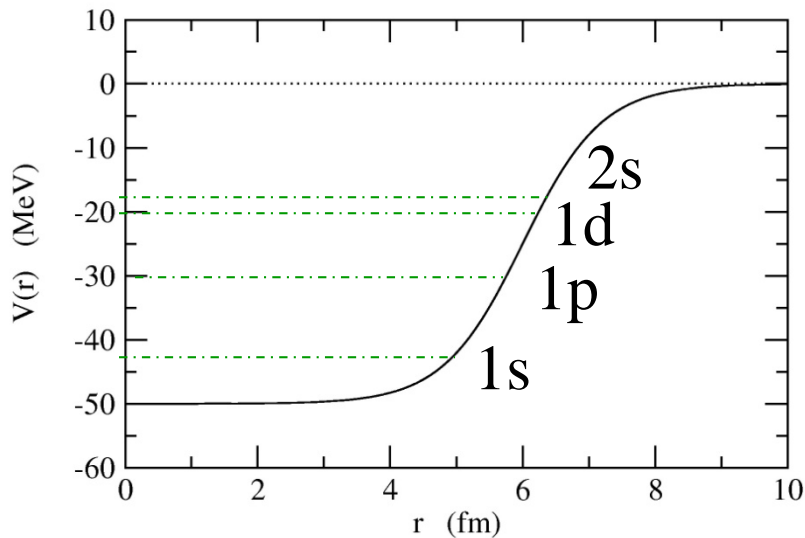


- 固有エネルギーや固有値はどうやって求めるのですか？
(1950年代に計算機が十分な性能があるとは思えない)

Woods-Saxon ポテンシャル



$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) - \epsilon \right] \psi(\mathbf{r}) = 0$$

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \chi_{m_s}$$

縮退度に応じて下のレベルから
核子を順番につめていく

✓ 数値的に求める

極めて初期の計算: Phys. Rev. 102 ('56) 1613

PHYSICAL REVIEW

VOLUME 102, NUMBER 6

JUNE 15, 1956

Nucleon Energy Levels in a Diffuse Potential*

A. A. ROSS,† HANS MARK, AND R. D. LAWSON

Department of Physics, University of California, Berkeley, California

(Received February 20, 1956)

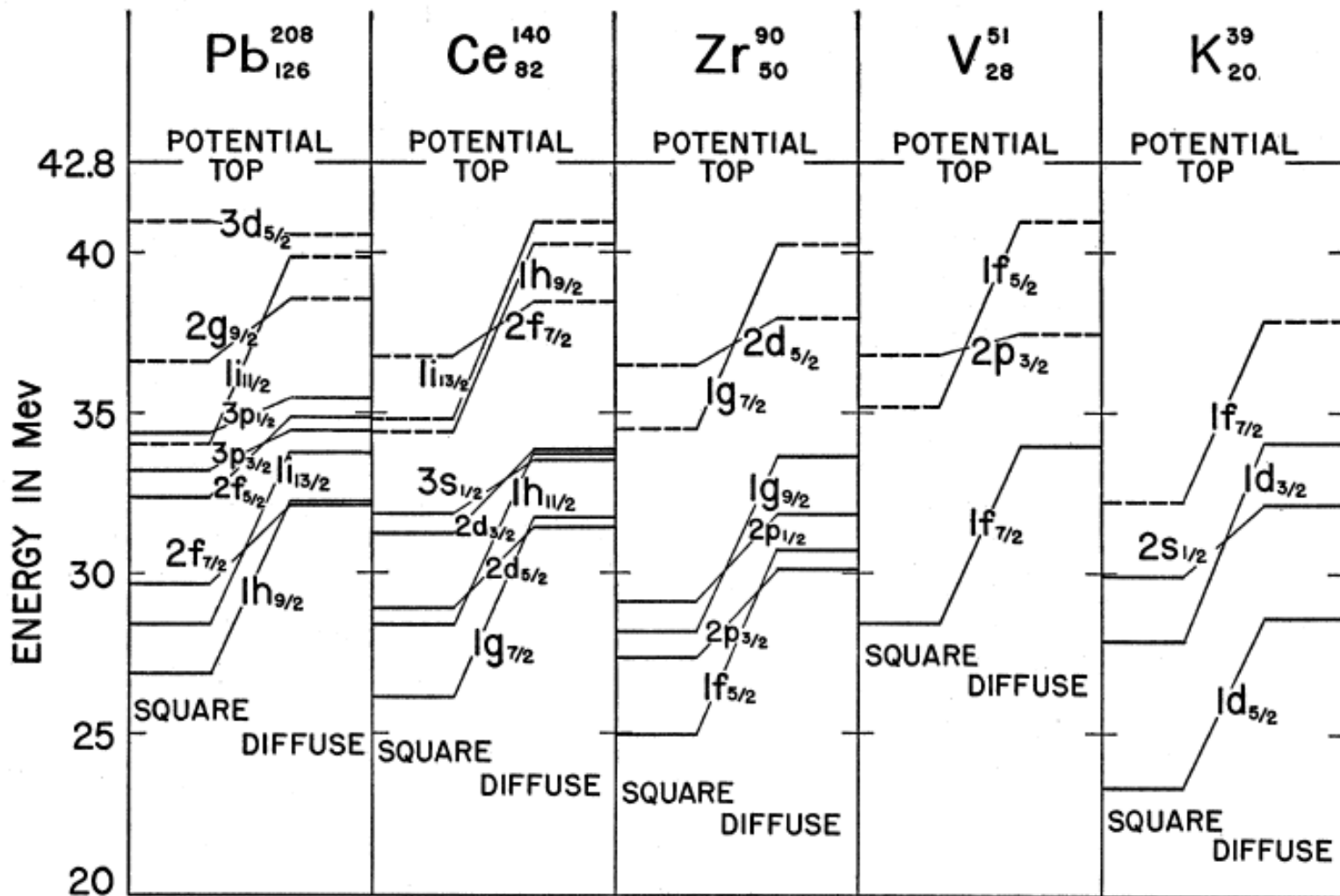
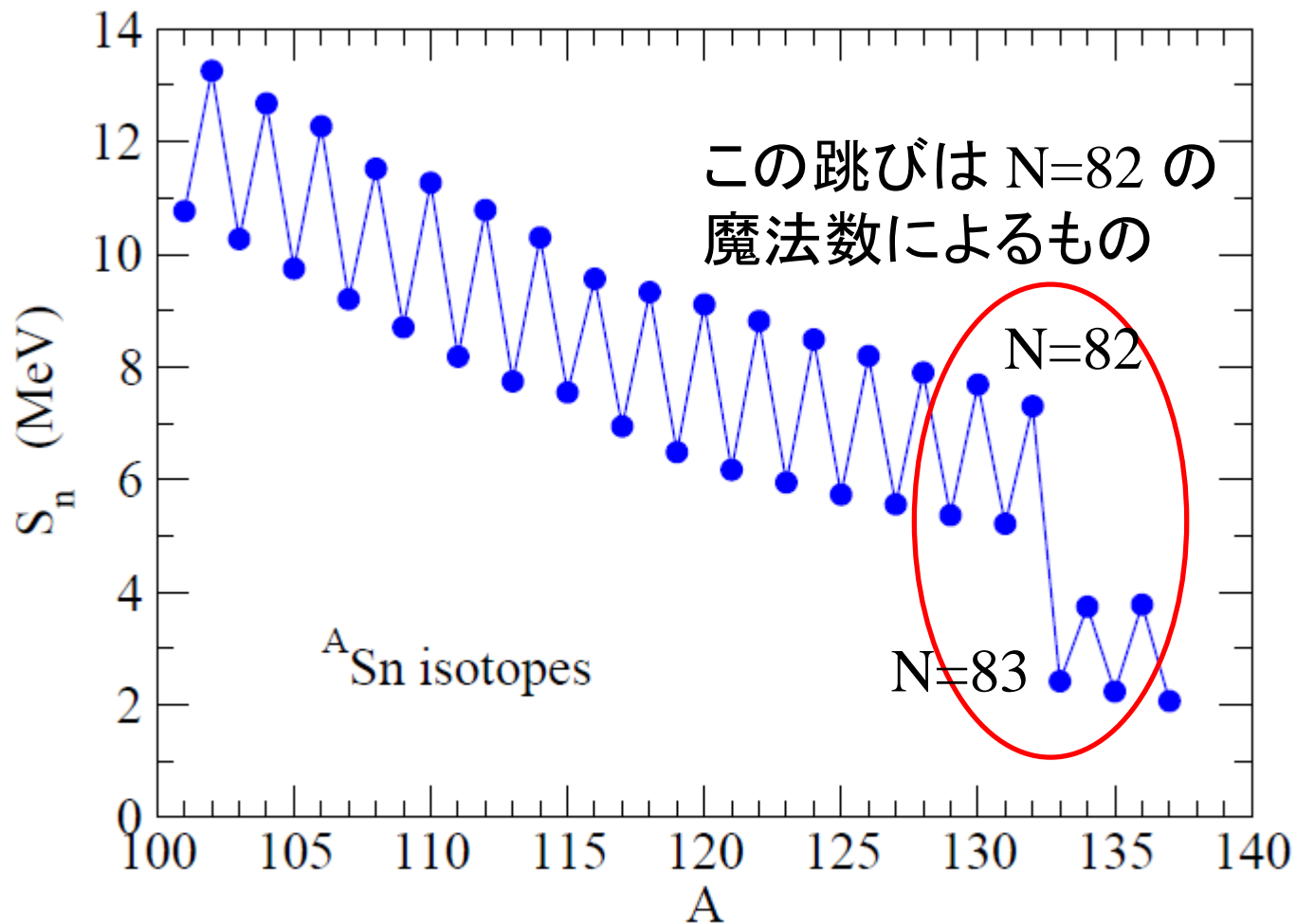


FIG. 1. Top neutron levels in nuclei with $N=20, 50, 82,$ and 126 . The diffuse well levels have been calculated for $V_0=42.8$ Mev, $\lambda=28.51$, $\alpha=2.098 \times 10^{13}$ cm^{-1} , and $r_0=1.3 \times 10^{-13}$ cm. The square well levels have been determined for the same $V_0, \lambda,$ and r_0 . The level shifts shown in this figure are less pronounced than those obtained with the smaller value of α in Fig. 4. The dotted lines indicate unfilled levels. Notice that the unfilled $1i_{11/2}$ level in Pb^{208} is actually below the top ($3p_{1/2}$) neutron level in the square well, a defect which is corrected by sloping the potential.

$\Delta E = 0.001$ MeV の精度で求めた(と論文の中で言っている)

