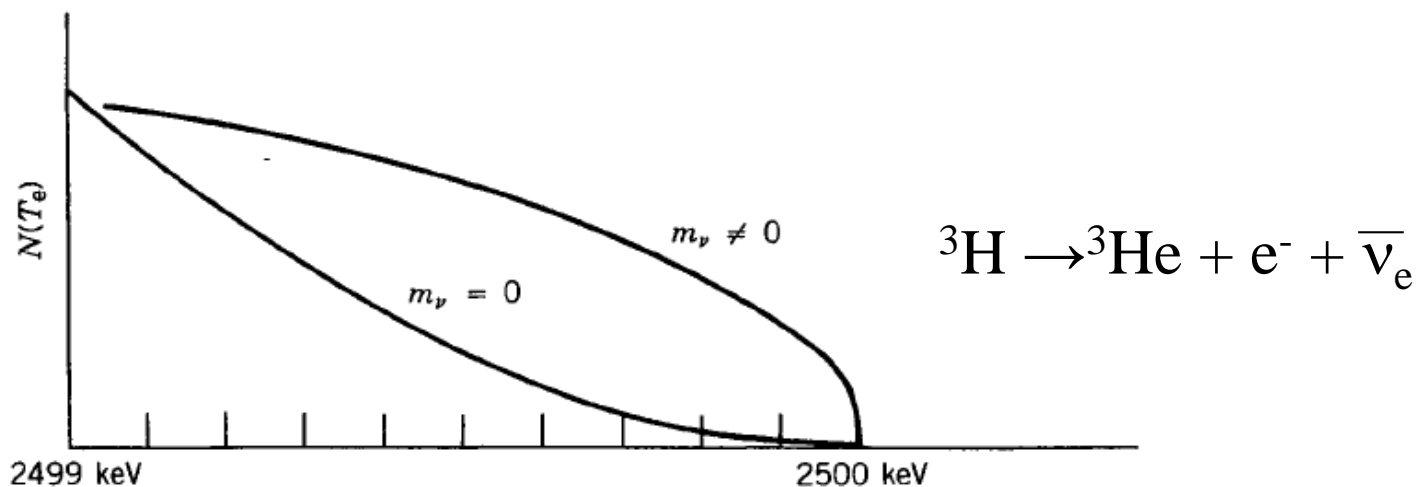


➤ ニュートリノの質量などは実験的にしか分からないのでしょうか？

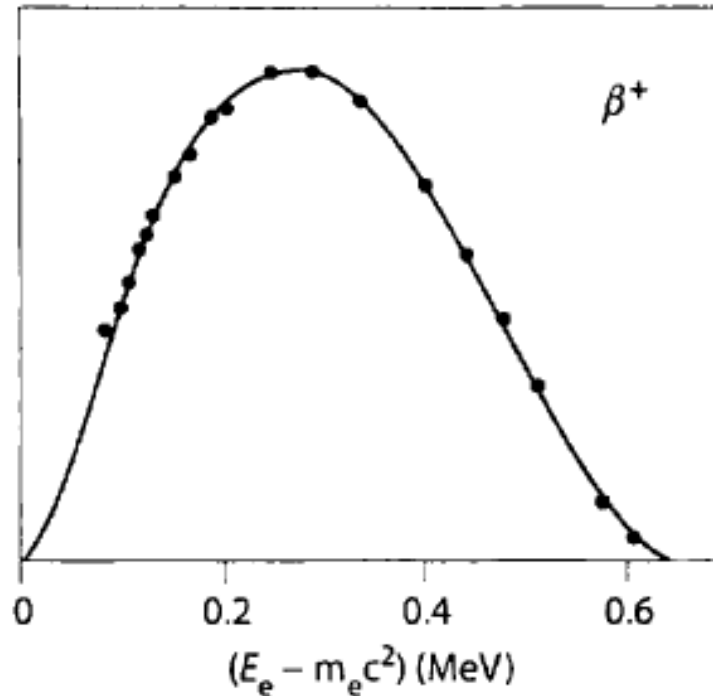
$$\left[T_{1/2}^{(0\nu)} \right]^{-1} = G_{0\nu} |M_{0\nu}|^2 \langle m_\nu \rangle^2$$



✓ 恐らく。。。。

➤ パウリが4体崩壊を考えなかったのは何故ですか？

パウリ: 電子が連続スペクトル → 3体崩壊



- ✓ まずは最も簡単な3体崩壊を考えたということでしょう。
(それでうまくいった)

終状態の数を数えるとこの電子スペクトルが大体説明できる(cf. 先週の講義)

➤ フェルミ理論のハミルトニアンの意味

$$H_\beta = g_F \int \underline{[\psi_p^\dagger(\mathbf{r})\psi_n(\mathbf{r})][\psi_e^\dagger(\mathbf{r})\psi_{\nu_e}(\mathbf{r})]} d\mathbf{r} + h.c.$$

この意味?

