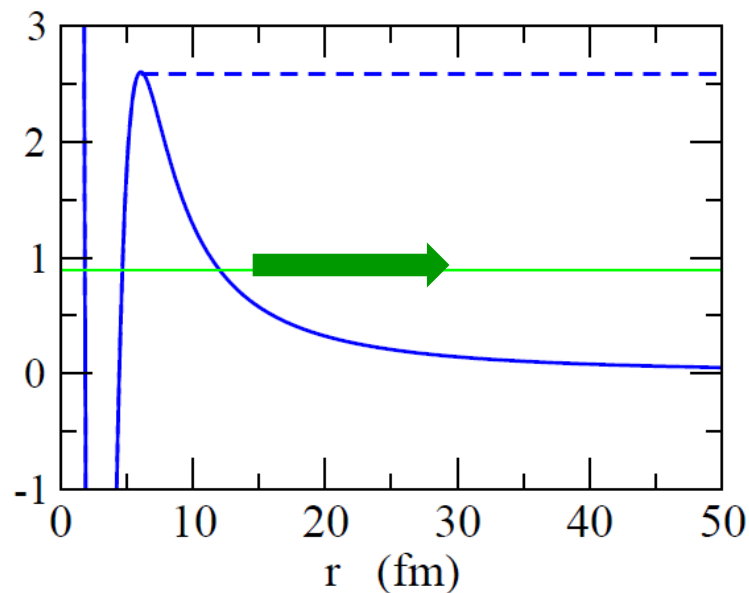
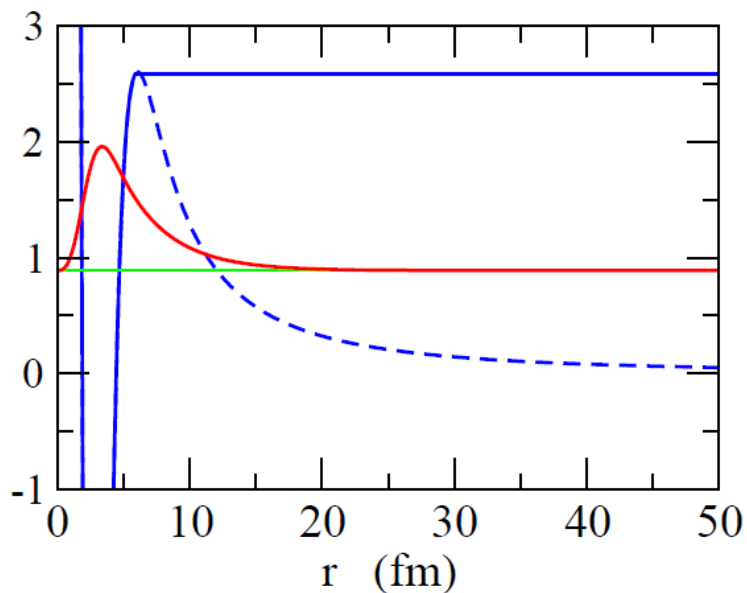
$$E \rightarrow E_R - i \frac{\Gamma}{2}$$



共鳴エネルギー

⇒ エネルギーを複素数にしなければならない:

ガモフ状態



$$E \rightarrow E_R - i\frac{\Gamma}{2}$$

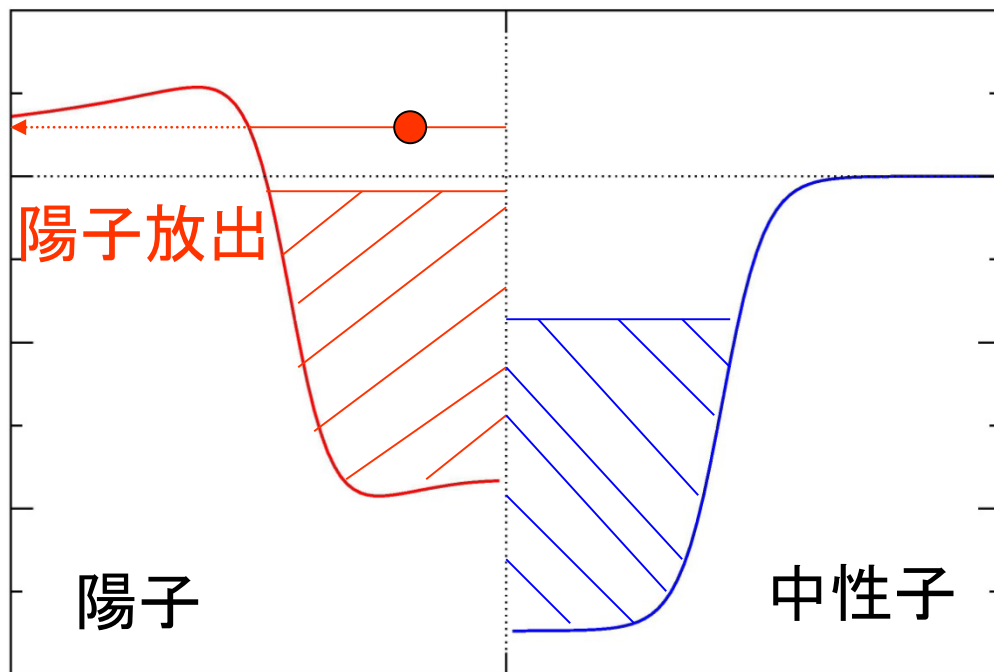
生き残り確率:

$$\begin{aligned} P(t) &= |\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|^2 \\ &= |\langle \psi(0) | e^{-iHt/\hbar} | \psi(0) \rangle|^2 \\ &= |\langle \psi(0) | e^{-i(E_R - i\Gamma/2)t/\hbar} | \psi(0) \rangle|^2 \\ &= e^{-\Gamma t/\hbar} \end{aligned}$$

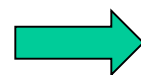
トンネル効果で波動関数が
沁み出し、**外向きの波として崩壊**

\hbar/Γ が準安定状態の寿命

➤ 「非常に幅が狭い共鳴」とはどのような意味ですか？



陽子：クーロン障壁にトラップ
(障壁をトンネルしなければならない)



非常に幅の狭い
(長寿命な)共鳴状態

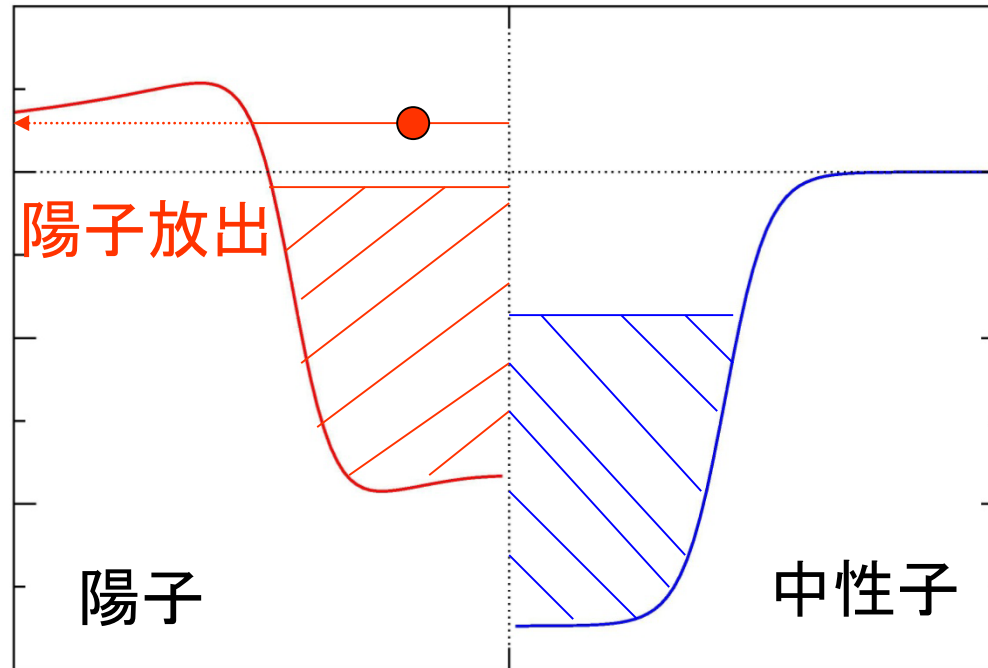
✓ 陽子放出現象の典型的な値：

$$E \sim 1 \text{ MeV}$$

$$\Gamma : 10^{-18} \sim 10^{-22} \text{ MeV}$$

E に比べて Γ が圧倒的に小さい → 「幅が狭い」

➤ 陽子と中性子でポテンシャルの形や高さが違うのは何故?



✓ これは平均場ポテンシャル(例えばウッズ・サクソン型)