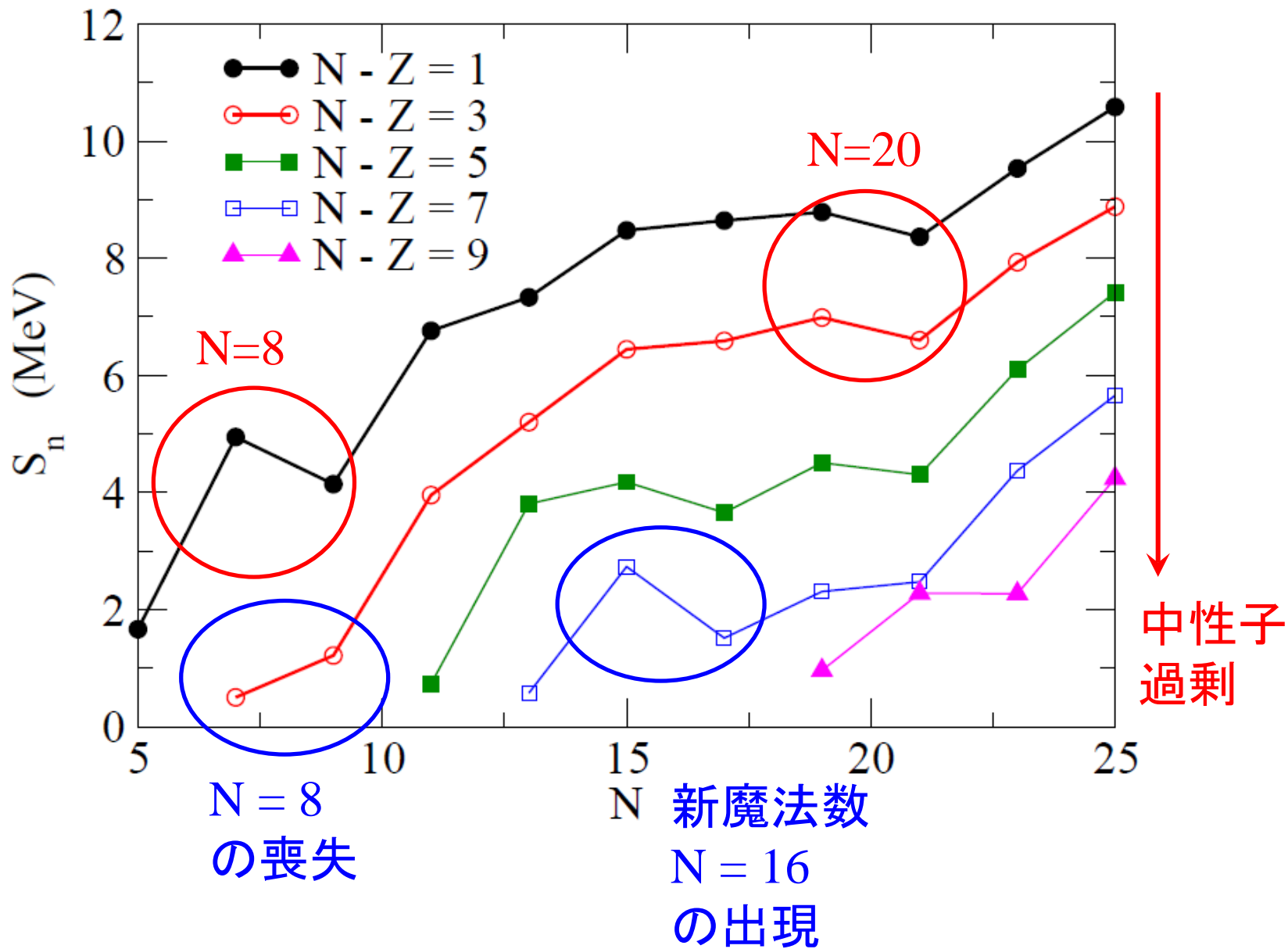
➤ S_n は魔法数ごとに不連続になるのでしょうか？



✓ はい、その通りです

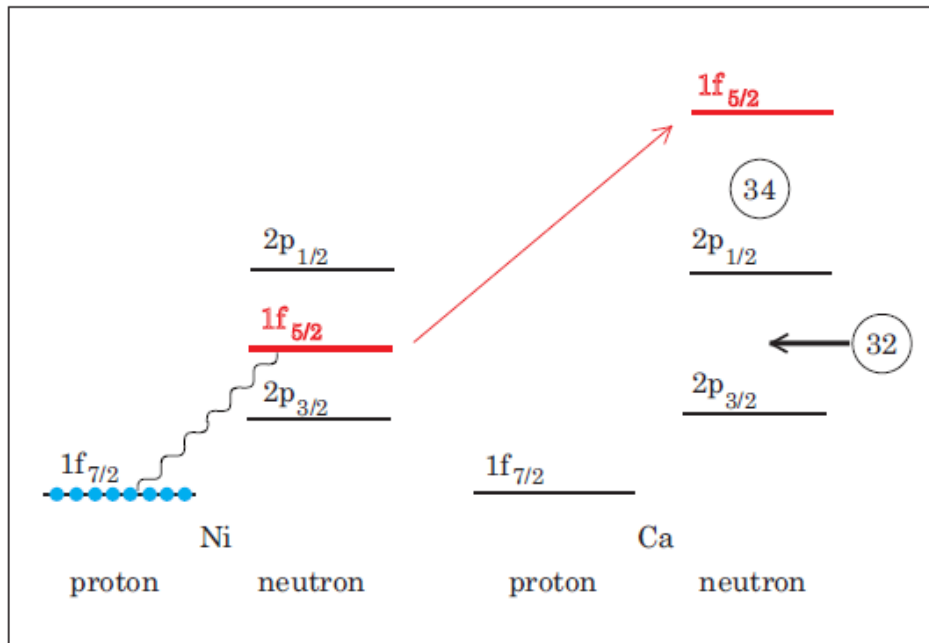
(ただし、実験的に見るのは難しいかもしれない)

中性子過剰核における魔法数の変化

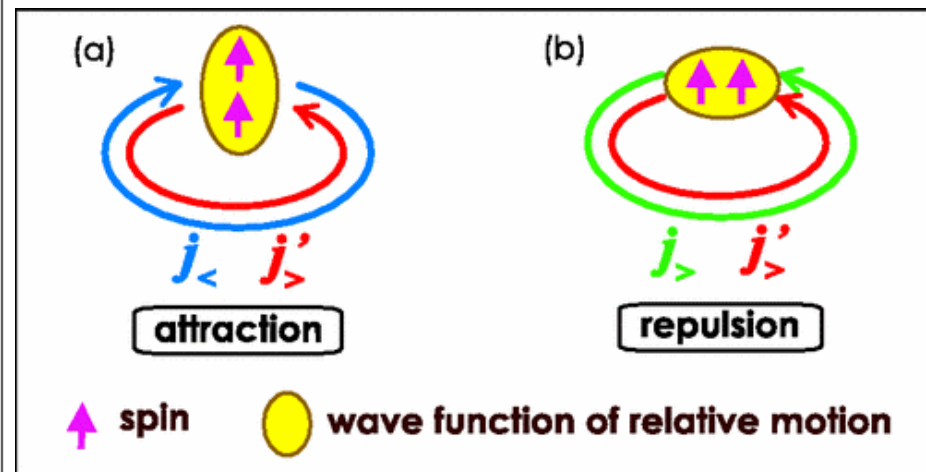


➤ 中性子過剰核で魔法数が変化するメカニズムは？

✓ pn 間のテンソル力の効果ではないかと言われています。

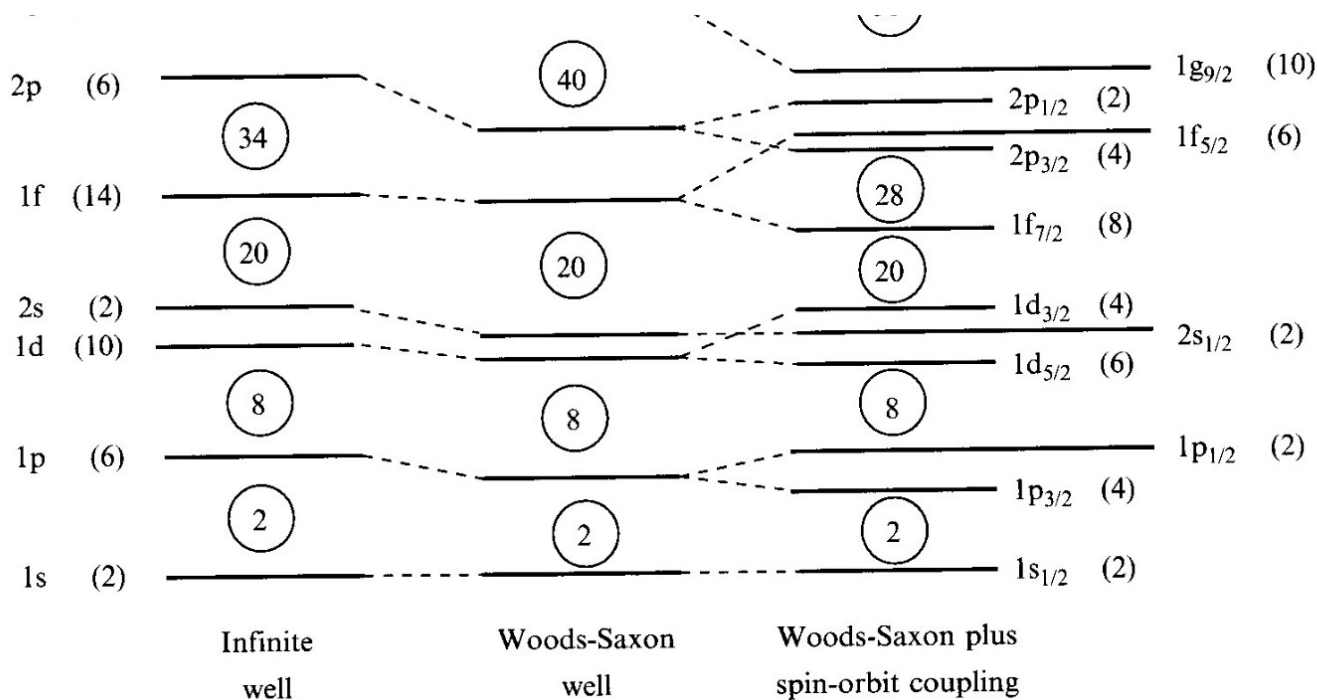


T. Otsuka et al.,
arXiv:1805.06501



T. Otsuka et al.,
PRL95 ('05) 232502

➤ 魔法数の説明でスピン軌道力が重要というのは、強い相互作用がスピンに関係しているからですか？



✓ その通りです。
核力はスピンの強く依存する。

核子間力にスピン軌道力がすでに存在する

←ディラック方程式で非相対論的極限をとると出てくる

➤ スピン軌道力があるとフント則は成り立ちますか？

✓ フント則はスピン軌道力が小さい場合のルールなので、スピン軌道力が大きいと成り立ちません。

原子の中の多電子 (LS結合スキーム)

$$L = l_1 + l_2 + \dots$$

$$S = s_1 + s_2 + \dots$$

$$\longrightarrow J = L + S$$

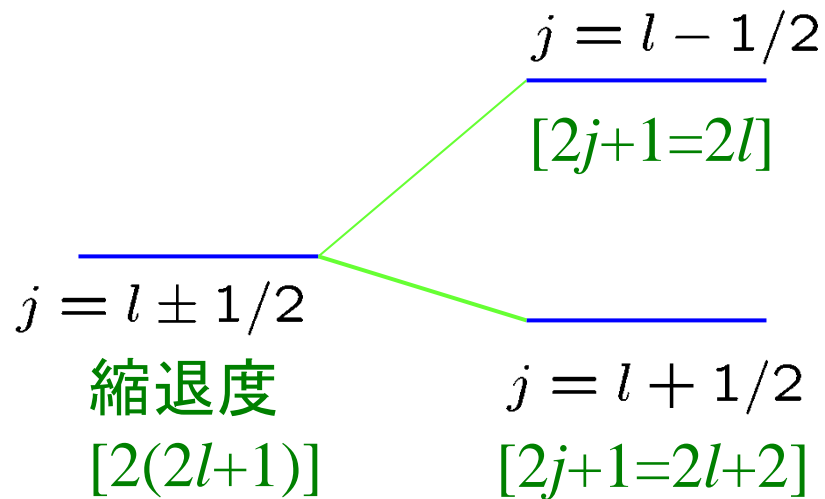
フント則は L, S の組み合わせのうち、どれがエネルギーが低くなるかというルール

原子核の中の多核子 (jj 結合スキーム)

$$j_i = l_i + s_i$$

$$\longrightarrow J = j_1 + j_2 + \dots$$

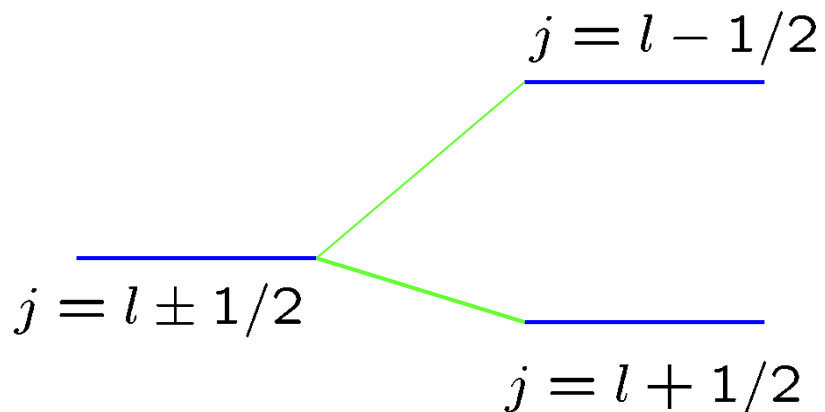
➤ 分離の大きさはどのように理論的に求められますか？



✓ 核子間力を理論で作れば、そこに入っているスピン軌道力から分離の大きさが(原理的には)求まる。

現実的には、実験データを再現するようにスピン軌道力のパラメータを決める。

➤ 何で $j = l + 1/2$ の方がエネルギーが下になるのですか？



✓ いい質問です。

原子の中の電子軌道 → $j = l - 1/2$ の方が下

現象論: $j = l + 1/2$ を下げた方が原子核の魔法数を説明できる

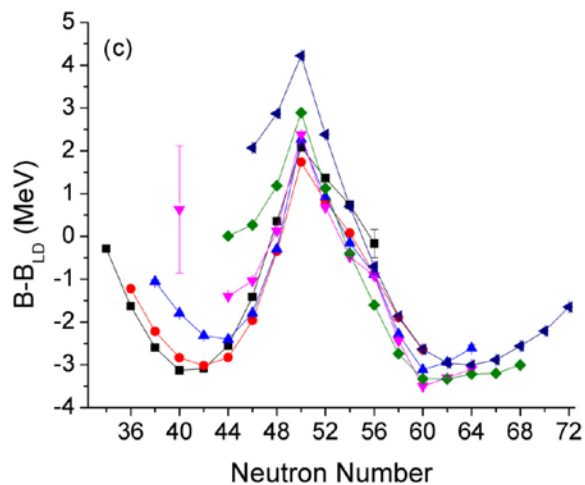
もう少し理論的には: ディラック方程式

電子 → 電磁場(フォトン)とのカップリング: ベクトル場

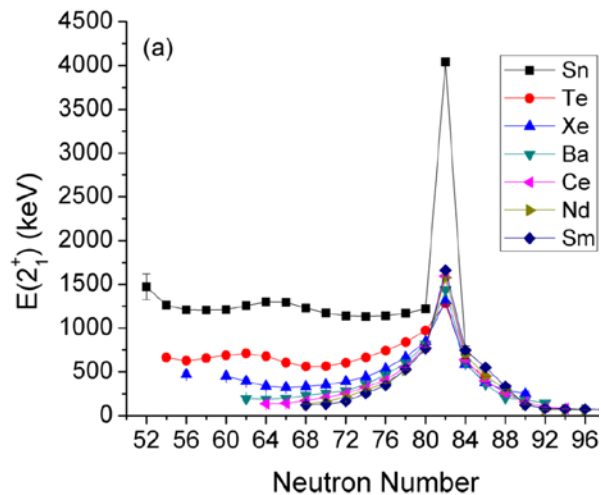
核子 → ベクターメゾン及びスカラーメゾンの交換

ベクターとスカラーの競合でスピン軌道力の符号が変わる

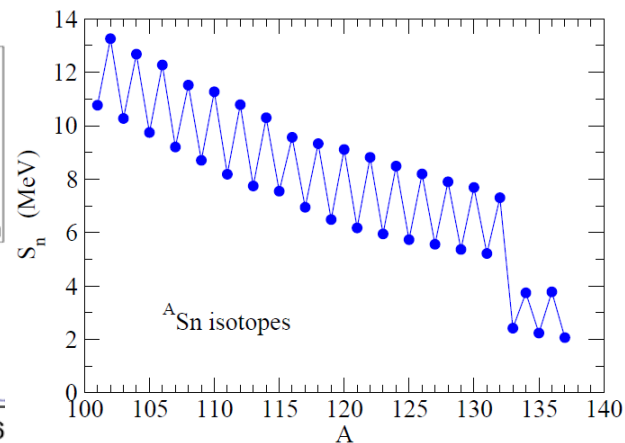
魔法数が関係している現象は他に何かあるか?



