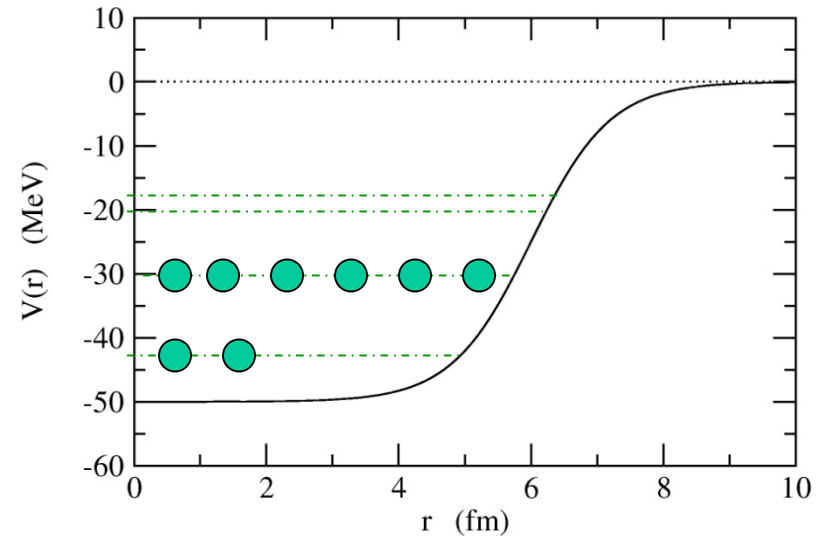
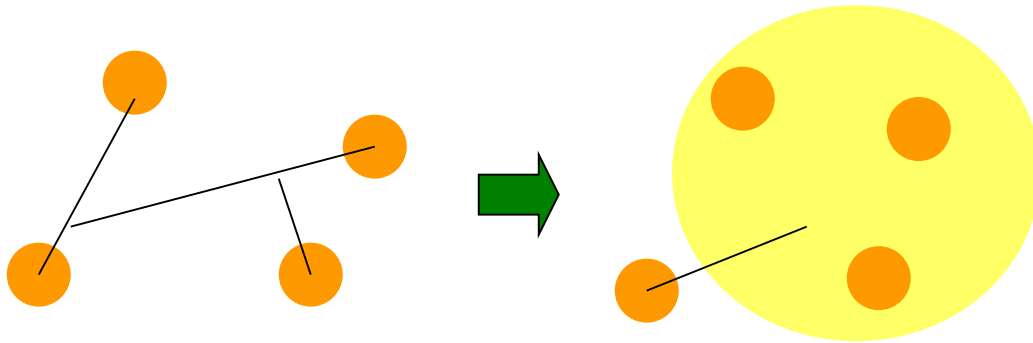


# Pairing Correlation (対相関)

## 平均場近似



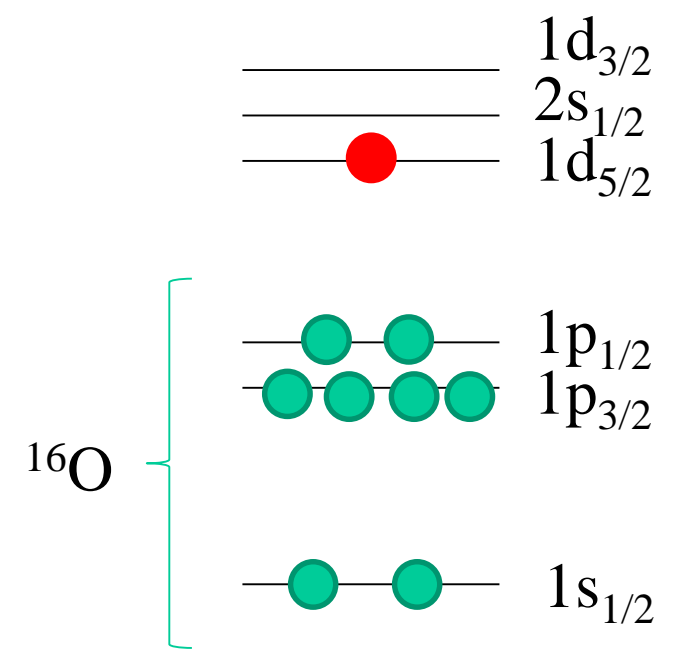
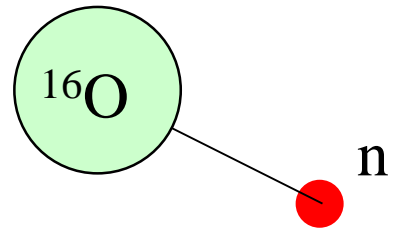
ポテンシャルの中での  
独立粒子描像