- ✓ 原子核中の r という場所にある中性子を1つ消して同じ場所に陽子を1つ作る

$$a_{pr}^\dagger a_{nr}$$

➤ 下の式変形がよくわからない

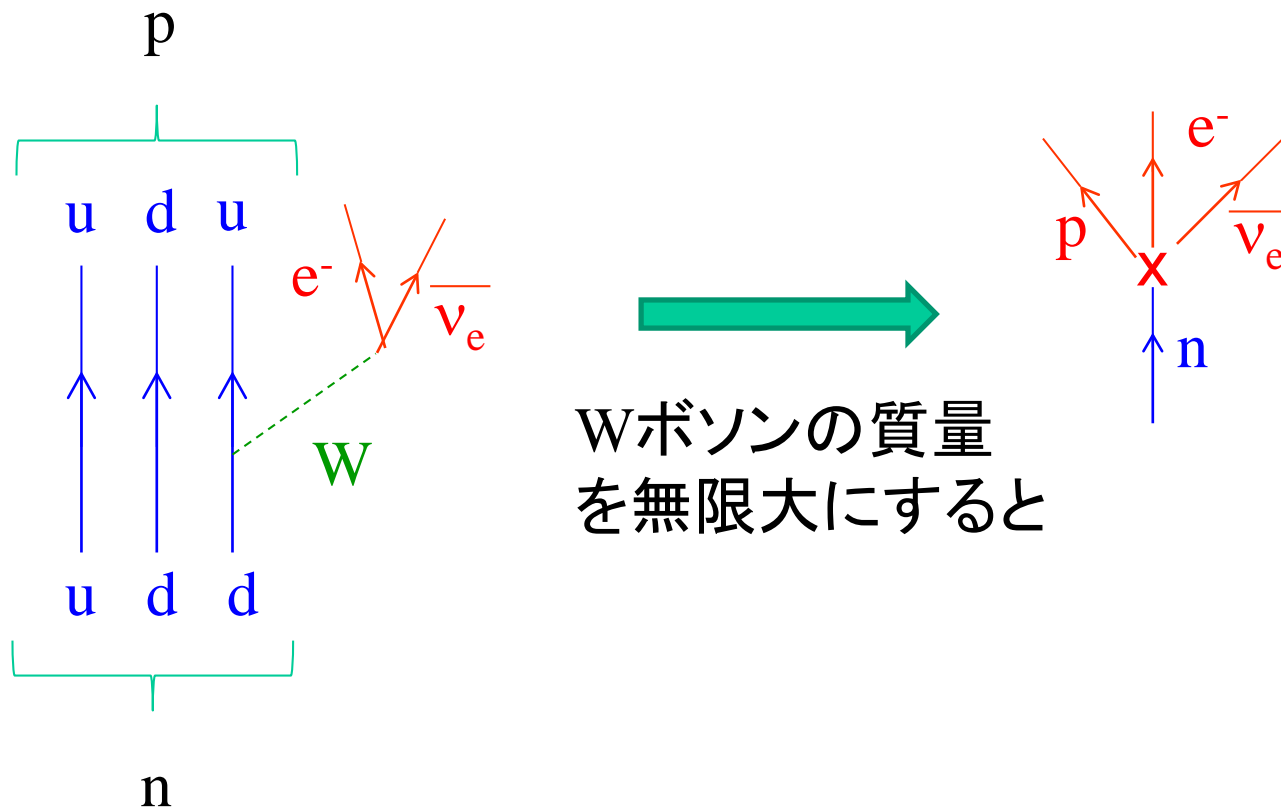
$$\begin{aligned}\sum_{\text{final states}} &= \int \frac{d\mathbf{p}_e}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d\mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi\hbar)^3} \delta(E_e + E_{\bar{\nu}_e} - Q) \\ &= \frac{(4\pi)^2}{(2\pi\hbar)^6} \int p_e^2 dp_e p_{\bar{\nu}_e}^2 dp_{\bar{\nu}_e} \delta(E_e + cp_{\bar{\nu}_e} - Q)\end{aligned}$$

✓ 極座標表示の積分です

$$\int d\mathbf{p}_e f(|\mathbf{p}_e|) = 4\pi \int_0^\infty p_e^2 dp_e f(p_e)$$

➤ フェルミ理論はどのくらい妥当なのか?