- 陽子と中性子で形が違うのはクーロン力のため
- 高さが違うのはクーロンと np 間の力が強いいため

陽子過剰核 → N に比べて Z が大きい

$$n \text{ に対するポテンシャル: } \sim (N-1) * v_{nn} + Z * v_{pn}$$

➤ 陽子放出崩壊の図をもう一度説明して欲しい

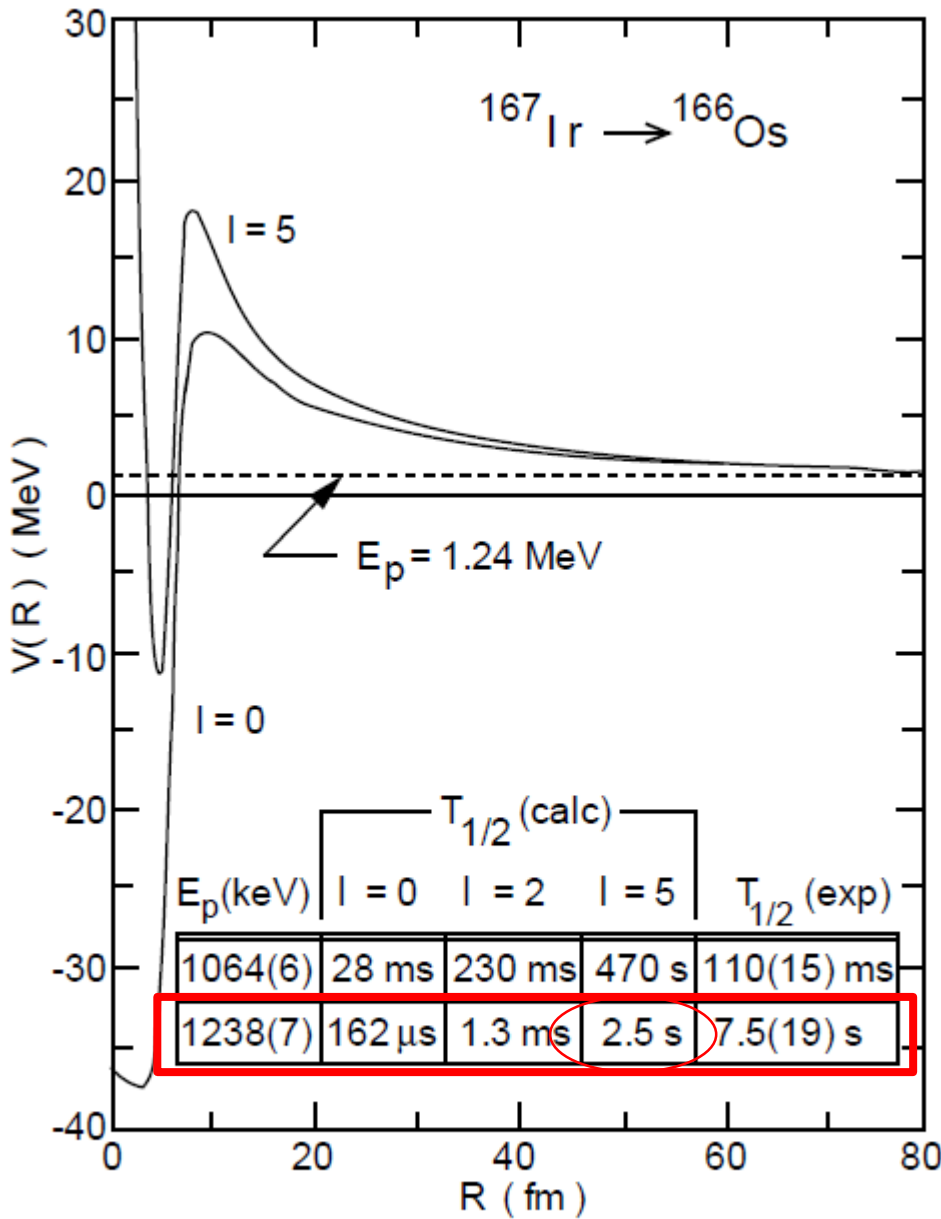
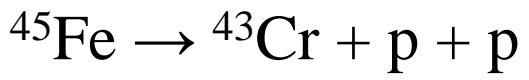
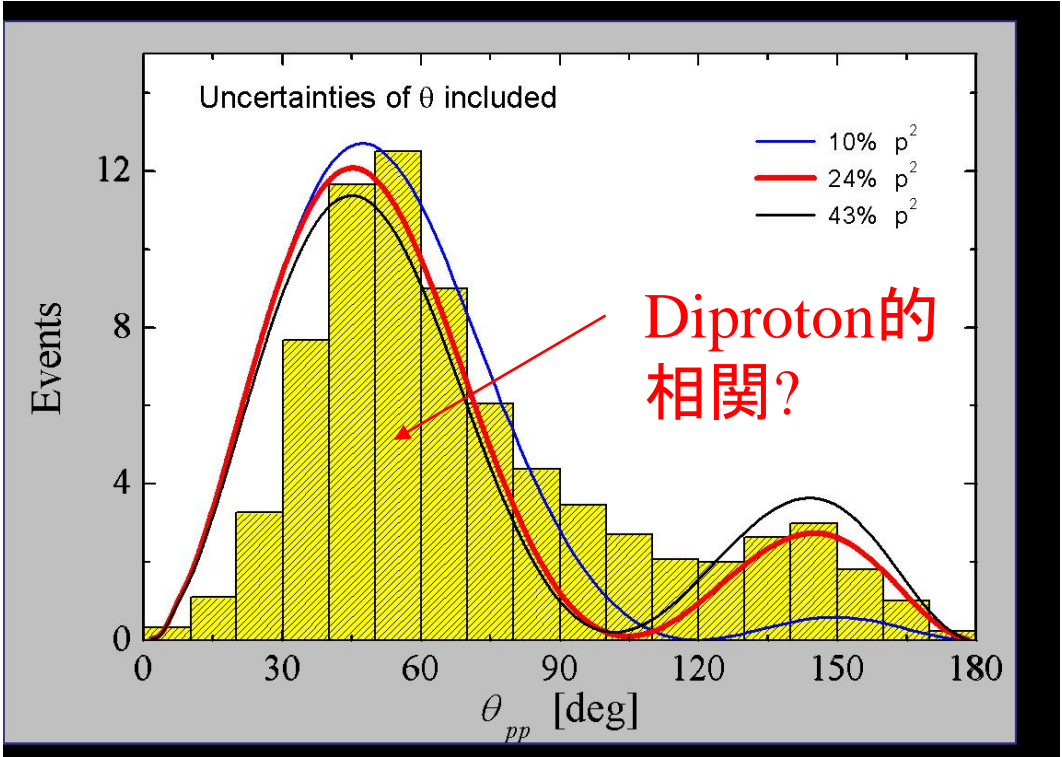


Figure 3 Proton-nucleus potential calculated for the proton emitter ^{167}Ir . The inset shows the proton-decay half-lives calculated using the WKB approximation for three values of the angular momentum ℓ , compared to the experimental values for the ground and isomeric transitions.

➤ 陽子放出崩壊で核子の対相関は影響しているのか？

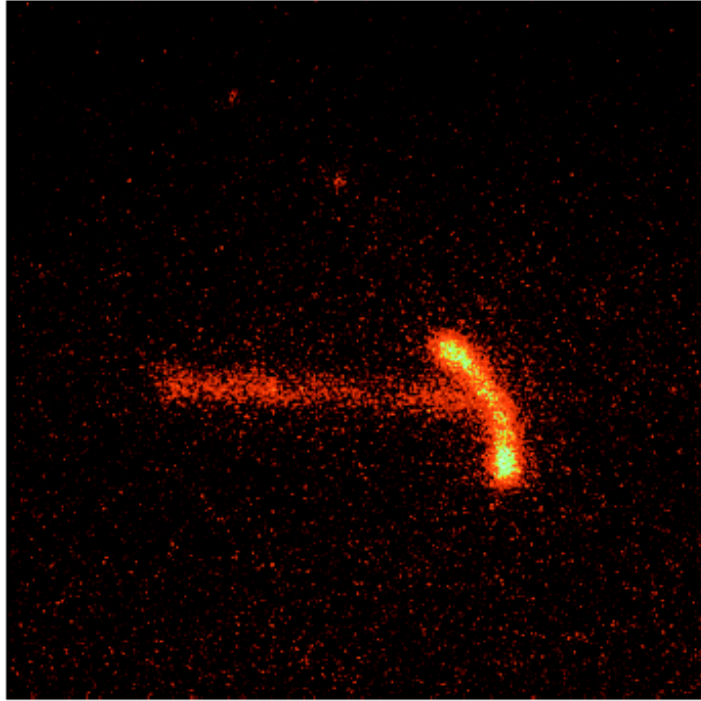
✓ まさにそこが知りたいところ。



角度分布の非対称性
→ 対相関の影響？

ただし、長距離力(クーロン力)の影響を考慮しなければ、結論が出ない

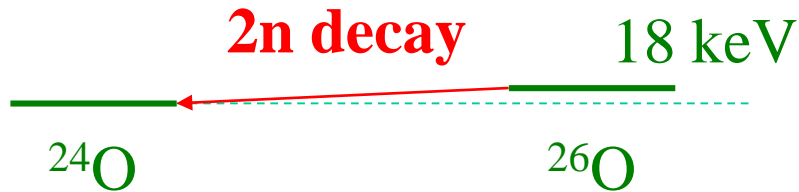
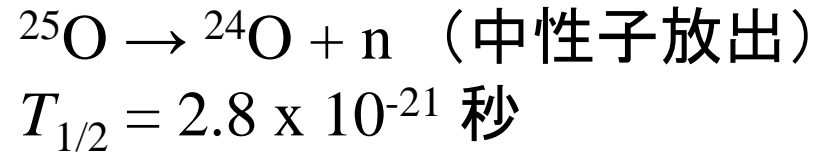
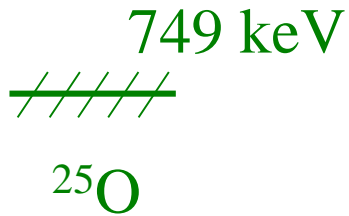
➤ 2陽子が分かれた後の方が明るくなっているのは何故?



K. Miernik et al.,
PRL99 ('07) 192501

✓ 多分速度が遅くなっているから

- 中性子線ドリップ線の向こう側で中性子1つを放出する崩壊が見えないのは遠心力障壁が十分高くないから？
- ✓ 中性子1つを放出する崩壊もあります（誤解を招いたかも）



クラスター崩壊について:

- ^{12}C が出てくるのは3つの α 粒子がまとまって出てくるもの?
- ^{12}C の原子核とは同じもの?
- 2つの α がポンポンと出てくるものはない?

✓ 実験で見つかっているものは

^{14}C , ^{20}O , ^{24}Ne , ^{28}Mg , ^{32}Si , ^{34}Si の放出

α 粒子の倍数にはなっていない

クラスターが原子核の表面付近で出来てから放出(?)