核子間の相互作用:  
核子の感じるポテンシャル  
としてののみ

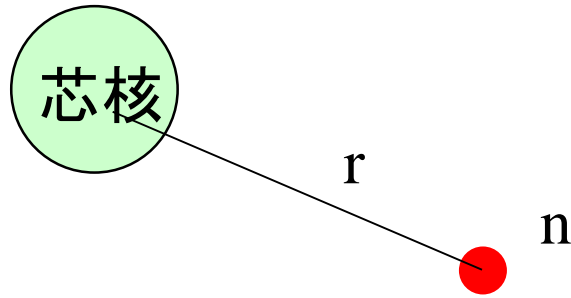
$1/2^+$  ————— 0.87 MeV

$5/2^+$  ————— 0

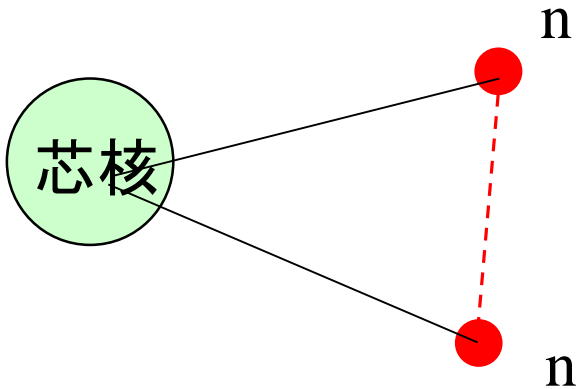
$^{17}_8\text{O}_9$



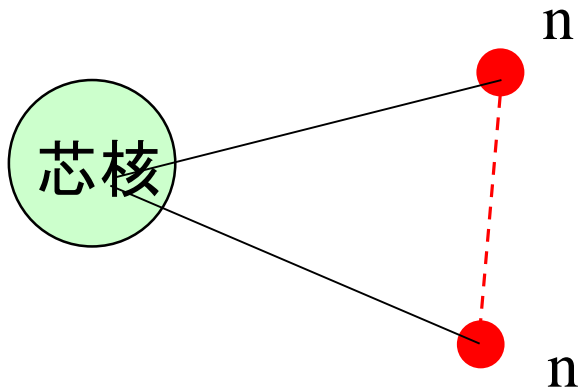
# 対相関



芯核のまわりに中性子が2個あるとどうなる？

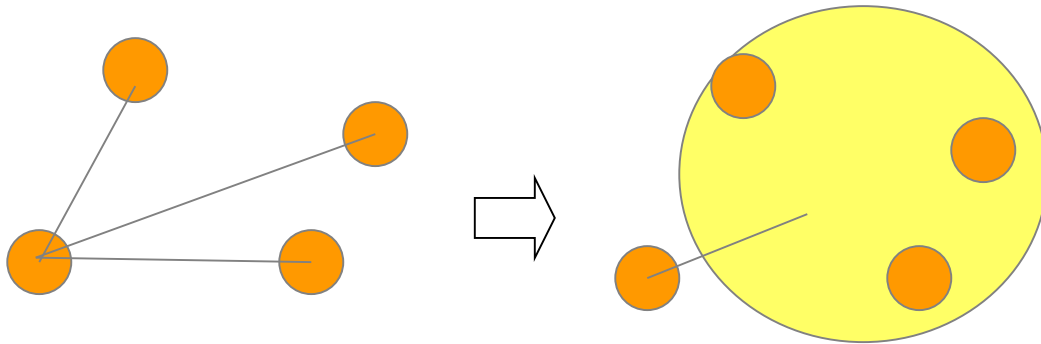


2中性子間に働く相互作用の影響は？



2中性子間に働く相互作用の影響は？

### 平均場理論

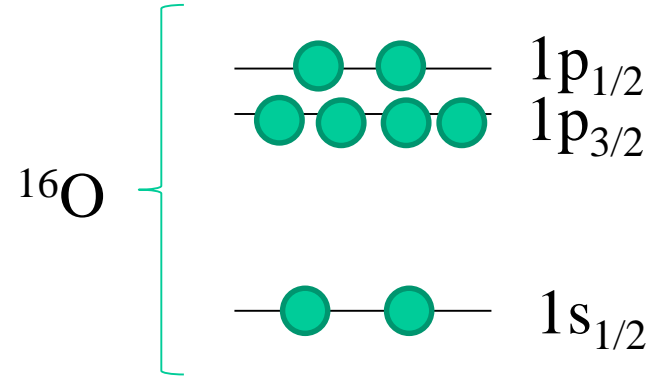
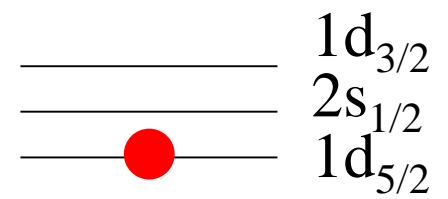


他の核子との相互作用を平均的に取り扱う

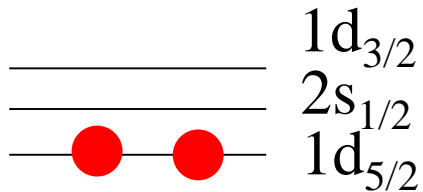
単純な平均場近似 → 2中性子が独立に運動  
(2中性子間の相互作用は平均ポテンシャル  
にのみ反映される)

