

## ➤ 第2フォノン励起状態の状態数?

4+  
2+  
0+

フォノンの入れ換えに対して対称

→ 2と2の角運動量の合成をすると  $L = 0, 1, 2, 3, 4$  ができるが、そのうち偶数しか許されない

2+

0+

2と2の合成だと、状態数は  $5 \times 5 = 25$  のはず。  
 $L = 0, 2, 4$  だけだと足りないのでは?

✓ いい質問です。

$b_{2\mu}^\dagger b_{2\mu'}^\dagger |0\rangle \rightarrow (\mu, \mu') = (2, 2), (2, 1), \dots, (-2, -2)$  で25個。

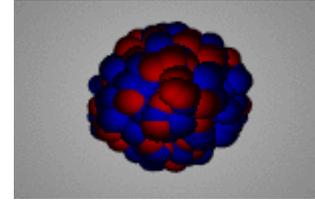
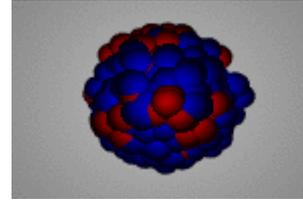
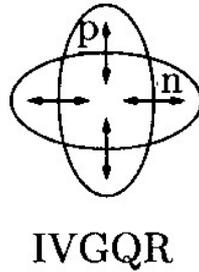
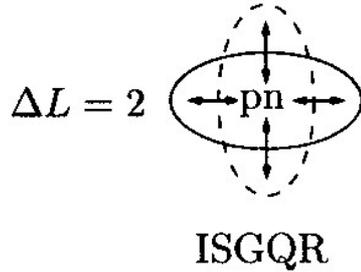
対称化 →  $(\mu, \mu') = (2, 1)$  と  $(1, 2)$  は同じとみなす。

→ 許されるのは、

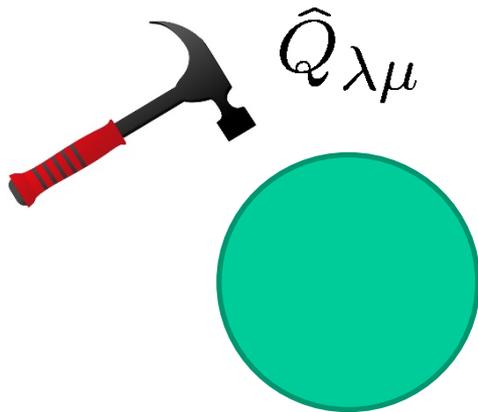
$\mu = \mu'$  が5個 ( $\mu = 2, 1, 0, -1, -2$ )

$\mu \neq \mu'$  が  $5 \times 4$  だけど対称化するので「割る2」、合計 10  
合わせて 15 → これは  $L = 0, 2, 4$  の  $1 + 5 + 9 = 15$  と一致。

- 表面振動で角運動量の変化とは何か?
- アイソ「ベクトル」型、アイソ「スカラー」型の意味は何か?



- ✓ 表面振動は原子核に外から刺激(外場)を与えて励起する



励起オペレーター

$$\hat{Q}_{\lambda\mu} = \sum_i r_i^\lambda Y_{\lambda\mu}(\hat{r}_i)$$

や

角運動量  $\lambda$

$$\hat{Q}_{\lambda\mu} = \sum_i r_i^\lambda Y_{\lambda\mu}(\hat{r}_i) \tau_{zi}$$

アイソベクトル

\* エネルギーは外場に対する応答として決定される

➤ 振動だけでなく原子核がグルグル回転することはないのでしょうか？

✓ あります(いい質問です！)

### $^{154}\text{Sm}$ の回転スペクトル

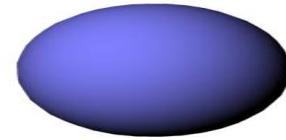
0.903 —————  $8^+$   
(MeV)

0.544 —————  $6^+$

0.267 —————  $4^+$

0.082 —————  $2^+$   
0 —————  $0^+$

$^{154}\text{Sm}$

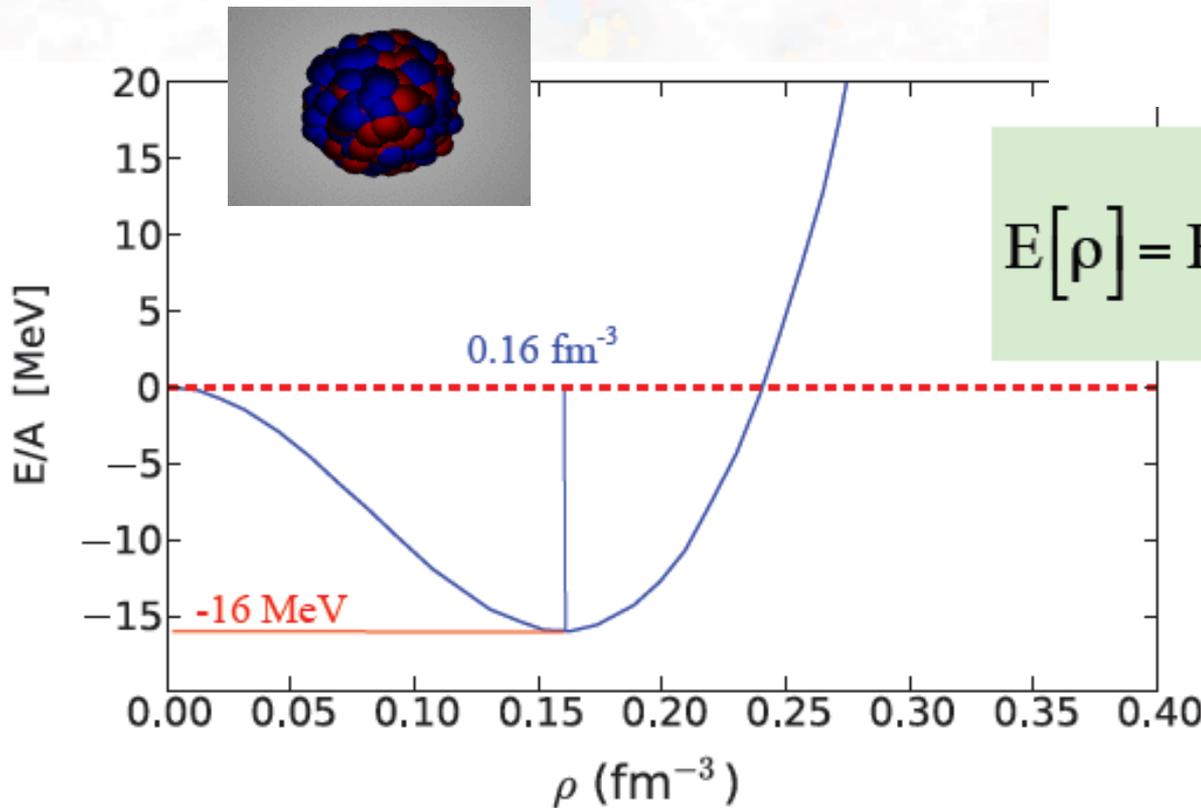


変形した原子核の回転励起  
(後でやります)

$$E_I \sim \frac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathcal{J}}$$

- 原子核が変形したり振動することで、軌道電子に何か影響はあるか？
- ✓ 多分、ほとんどないでしょう。  
(原子の中で電子は原子核をほとんど点だとしかみなさない)

➤ 得られた核物質の情報をそのまま中性子星にあてはめてもいいのですか？



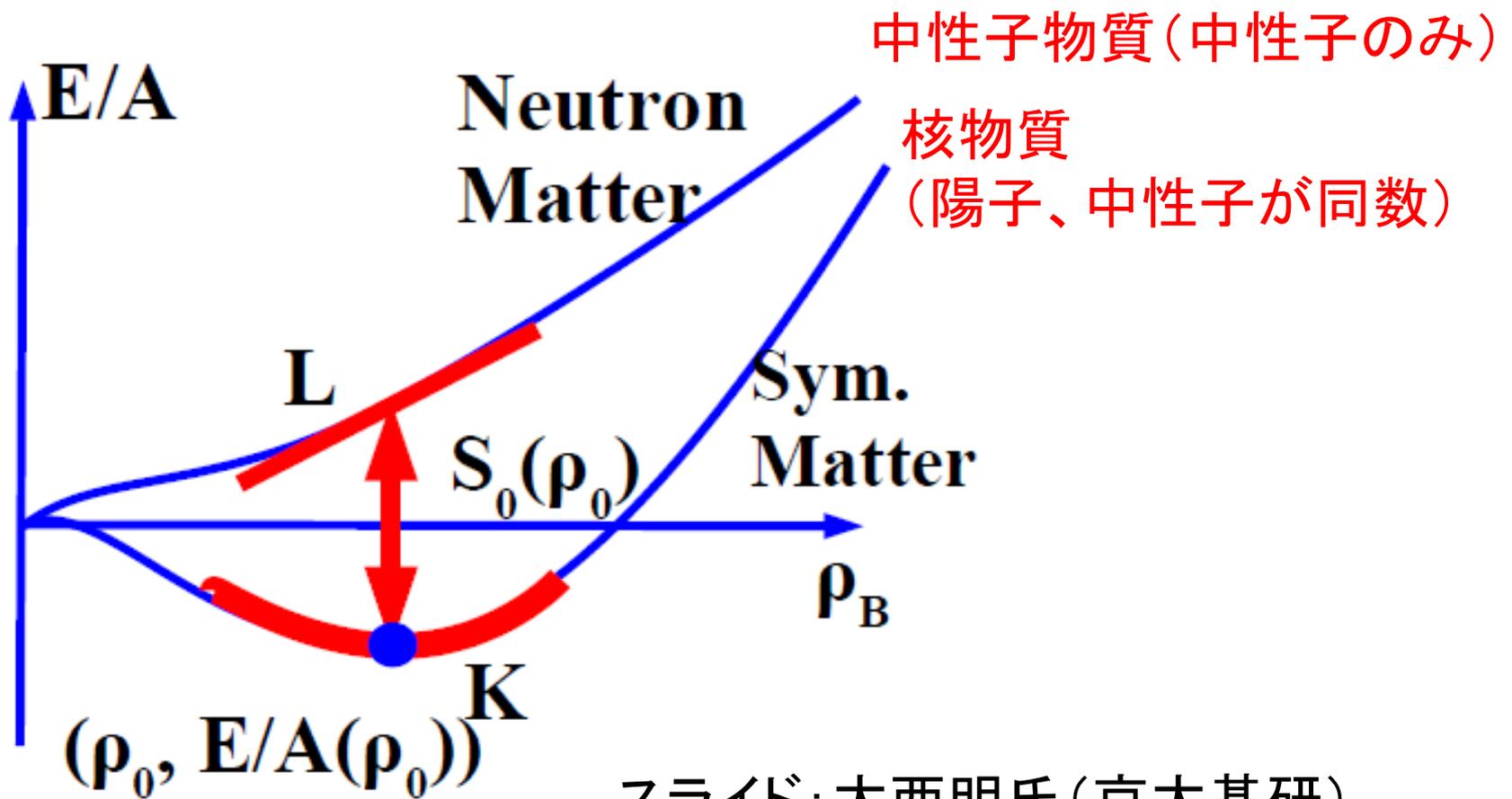
$$E[\rho] = E[\rho_0] + \frac{1}{18} K_\infty \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right)^2$$