束縛エネルギー
の増大

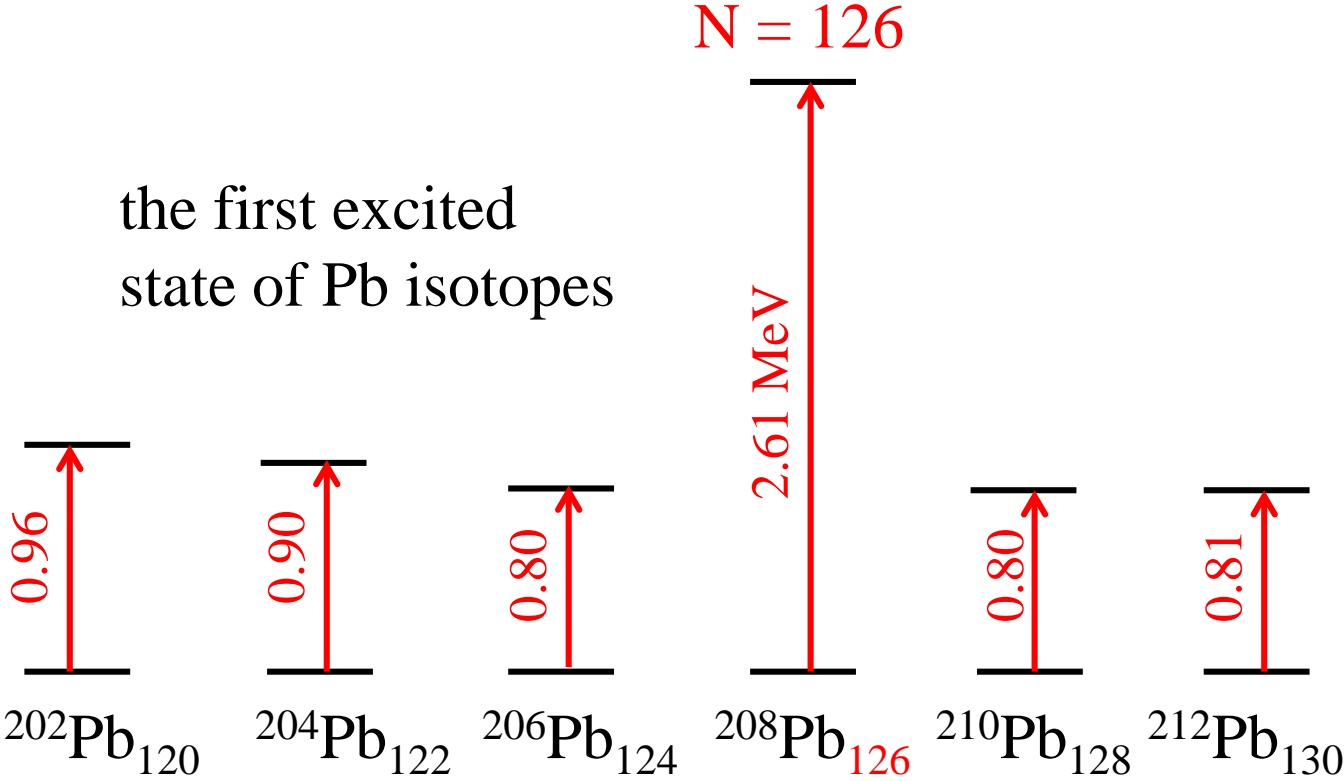


励起エネルギー
の増大

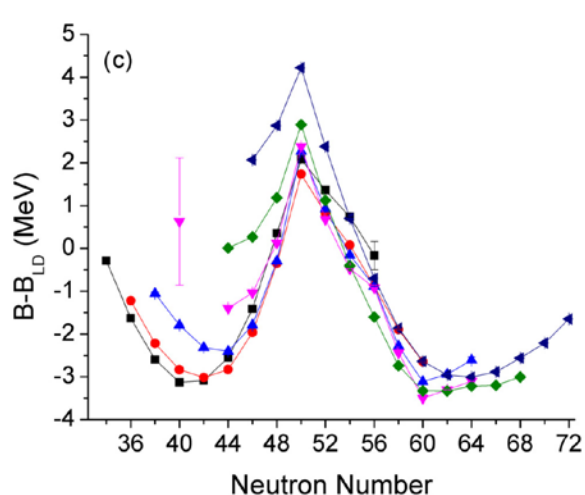


分離エネルギー
の跳び

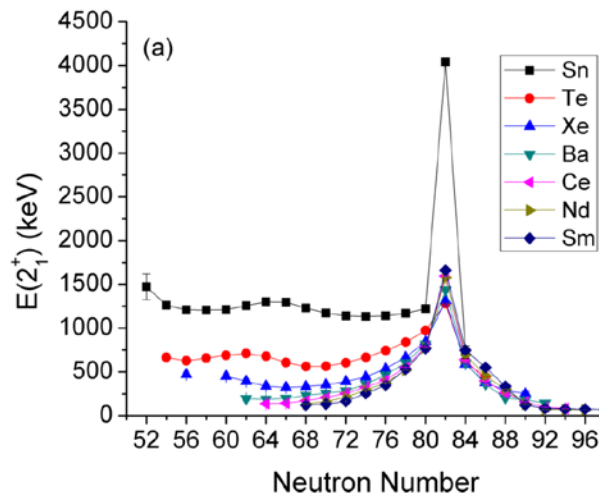
the first excited
state of Pb isotopes



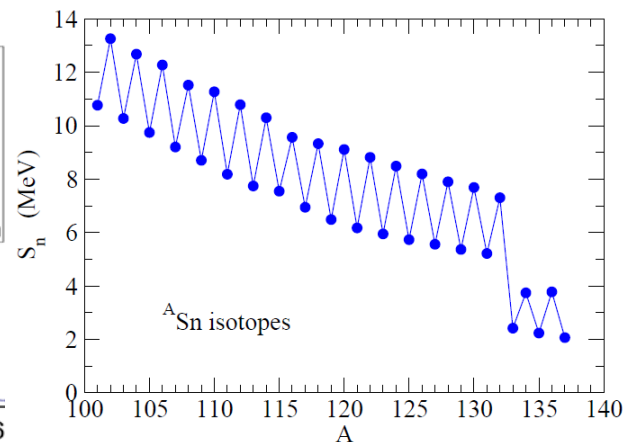
▶ 魔法数が関係している現象は他に何かあるか？



束縛エネルギー
の増大



励起エネルギー
の増大

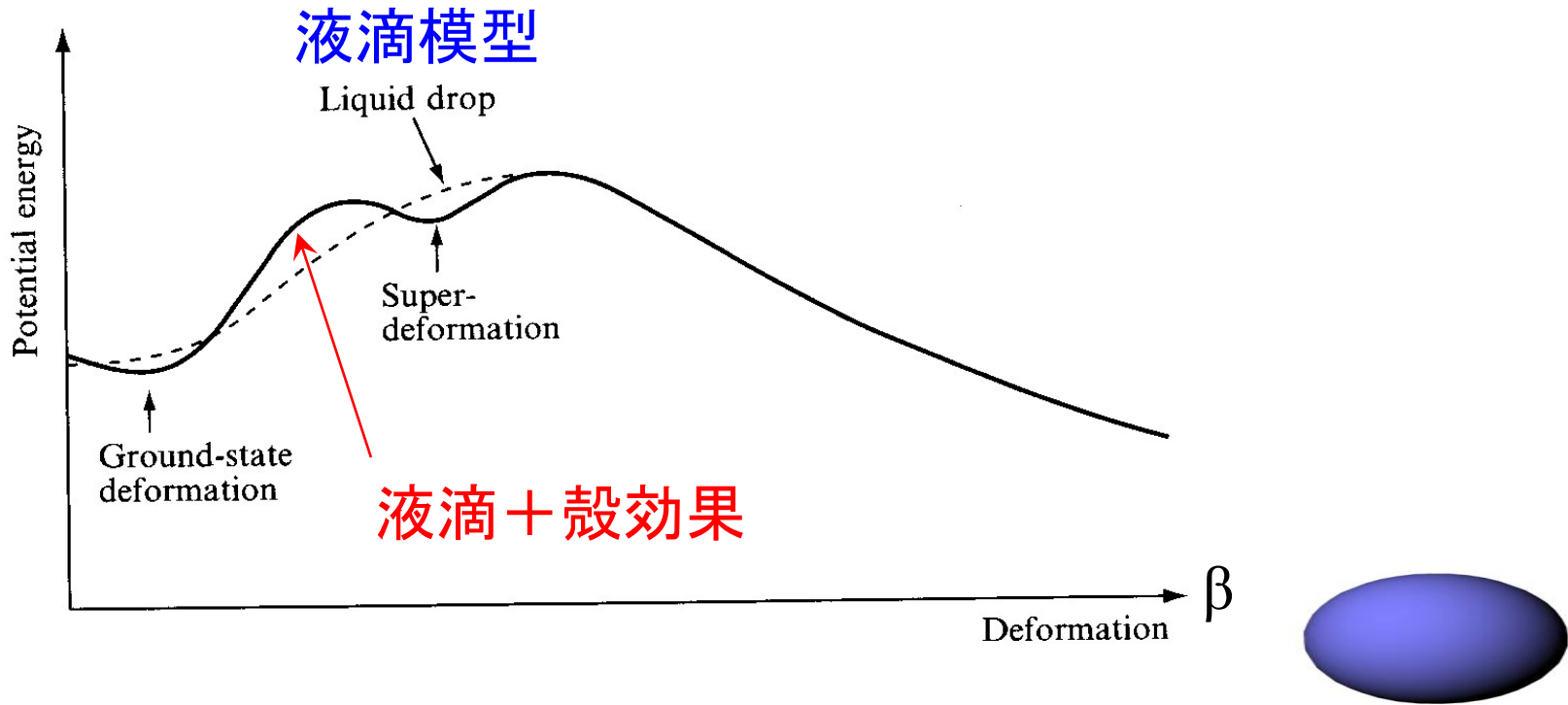


分離エネルギー
の跳び

✓他にも:

- 原子核の形が球形になる → 表面振動
- 自然界における元素存在比が大きくなる
- 中性子吸収断面積が小さくなる (元素合成で重要となる)

➤変形核の殻効果にそのまま同じ理論を用いてもいいのか？



✓いい質問です

変形度合いに応じて魔法数が変わります

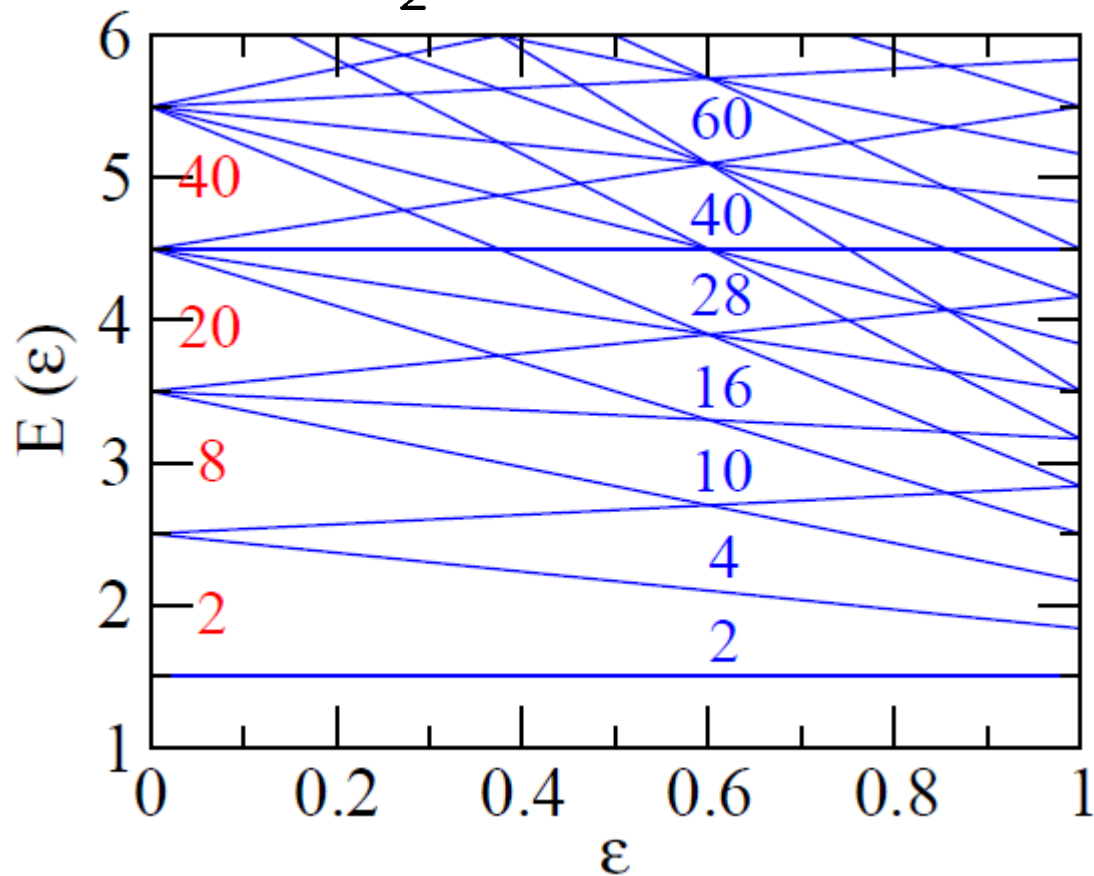
原子核が変形→核子が感じるポテンシャルも変形
→エネルギー・ギャップの出方が変化する