実はそんなに分かっているわけではない

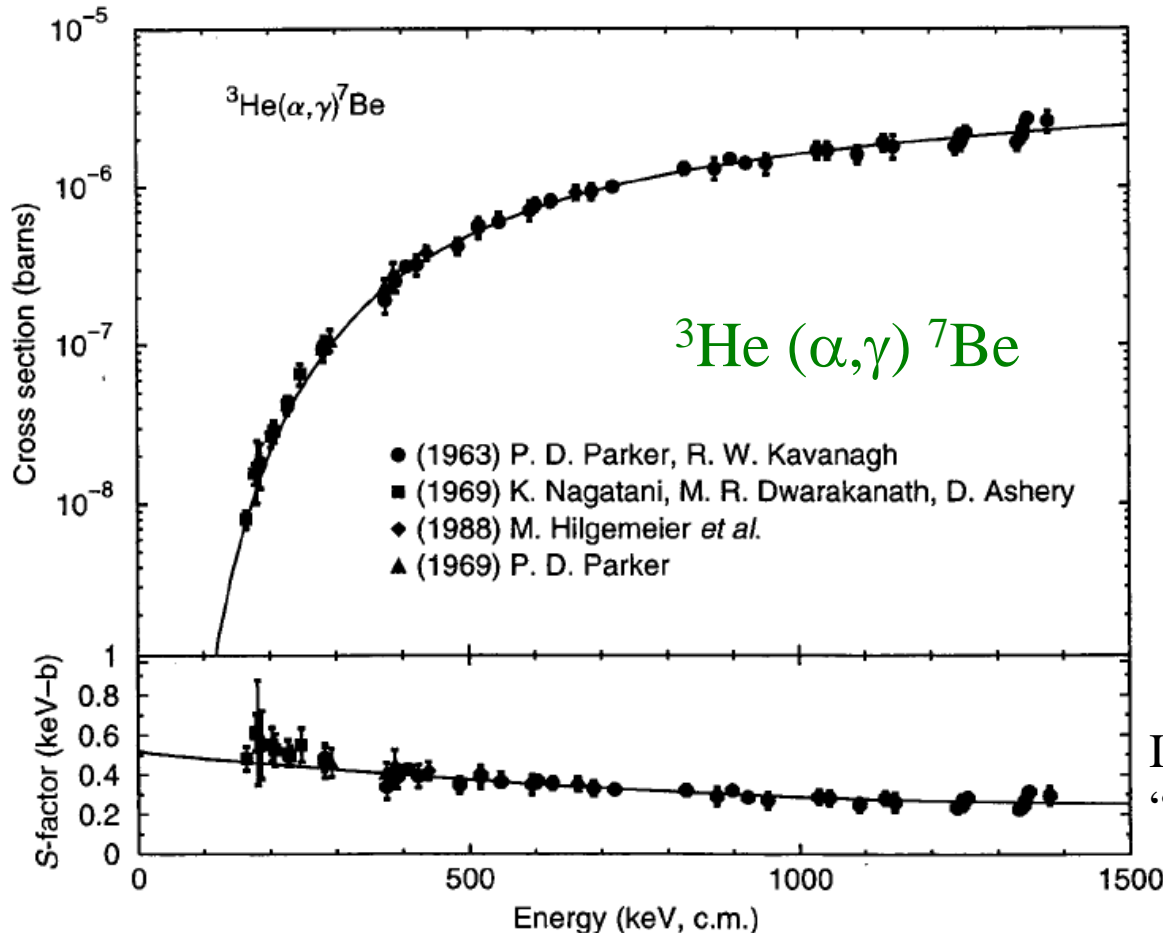
➤ ゾンマーフェルト・パラメーターの天体核反応の関係を詳しく

クーロン・ポテンシャルの透過の確率:

$$P(E) \sim e^{-2\pi\eta(E)}$$

$$\eta(E) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}$$

✓ 天体中での核反応: 低エネルギー → クーロンポテンシャルの透過が主要な役割



Astrophysical S-factor:

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} e^{-2\pi\eta(E)}$$

穏やかな関数にして
低エネルギーへ外挿

I.J. Thompson, F.M. Nunes,
“Nuclear Reactions for Astrophysics”

➤ フェルミの黄金則について解説して欲しい

✓ 実は前々回に解説しています

時間に依存する摂動論

$$H = H_0 + \underbrace{V(t)}_{\text{外場}}$$

$$V(t) = \hat{F} e^{\mp i\omega t} \quad \text{のとき、}$$

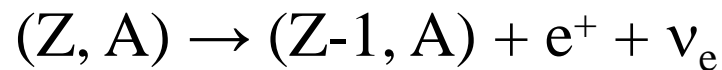
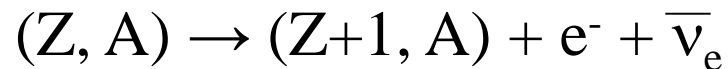
外場 $V(t)$ による状態 $n \rightarrow k$ への遷移確率:

$$P_{n \rightarrow k} \sim \frac{2\pi}{\hbar} t |\langle \phi_k | \hat{F} | \phi_n \rangle|^2 \delta(\epsilon_k - \epsilon_n \mp \hbar\omega)$$

(フェルミの黄金則)