slide: Carlos Bertulani

✓ 鋭い指摘です。

核物質の「状態方程式」: 密度と圧力の関係式

→ 密度とエネルギーの関係式

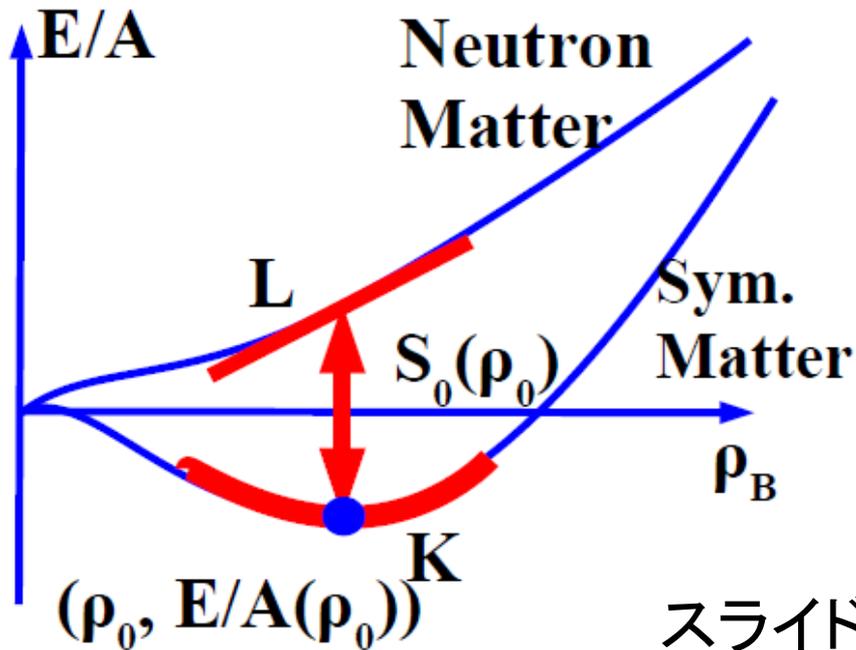


中性子星の構造で重要なのは、様々な陽子:中性子の比率での状態方程式

→ 理論を作るときに、対称核物質の性質で制限をかける

\* 実験で分かるのは少数のパラメータのみ。後は理論で決める。

➤ 核物質の情報はどうのように得るのか?



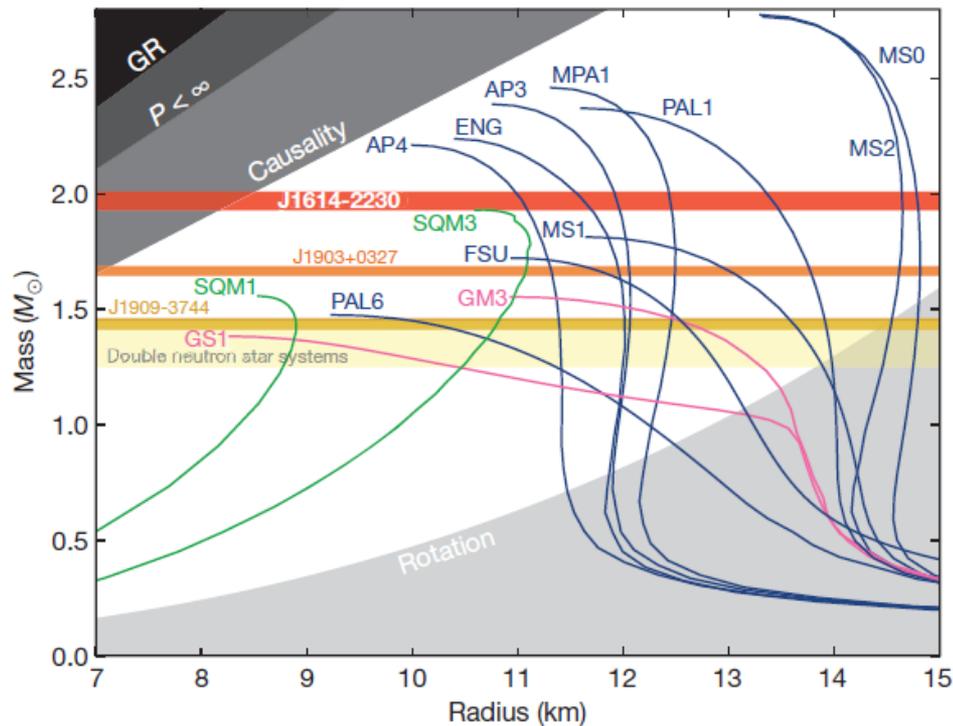
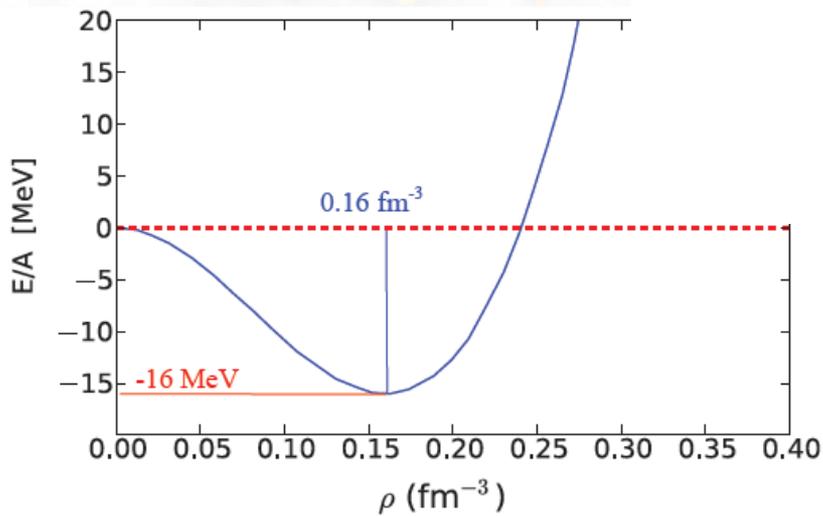
スライド: 大西明氏 (京大基研)

- ✓ 平衡点の密度 → 原子核の中心密度
- 平衡点のエネルギー → 質量公式  $B/A \sim -16 \text{ MeV} + \dots$
- 平衡点の曲率 → 単極子振動
- 中性子物質のパラメーター → 中性子過剰核の励起など  
重イオン衝突実験の解析など

$$B(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}$$

- 原子核や中性子星の「固さ」って何ですか？
- 原子核の密度が変わる現象は何かありますか？

✓ 原子核の密度を変えるのにどれだけエネルギーが必要か、ということ



重力でぎゅうぎゅう押されても  
適当な半径を維持する



原子核が「固い」ほど大きな質量  
を持つ中性子星ができる

\* (他に) 中高エネルギーの重イオン反応の様子にも密度や「固さ」が  
影響する

➤ 核分裂の障壁の高さはいつも 5-6 MeV ?

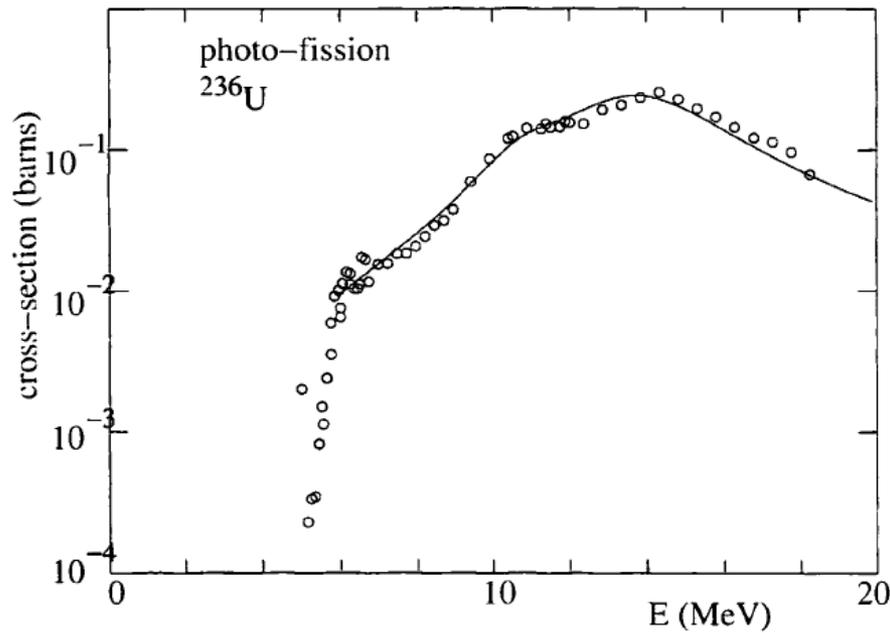


Fig. 6.5. Cross-section for  $\gamma^{236}\text{U} \rightarrow$  fission [30].