(変形の回の時にもう少し詳しく説明します)

例) 3次元調和振動子

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2 + \frac{1}{2}m\omega_{\perp}^2(x^2 + y^2)$$

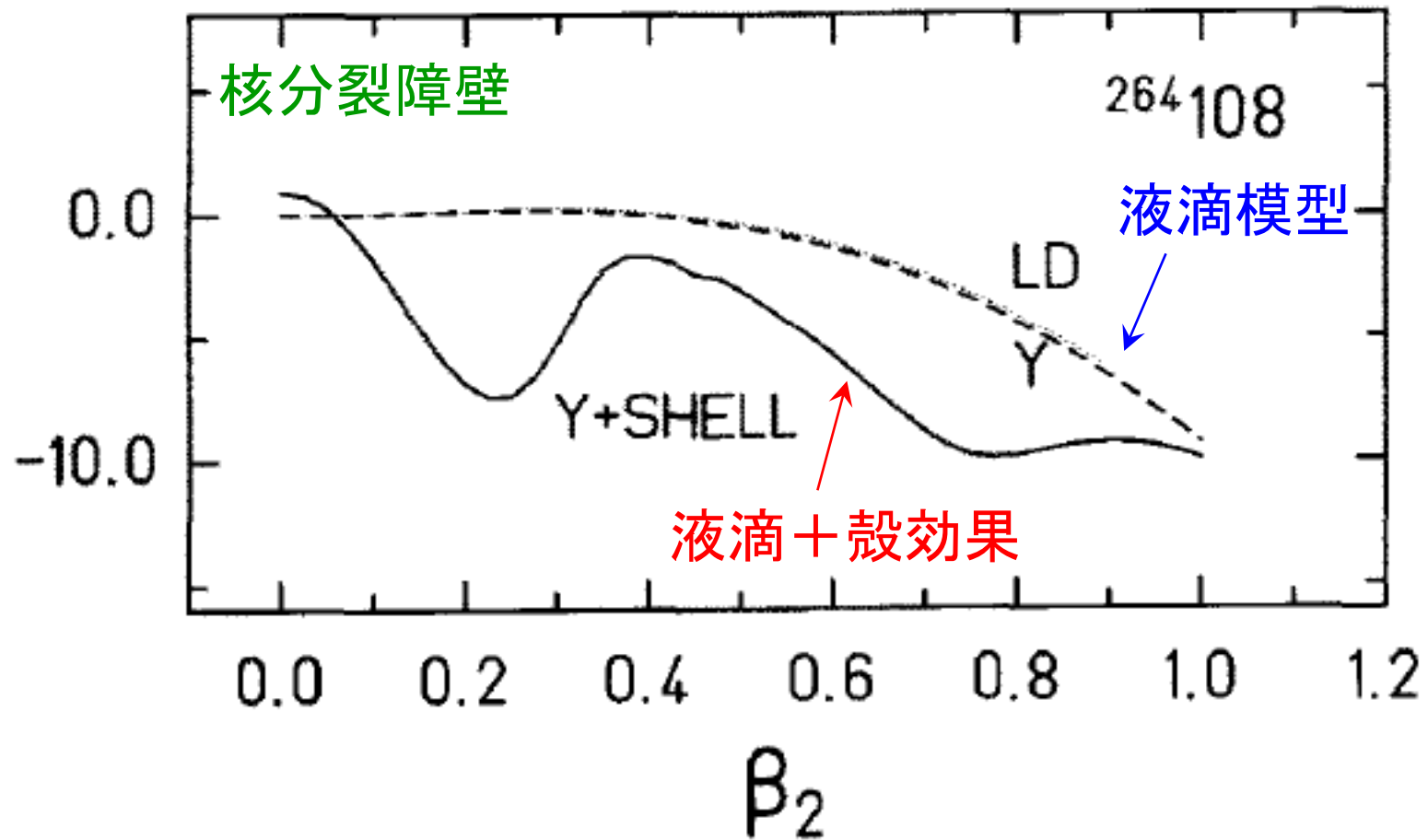
$$E = (n_z + \frac{1}{2})\hbar\omega_z + (n_x + n_y + 1)\hbar\omega_{\perp}$$



$$\omega_{\perp} = \omega_0 \left(1 + \frac{\epsilon}{3}\right)$$

$$\omega_z = \omega_0 \left(1 - \frac{2}{3}\epsilon\right)$$

➤ 殻効果を考慮すると核分裂障壁が現れるのは何故ですか？

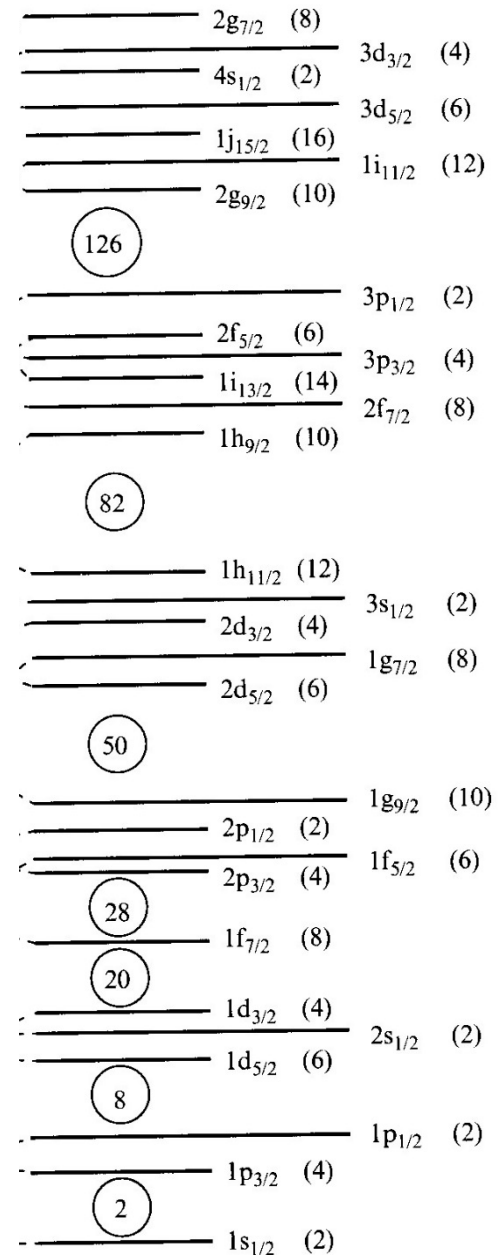
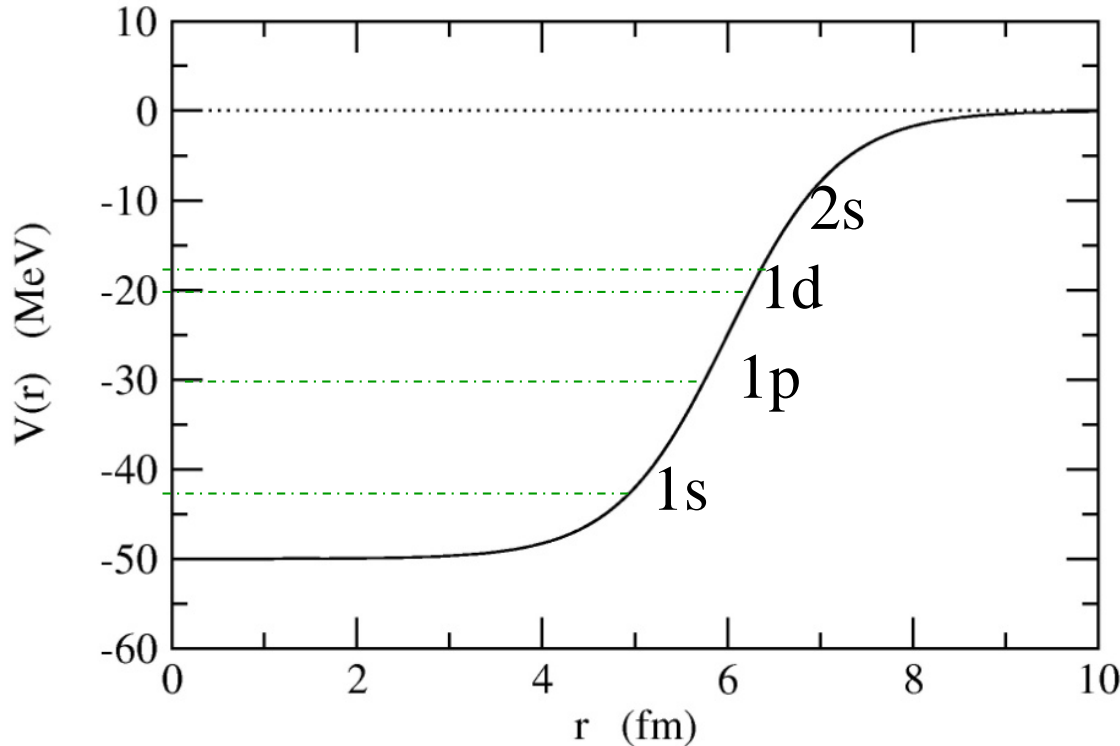


✓これも同じ理由。

障壁の高さは原子核による。上の例だと 6 MeV 程度。

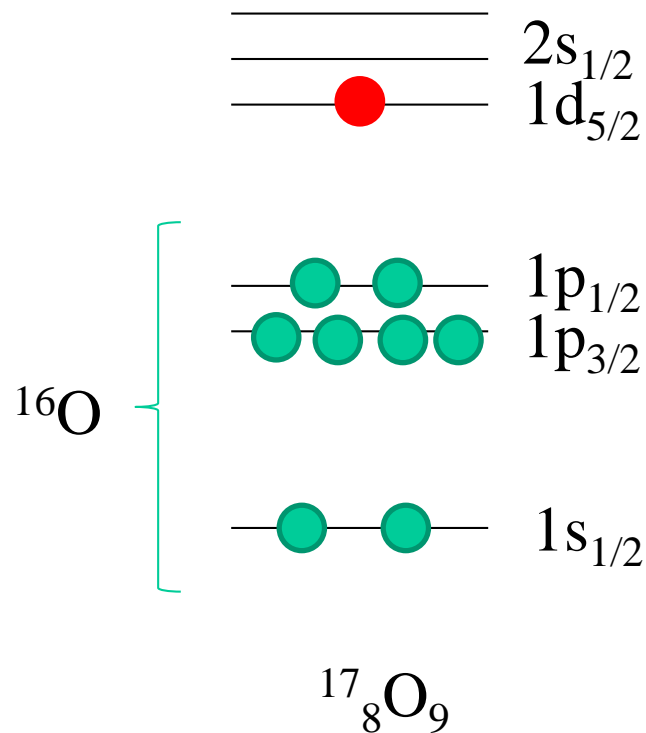
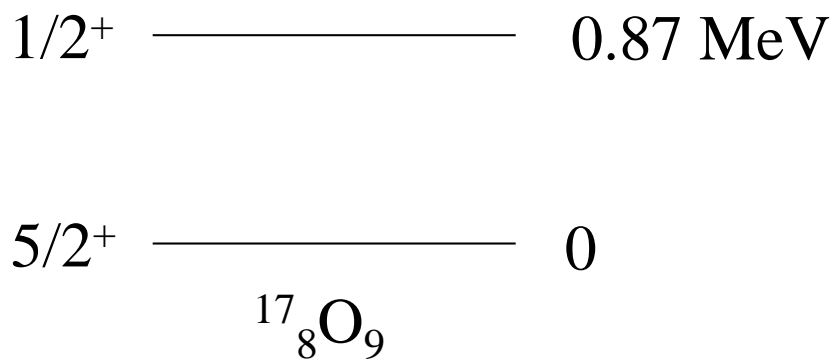
殻構造(魔法数)の理解:

- ✓ ポテンシャル中の独立粒子描像
- ✓ スピン・軌道力



Woods-Saxon plus
spin-orbit coupling

殻模型：閉核＋1核子
は非常にうまくいく



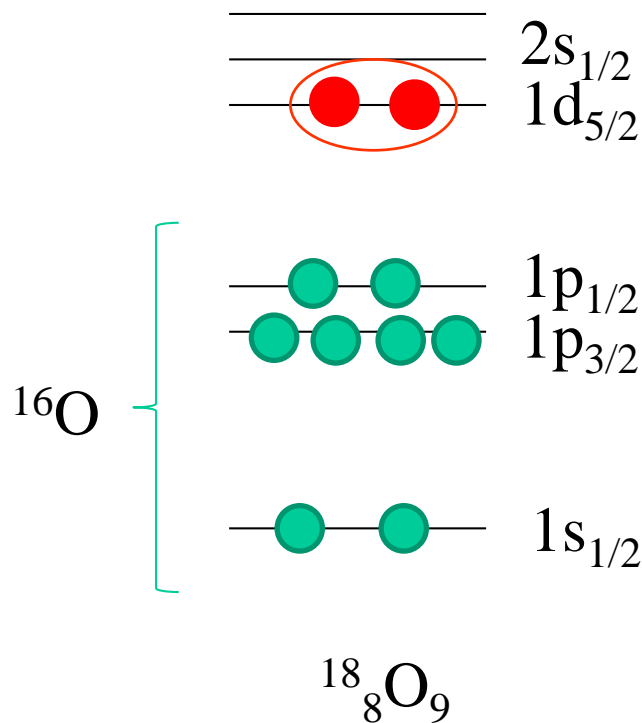
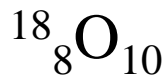
対相関

しかし、閉核+複数の核子の場合は、核子間の(残留)相互作用を考えなければならない

→対相関

2^+ ————— 1.98 MeV

0^+ ————— 0



$[d_{5/2} \times d_{5/2}]^{(IM)}$

$I = 0, 2, 4$ の状態が同じくらいのエネルギーに出てくるはずが $I=0$ しか出てこない

残留相互作用

$$H = \sum_i T_i + \sum_{i < j} v_{ij} \rightarrow H = \sum_i (T_i + V_i) + \underbrace{\sum_{i < j} v_{ij} - \sum_i V_i}_{\text{平均からのずれ (残留相互作用)}}$$

平均からのずれ
(残留相互作用)

$$v \rightarrow \underbrace{\langle v \rangle}_{\text{核子が感じる(一体)ポテンシャル}} + \underbrace{(v - \langle v \rangle)}_{\text{残留相互作用}}$$

核子が感じる(一体)
ポテンシャル

残留相互作用

対相関(ペアリング)

$$H = \sum_{i=1}^A \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + V_{\text{HF}}(i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} v(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) - \sum_i V_{\text{HF}}(i)$$

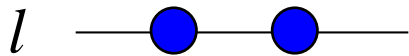


簡単化

$$v_{\text{res}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sim -g \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

摂動論で残留相互作用の効果を見積もってみる
(とりあえずスピンは無視):

非摂動な波動関数(基底状態を考える):

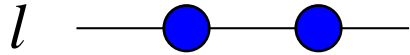


$$|(ll)LM\rangle = \sum_{m,m'} \langle lmlm'|LM\rangle \psi_{lm}(\mathbf{r}) \psi_{lm'}(\mathbf{r}')$$

$$\longrightarrow \Delta E_L = \langle (ll)LM | v_{\text{res}} | (ll)LM \rangle$$

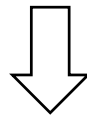
対相関(ペアリング)

$$v_{\text{res}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sim -g \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$



$$|(ll)LM\rangle = \sum_{m,m'} \langle lmlm'|LM\rangle \psi_{lm}(\mathbf{r}) \psi_{lm'}(\mathbf{r}')$$

$$\psi_{lm}(\mathbf{r}) = R_l(r) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$$



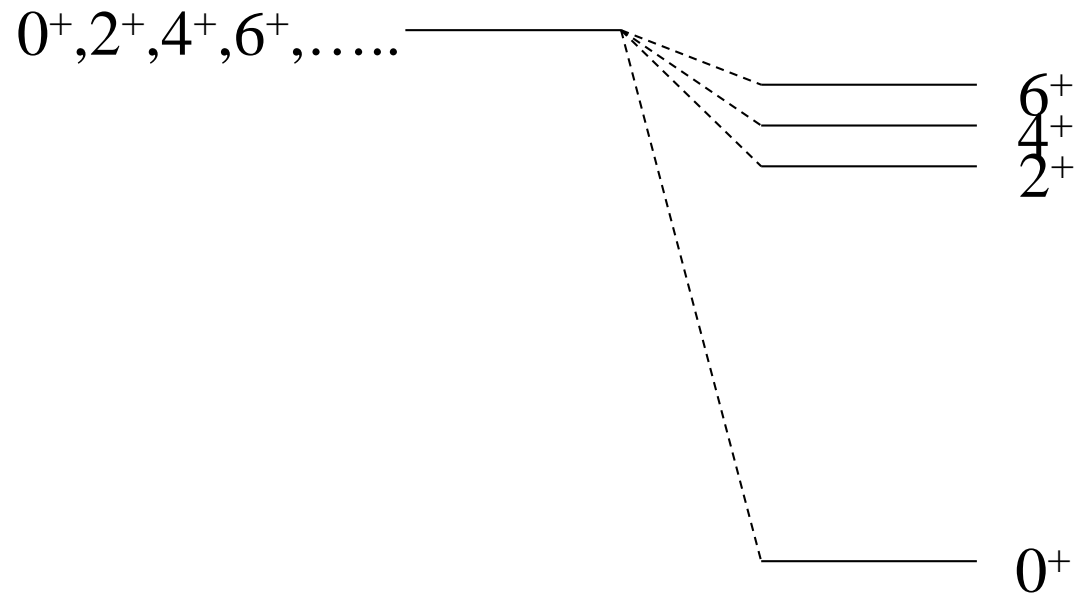
残留相互作用によるエネルギー変化:

$$\begin{aligned} \Delta E_L &= \langle (ll)LM | v_{\text{res}} | (ll)LM \rangle \\ &= -g I_r^{(l)} \frac{(2l+1)^2}{4\pi} \frac{\langle l0l0 | L0 \rangle^2}{2L+1} \end{aligned}$$

$$I_r^{(l)} = \int_0^\infty r^2 dr (R_l(r))^4$$

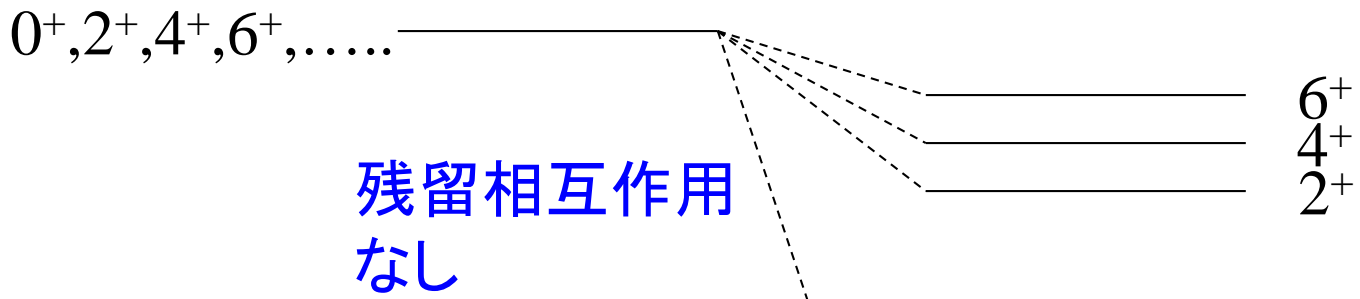
$$\Delta E_L = -g I_r^{(l)} \frac{(2l+1)^2}{4\pi} \frac{\langle l0l0|L0\rangle^2}{2L+1} \equiv -g I_r^{(l)} \frac{A(ll;L)}{4\pi}$$

$A(ll;L)$	$L=0$	$L=2$	$L=4$	$L=6$	$L=8$
$l=2$	5.00	1.43	1.43	---	---
$l=3$	7.00	1.87	1.27	1.63	---
$l=4$	9.00	2.34	1.46	1.26	1.81



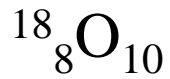
残留相互
作用なし

残留相互
作用あり



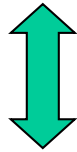
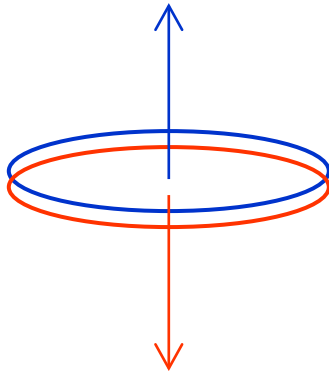
2^+ ————— 1.98 MeV

0^+ ————— 0

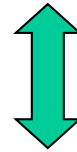
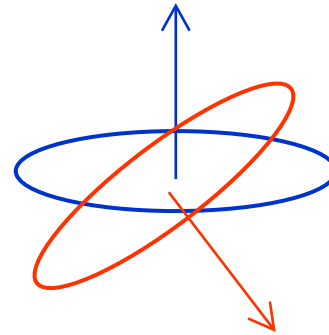


残留相互作用あり

単純な解釈:



$L=0$ 対

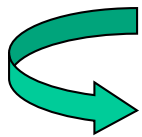
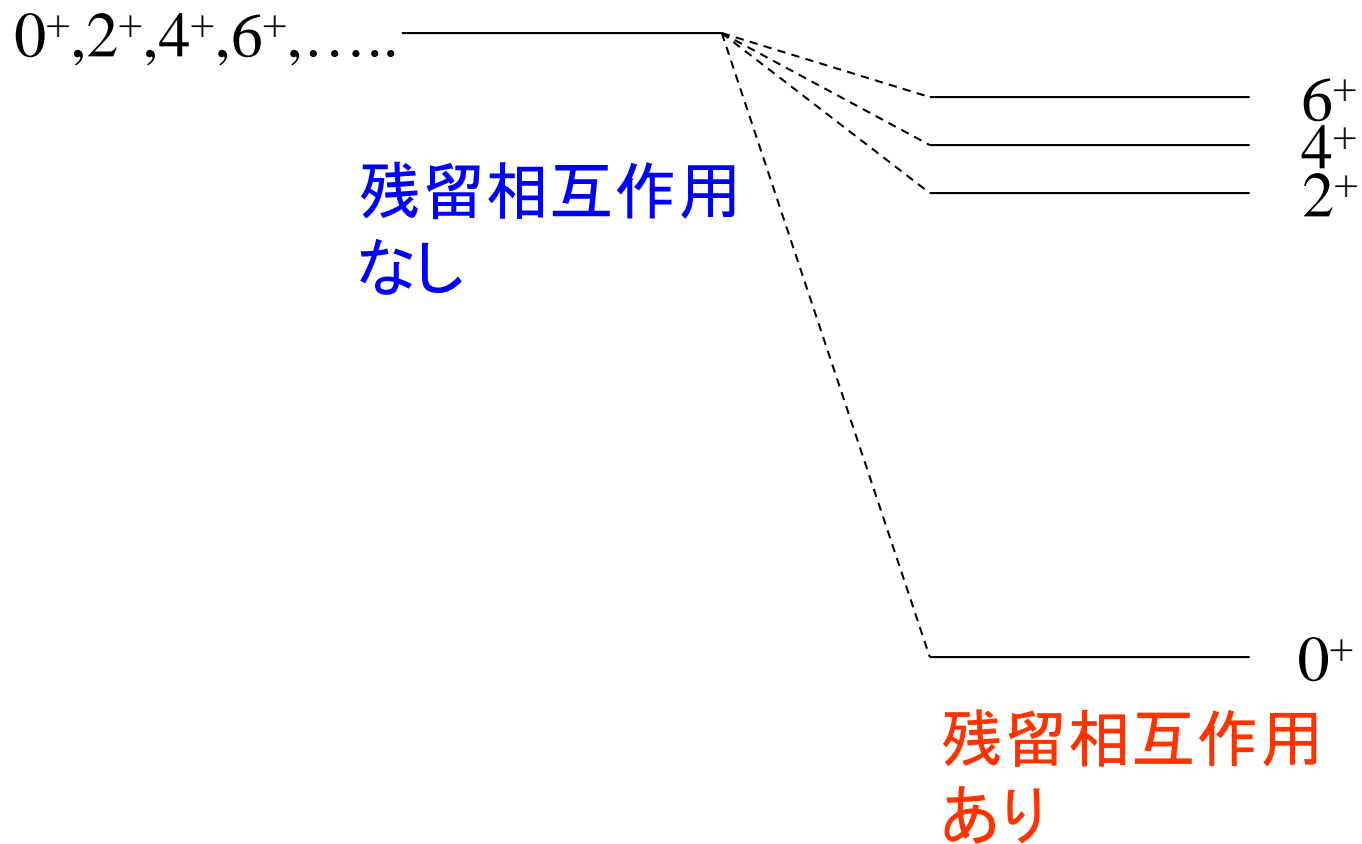


$L \neq 0$ 対

$L=0$ のとき空間的な重なりが最大

“対相関”