$1/2^+$  ————— 0.87 MeV

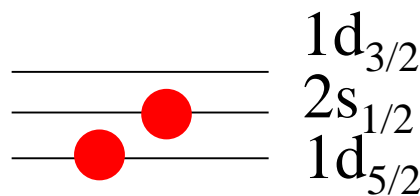
$5/2^+$  ————— 0  
 $^{17}_8\text{O}_9$



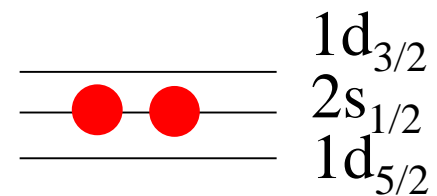
**→  $^{18}\text{O}$  の状態を予想すると。。。**



$E = 0$   
 $I^\pi = d_{5/2} \times d_{5/2}$   
 $= 0^+, 2^+, 4^+$



$E = 0.87 \text{ MeV}$   
 $I^\pi = d_{5/2} \times s_{1/2}$   
 $= 2^+, 3^+$

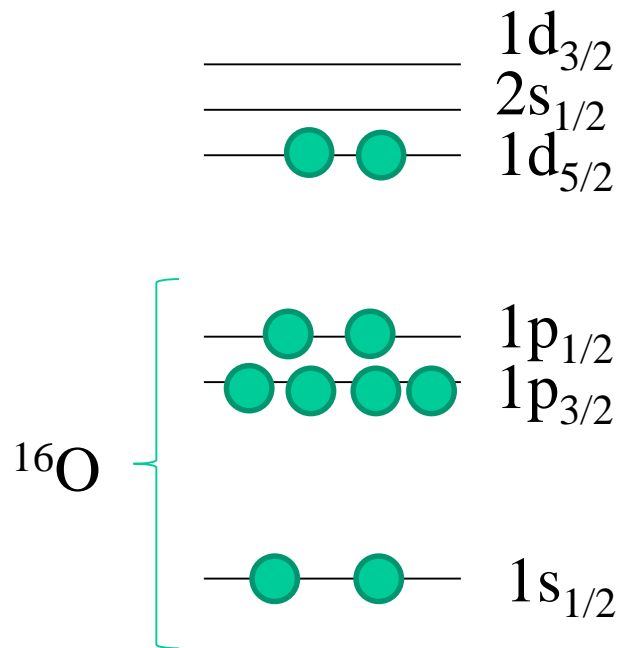
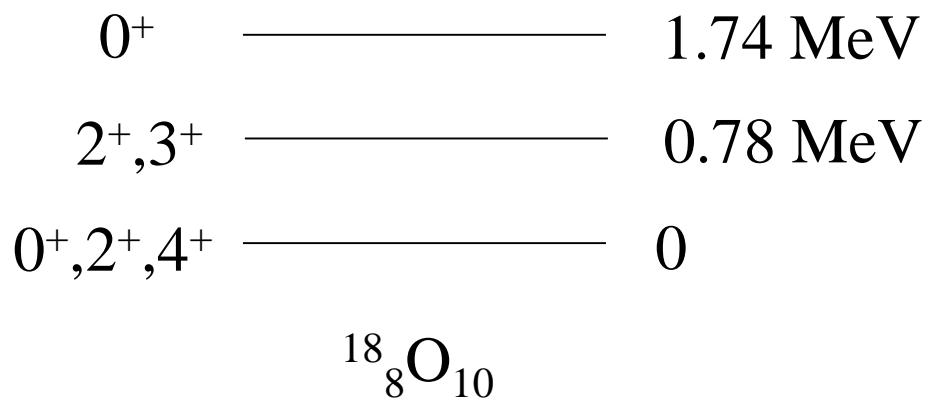


$E = 0.87 \times 2 = 1.74 \text{ MeV}$   
 $I^\pi = s_{1/2} \times s_{1/2} = 0^+$

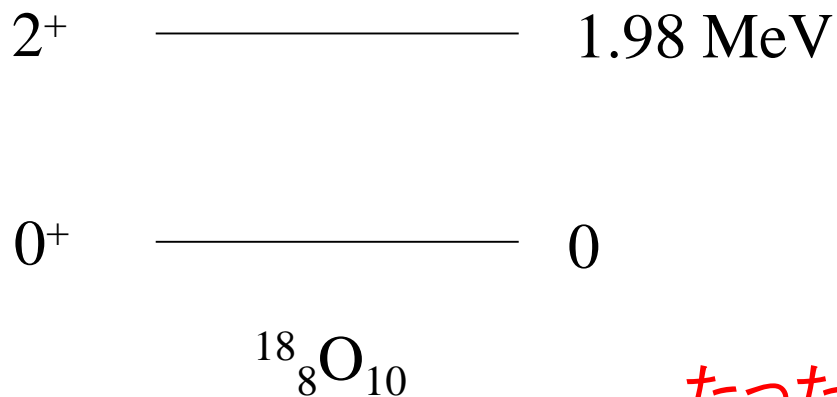
2 MeV 以下に少なくとも6本の状態(?)

# 単純な平均場近似:

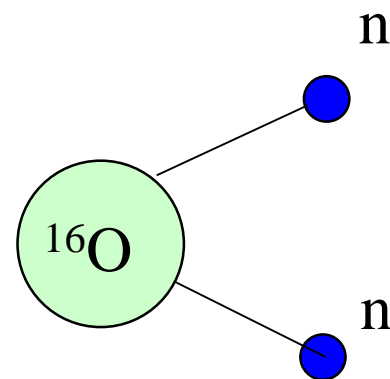
6 levels



# 実際には:



たったの2本!