✓ ウラン領域だと 5-6 MeV 程度。原子核が重くなるともっと低くなる。

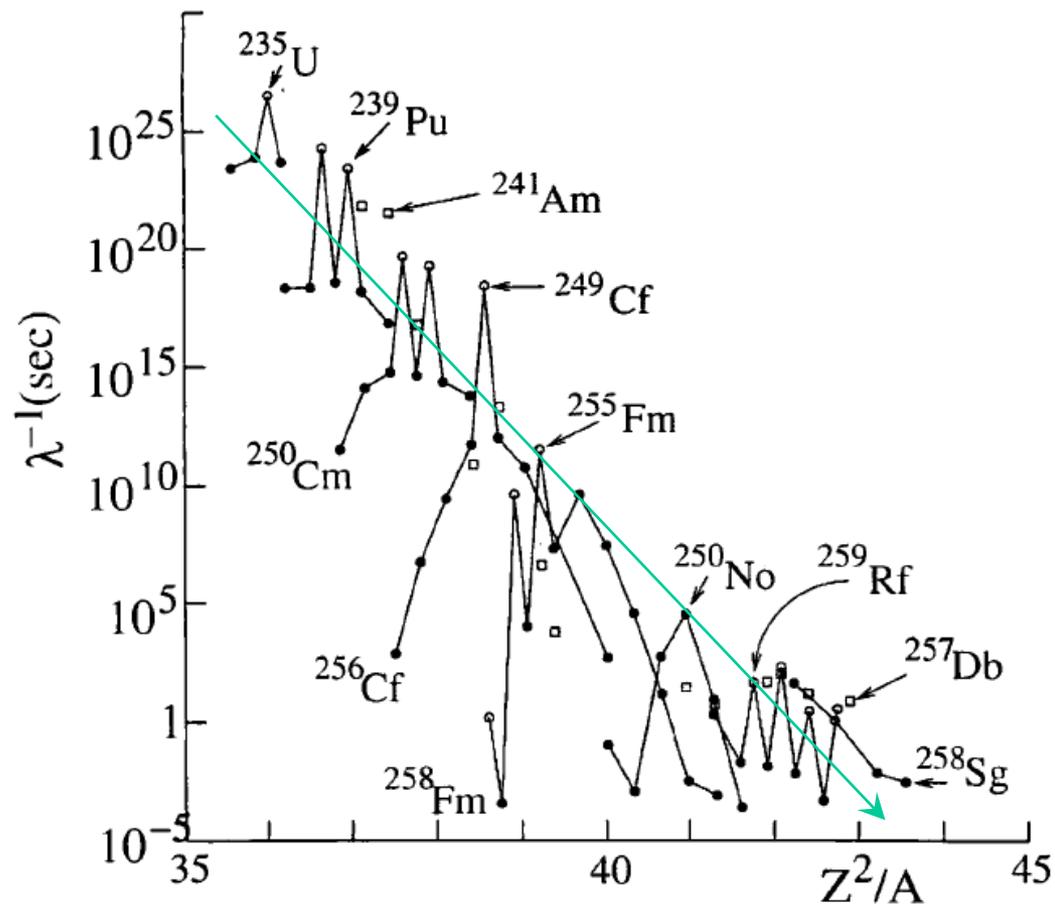


Fig. 6.4. Spontaneous fission lifetimes as a function of the fission parameter  $Z^2/A$  for selected nuclei. Circles are for even- $Z$  nuclei. filled circles for even-even nuclei and open circles for even-odd nuclei. Squares are for odd- $Z$  nuclei.

自発核分裂の寿命:  $Z^2/A$  が大きくなるほど、核分裂障壁が低くなって寿命が短くなる

➤ 断面積が大きいエネルギーで下がっているのはなぜ？

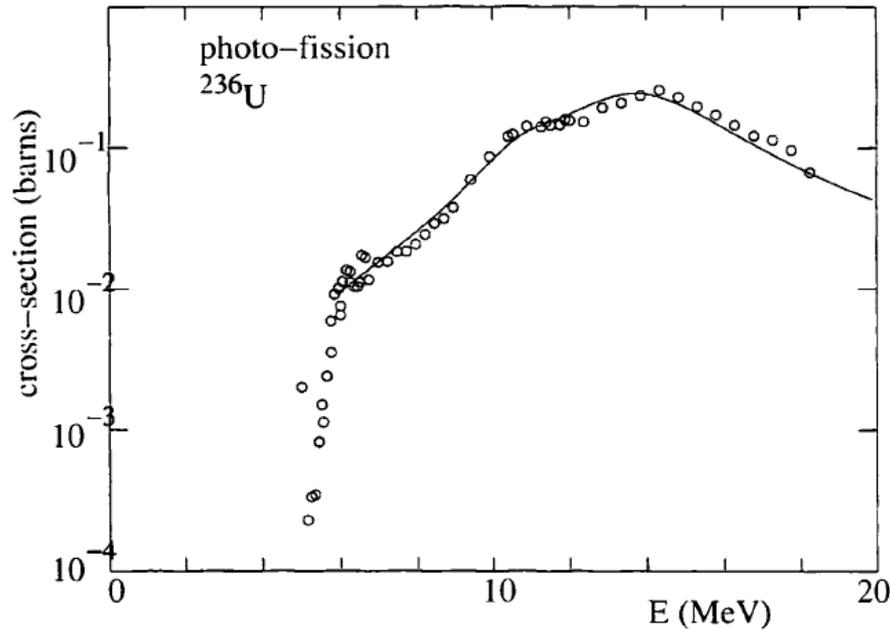


Fig. 6.5. Cross-section for  $\gamma^{236}\text{U} \rightarrow$  fission [30].

✓ いい質問です。

励起エネルギーが大きくなると、核分裂の他にも様々な崩壊の仕方がある。

中性子放出、陽子放出、 $\alpha$ 粒子の放出。。。。

原子核の「蒸発」過程

➤ 符号はこれで正しいですか?

$$E_S(\epsilon) = \sigma \int_S dS \sim E_S^{(0)} \left( 1 + \frac{2}{5}\epsilon^2 + \dots \right)$$

$$E_S^{(0)} = +a_S A^{2/3}$$

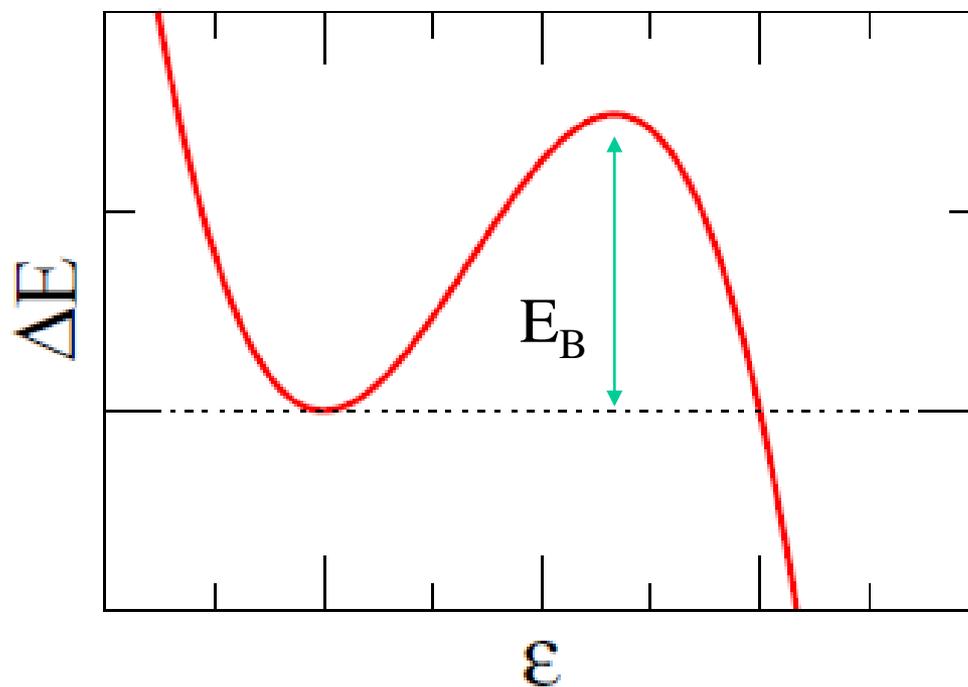
✓ 正しいです。

$$B(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}$$

$$m(N, Z)c^2 = E = Zm_p c^2 + Nm_n c^2 - B$$

なので( $E$ と $B$ が逆符号)、表面が大きいほど  
エネルギーが大きくなる = 束縛エネルギーが小さくなる  
→ エネルギー的に損(不安定になる)

➤  $E_B = \frac{98}{15} \cdot \frac{(1-x)^3}{(1+2x)^2} \cdot E_S^{(0)}$  の導出法？

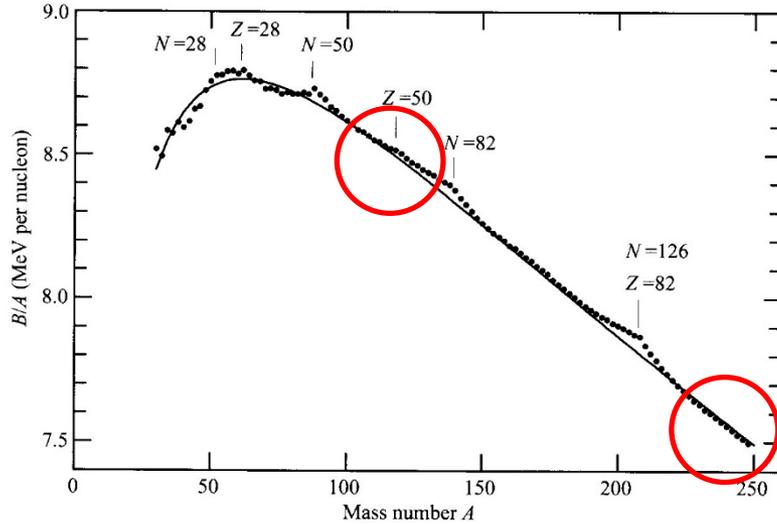


✓ 解答:

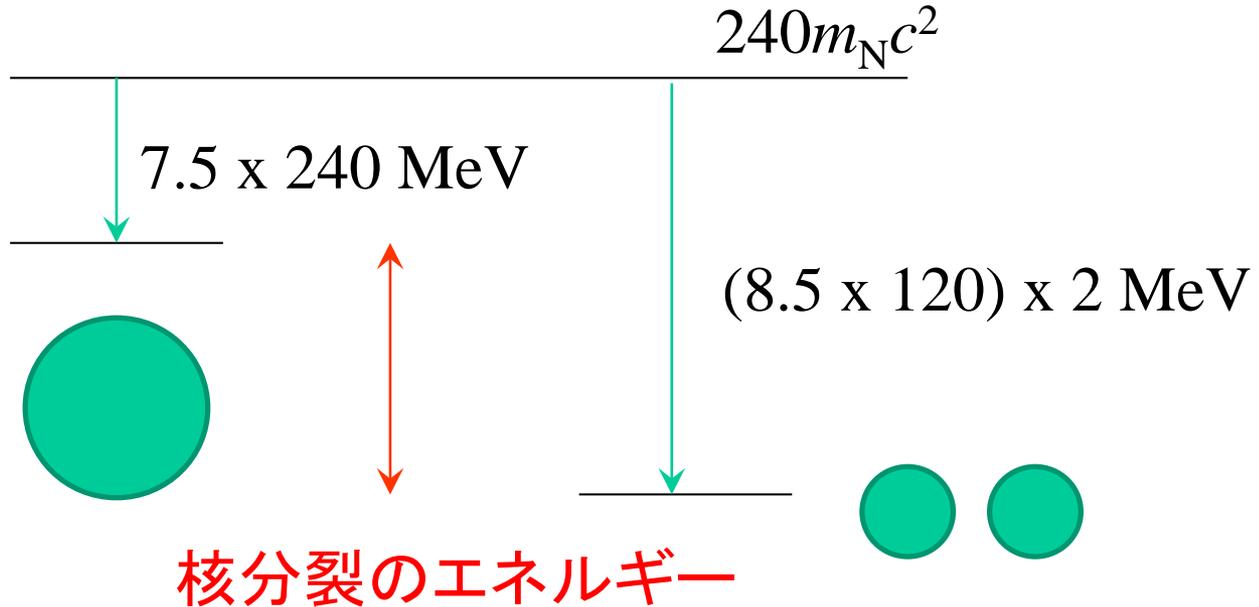
$$\Delta E = E_S^{(0)} \left\{ \frac{2}{5}(1-x)\epsilon^2 - \frac{4}{105}(1+2x)\epsilon^3 + \dots \right\}$$