✓ Wボソンの質量を無限大にした有効場の理論



Wボソンの質量
を無限大にすると

- 低エネルギーの現象では有効
- 相対論的拡張: V - A 理論

➤ フェルミ理論で終状態の波動関数がなぜテンソル積で表せるのか？

始状態: $|i\rangle = |\Psi_i\rangle$ (原子核の多体波動関数)

終状態: $|f\rangle = |\Psi_f\rangle \cdot \underbrace{e^{i\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{r} / \hbar}}_{\text{電子}} \cdot \underbrace{e^{i\mathbf{p}_{\bar{\nu}_e} \cdot \mathbf{r} / \hbar}}_{\text{反ニュートリノ}}$

- ✓ 電子や反ニュートリノは原子核と相互作用しているので、本当はテンソル積ではないですね。

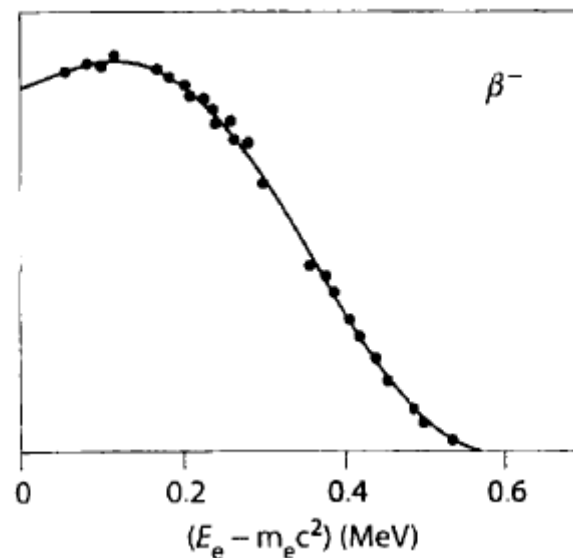
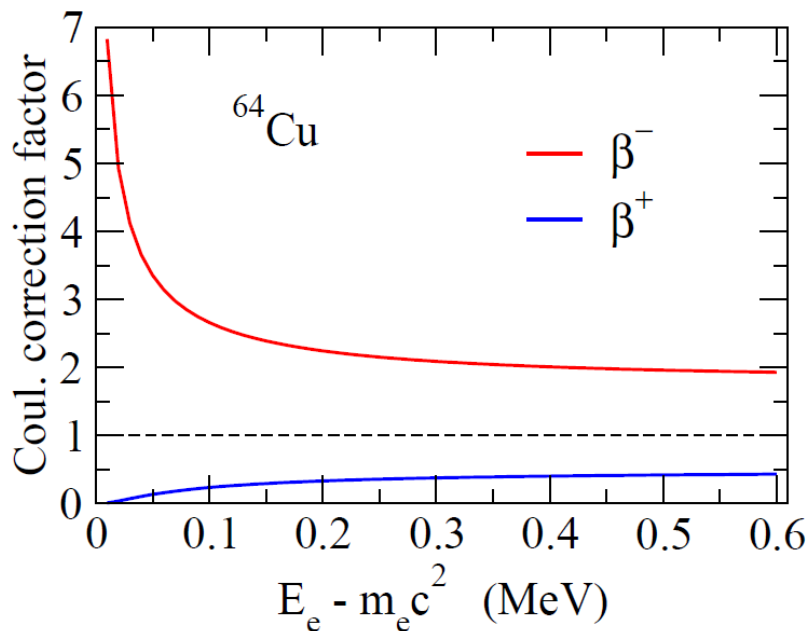
ここでは、その相互作用が小さいとして近似的に(摂動論的に)波動関数を書いています。

➤ フェルミの理論で電子やニュートリノの波動関数を平面波で近似していたが、それは一般に成り立つのか？

✓ いい質問です。

一般にはクーロン場により波動関数が乱され、平面波からずれる

$$\left[\frac{\psi_{e^\mp}(r=0, Z)}{\psi_{e^\mp}(r=0, Z=0)} \right]^2 = \frac{-2\pi\eta}{1 - e^{2\pi\eta}}, \quad \eta = \frac{\mp Ze^2}{\hbar v} \quad (\text{for } e^\mp)$$



➤ パリティ非保存という事実を考慮するとフェルミ理論はどのように変更されるのか?

✓ いい質問です

相対論的取り扱い: “V-A型” 相互作用

$$H_{\beta} = \int d\mathbf{r} \left\{ C_V (\psi_p^{\dagger} \gamma_{\mu} \psi_n) (\psi_e^{\dagger} \gamma^{\mu} (1 + \gamma_5) \psi_{\nu}) + h.c. \right. \\ \left. - C_A (\psi_p^{\dagger} \gamma_{\mu} \gamma_5 \psi_n) (\psi_e^{\dagger} \gamma^{\mu} \gamma_5 (1 + \gamma_5) \psi_{\nu}) + h.c. \right\}$$