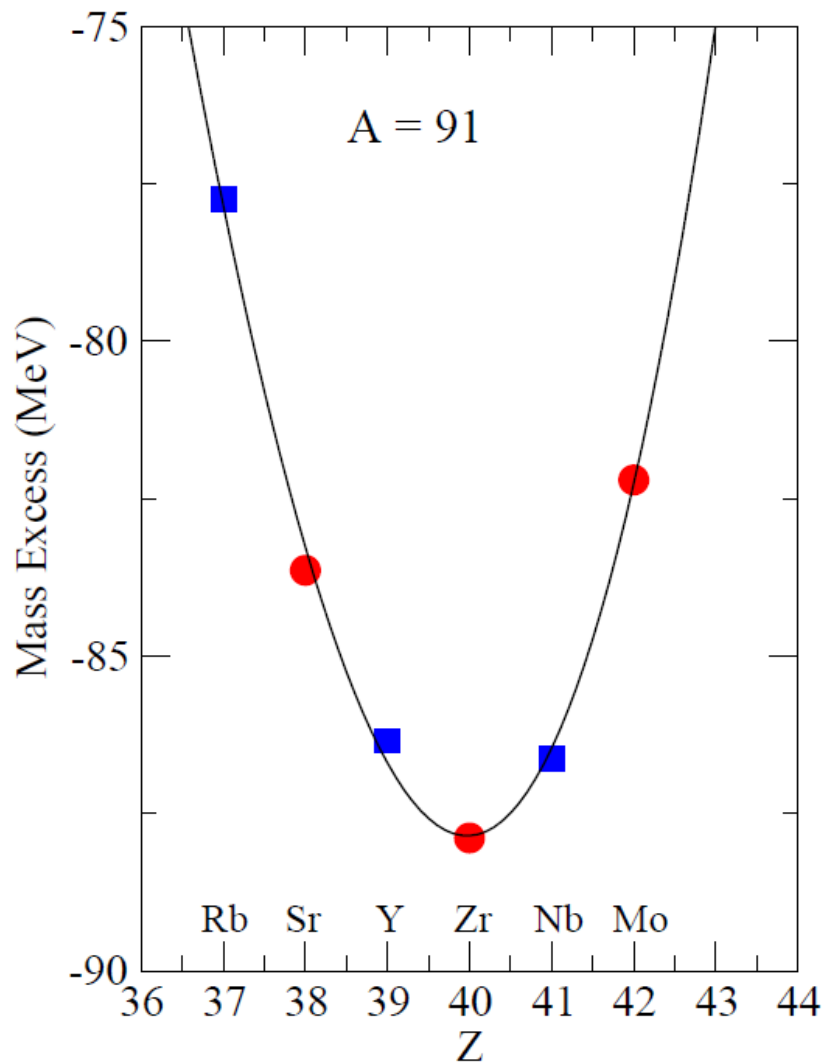
どのように使うかは、今日の講義(ベータ崩壊)の中で解説します。

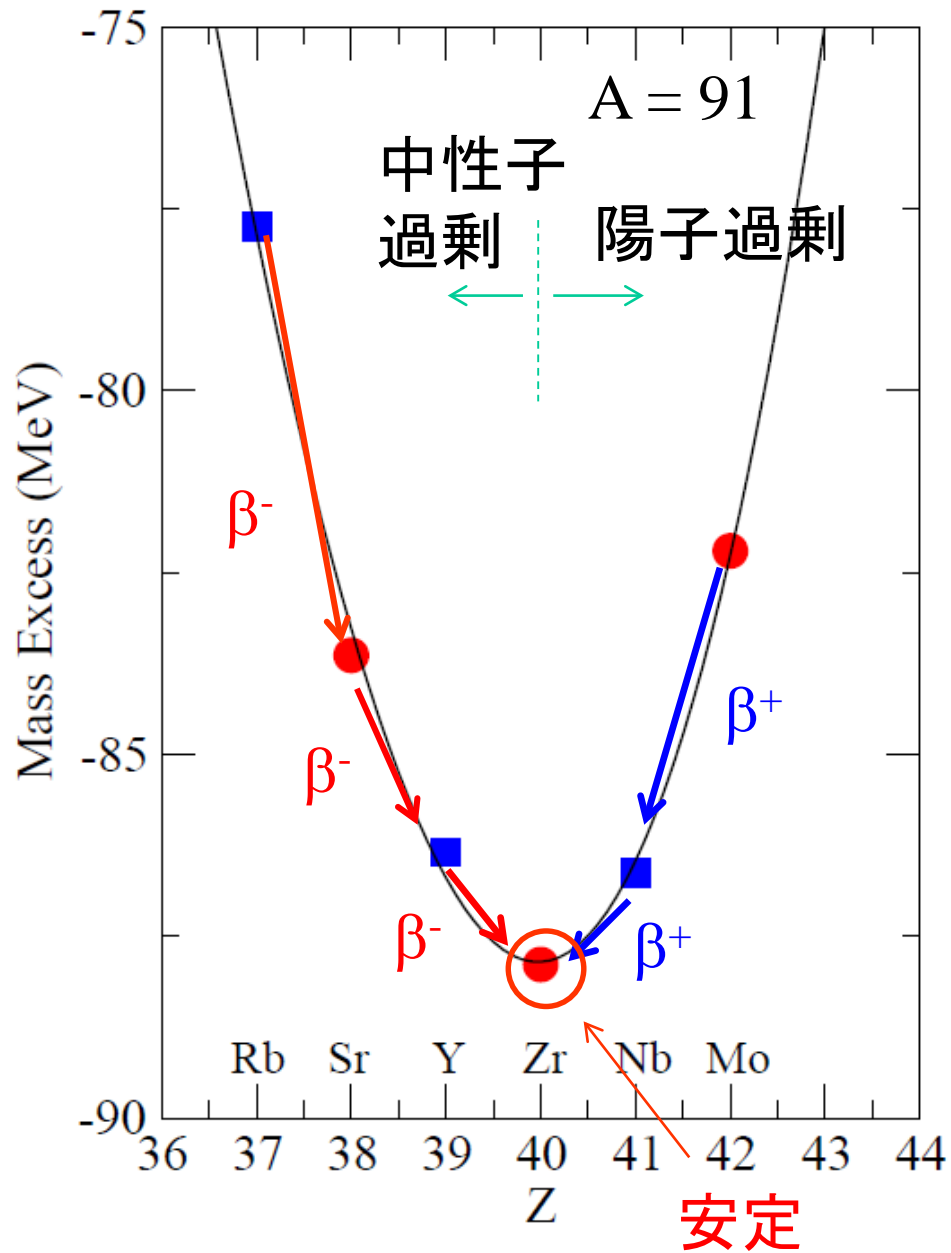
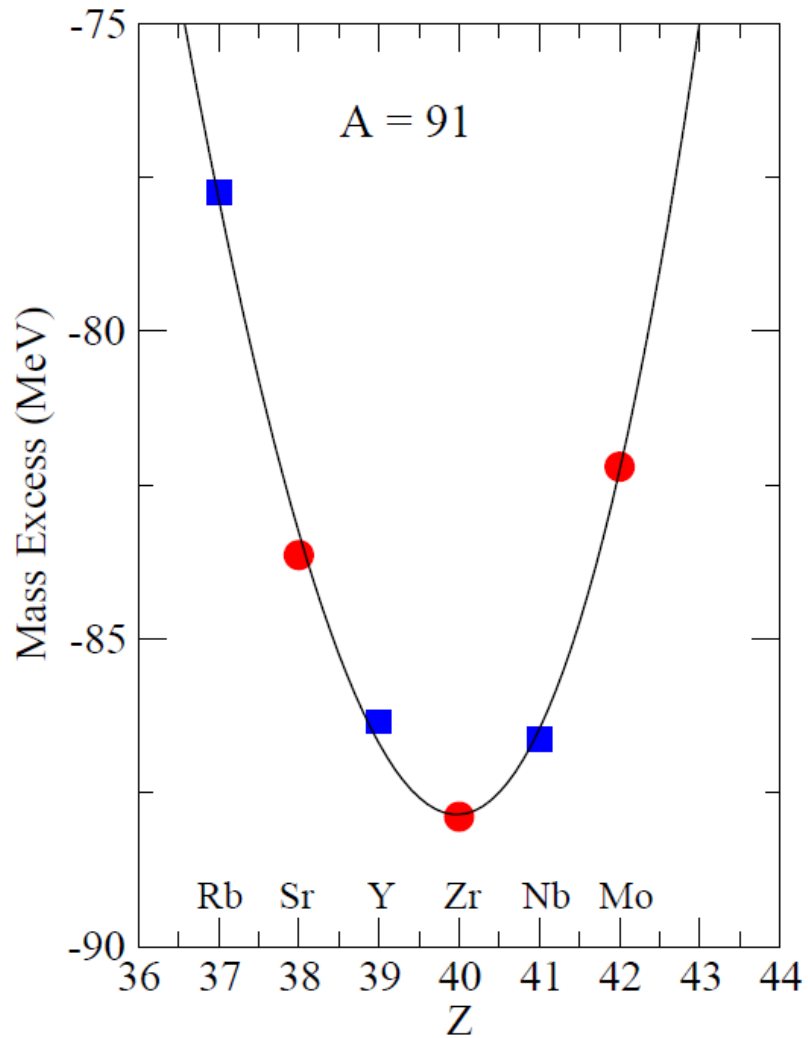
β崩壊について



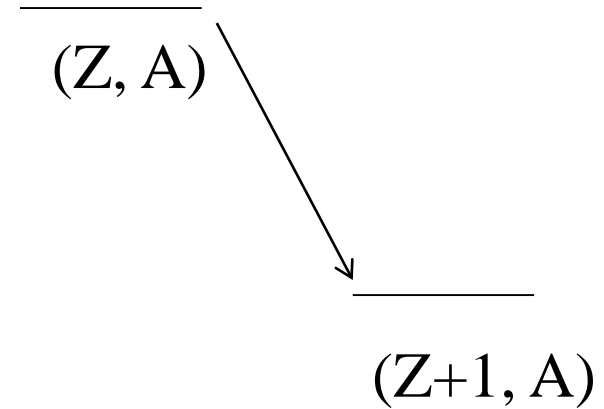
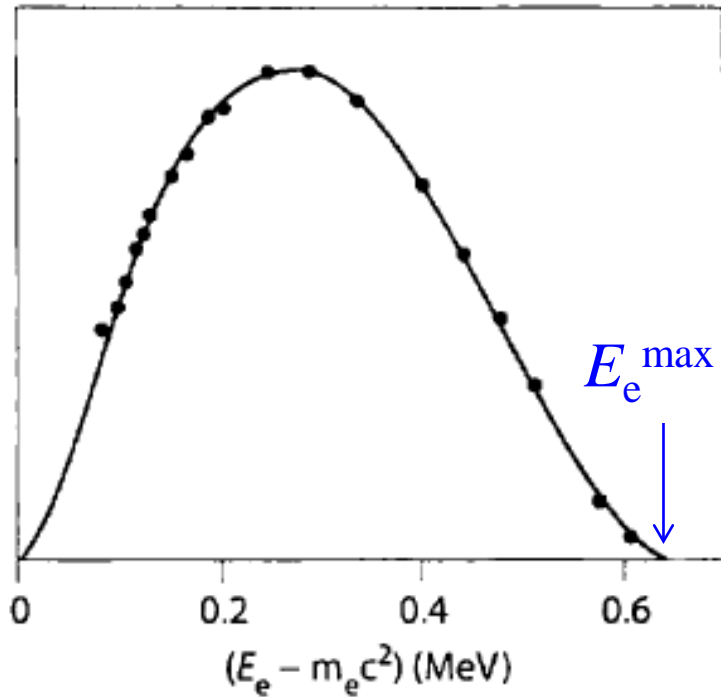
原子核の質量数 A は変わらない

→ A を一定にしてエネルギー変化をみる





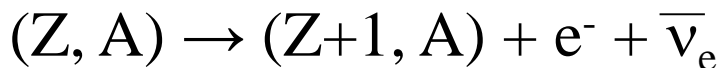
β線スペクトルとニュートリノ



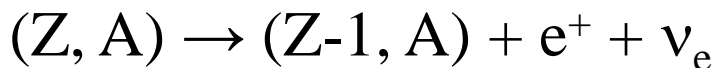
$$E_e^{\max} \sim M(Z, A)c^2 - M(Z+1, A)c^2 - m_e c^2$$

連続分布 → 3体崩壊を示唆

➡️ パウリ: ニュートリノを仮定(1931)

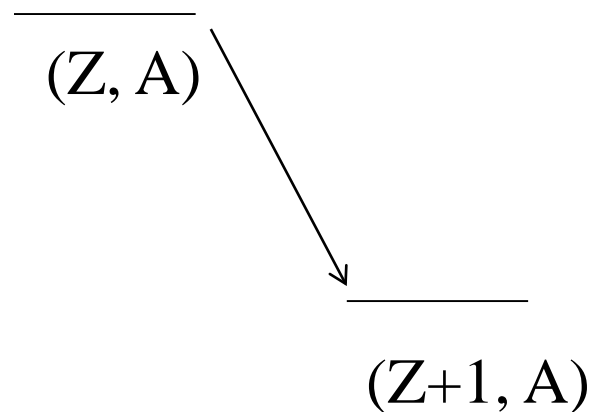
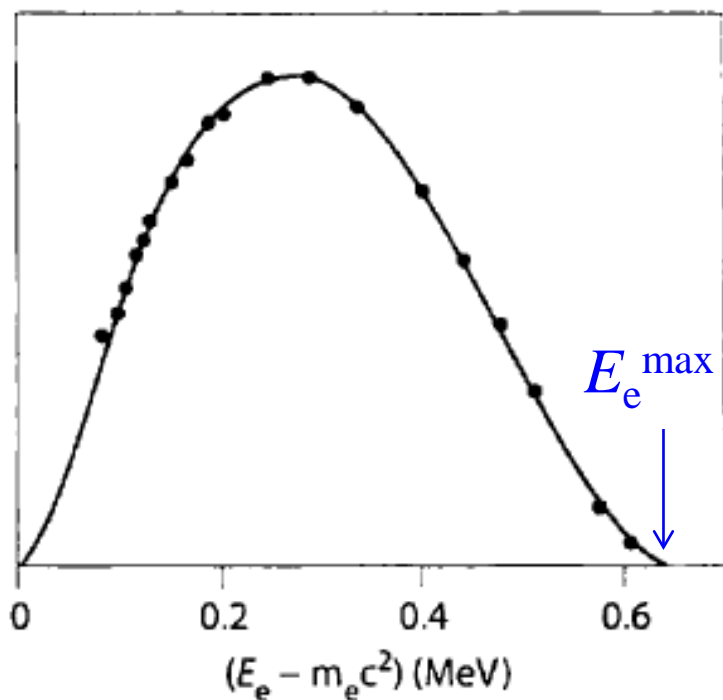
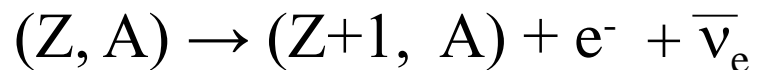