の式で  $\frac{d \Delta E}{d\epsilon} = 0$  となるところの  $\Delta E$  の値

# ➤ 核分裂で解放されるエネルギーと重さの関係?



質量





# どうして $^{235}\text{U}$ が“燃え”て $^{238}\text{U}$ が“燃え”ないのか(原発)?

天然ウラン:

$^{238}\text{U}$  99.2742%

$^{235}\text{U}$  0.7204%

$^{234}\text{U}$  0.0054%

このうち、 $^{235}\text{U}$  だけが「燃える」

$^{235}\text{U} + \text{n} \rightarrow ^{236}\text{U}^* \rightarrow$  核分裂 (中性子誘起核分裂)

$^{238}\text{U} + \text{n} \rightarrow ^{239}\text{U}^* \rightarrow$  核分裂 はほとんど無視できる確率

なぜか?

# どうして $^{235}\text{U}$ が“燃え”て $^{238}\text{U}$ が“燃え”ないのか(原発)?

障壁の高さが違うため?



そうではない

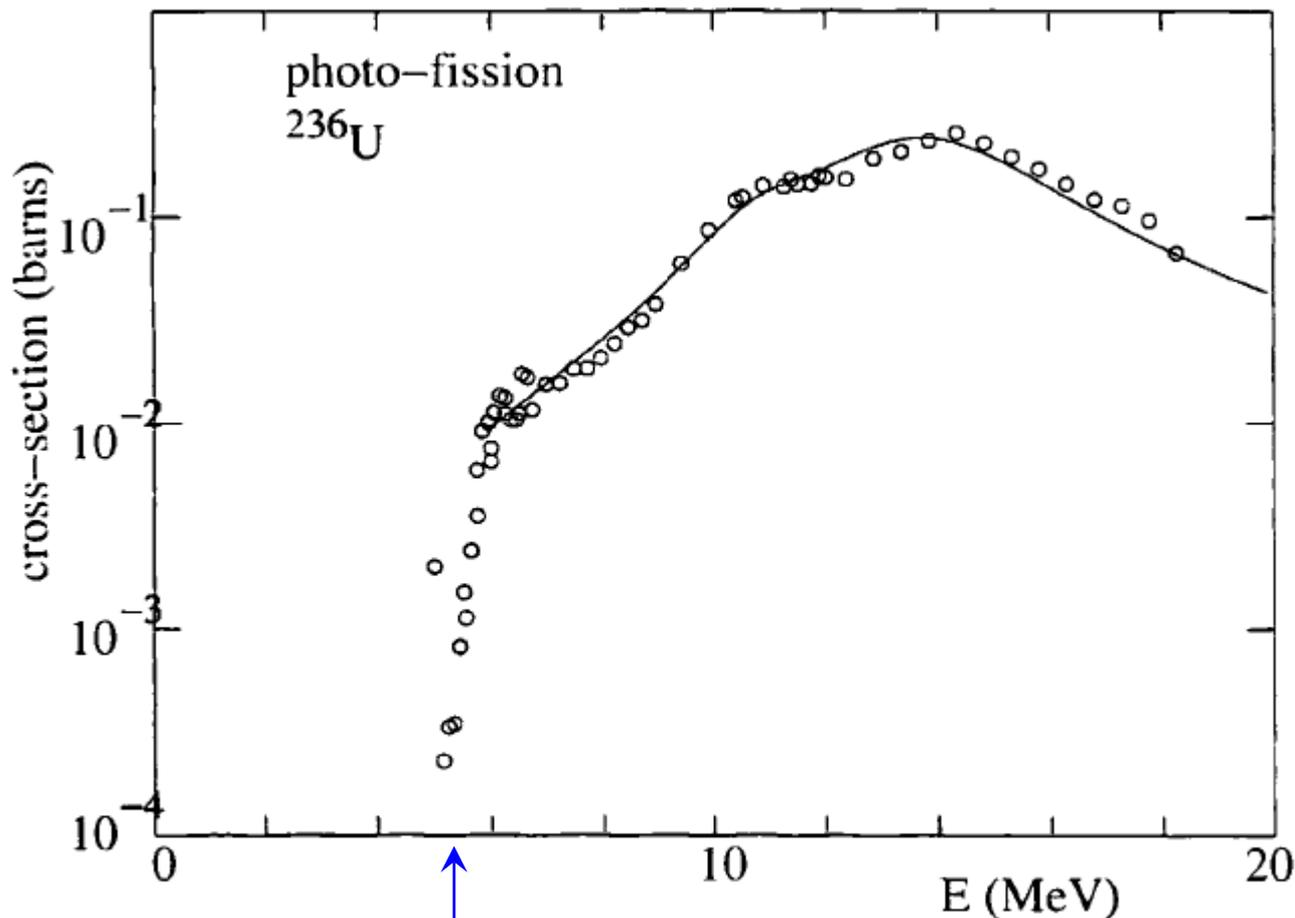


Fig. 6.5. Cross-section for  $\gamma^{236}\text{U} \rightarrow \text{fission}$  [30].

5.7 MeV

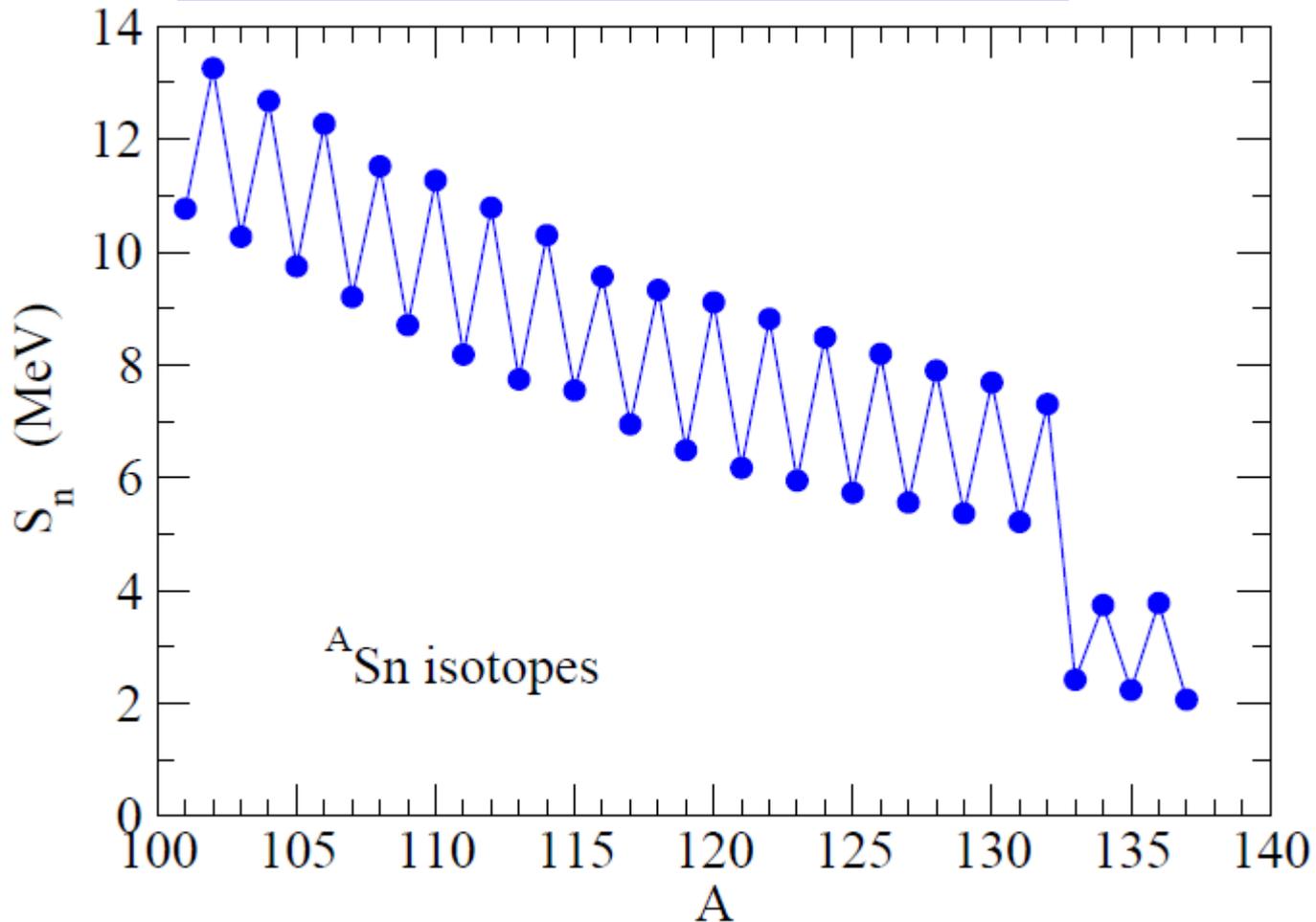
\*  $^{239}\text{U}$  の核分裂障壁の高さは同程度 (6.0 MeV)