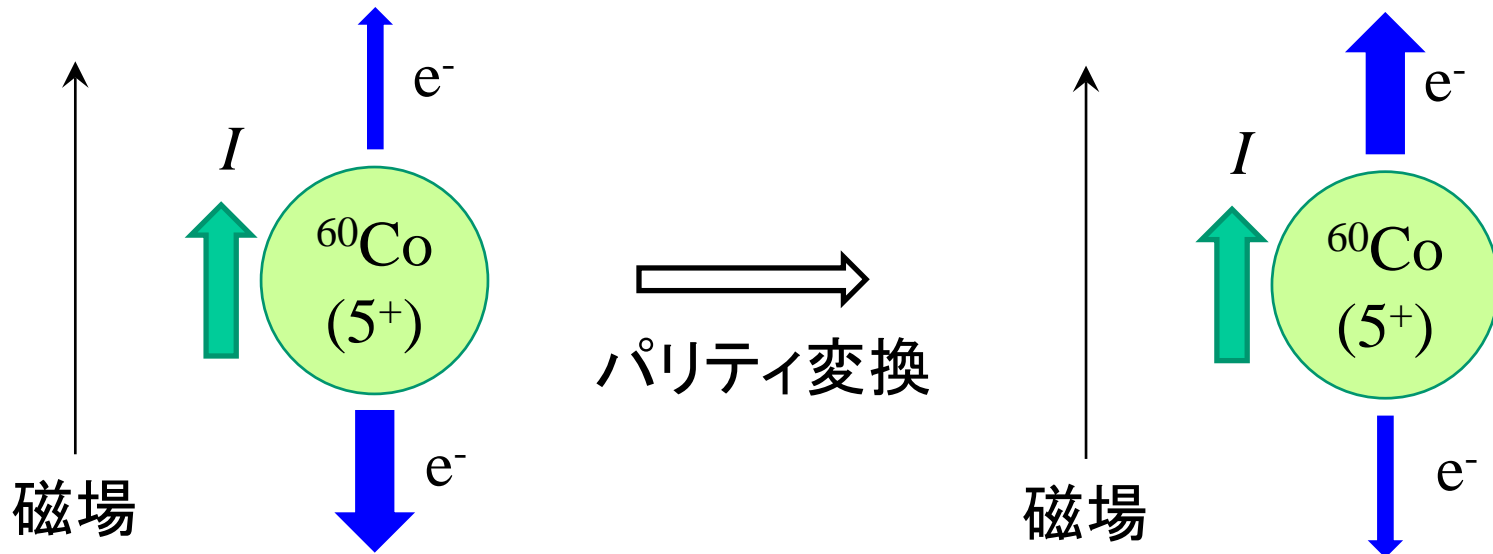
パリティ非保存

$$\gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_k \\ i\sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-i\gamma_k\gamma_5 = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & -\sigma_k \end{pmatrix}, \quad -i\gamma_0\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

➤ β崩壊でパリティが非保存であると何が分かるのか？



✓ ニュートリノのヘリシティと関係します。

$$H_\beta = \int d\mathbf{r} \left\{ C_V (\psi_p^\dagger \gamma_\mu \psi_n) (\psi_e^\dagger \gamma^\mu (1 + \gamma_5) \psi_\nu) + h.c. \right. \\ \left. - C_A (\psi_p^\dagger \gamma_\mu \gamma_5 \psi_n) (\psi_e^\dagger \gamma^\mu \gamma_5 (1 + \gamma_5) \psi_\nu) + h.c. \right\}$$



ニュートリノが右巻きだとゼロ
(→ ニュートリノは左巻き)

- 磁場のパリティ変換で B が変化しないというのは最初から仮定していませんか?