β⁻ 崩壊



β⁺ 崩壊

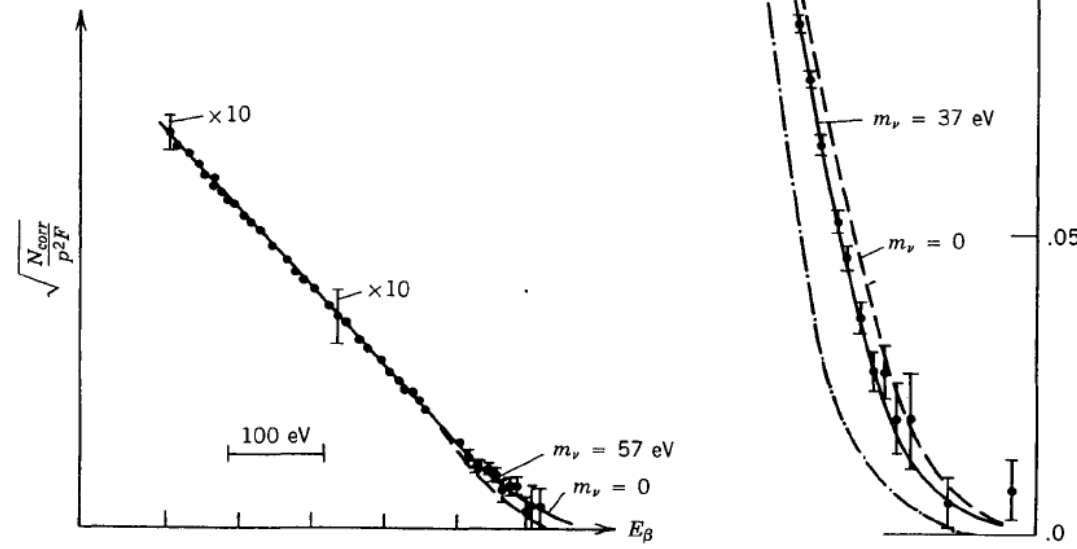
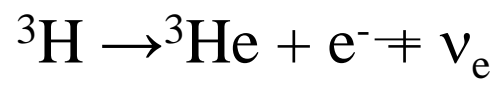
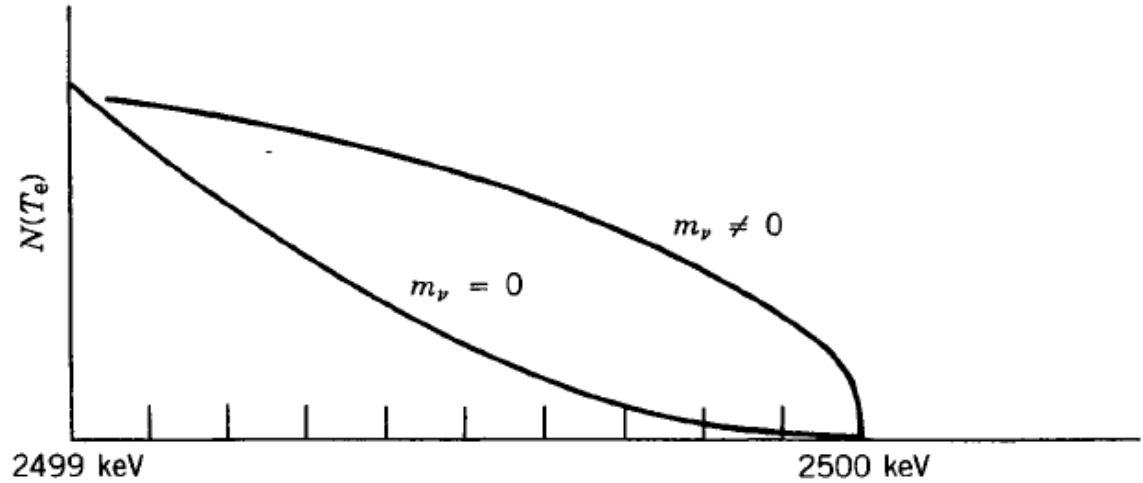
β線スペクトルとニュートリノ



$$E_e^{\max} = M(Z, A)c^2 - M(Z+1, A)c^2 - m_e c^2 - m_\nu c^2$$

崩壊スペクトルからニュートリノの質量を引き出せるか？

崩壊スペクトルからニュートリノの質量を引き出せるか？



この試みは今も継続中
(KATRINプロジェクト:
カールスルーエ)

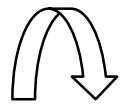
cf. KamLAND-ZEN に
よる upper limit:
61-165 meV
[PRL117,082503 ('16)]

図は K.S. Krane, "Introductory Nuclear Physics" より

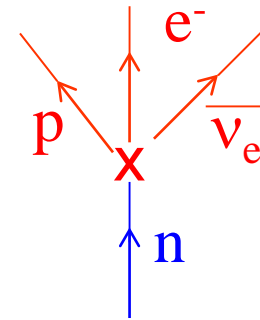
β 崩壊のフェルミ理論 (非相対論的、スピン無し模型)

$$H_\beta = g_F \int [\psi_p^\dagger(\mathbf{r})\psi_n(\mathbf{r})][\psi_e^\dagger(\mathbf{r})\psi_{\nu_e}(\mathbf{r})] d\mathbf{r} + h.c.$$

$\psi_a^\dagger(\mathbf{r})$ 場所 r に粒子 a を生成
反粒子 \bar{a} を消滅 } させる
オペレーター



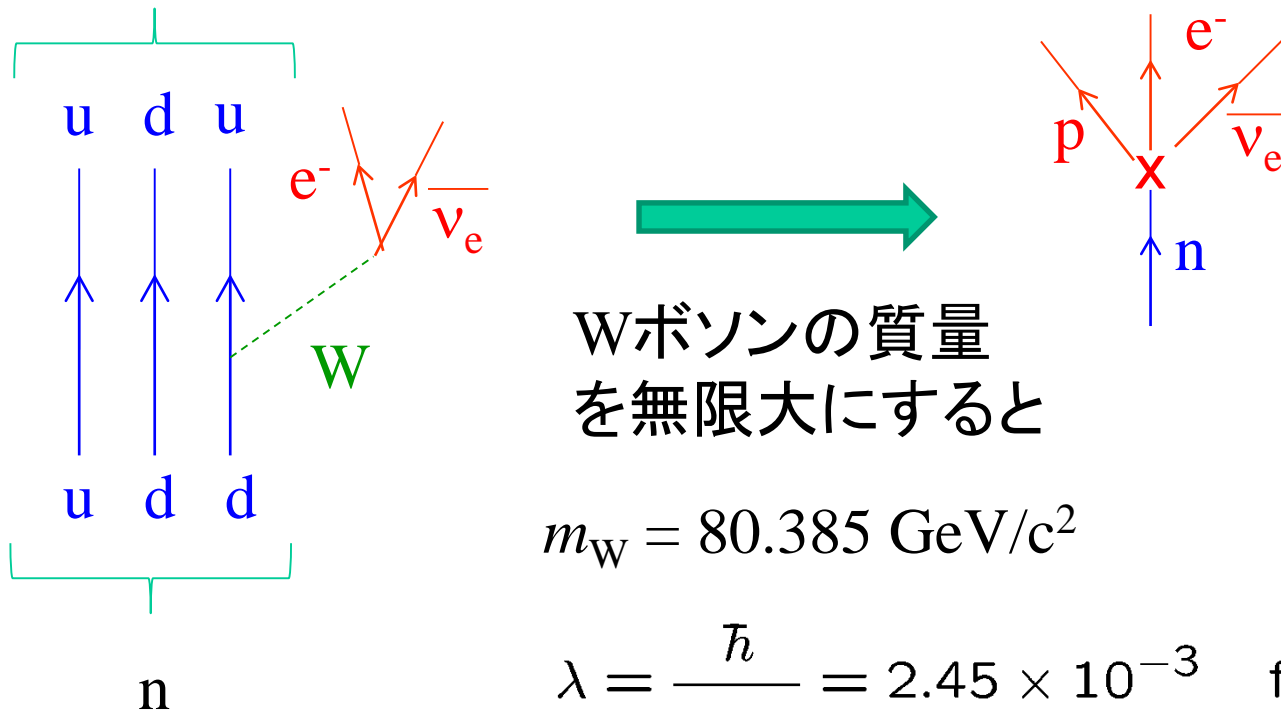
$\psi_e^\dagger\psi_{\nu_e}$: $e^- \bar{\nu}_e$ を生成



β崩壊のフェルミ理論 (非相対論的、スピン無し模型)

$$H_\beta = g_F \int [\psi_p^\dagger(\mathbf{r})\psi_n(\mathbf{r})][\psi_e^\dagger(\mathbf{r})\psi_{\nu_e}(\mathbf{r})] d\mathbf{r} + h.c.$$

$\psi_a^\dagger(\mathbf{r})$ 場所 r に粒子 a を生成
 反粒子 \bar{a} を消滅 } させる
 オペレーター



Wボソンの質量
 を無限大にすると

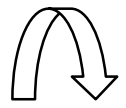
$$m_W = 80.385 \text{ GeV}/c^2$$

$$\lambda = \frac{\hbar}{m_W c} = 2.45 \times 10^{-3} \text{ fm}$$

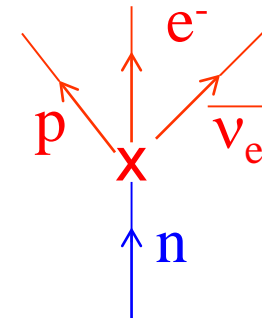
β 崩壊のフェルミ理論 (非相対論的、スピン無し模型)

$$H_\beta = g_F \int [\psi_p^\dagger(\mathbf{r})\psi_n(\mathbf{r})][\psi_e^\dagger(\mathbf{r})\psi_{\nu_e}(\mathbf{r})] d\mathbf{r} + h.c.$$

$\psi_a^\dagger(\mathbf{r})$ 場所 r に粒子 a を生成
反粒子 \bar{a} を消滅 } させる
オペレーター



$\psi_e^\dagger\psi_{\nu_e}$: $e^- \bar{\nu}_e$ を生成



フェルミの Golden Rule:


$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\text{final states}} |\langle f | H_\beta | i \rangle|^2$$

$$(Z, A) \rightarrow (Z+1, A) + e^- + \bar{\nu}_e$$

始状態: $|i\rangle = |\Psi_i\rangle$ (原子核の多体波動関数)

$$\text{終状態: } |f\rangle = |\Psi_f\rangle \cdot \underbrace{e^{i\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{r} / \hbar}}_{\text{電子}} \cdot \underbrace{e^{i\mathbf{p}_{\bar{\nu}_e} \cdot \mathbf{r} / \hbar}}_{\text{反ニュートリノ}}$$


電子 反ニュートリノ


$$\langle f | H_\beta | i \rangle = g_F \int [\Psi_f^*(\mathbf{r}) \tau_+ \Psi_i(\mathbf{r})] e^{-i(\mathbf{p}_e + \mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}) \cdot \mathbf{r} / \hbar} d\mathbf{r}$$

$n \rightarrow p$

$$e^{-i(\mathbf{p}_e + \mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}) \cdot \mathbf{r} / \hbar} \sim \underline{1} - i(\mathbf{p}_e + \mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}) \cdot \mathbf{r} / \hbar + \dots$$