## $^{236}\text{U}$ と $^{239}\text{U}$ で大きく違うのが1中性子分離エネルギー

$$S_n(^{236}\text{U}) = 6.3 \text{ MeV}$$

$$S_n(^{239}\text{U}) = 4.8 \text{ MeV}$$

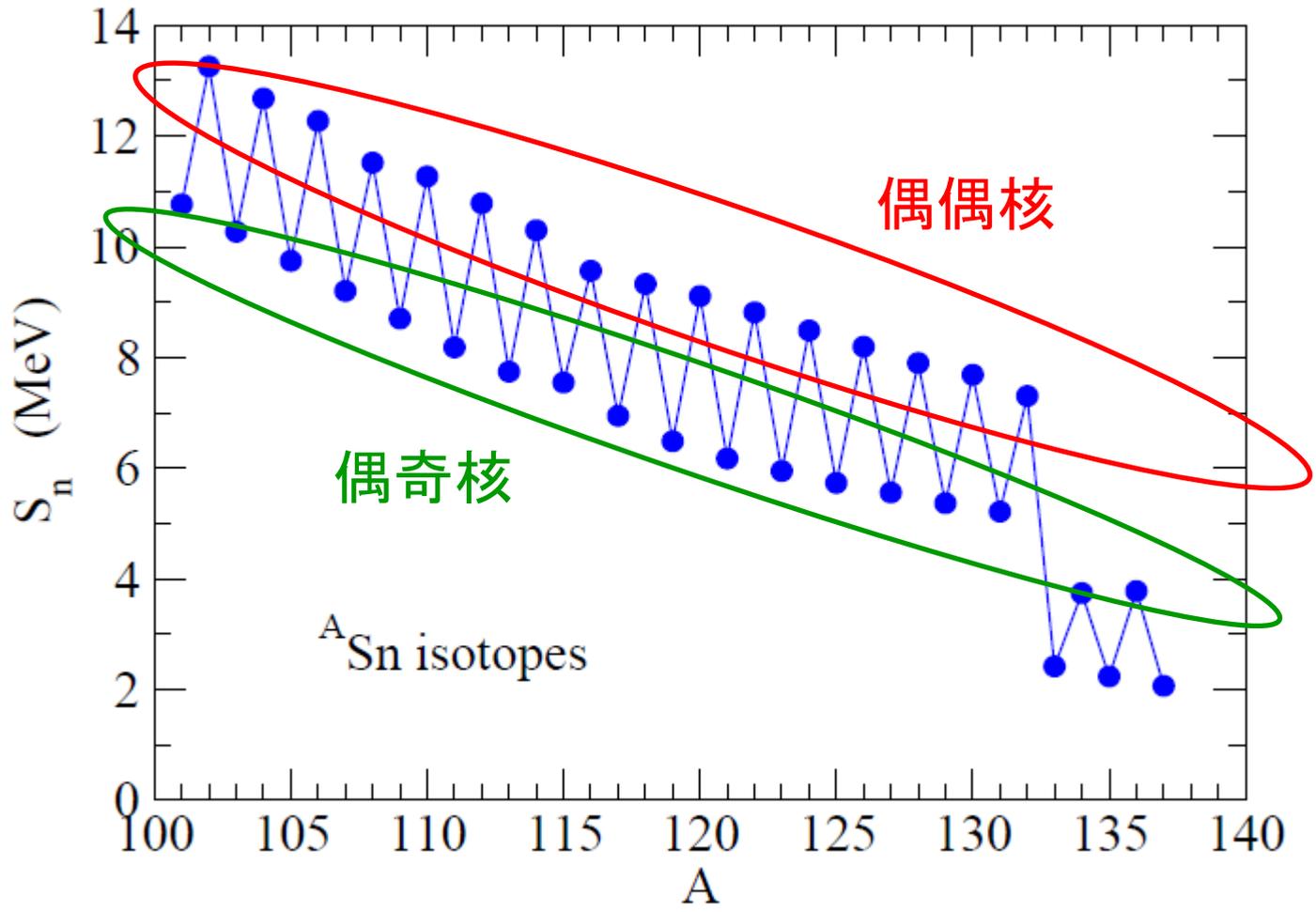
### 分離エネルギーにおける偶奇効果



1n separation energy:  $S_n(A,Z) = B(A,Z) - B(A-1,Z)$

偶数個の中性子から1つ中性子  
を取る方が奇数個から取るより  
大きなエネルギーが必要: 対相関

even-odd staggering



1n separation energy:  $S_n (A,Z) = B(A,Z) - B(A-1,Z)$

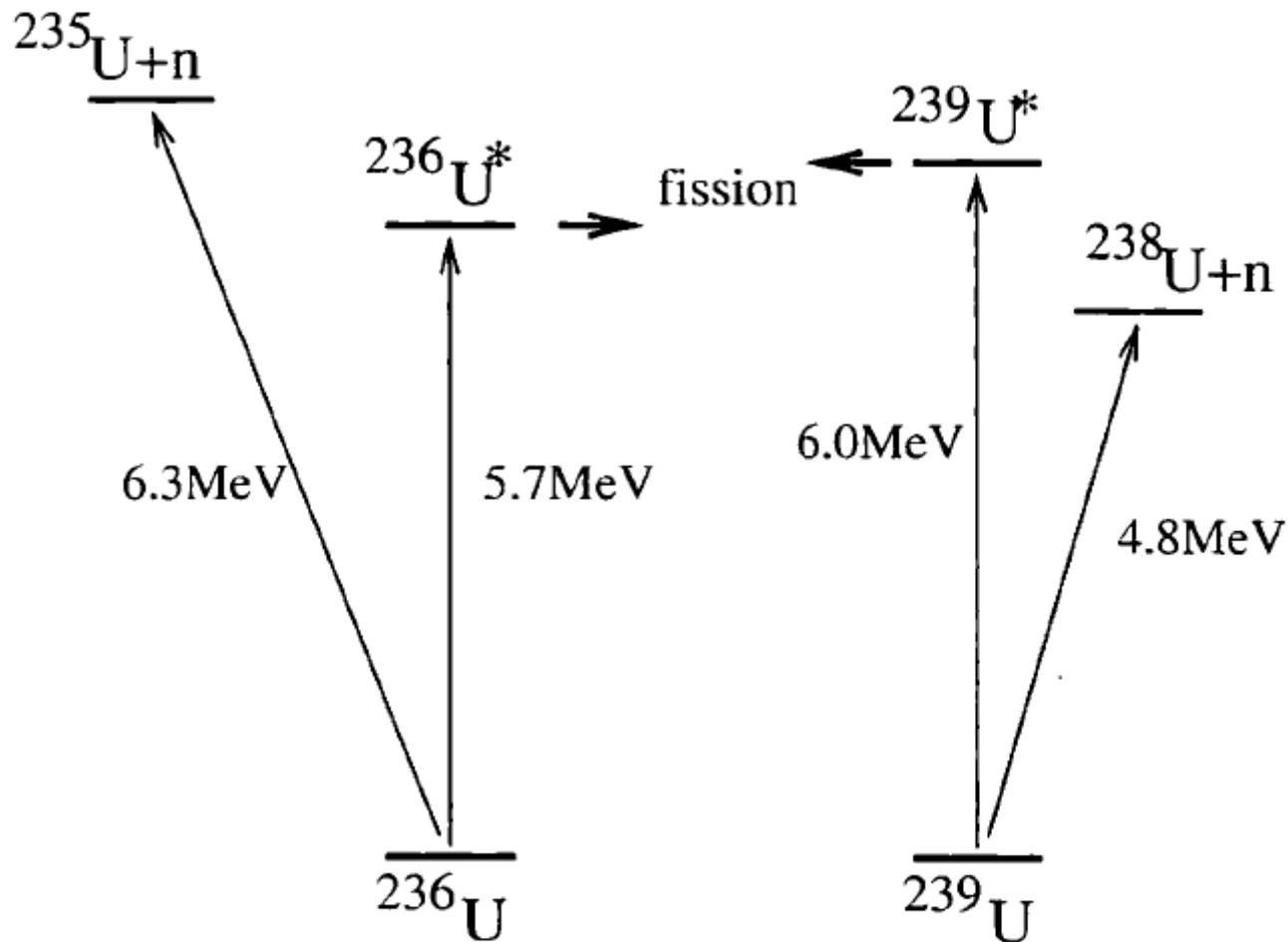
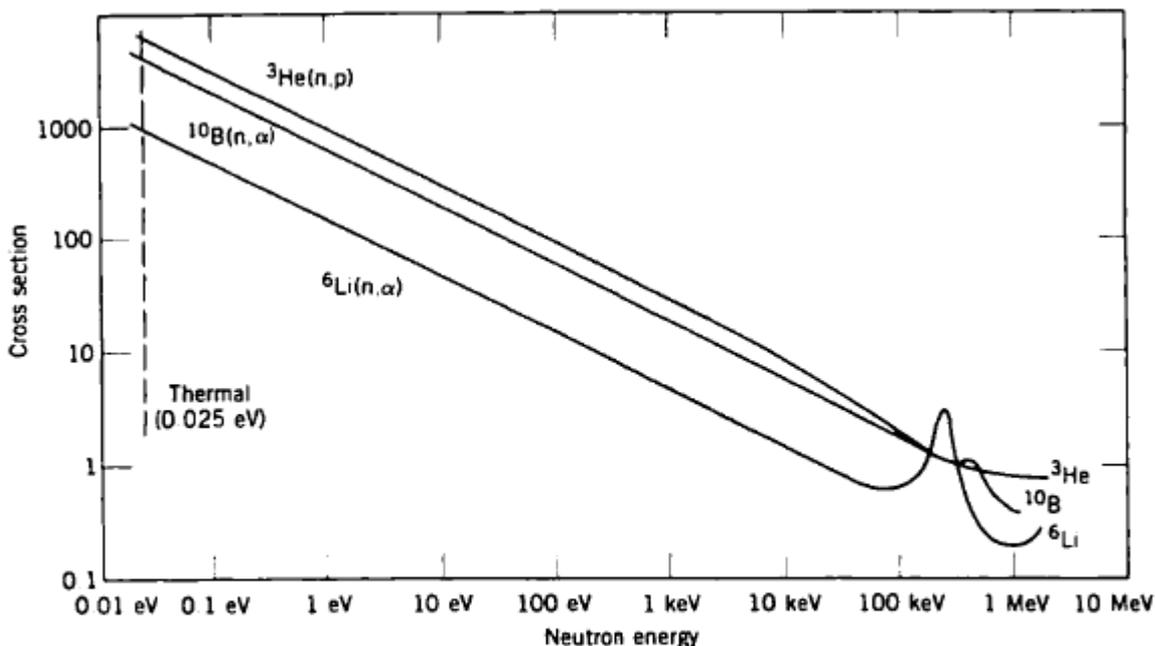


Fig. 6.6. Levels of the systems  $A = 236$  and  $A = 239$  involved in the fission of  $^{236}\text{U}$  and  $^{239}\text{U}$ . The addition of a motionless (or thermal) neutron to  $^{235}\text{U}$  can lead to the fission of  $^{236}\text{U}$ . On the other hand, fission of  $^{239}\text{U}$  requires the addition of a neutron of kinetic energy  $T_n = 6.0 - 4.8 = 1.2 \text{ MeV}$ .