$$B = \nabla \times A; \quad A = -\frac{1}{2}r \times B$$

ここ

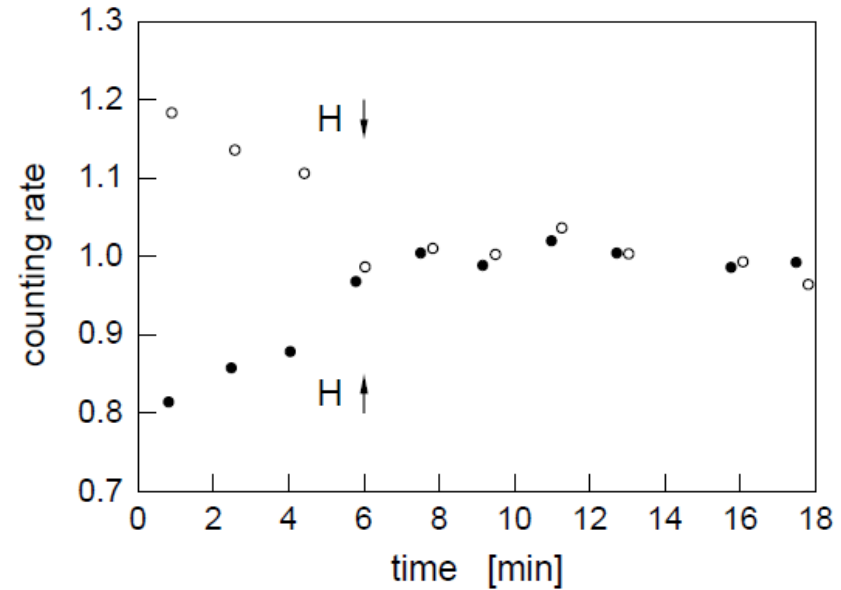
- ✓ ベクトルポテンシャル A の中の B は定数のつもりで書きました。

$$B = \nabla \times A \quad (\text{ベクトルポテンシャルと磁場の関係})$$

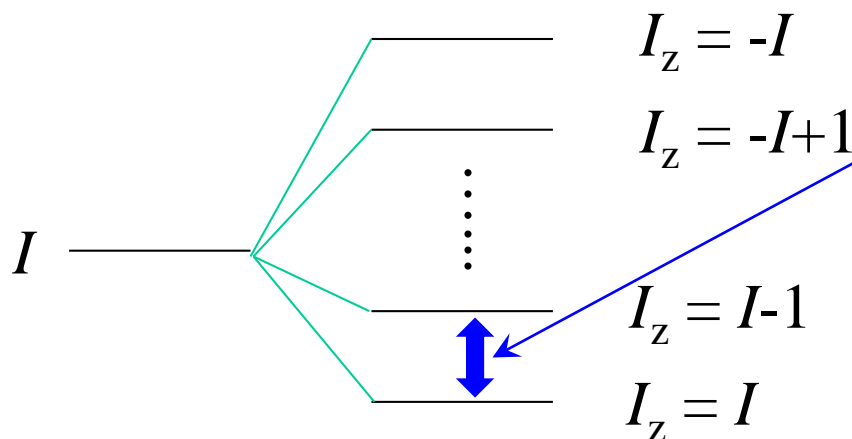
$$A = -\frac{1}{2}r \times B_0 \quad \text{ととると}$$

$$B = B_0$$

- Wuの実験で時間がたつと角運動量の整列が成立しなくなるといのはどういう意味か？



- 磁場をかけて角運動量の z 成分を分離させる:

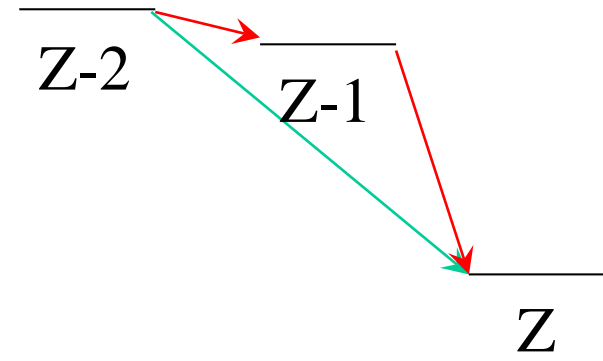
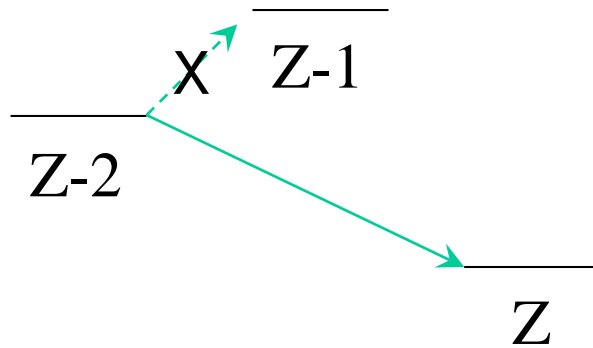


この間隔が $k_B T$ より大きくなないと分離されない

Wu の実験:

最初は十分冷却されていたが、時間とともに試料の温度が上昇

➤ 1重 β 崩壊が許されるときに、2重 β 崩壊はどうなるのか？




こういう場合

✓ 1重 β 崩壊が2回連続して起きます(これは2重 β 崩壊とは言わない)

($Z-2$) から Z に一気に飛ぶ2重 β 崩壊はほぼ起きません
(確率が小さすぎる)

➤ 2重β崩壊のマヨラナの部分の説明をもう一度

$$\beta\text{崩壊: } n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$


 $n + \nu_e \rightarrow p + e^-$

や $n + e^+ \rightarrow p + \bar{\nu}_e$ も

(粒子を反粒子にして右辺から左辺に移項)

✓ $0\nu\beta\beta$

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

 $\nu_e = \bar{\nu}_e$ だったら (マヨラナ・ニュートリノ)

$$n + \nu_e \rightarrow p + e^-$$

➤ ニュートリノがマヨラナだと理論的にはどのようなことが言えるのか？

✓ マヨラナだったらニュートリノを伴わない2重ベータ崩壊が起こる

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$



$\nu_e = \bar{\nu}_e$ だったら (マヨラナ・ニュートリノ)

$$n + \nu_e \rightarrow p + e^-$$

(正味のプロセス) $2n \rightarrow 2p + 2e^-$ (レプトン数の非保存)