許容転移 (allowed transition)


$$\langle f | H_\beta | i \rangle \sim g_F \int [\Psi_f^*(\mathbf{r}) \tau_+ \Psi_i(\mathbf{r})] d\mathbf{r}$$

終状態の数

$$\sum_{\text{final states}} = \int \frac{d\mathbf{p}_e}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d\mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi\hbar)^3} \delta(E_e + E_{\bar{\nu}_e} - Q)$$

エネルギー保存

- ✓ β 崩壊のエネルギー Q を電子と反ニュートリノで分配
- ✓ 電子、反ニュートリノそれぞれの可能な状態をすべて足す
- ✓ ただし、エネルギー保存則を満たす状態のみ足すという制限をつける

$$\begin{aligned} \sum_{\text{final state}} &= \dots \\ &= \frac{(4\pi)^2}{(2\pi\hbar)^6} \int dE_e \frac{E_e \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4}}{c^6} \cdot (Q - E_e)^2 \end{aligned}$$

終状態の数

$$\begin{aligned} \sum_{\text{final states}} &= \int \frac{d\mathbf{p}_e}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d\mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi\hbar)^3} \delta(E_e + E_{\bar{\nu}_e} - Q) \\ &= \frac{(4\pi)^2}{(2\pi\hbar)^6} \int p_e^2 dp_e p_{\bar{\nu}_e}^2 dp_{\bar{\nu}_e} \delta(E_e + cp_{\bar{\nu}_e} - Q) \\ &\quad p_e = \frac{1}{c} \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4} \rightarrow dp_e = \frac{E_e dE_e}{c \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4}} \\ &= \frac{(4\pi)^2}{(2\pi\hbar)^6} \int \frac{E_e^2 - m_e^2 c^4}{c^2} \cdot \frac{E_e dE_e}{c \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4}} \cdot \frac{(Q - E_e)^2}{c^3} \\ &= \frac{(4\pi)^2}{(2\pi\hbar)^6} \int dE_e \frac{E_e \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4}}{c^6} \cdot (Q - E_e)^2 \end{aligned}$$

終状態の数

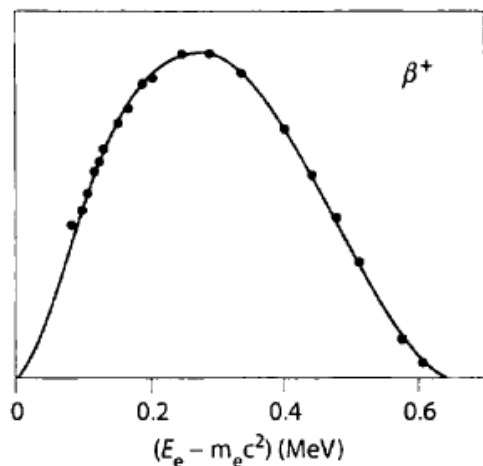
$$\sum_{\text{final states}} = \frac{(4\pi)^2}{(2\pi\hbar)^6} \int dE_e \frac{E_e \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4}}{c^6} \cdot (Q - E_e)^2$$



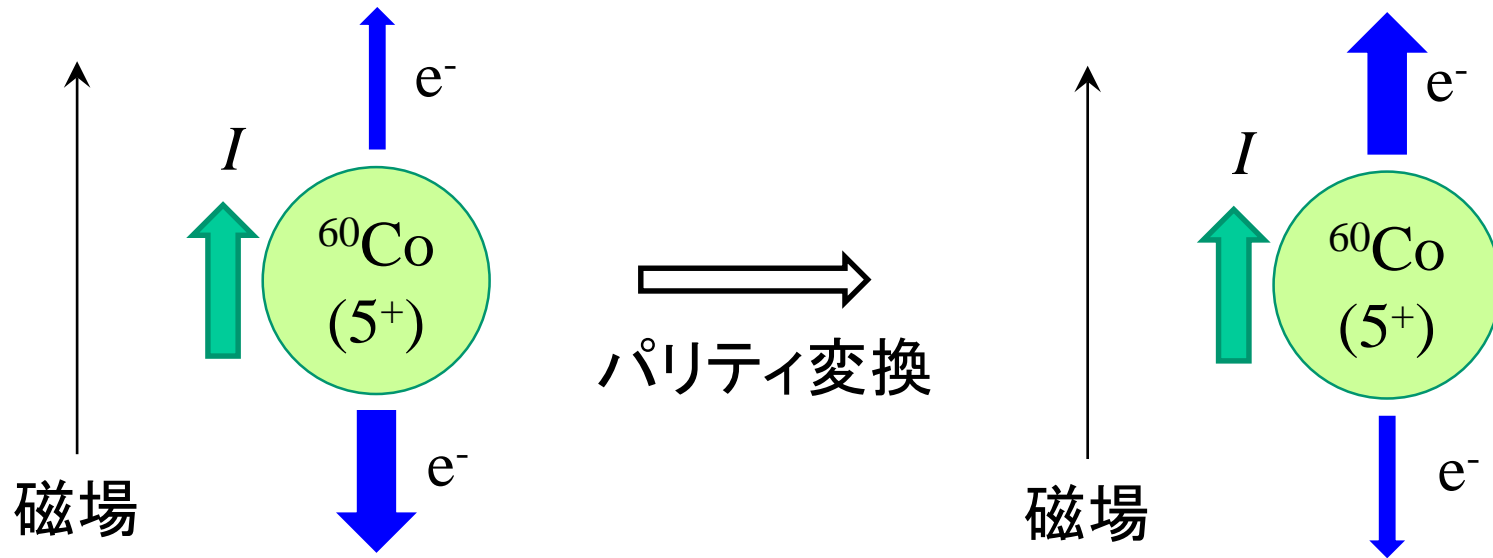
$$\lambda = \int dE_e \frac{d\lambda}{dE_e}$$

$$\frac{d\lambda}{dE_e} \propto |\langle f | H_\beta | i \rangle|^2 \cdot \frac{E_e \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4} (Q - E_e)^2}{c^6}$$

電子のエネルギー分布



パリティ非保存



電子の放出方向に偏りがあれば、パリティ変換で現象が変わってしまう(パリティ非保存)

(パリティの固有状態になっているなら、電子の放出方向に偏りはないはず。)

cf. 一様磁場: $B = \nabla \times A; \quad A = -\frac{1}{2}r \times B$

Wuの実験 (1957)