核分裂障壁の高さと1中性子分離エネルギーの関係

- 中性子の入射エネルギーをあげると核分裂障壁を越えれる<sup>239</sup>U の励起状態を作ることができるが、今度は中性子吸収の確率が小さくなって核分裂の効率が落ちる。



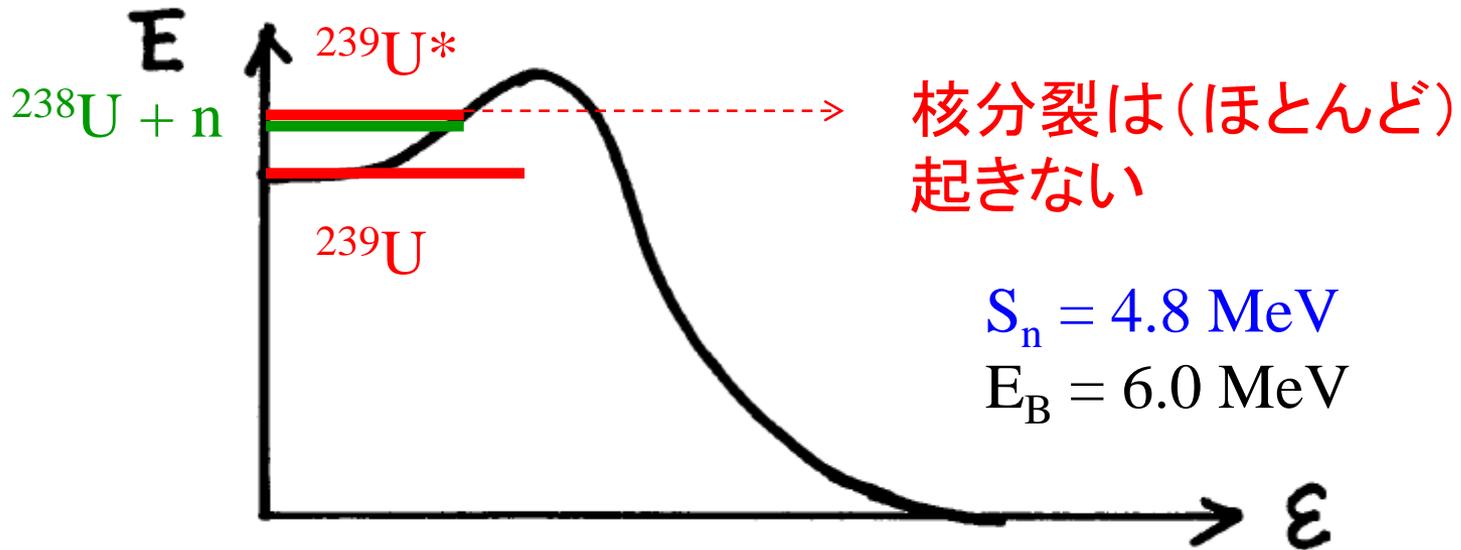
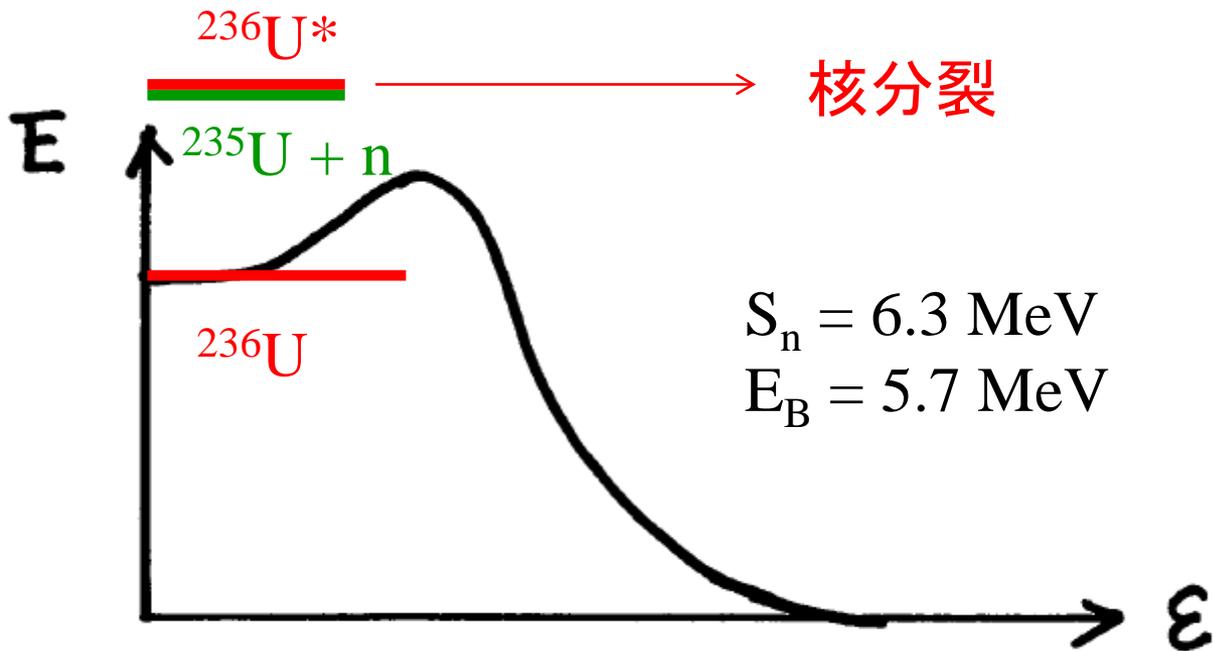
\* 1 b = 100 fm<sup>2</sup>

**Figure 12.5** Neutron cross sections for <sup>3</sup>He(n,p), <sup>10</sup>B(n,α), and <sup>6</sup>Li(n,α). The cross section shows the 1/v behavior for  $E < 1$  keV, but begins to show resonances above 100 keV.

吸収断面積は  $1/v$  に比例 ( $1/v$  則)

熱中性子 (0.025 eV) による核分裂断面積: 532 +/- 4 (b)

速い中性子 (~ 1 MeV) による核分裂断面積: 0.29 (b)

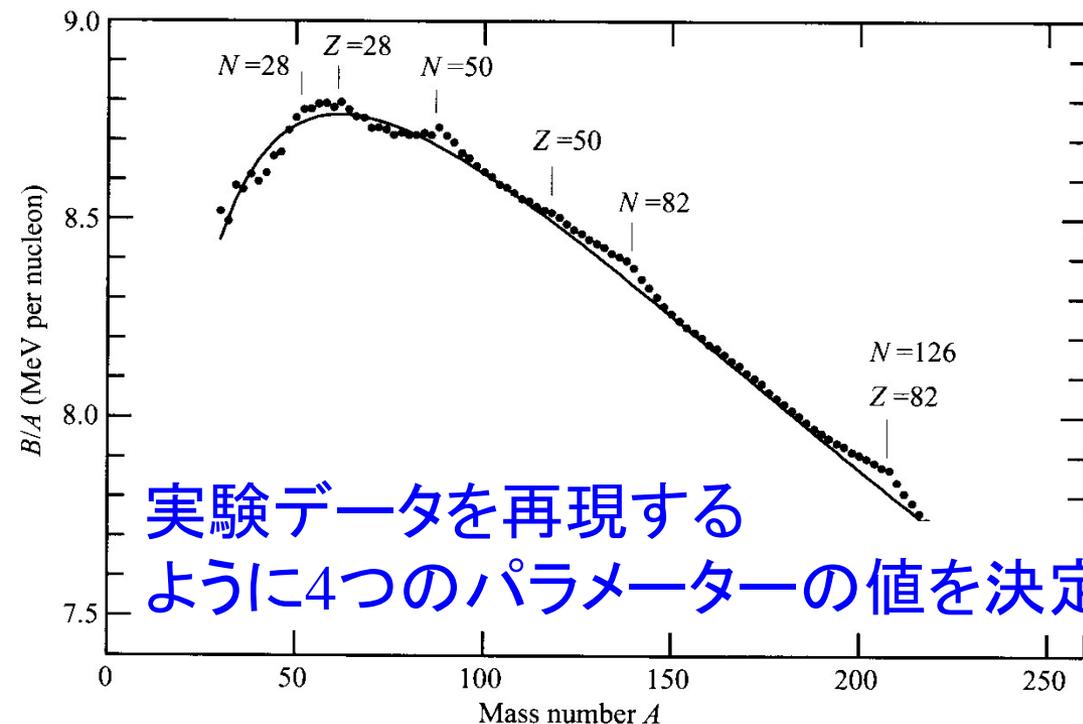


# 原子核の殻構造

$$m(N, Z)c^2 = Zm_p c^2 + Nm_n c^2 - B$$

(Bethe-Weizacker 質量公式: 液滴模型)