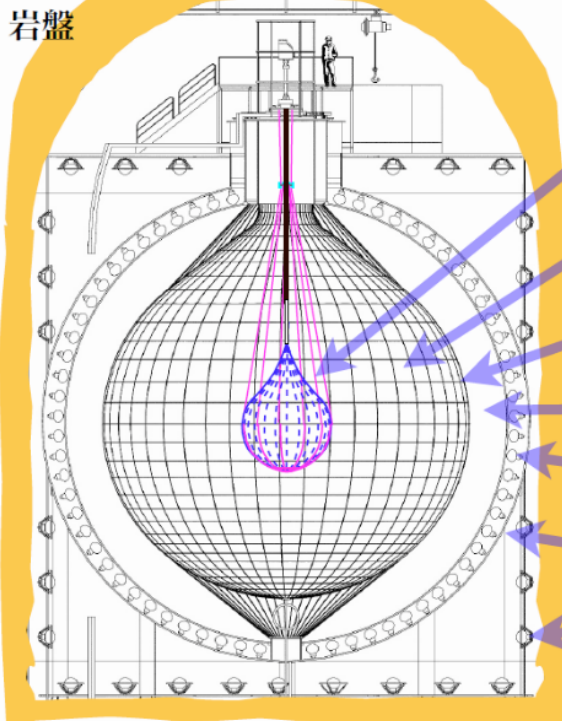
➤ カムランド禅はどのような仕組みの検出器ですか？

✓ ニュートリノセンター
の人に聞いてみてください

カムランド禅検出器

岐阜県神岡鉱山の地下1,000メートル

岩盤



ミニバルーン (直径5.1m)、キセノン
380kg (濃縮 ^{136}Xe) を溶かしこんだ
液体シンチレータ

世界最高感度

1,000トン液体シンチレータ

バルーン (直径13m)

透明なオイル

20インチ光電子増倍管(1879本)

ステンレス球形タンク (直径18m)

3200トン純水槽と光電子増倍管 (225本)

← 20m →



電磁遷移

1. 遷移確率

$$\Gamma_{fi}(\lambda\mu) \sim \frac{8\pi(\lambda+1)}{\hbar\lambda((2\lambda+1)!!)^2} \left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^{2\lambda+1} |\langle\Psi_f|\mathcal{M}_{\lambda\mu}|\Psi_i\rangle|^2 \quad (1)$$

- E λ 遷移

$$\mathcal{M}_{\lambda\mu} = \sum_{i=1}^Z er_i^\lambda Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}}_i) \equiv \hat{Q}_{\lambda\mu} \quad (2)$$

- M λ 遷移

$$\mathcal{M}_{\lambda\mu} = \mu_N \sum_{i=1}^A \left\{ g_s^{(i)} \mathbf{s}_i + \frac{2}{\lambda+1} g_l^{(i)} \mathbf{l}_i \right\} \cdot \left(\nabla r_i^\lambda Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}}_i) \right) \equiv \hat{M}_{\lambda\mu} \quad (3)$$

$\mu_N = e\hbar/2mc$, $g_l = 1$ (陽子) or 0 (中性子), $g_s = 5.586$ (陽子) or -3.826 (中性子) .

2. 換算遷移確率

角運動量の z 成分を区別しないとき、

$$\Gamma_{fi} = \frac{1}{2I_i+1} \sum_{M_f, M_i, \mu} \Gamma_{fi}(\lambda\mu) \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2I_i+1} \sum_{M_f, M_i, \mu} \frac{8\pi(\lambda+1)}{\hbar\lambda((2\lambda+1)!!)^2} \left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^{2\lambda+1} |\langle I_f M_f | \mathcal{M}_{\lambda\mu} | I_i M_i \rangle|^2 \quad (5)$$

Wigner-Eckart の定理 :

$$\langle I_f M_f | \mathcal{M}_{\lambda\mu} | I_i M_i \rangle = (-1)^{I_i - M_i} \frac{1}{\sqrt{2\lambda+1}} \langle I_f M_f I_i - M_i | \lambda\mu \rangle \langle I_f || \mathcal{M}_\lambda || I_i \rangle \quad (6)$$

C.G. 係数の性質 :

$$\sum_{M_i M_f} \langle I_f M_f I_i - M_i | \lambda\mu \rangle^2 = 1 \quad (7)$$

を用いると

$$\Gamma_{fi} = \frac{8\pi(\lambda+1)}{\hbar\lambda((2\lambda+1)!!)^2} \left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^{2\lambda+1} \frac{1}{2I_i+1} |\langle I_f || \mathcal{M}_\lambda || I_i \rangle|^2 \quad (8)$$