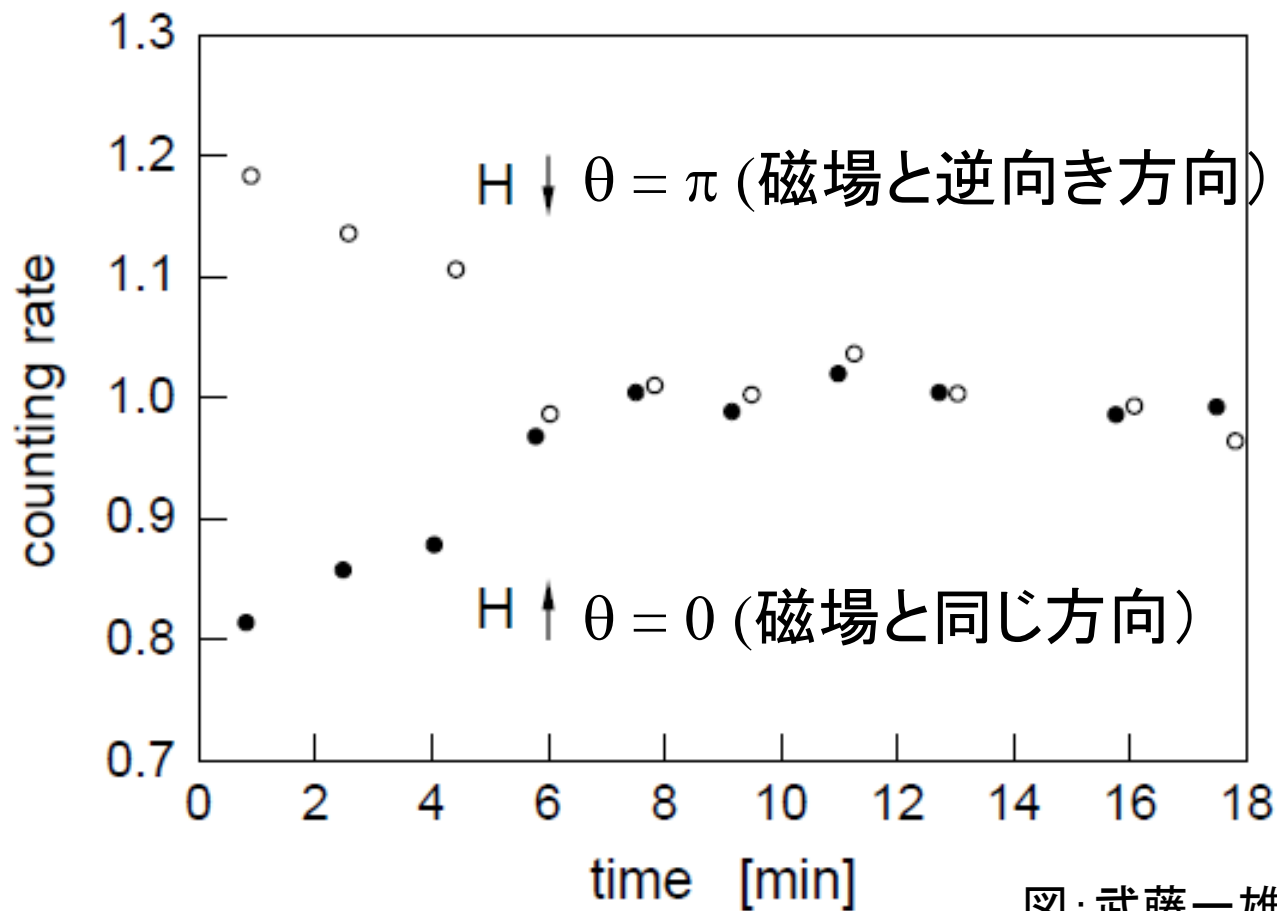
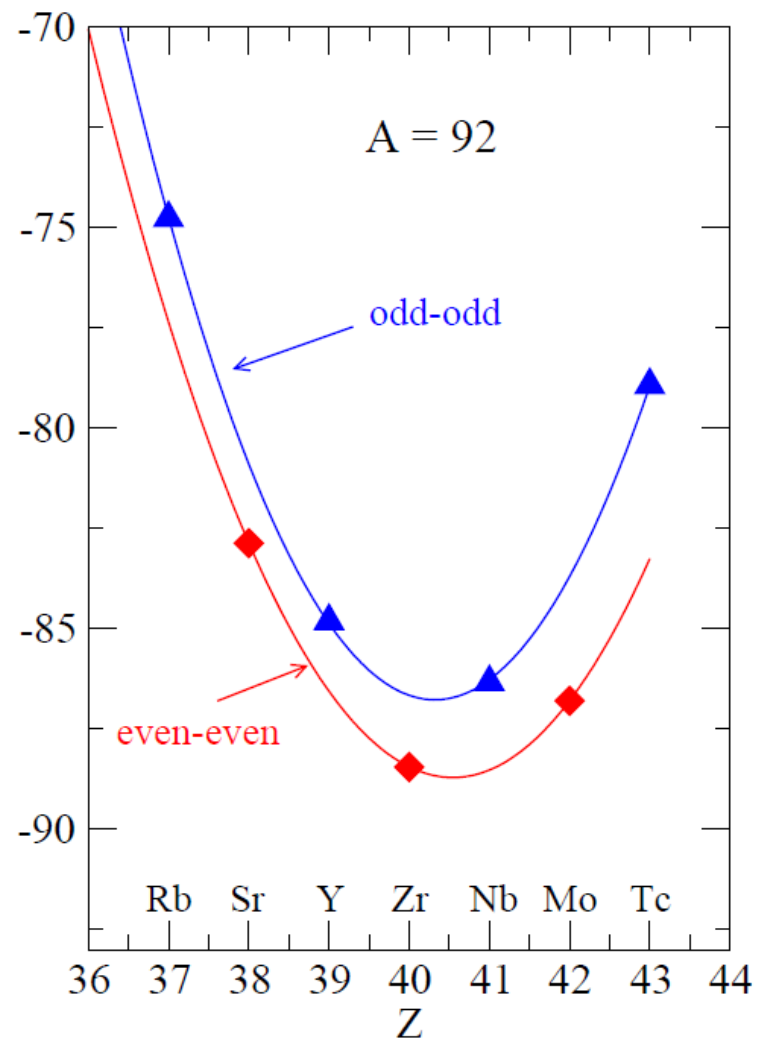
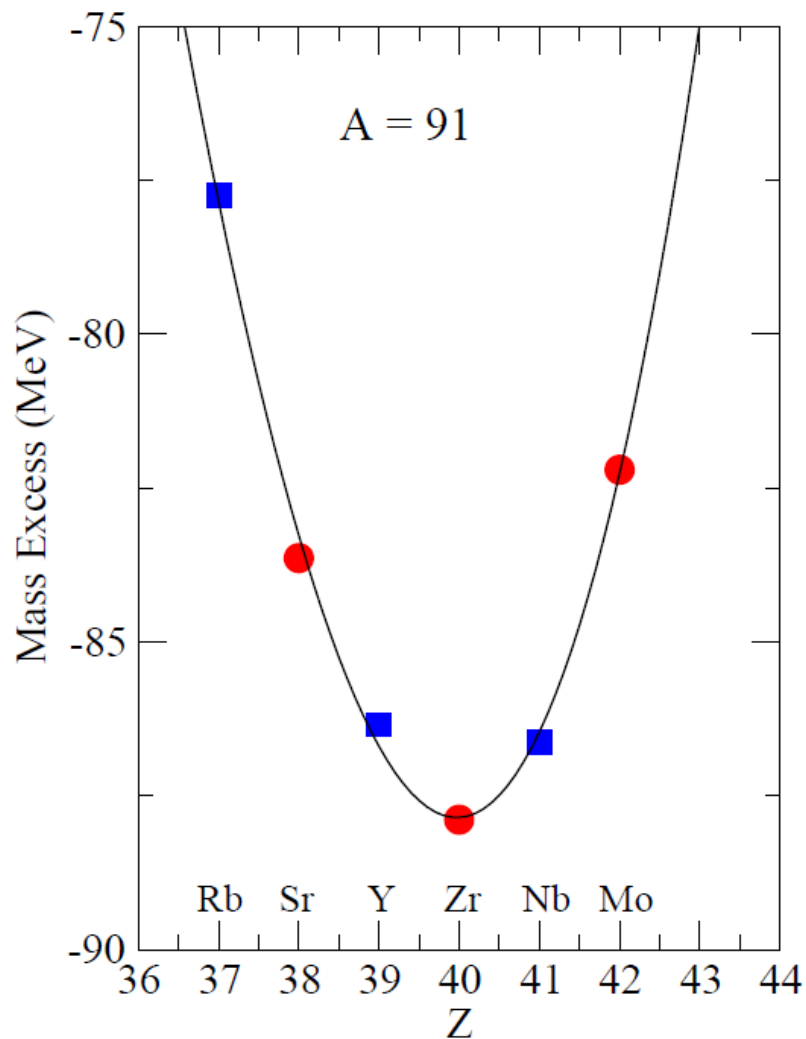
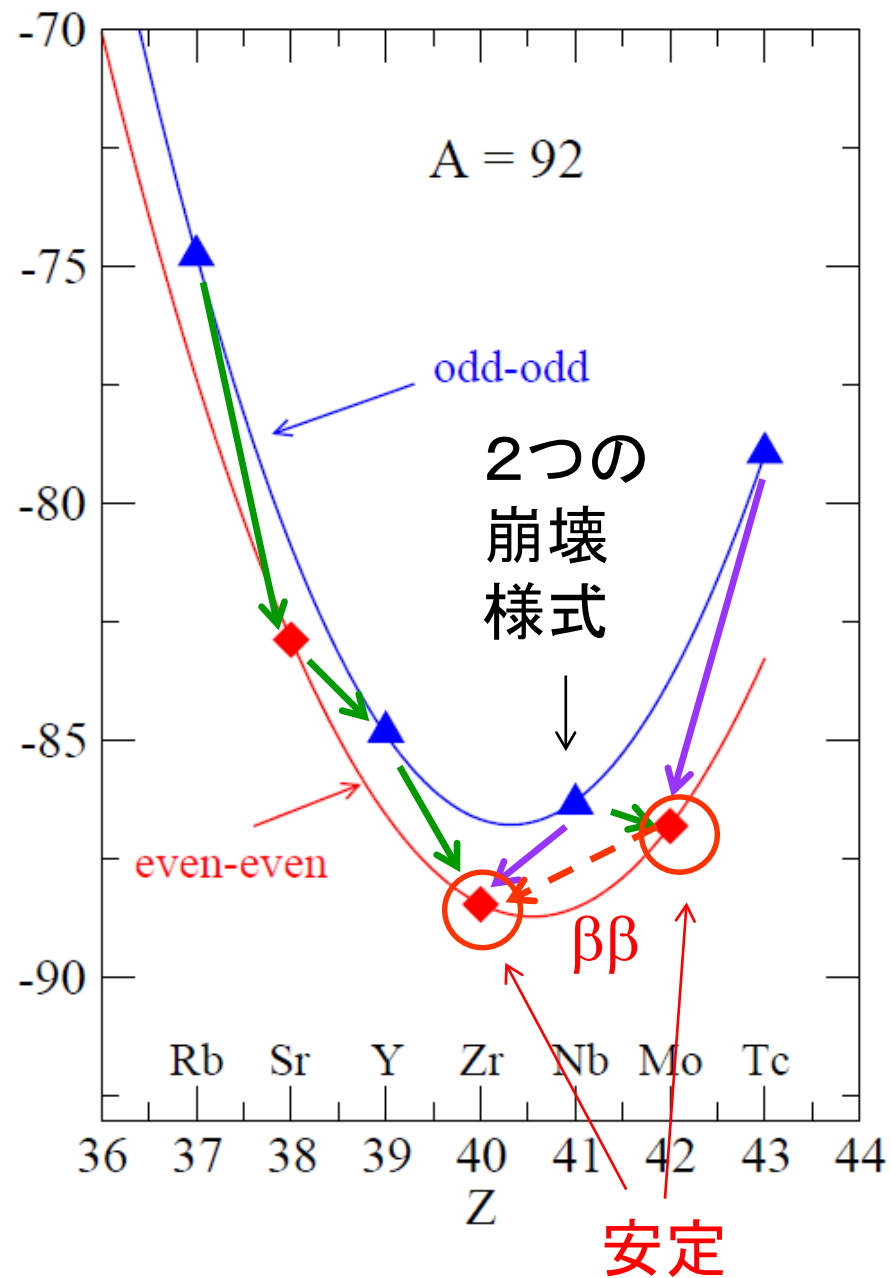
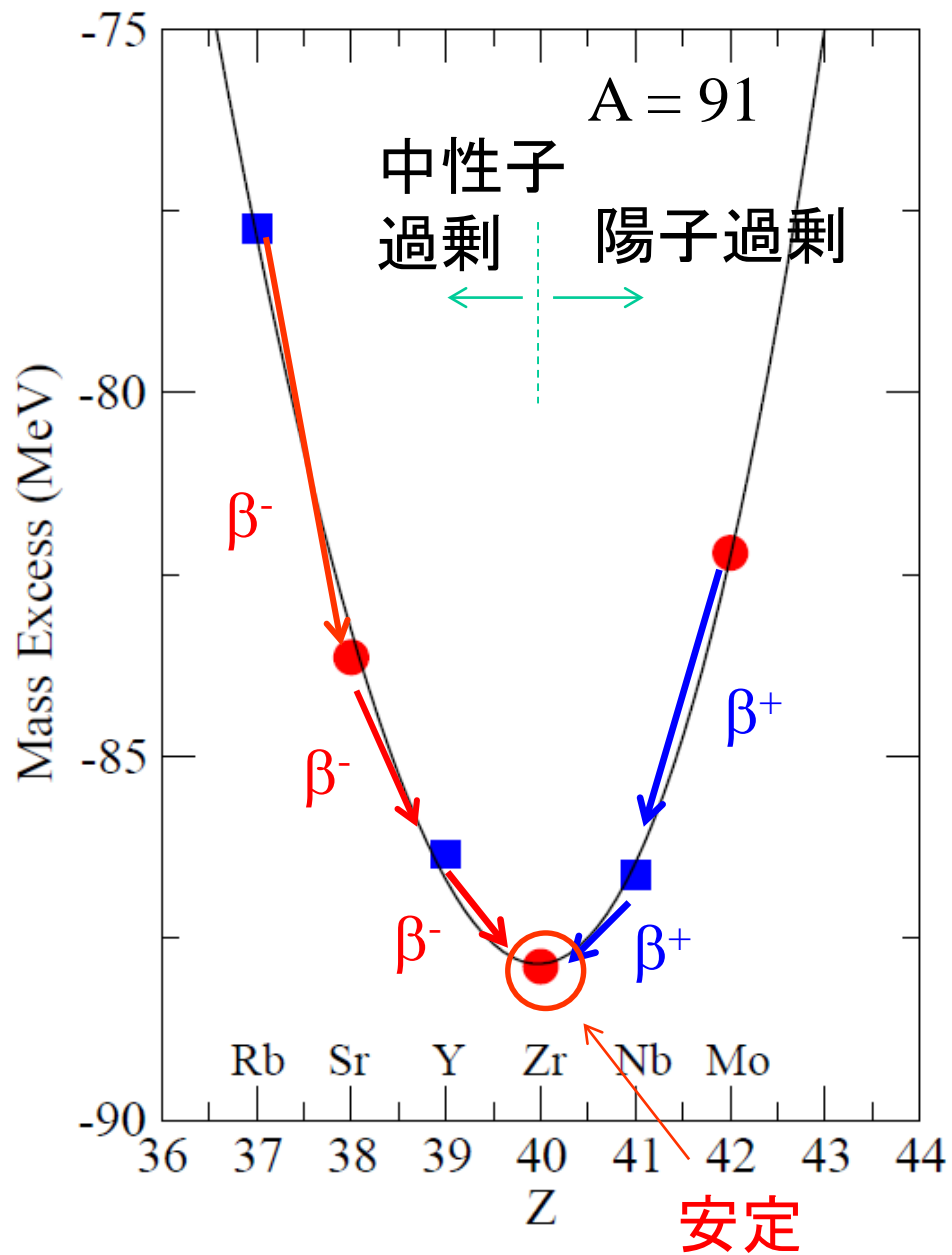