$$B(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}$$



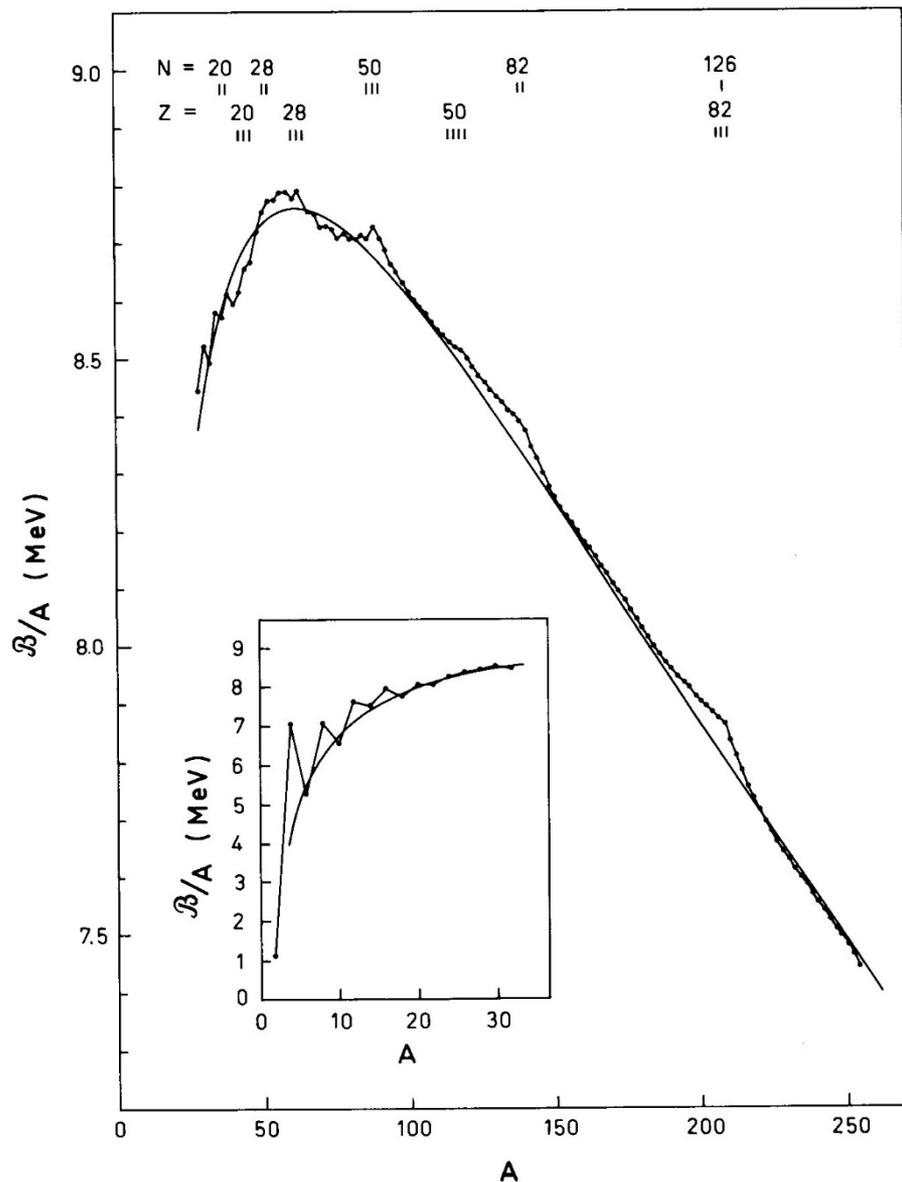
✓ 大体OK、  
だけど所々にずれ

✓  $N, Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$  (魔法数) に対して  
束縛エネルギー大

→ 「殻構造」

# 殻構造

$$B(N, Z) = B_{\text{macro}}(N, Z) + B_{\text{micro}}(N, Z)$$



## • スムーズな関数

$$B_{\text{macro}}(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}$$

## • ゆらぎ (2つの起源)

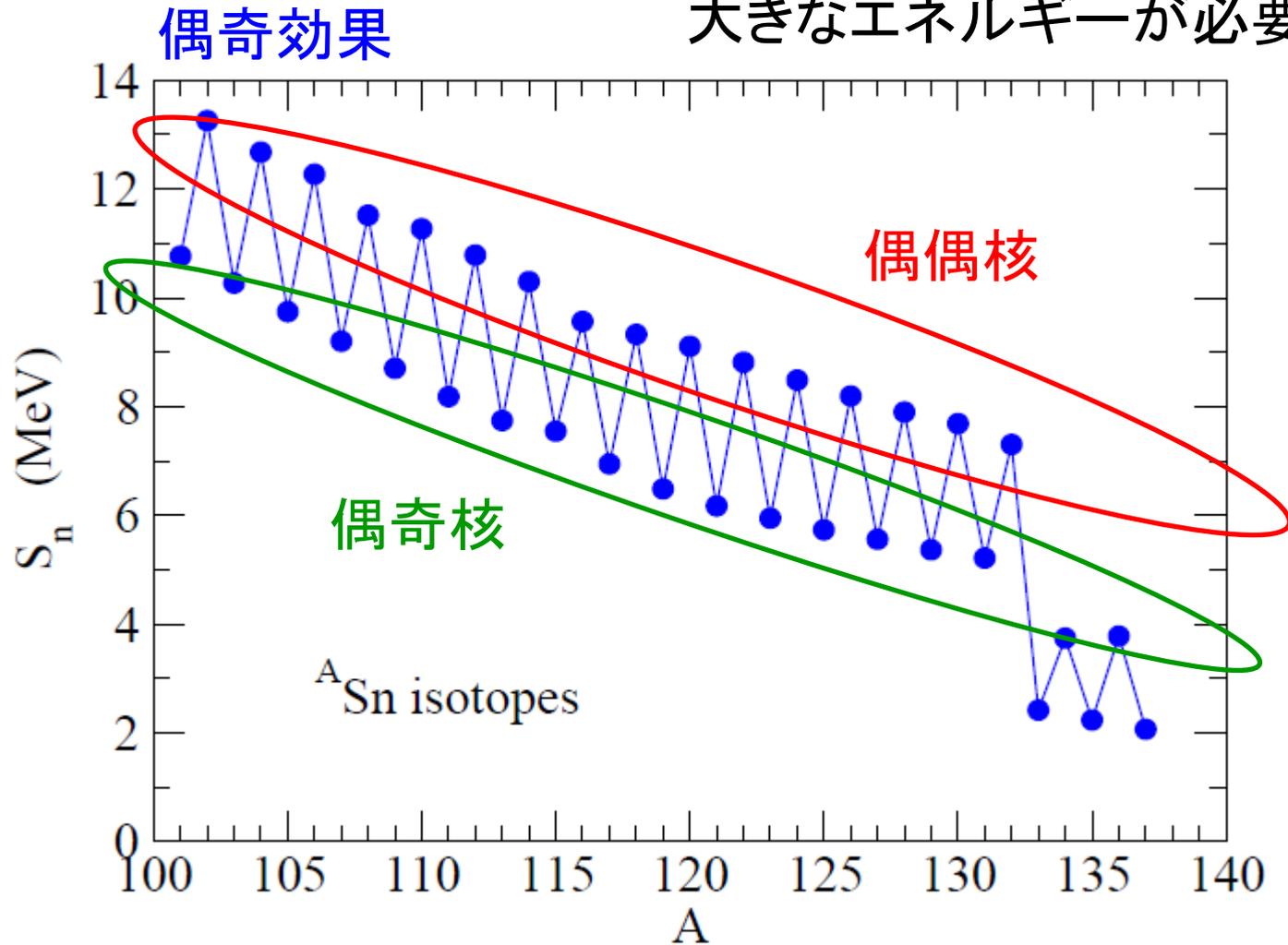
$$B_{\text{micro}} = B_{\text{pair}} + B_{\text{shell}}$$

液滴模型:

$$B_{\text{LDM}} = B_{\text{macro}} + B_{\text{pair}}$$

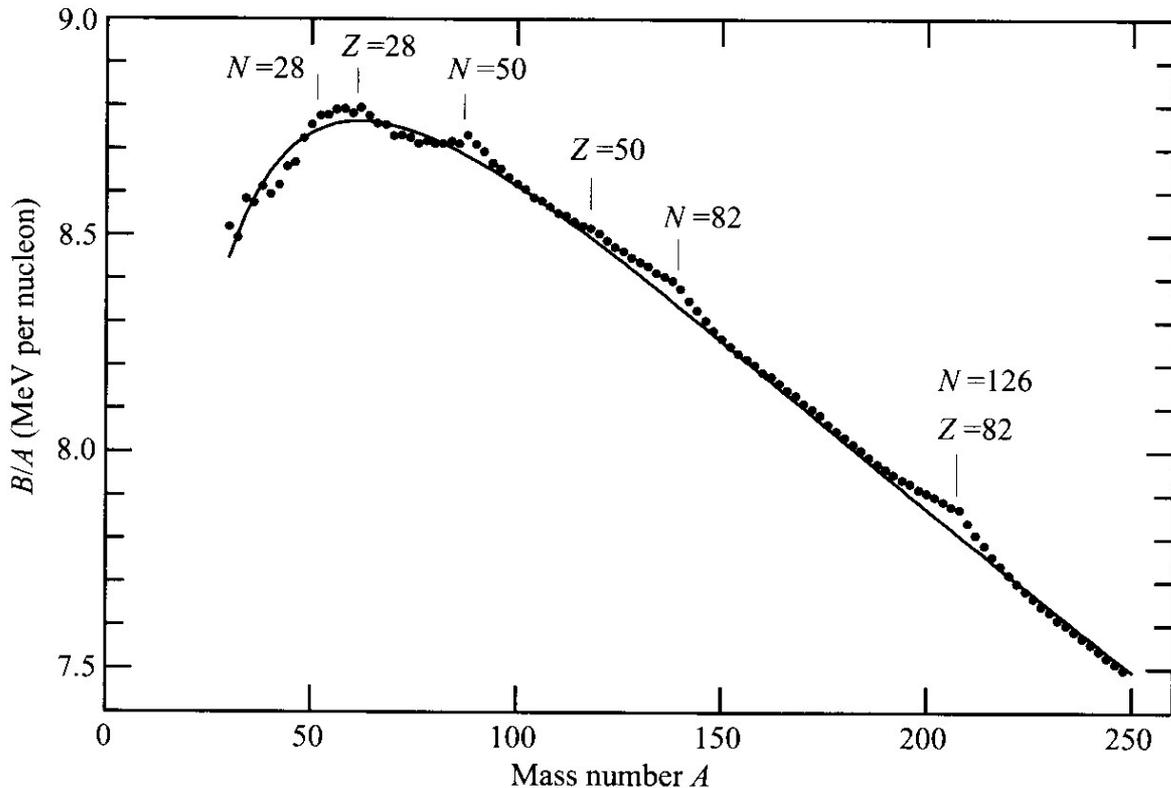
# 対相関エネルギー

偶数個の中性子から1つ中性子  
を取る方が奇数個から取るより  
大きなエネルギーが必要: 対相関



対相関に関してはまた後で(これが2重 $\beta$ 崩壊で重要になる)

# 殻エネルギー



$N, Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$  (魔法数) に対して束縛エネルギー大

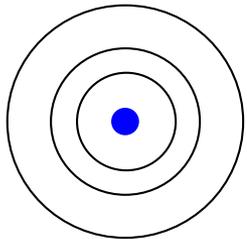
⇒ 陽子、中性子ともに魔法数だと、とても安定:



二重魔法数核

# (note) 原子の魔法数 (貴ガス)

He (Z=2), Ne (Z=10), Ar (Z=18), Kr (Z=36), Xe (Z=54), Rn (Z=86)



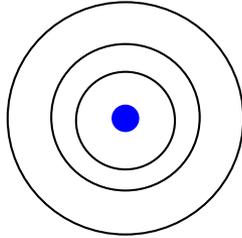
殻構造

原子核の周りを  
回る電子の軌道が  
埋まると安定に  
なる



## (note) 原子の魔法数 (貴ガス)

He (Z=2), Ne (Z=10), Ar (Z=18), Kr (Z=36), Xe (Z=54), Rn (Z=86)