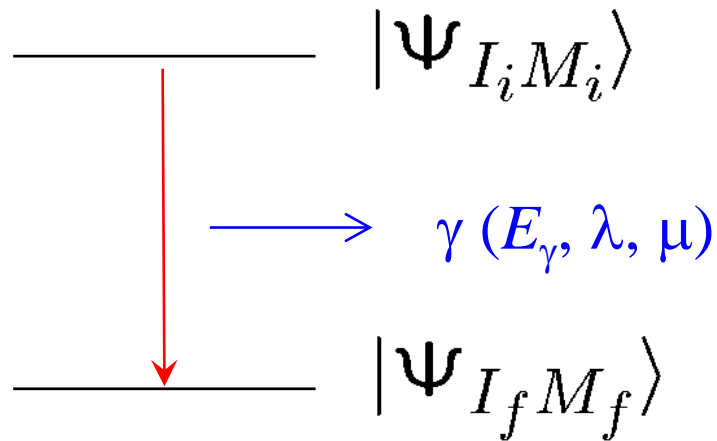
ここで

$$B(E\lambda; I_i \rightarrow I_f) = \frac{1}{2I_i+1} |\langle I_f || Q_\lambda || I_i \rangle|^2 \quad (9)$$

$$B(M\lambda; I_i \rightarrow I_f) = \frac{1}{2I_i+1} |\langle I_f || M_\lambda || I_i \rangle|^2 \quad (10)$$

を換算遷移確率という。

電磁遷移について



単位時間当たりの遷移確率 (← フェルミの黄金則):

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | H_{\text{int}} | i \rangle|^2 \rho(E_f)$$

$$|i\rangle = |\Psi_{I_i M_i}\rangle |0\rangle$$

$$|f\rangle = |\Psi_{I_f M_f}\rangle |E_\gamma, \lambda\mu\rangle$$

H_{int} : 原子核と電磁場の相互作用

原子核の状態 フォトン

原子核と電磁場の相互作用

多体系のハミルトニアン:

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i < j} v_{ij}$$

$$\longrightarrow H = \sum_i \left[\frac{1}{2m} \left(\mathbf{p}_i - \frac{e_i}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t) \right)^2 + e_i \phi(\mathbf{r}_i) \right] \\ + \sum_{i < j} v_{ij} + H_{em}$$

$e_i = +e$ (陽子), 0 (中性子)

$\mathbf{A} =$ ベクトル・ポテンシャル

$\phi =$ スカラー・ポテンシャル

* このように変更すると古典的なローレンツ力が出てくる

原子核と電磁場の相互作用

$$H = \sum_i \left[\frac{1}{2m} \left(\mathbf{p}_i - \frac{e_i}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t) \right)^2 + e_i \phi(\mathbf{r}_i) \right] + \sum_{i < j} v_{ij} + H_{em}$$

クーロン・ゲージ

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \phi(\mathbf{r}) = 0$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right)^2 &= p^2 - \frac{e}{c} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}) + \frac{e^2}{c^2} \mathbf{A}^2 \\ &= (\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} \\ &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} \\ &\sim p^2 - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} \end{aligned} \quad \sim 0$$

$$H_{\text{int}} = - \sum_i \frac{e_i}{mc} \mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t) \cdot \mathbf{p}_i$$

原子核と電磁場の相互作用

$$H_{\text{int}} = - \sum_i \frac{e_i}{mc} \mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t) \cdot \mathbf{p}_i$$

$$\rightarrow H_{\text{int}} = -\frac{1}{c} \int d\mathbf{r} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}_o(\mathbf{r}, t) + c \nabla \times \boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}, t)$$

$$\mathbf{j}_o(\mathbf{r}, t) = \sum_i \frac{e_i}{2m} (\mathbf{p}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) + \text{h.c.})$$

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}, t) = \frac{e\hbar}{2mc} \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) g_s \mathbf{s}_i$$

$$g_s = \begin{cases} 5.586 \text{ (陽子)} \\ -3.826 \text{ (中性子)} \end{cases} \quad (\text{異常磁気モーメント})$$

* 点粒子であれば、 $g_s = 2$ (陽子)、 $=0$ (中性子)

$$H_{\text{int}} = -\frac{1}{c} \int d\mathbf{r} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$$

$$\rightarrow \Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | H_{\text{int}} | i \rangle|^2 \rho(E_f)$$

真空中のマクスウェル方程式

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) A(\mathbf{r}, t) = 0$$

これを部分波展開で解く。

cf. 自由粒子のシュレーディンガー方程式

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - E \right) \psi(\mathbf{r}) = 0$$

$$\rightarrow \psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta)$$

cf. 自由粒子のシュレーディンガー方程式

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - E\right)\psi(\mathbf{r}) = 0$$

$$\longrightarrow \psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)i^l j_l(kr) P_l(\cos\theta)$$

基本的にはこれと同じ(ただし、偏極ベクトルと角運動量を組み直す):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_\alpha a_{\mathbf{k}\alpha} e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} = \sum_{\lambda, \mu} \dots$$

クーロンゲージ:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0 \rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (\text{横波条件})$$

\longrightarrow 各 λ, μ に対し、独立な解が2つ (E-type, M-type)