図: 武藤一雄氏講義録より

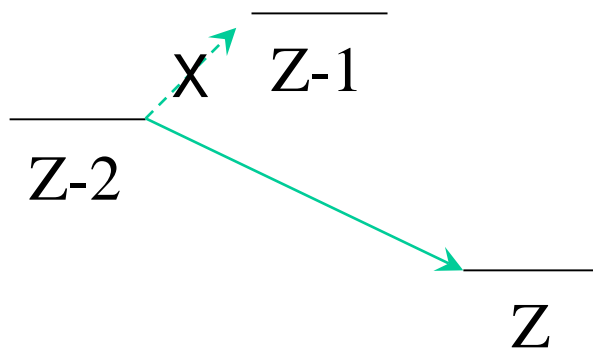
電子の放出方向に差 → パリティ非保存

二重 β 崩壊

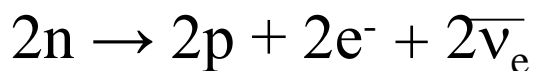




2種類の2重β崩壊

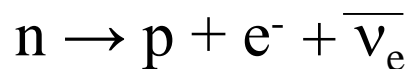


✓ $2\nu\beta\beta$

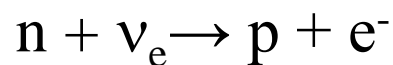


β崩壊が2回おこる

✓ $0\nu\beta\beta$

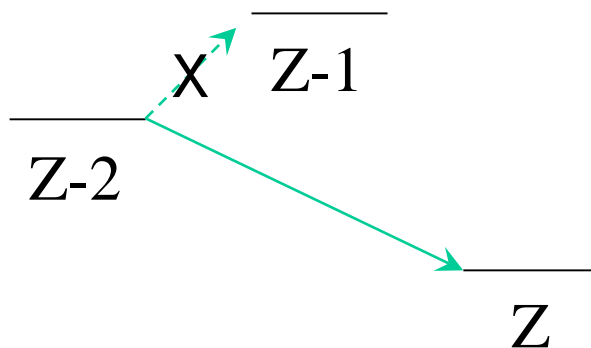


$\nu_e = \bar{\nu}_e$ だったら (マヨラナ・ニュートリノ)

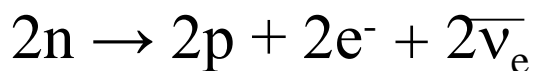


(正味のプロセス) $2n \rightarrow 2p + 2e^-$ (レプトン数の非保存)

2種類の2重β崩壊

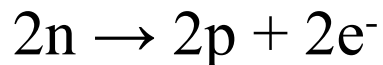


✓ $2\nu\beta\beta$



β崩壊が2回おこる

✓ $0\nu\beta\beta$



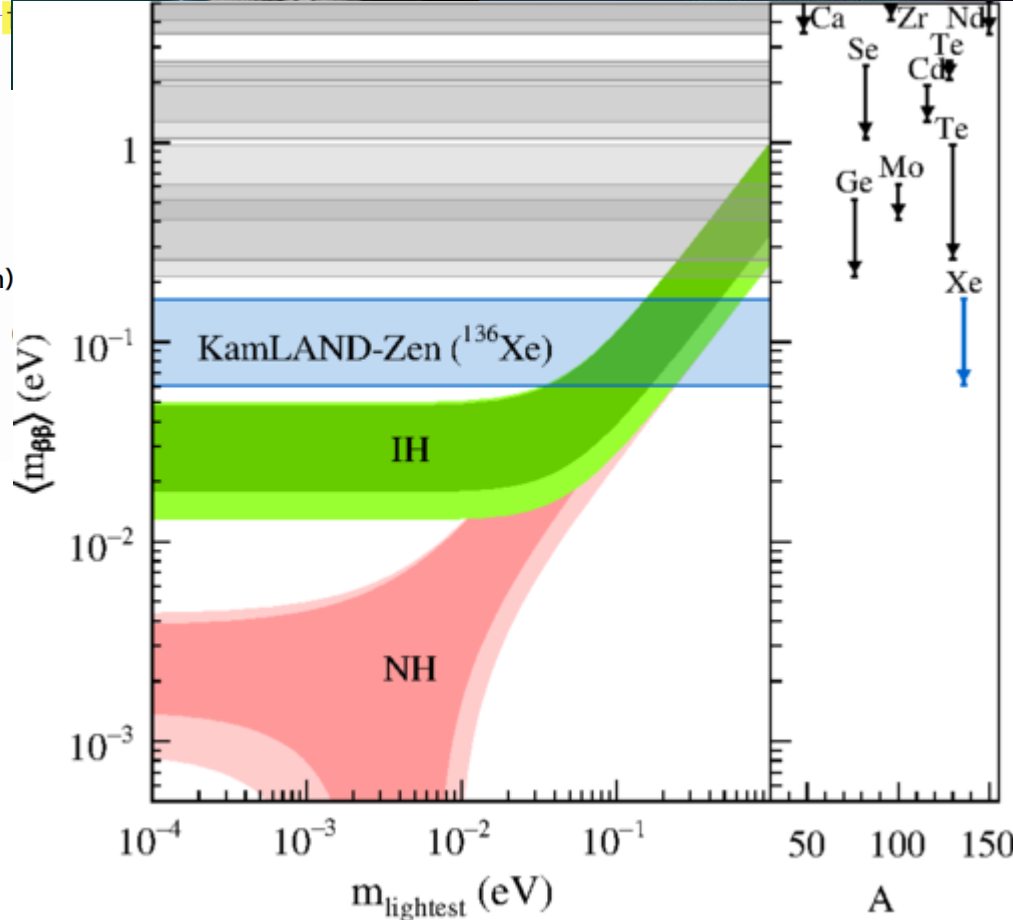
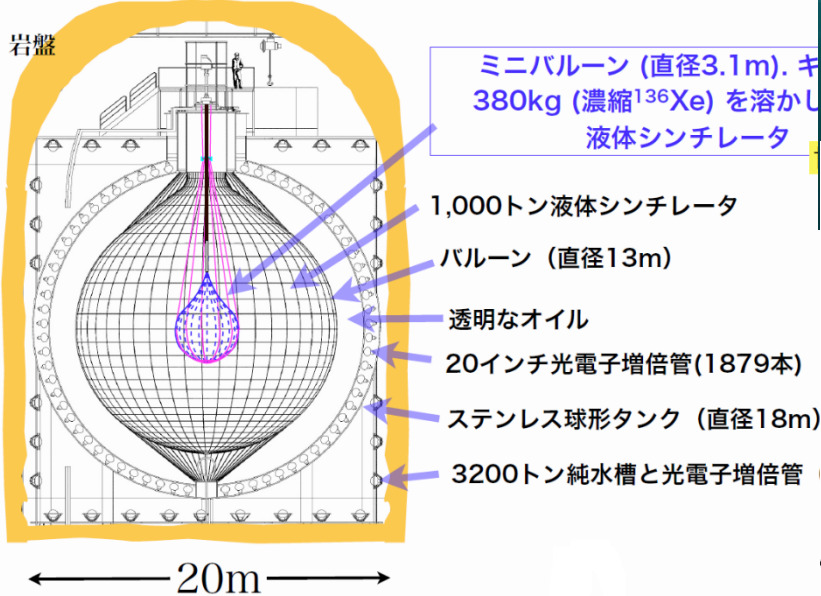
$$\left[T_{1/2}^{(0\nu)} \right]^{-1} = G_{0\nu} |M_{0\nu}|^2 \langle m_\nu \rangle^2$$

ただし、核行列要素 $M_{0\nu}$ も重要

カムランド禅による ^{136}Xe 核の $0\nu\beta\beta$ の探索

カムランド禅検出器

岐阜県神岡鉱山の地下1,000メートル



A. Gando et al., PRL117, 082503 ('16)

$$\langle m_{\beta\beta} \rangle \leq 61 - 165 \text{ meV}$$

* 幅があるのは核行列要素の不定性のため