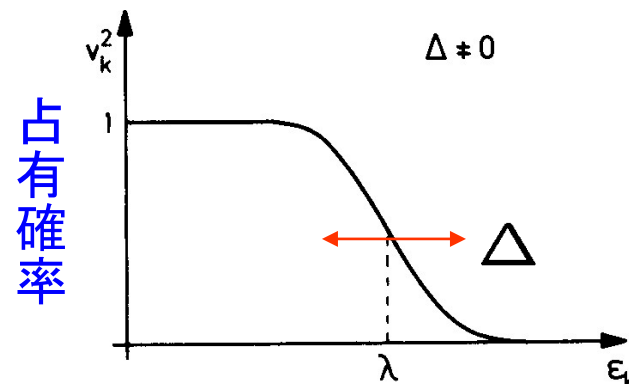
(note) $L=2j$ 対はパウリ原理に抵触



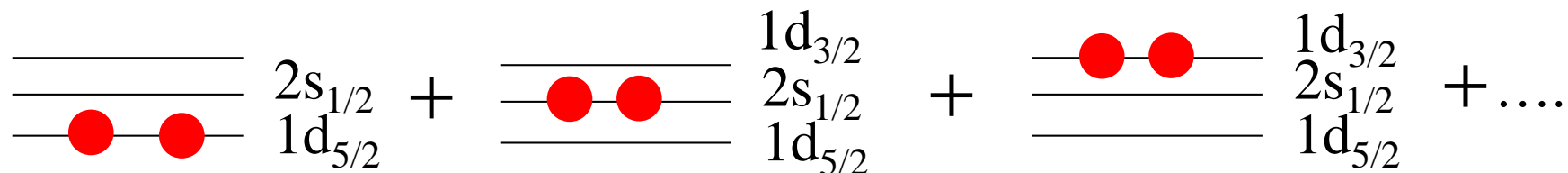
原子核の基底状態のスピ

- 偶偶核: 0^+
- 偶奇核: 最外殻粒子のスピ

波動関数:



$$|\Psi_{\text{g.s.}}\rangle =$$



いろいろな配位を混ぜることによって対相関エネルギーを稼ぐ

→ 各軌道は部分的にのみ占有されることになる

cf. BCS 理論

質量公式(偶奇性による質量差)

2つの陽子または2つの中性子がスピン0を組むと束縛が大きくなる

例:

束縛エネルギー (MeV)

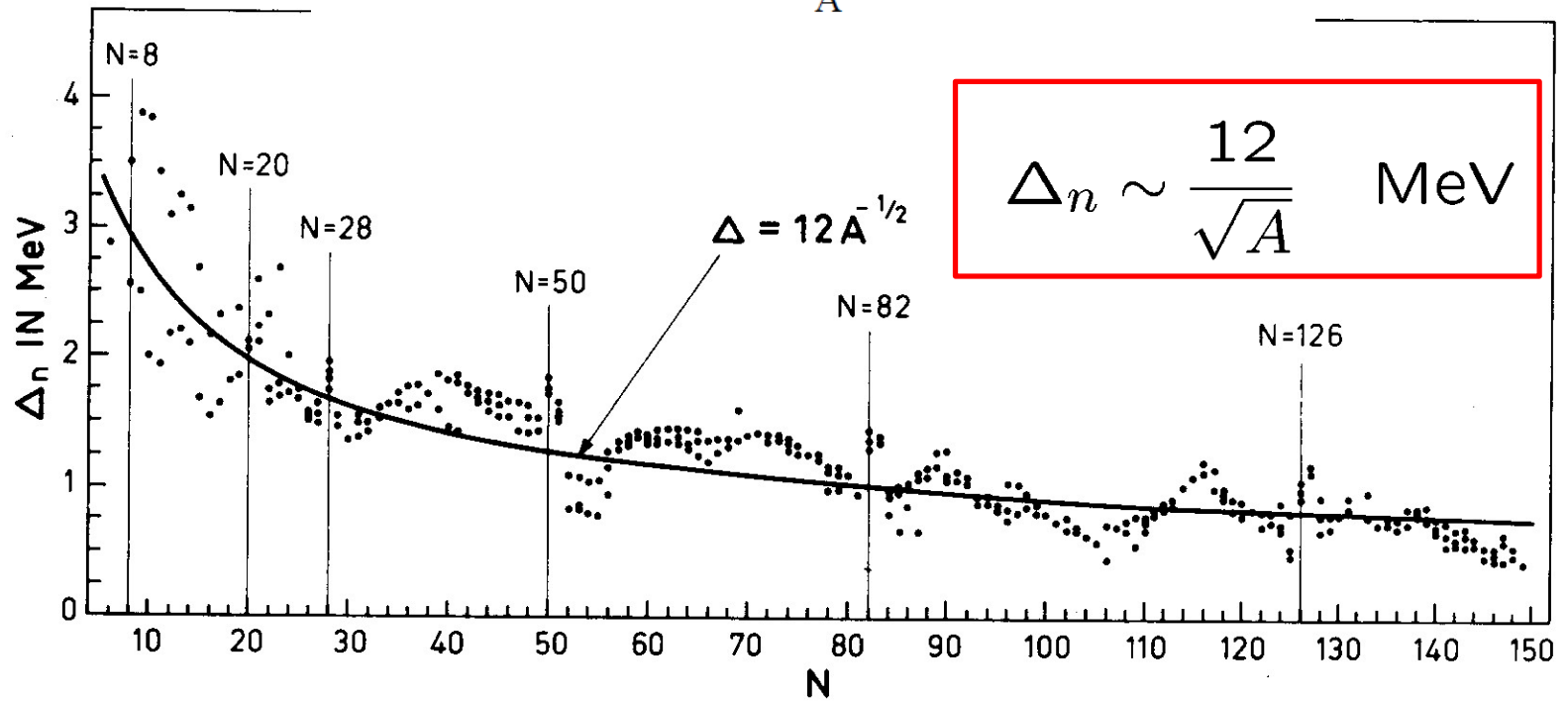
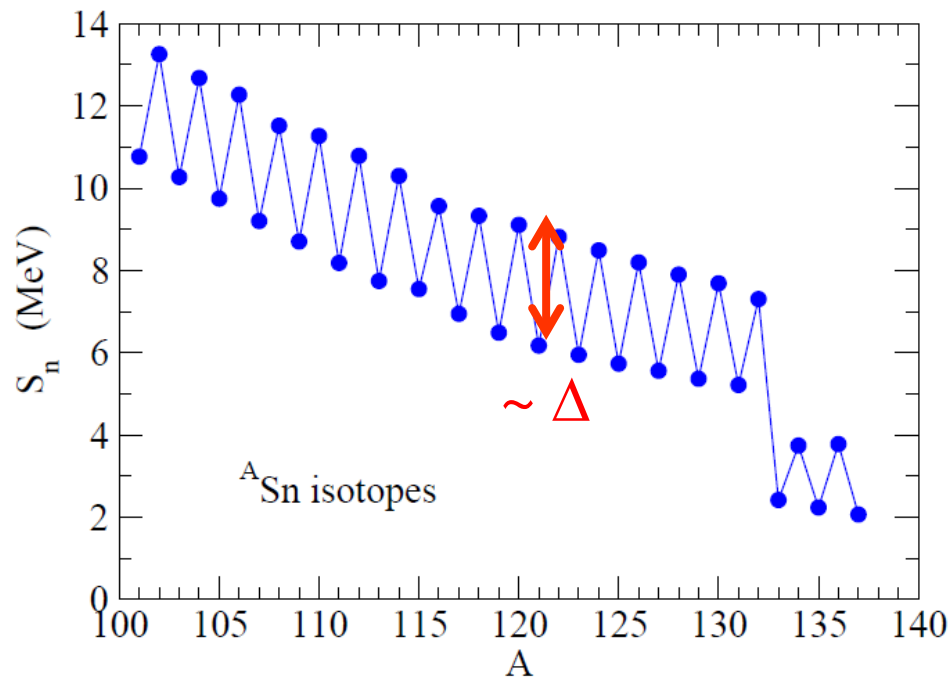
$${}^{210}_{82}\text{Pb}_{128} = {}^{208}_{82}\text{Pb}_{126} + 2n \quad 1646.6$$

$${}^{210}_{83}\text{Bi}_{127} = {}^{208}_{82}\text{Pb}_{126} + n + p \quad 1644.8$$

$${}^{209}_{82}\text{Pb}_{127} = {}^{208}_{82}\text{Pb}_{126} + n \quad 1640.4$$

$${}^{209}_{83}\text{Bi}_{126} = {}^{208}_{82}\text{Pb}_{126} + p \quad 1640.2$$

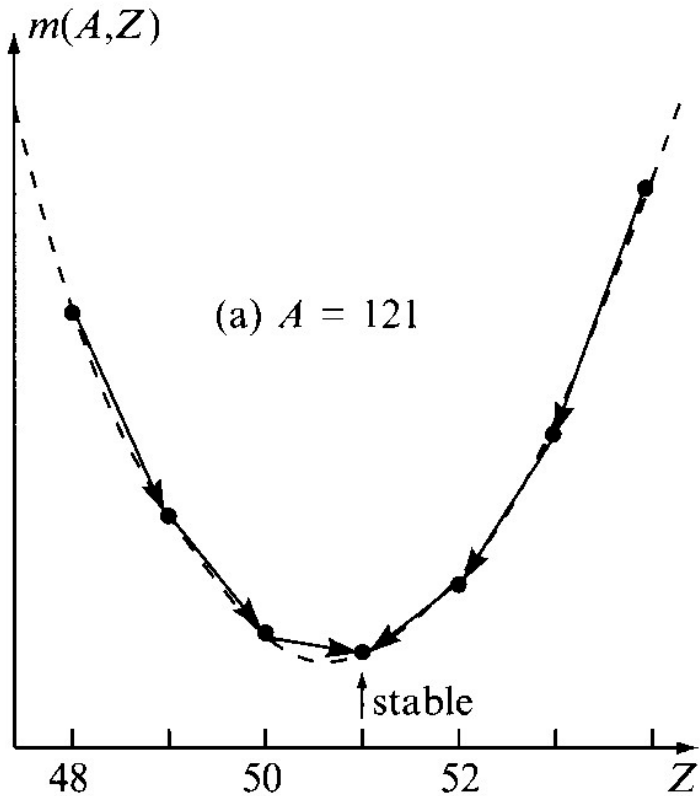
$B_{\text{pair}} = \Delta$	(for even – even)	偶偶
$= 0$	(for even – odd)	偶奇 or 奇偶
$= -\Delta$	(for odd – odd)	奇奇



対相関の帰結 (1) : β -安定線

$$B(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}$$

$$m(A, Z) = f(A) + a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_{\text{sym}} \frac{(A - 2Z)^2}{A}$$



安定核 (beta-安定線)

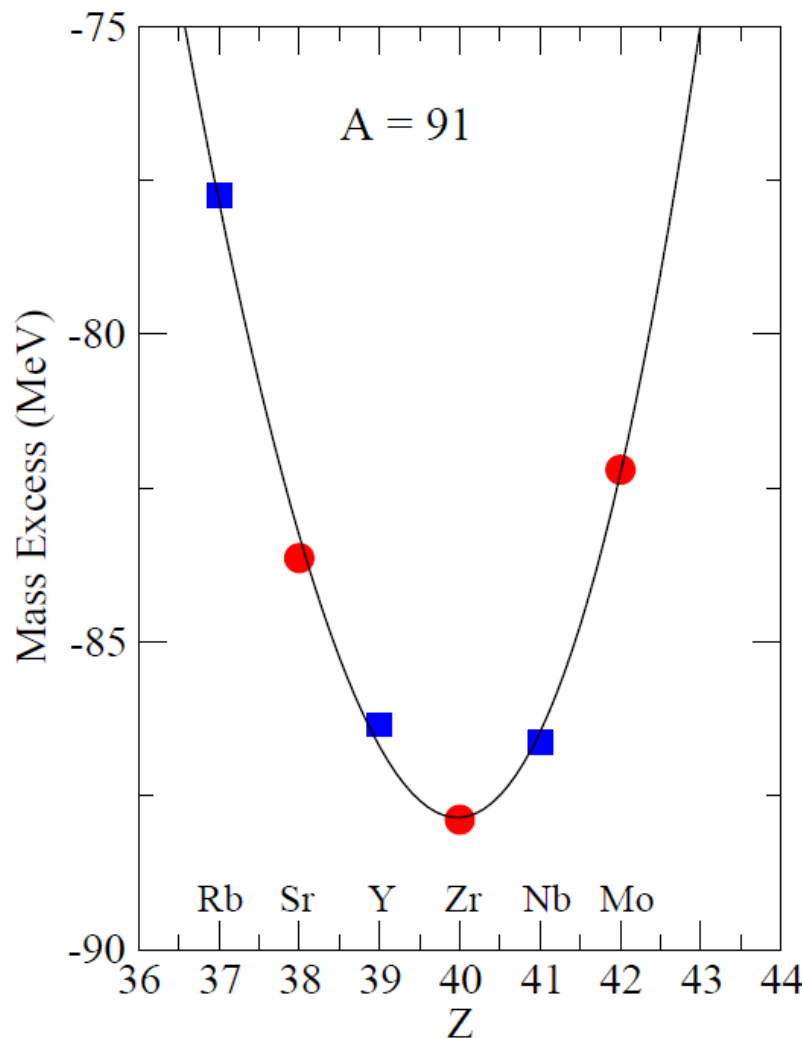
$$\left. \frac{\partial m}{\partial Z} \right|_{A=\text{const.}} = 0$$

$$Z = \frac{4a_{\text{sym}}}{2a_C/A^{1/3} + 8a_{\text{sym}}/A}$$

$$\Rightarrow Z < A/2$$

ここに対相関を考慮するとどうなるか?