遷移確率(長波長近似)

$$\Gamma_{fi}(\lambda\mu) \sim \frac{8\pi(\lambda+1)}{\hbar\lambda((2\lambda+1)!!)^2} \left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^{2\lambda+1} |\langle \Psi_f | \mathcal{M}_{\lambda\mu} | \Psi_i \rangle|^2$$

E λ 遷移

$$\mathcal{M}_{\lambda\mu}^{(E)} = \sum_i e_i r_i^\lambda Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}}_i) = \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) r^\lambda Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}}) \equiv \hat{Q}_{\lambda\mu}$$

M λ 遷移

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\lambda\mu}^{(M)} &= \mu_N \sum_{i=1}^A \left\{ g_s^{(i)} \mathbf{s}_i + \frac{2}{\lambda+1} g_l^{(i)} \mathbf{l}_i \right\} \cdot (\nabla r_i^\lambda Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}}_i)) \\ &= \frac{1}{c(\lambda+1)} \int d\mathbf{r} (\mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r})) \cdot \nabla (r^\lambda Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}})) \\ &\equiv \hat{M}_{\lambda\mu} \end{aligned}$$

換算遷移確率

$$|\langle \Psi_f | \mathcal{M}_{\lambda\mu} | \Psi_i \rangle|^2 \rightarrow \frac{1}{2I_i + 1} \sum_{M_i, M_f, \mu} |\langle I_f M_f | \mathcal{M}_{\lambda\mu} | I_i M_i \rangle|^2$$

ウィグナー・エッカルトの定理

$$\langle I_f M_f | \mathcal{M}_{\lambda\mu} | I_i M_i \rangle = (-1)^{I_i - M_i} \frac{1}{\sqrt{2\lambda + 1}} \underbrace{\langle I_f M_f I_i - M_i | \lambda \mu \rangle}_{M_i, M_f \text{ の依}} \underbrace{\langle I_f || \mathcal{M}_\lambda || I_i \rangle}_{M_i, M_f \text{ に}}$$

存性は単純
依存しない
な Clebsch

$$\sum_{M_i M_f} \langle I_f M_f I_i - M_i | \lambda \mu \rangle^2 = 1$$

$$\rightarrow \frac{1}{2I_i + 1} \sum_{M_i, M_f, \mu} |\langle I_f M_f | \mathcal{M}_{\lambda\mu} | I_i M_i \rangle|^2 = \frac{1}{2I_i + 1} |\langle I_f || \mathcal{M}_\lambda || I_i \rangle|^2$$

(換算遷移確率)

$$\Gamma_{fi} \sim \frac{8\pi(\lambda + 1)}{\hbar\lambda((2\lambda + 1)!!)^2} \left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^{2\lambda+1} \frac{1}{2I_i + 1} |\langle I_f || \mathcal{M}_\lambda || I_i \rangle|^2$$

一般に

$$\Gamma(E\lambda) \gg \Gamma(M\lambda)$$

$$\Gamma(E\lambda) \gg \Gamma(E\lambda + 1) \gg \dots$$

E2とM1の競合が起こることもある。

選択則

$$\langle I_f M_f | \mathcal{M}_{\lambda\mu} | I_i M_i \rangle$$

初期状態 + 1光子状態

$$|\Psi'_i\rangle = \mathcal{M}_{\lambda\mu} |I_i M_i\rangle \quad \text{として、}$$

$$\langle I_f M_f | \Psi'_i \rangle \neq 0 \quad \text{であるためには}$$

$|\Psi'_i\rangle$ と $|I_f M_f\rangle$ が同じ量子数を持たなければならない

→ 選択則

I_i と λ を合成して I_f にならなければならない

$$|I_i - \lambda| \leq I_f \leq I_i + \lambda$$

(z 成分に関しては: $M_f = M_i + \mu$)

選択則

$$\langle I_f M_f | \mathcal{M}_{\lambda\mu} | I_i M_i \rangle$$

I_i と λ を合成して I_f にならなければならない

$$|I_i - \lambda| \leq I_f \leq I_i + \lambda$$

$$\mathcal{M}_{\lambda\mu} = \sum_{i=1}^Z e r_i^\lambda Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}}_i) \equiv \hat{Q}_{\lambda\mu} \quad \text{パリティ } (-1)^\lambda$$

$$\mathcal{M}_{\lambda\mu} = \mu_N \sum_{i=1}^A \left\{ g_s^{(i)} \mathbf{s}_i + \frac{2}{\lambda + 1} g_l^{(i)} \mathbf{l}_i \right\} \cdot \left(\nabla r_i^\lambda Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}}_i) \right) \equiv \hat{M}_{\lambda\mu}$$

パリティ $(-1)^{\lambda+1}$

例) $2^+ \rightarrow 0^+$ E2

$3^- \rightarrow 0^+$ E3

$4^+ \rightarrow 2^+$ E2, E4, M3, E6, M5

$2^+ \rightarrow 3^-$ E1, E3, E5, M2, M4