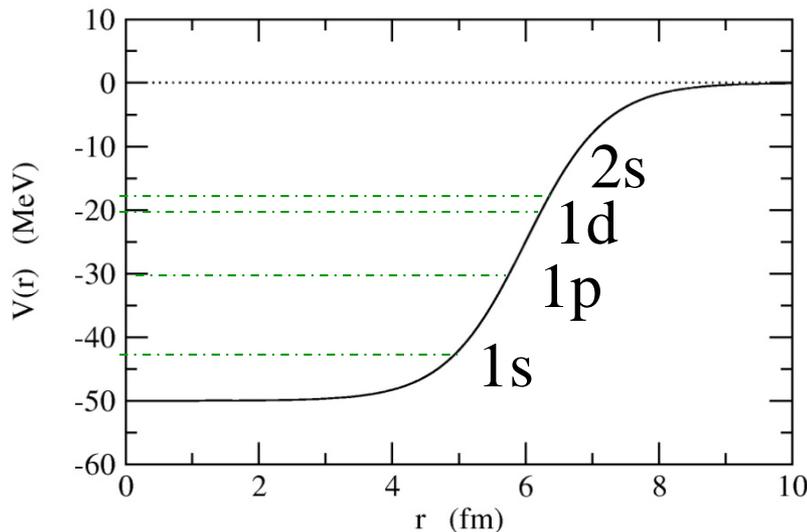
殻構造

原子核の周りを回る電子の軌道が埋まると安定になる

原子核物理における似た試み: ポテンシャル中の独立粒子運動

## Woods-Saxon ポテンシャル

$$V(r) = -V_0/[1 + \exp((r - R_0)/a)]$$



$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) - \epsilon \right] \psi(\mathbf{r}) = 0$$

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \chi_{m_s}$$

縮退度に応じて下のレベルから核子を順々につめていく

# 彦坂忠義

世界に先駆けて原子核の殻模型を提唱  
原子力に関する先駆的な研究（原子炉の彦坂模型の提案）

写真提供：彦坂忠義

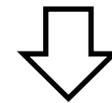
あまりにも研究の時期が「早すぎた」ため  
偉大な業績が歴史に埋もれてしまった悲運の科学者 *Hidesaburo Yatsugaki*

- 1902 愛知県瀬尾郡（現豊橋市）に生まれる **1902-1989**
- 1920 旧制第二高等学校（仙台）入学
- 1926 東北帝国大学理学部物理学科卒業  
東北帝国大学副手
- 1934 原子核の殻模型の提唱
- 1939 旧制山口高等学校教授
- 1941 大阪大学秦池正士研究室に内地留学
- 1943 旧制第二高等学校教授
- 1944 原子核の彦坂模型の提案
- 1945 旅順工科大学教授
- 1949 岩手大学教授
- 1951 新潟大学理学部教授
- 1968 東北学院大学教授（～1977）
- 1989 逝去

## 彦坂忠義(1902 – 1989)

1934 年

殻模型の考えに基づき  
計算を行う

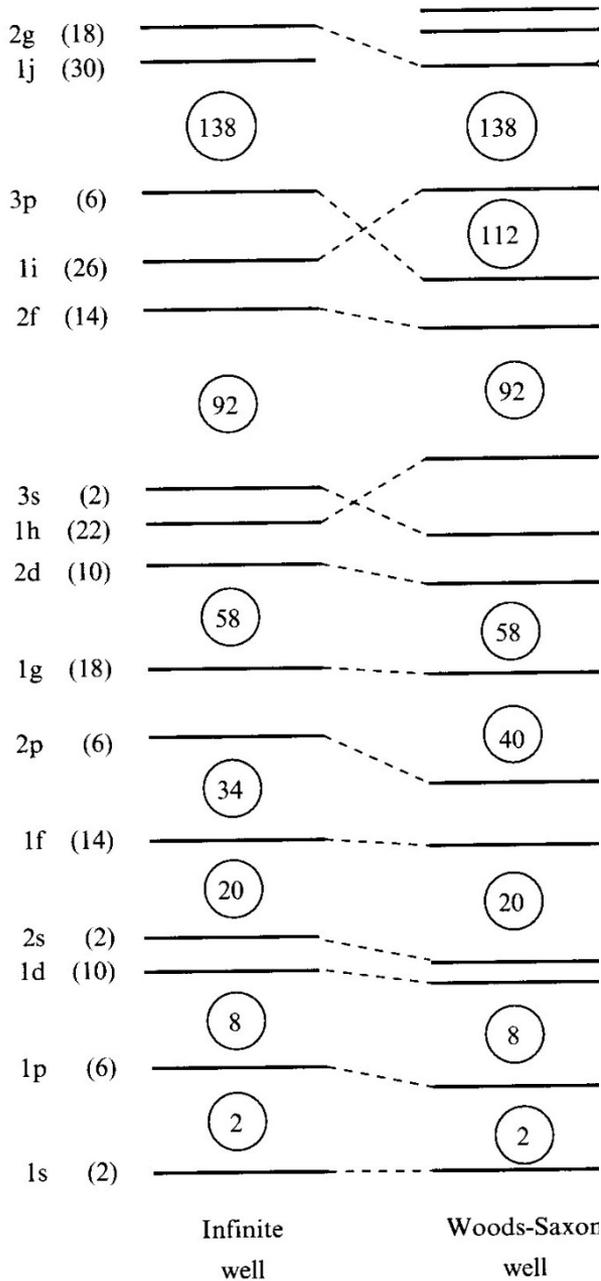


中性子の分離エネルギー、  
原子核の安定領域、  
磁気モーメント

など当時測定されていた  
実験データをきれいに説明

（ただし、当時、殻模型の  
考えは受け入れられなかつた。）

Phys. Rev. に論文を reject をされる。  
独語に書き直し、東北大紀要に発表。



Woods-Saxon ポテンシャルのみでは  
魔法数 (2,8,20,28,50,82,126) が正しく  
出ない. (2,8,20 のみ正しく出る)

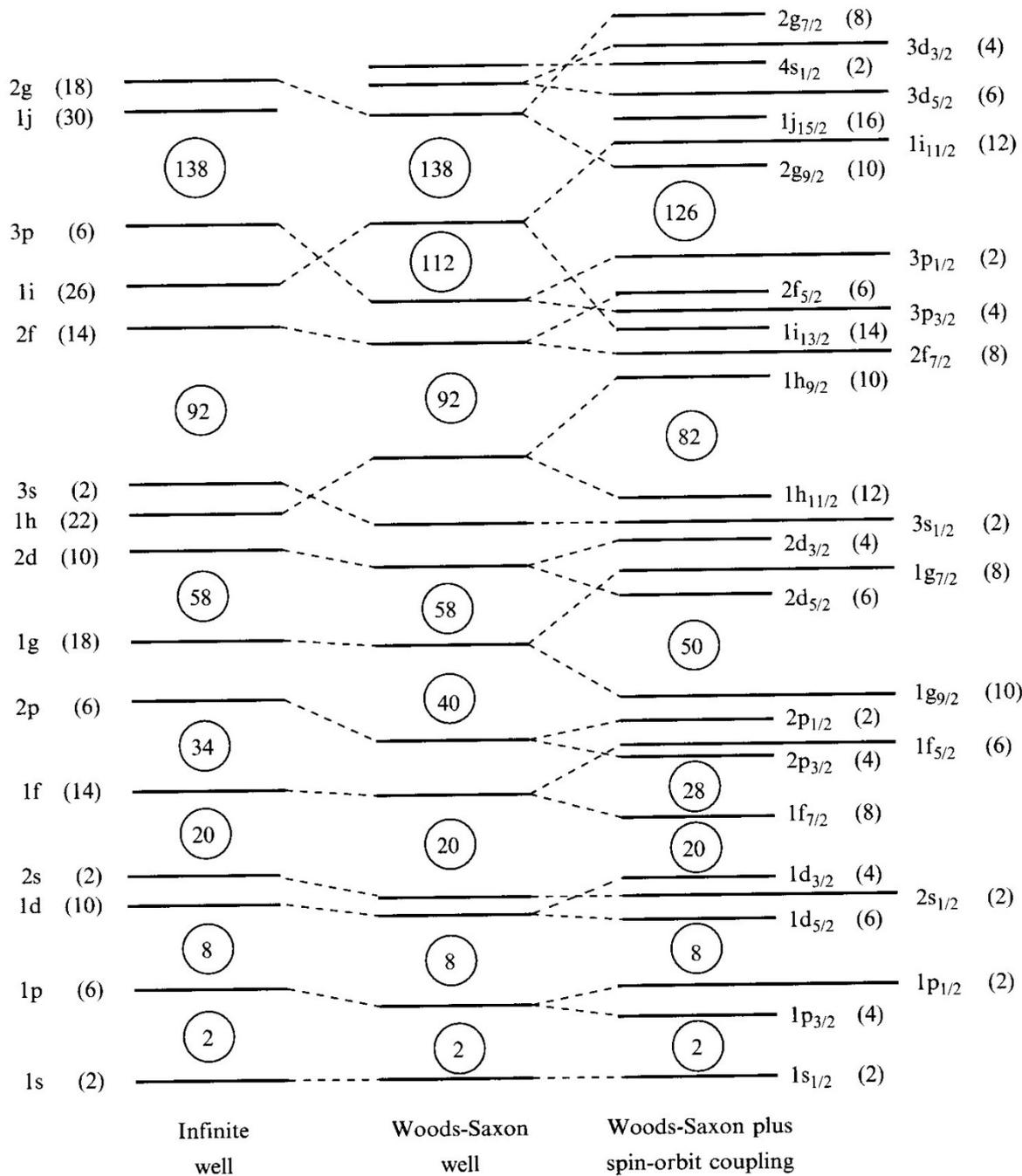
ポテンシャルを変えても同じ結論



マイヤーとイェンセン (1949):  
強いスピン・軌道力

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) + V_{ls}(r) \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} - \epsilon \right] \psi(\mathbf{r}) = 0$$

$$V_{ls}(r) \sim -\lambda \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \quad (\lambda > 0)$$



ノートーション:

例) 2p<sub>3/2</sub>

2番目の (j,l)=(3/2,1)

軌道

s,p,d,f,g,h,i,....

l=0,1,2,3,4,5,6,....

## 出席の代わりに授業アンケート

学籍番号、名前、所属研究室(所属大講座)

- ・今日の授業でわかりずらかったこと  
(もう一度説明して欲しいこと)
- ・今日の授業の内容で、もう少し掘り下げてほしいこと
- ・授業の感想
- ・今日の授業で初めて知ったことや、前から知っていたけど今日の授業で整理できたこと(忘れていたこと)

などを書いて下さい。