$$\begin{aligned}
 B_{\text{pair}} &= \Delta && (\text{for even - even}) \\
 &= 0 && (\text{for even - odd}) \\
 &= -\Delta && (\text{for odd - odd})
 \end{aligned}$$



$$B_{\text{LDM}} = B_{\text{macro}} + B_{\text{pair}}$$

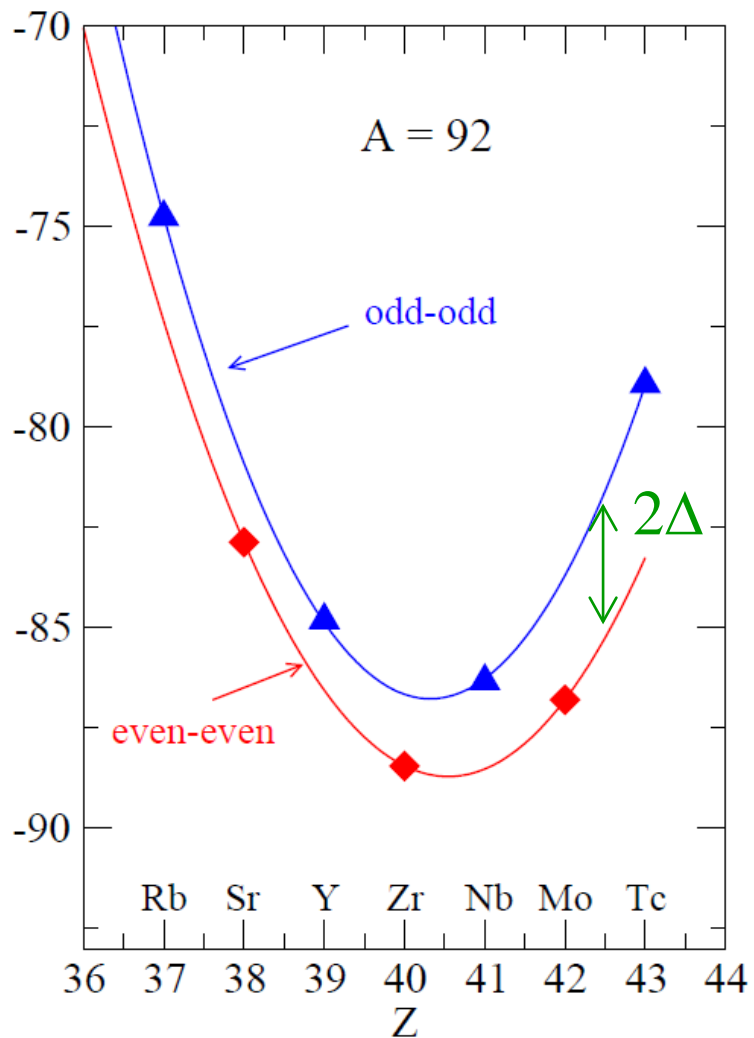
Aが奇数の場合

even-odd 核の場合、 $B_{\text{pair}}=0$
なので今までと同じ

mass excess (縦軸) は
 $M(A, Z) - Au$ という定義

u は原子質量単位で ^{12}C の
質量が $12u$ という定義

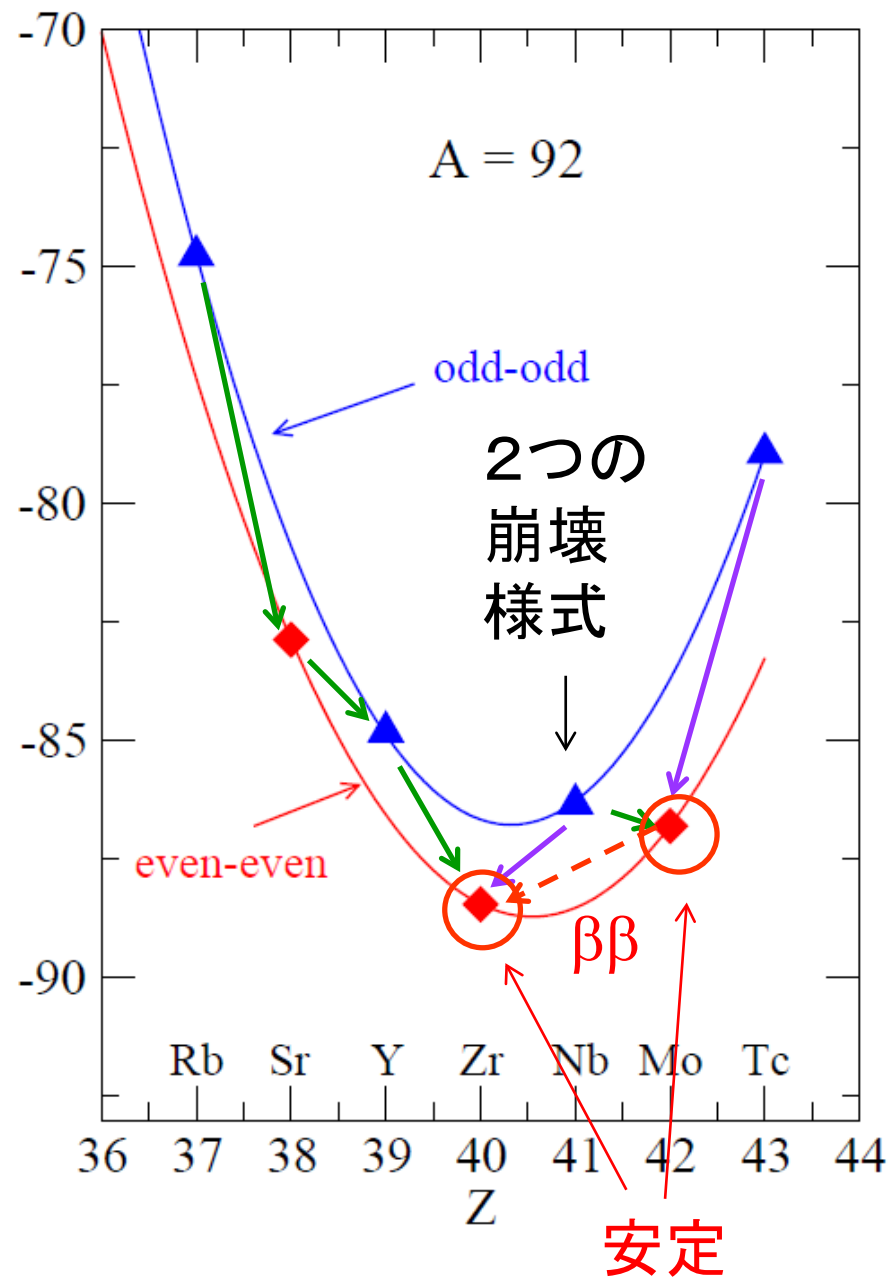
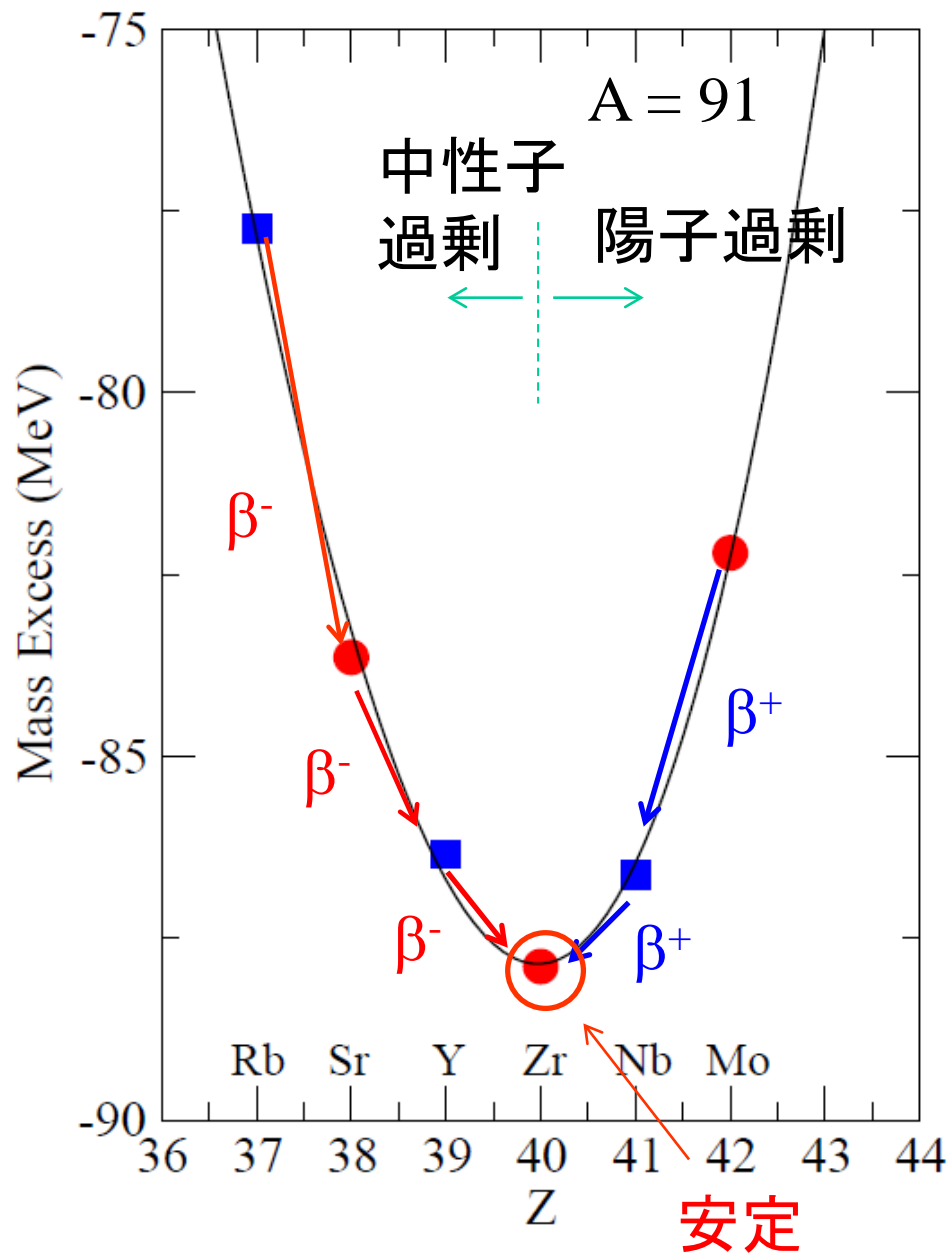
$$\begin{aligned}
 B_{\text{pair}} &= \Delta && (\text{for even - even}) \\
 &= 0 && (\text{for even - odd}) \\
 &= -\Delta && (\text{for odd - odd})
 \end{aligned}$$



次に A が偶数の場合

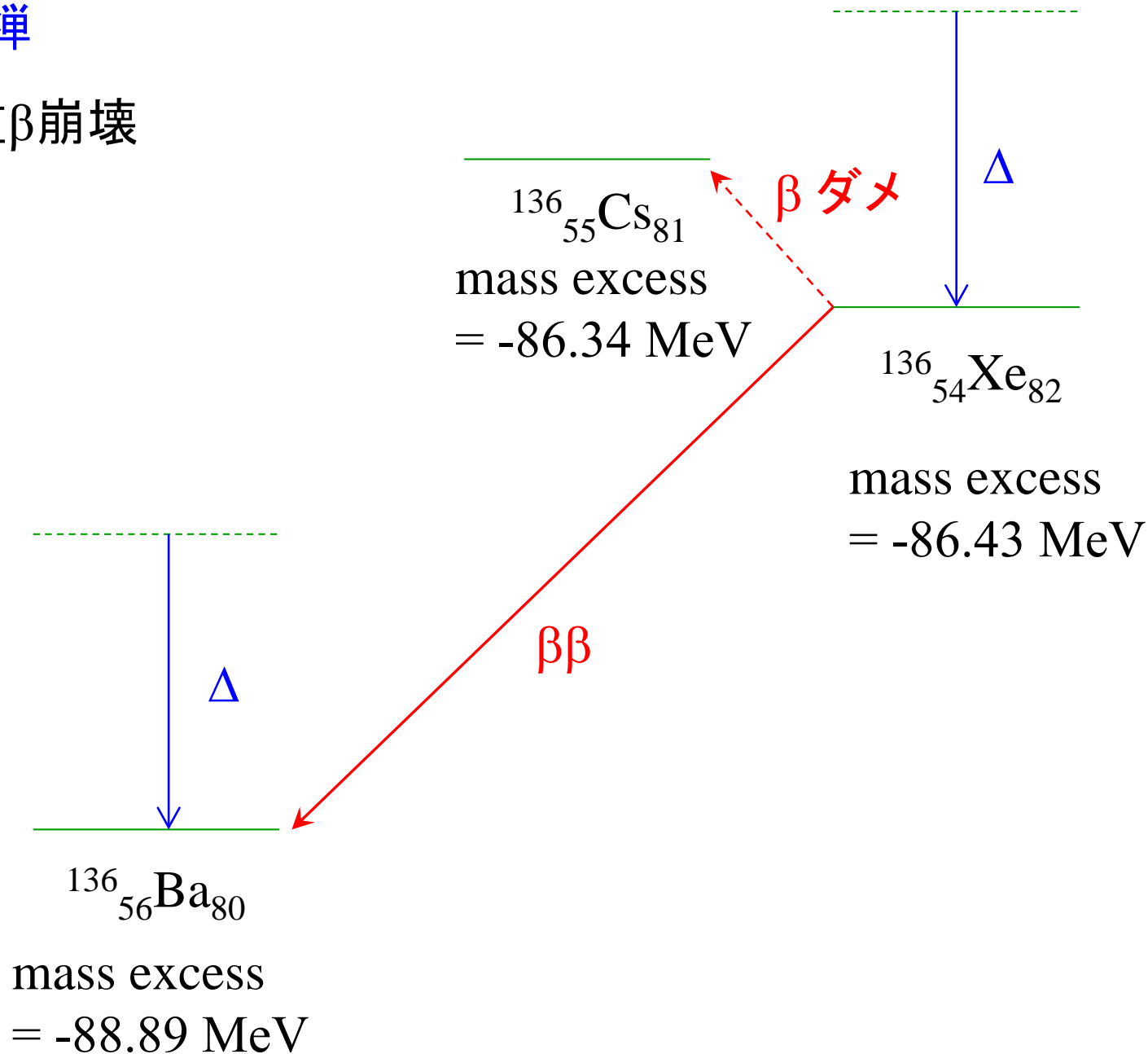
A が偶数の場合、even-even 核
と odd-odd 核でエネルギーの違う
2つの2次曲線ができる

↑
↓
2重β崩壊

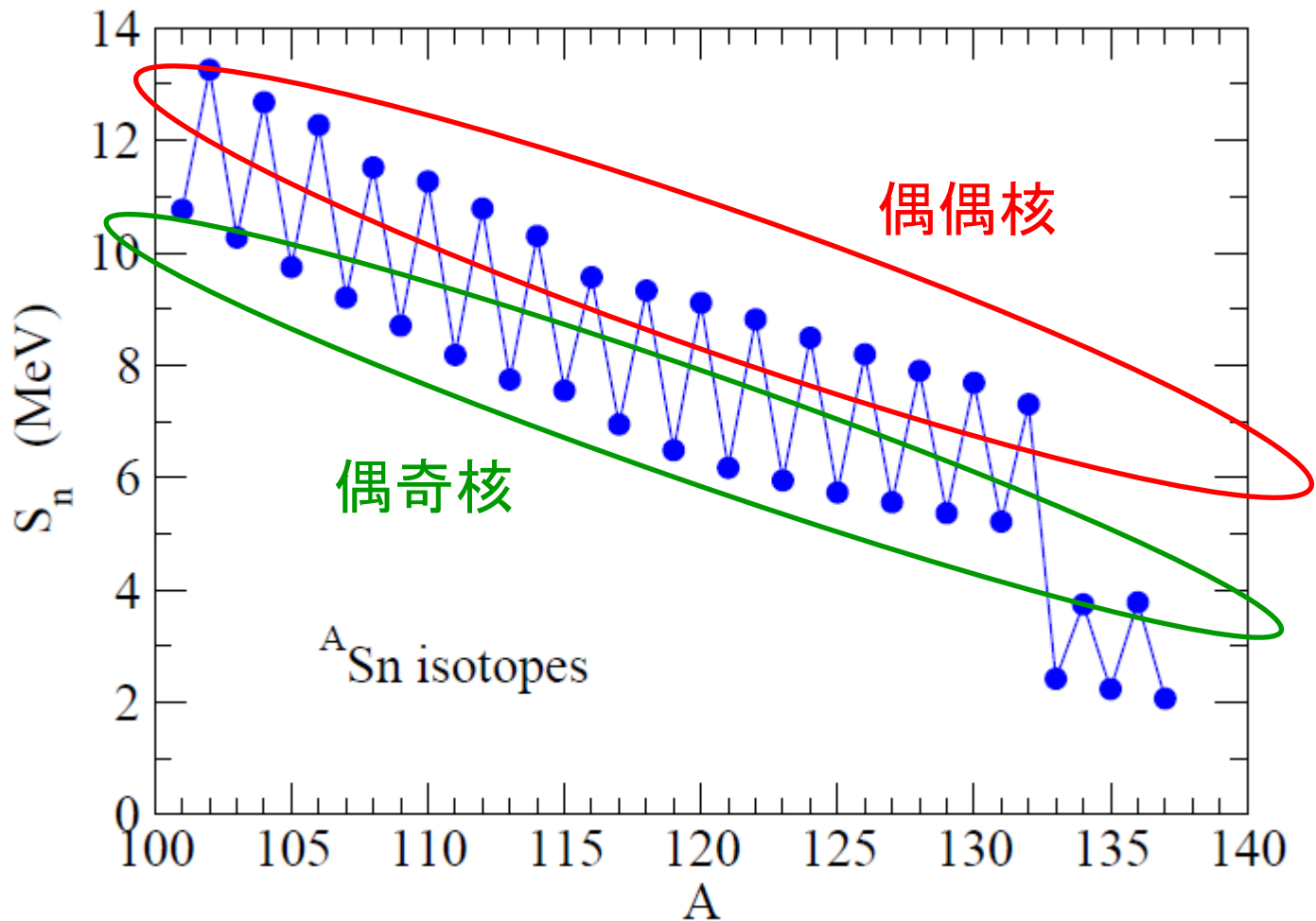


カムランド禅

^{136}Xe の2重 β 崩壊



対相関の帰結 (2): 分離エネルギーにおける偶奇効果



1n separation energy: $S_n (A,Z) = B(A,Z) - B(A-1,Z)$

対相関の帰結 (3): 中性子誘起核分裂

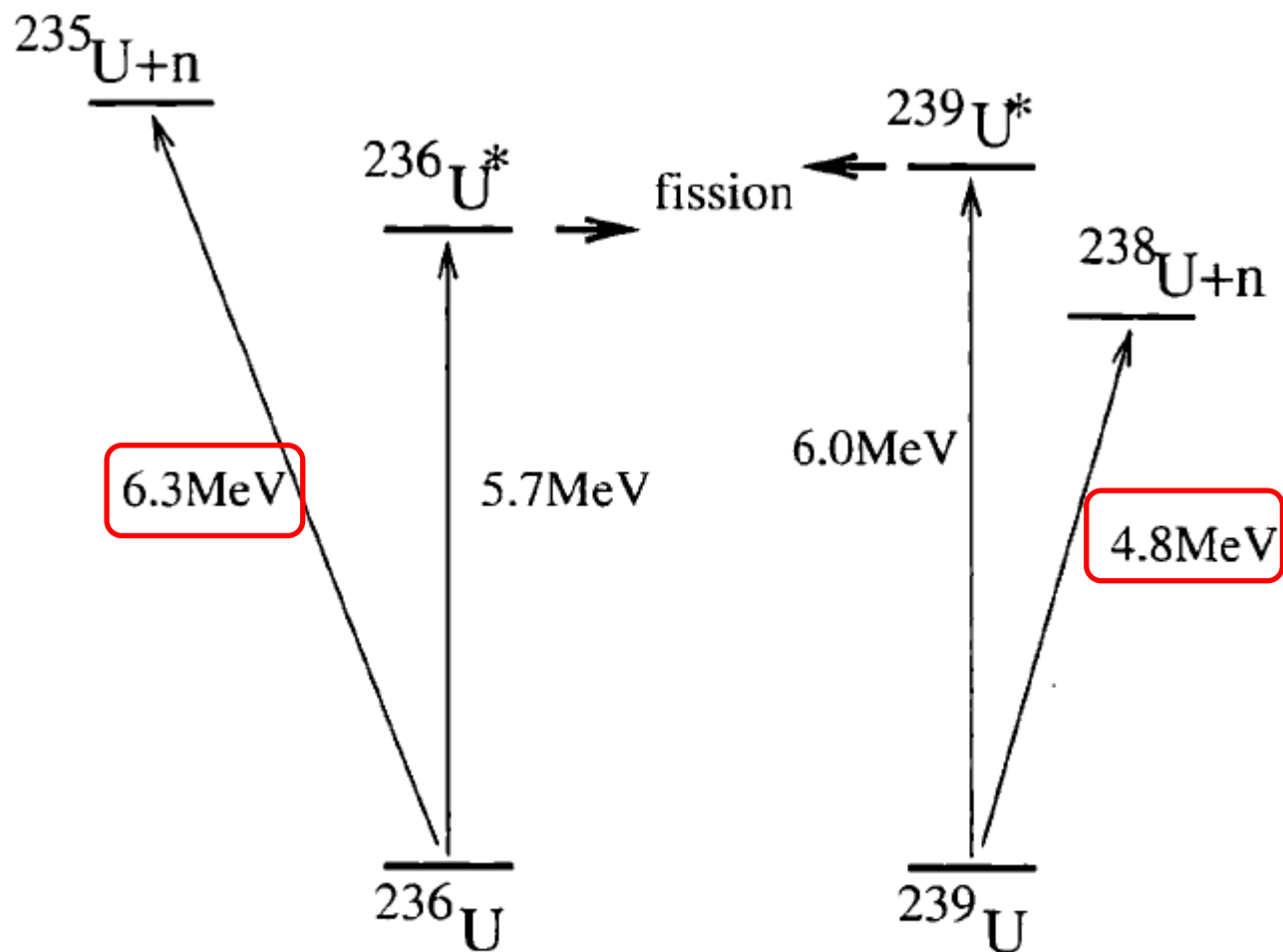
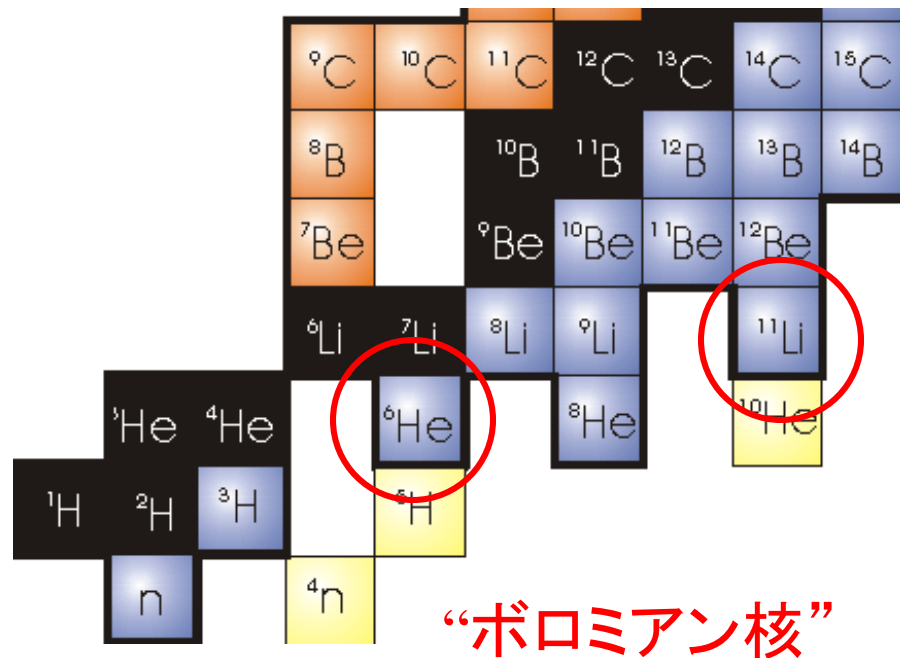
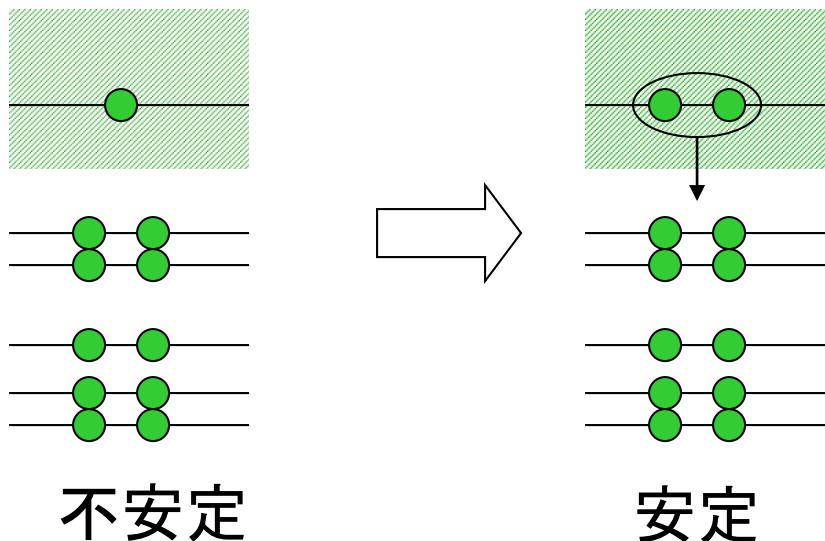


Fig. 6.6. Levels of the systems $A = 236$ and $A = 239$ involved in the fission of ^{236}U and ^{239}U . The addition of a motionless (or thermal) neutron to ^{235}U can lead to the fission of ^{236}U . On the other hand, fission of ^{239}U requires the addition of a neutron of kinetic energy $T_n = 6.0 - 4.8 = 1.2 \text{ MeV}$.

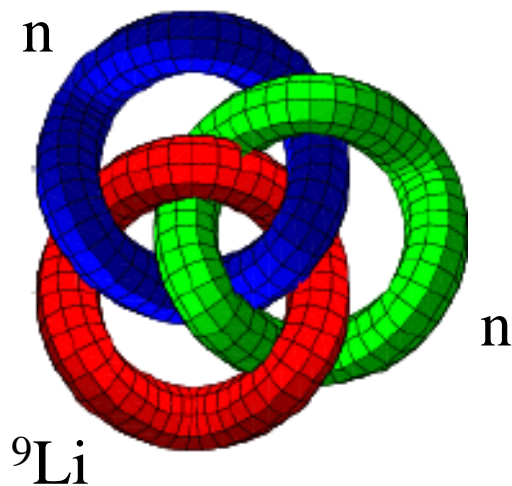
対相関の帰結 (4): 中性子過剰核

残留相互作用 → 引力



「ボロミアン・リング」

3つの輪はつながっているけど、どれか1つをはずすとバラバラになる



出席の代わりに授業アンケート

学籍番号、名前、所属研究室(所属大講座)

- ・今日の授業でわかりずらかったこと
(もう一度説明して欲しいこと)
- ・今日の授業の内容で、もう少し掘り下げてほしいこと
- ・授業の感想
- ・今日の授業で初めて知ったことや、前から知っていたけど今日の授業で整理できたこと(忘れていたこと)

などを書いて下さい。