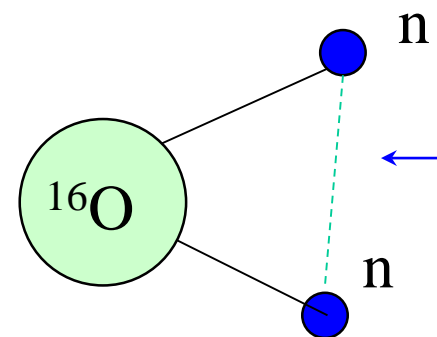
$$H = \sum_i T_i + \sum_{i < j} v_{ij} \rightarrow H = \sum_i (T_i + V_i) + \underbrace{\sum_{i < j} v_{ij} - \sum_i V_i}_{\text{平均からのずれ (残留相互作用)}}$$

平均からのずれ  
(残留相互作用)

残留相互作用は完全に無視してもよいのか?

答え: no

開殻原子核では重要な役割を果たす  
ことが知られている(ペアリング)



(note) 摂動論がよい条件

$$H = H_0 + \Delta V$$

$$H_0 |\phi_n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)} |\phi_n^{(0)}\rangle$$

$$\rightarrow |\phi_n\rangle = |\phi_n^{(0)}\rangle + \sum_{m \neq n} \frac{\langle \phi_m^{(0)} | \Delta V | \phi_n^{(0)} \rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} |\phi_m^{(0)}\rangle$$



$$|\langle \phi_m^{(0)} | \Delta V | \phi_n^{(0)} \rangle| \ll |E_n^{(0)} - E_m^{(0)}|$$

なら  $\Delta V$  を無視できる



$$H = H_0 + \Delta V$$

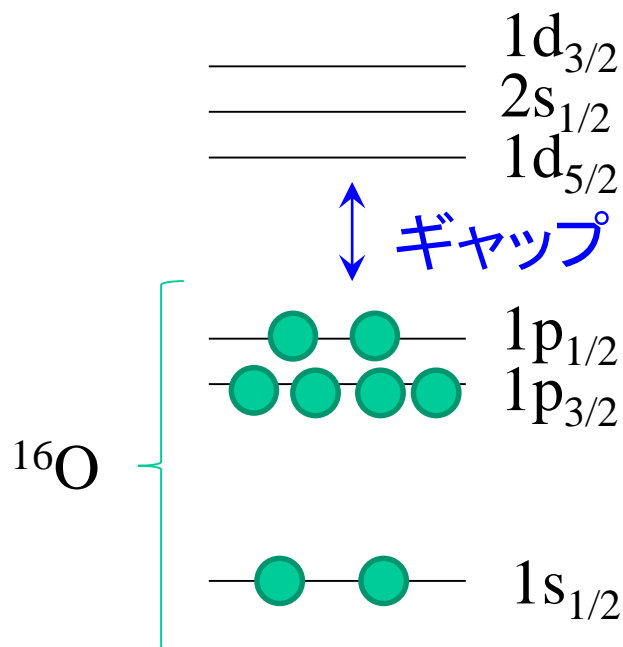


$$|\langle \phi_m^{(0)} | \Delta V | \phi_n^{(0)} \rangle| \ll |E_n^{(0)} - E_m^{(0)}|$$

なら  $\Delta V$  を無視できる

$$H = \sum_i T_i + \sum_{i < j} v_{ij} \rightarrow H = \sum_i (T_i + V_i) + \underbrace{\sum_{i < j} v_{ij} - \sum_i V_i}_{\text{平均からのずれ (残留相互作用)}}$$

平均からのずれ  
(残留相互作用)



閉殻核:  
ギャップのために  $\Delta E$  が大きい  
→ 残留相互作用を無視できる

$$H = H_0 + \Delta V$$



$$|\langle \phi_m^{(0)} | \Delta V | \phi_n^{(0)} \rangle| \ll |E_n^{(0)} - E_m^{(0)}|$$

なら  $\Delta V$  を無視できる

$$H = \sum_i T_i + \sum_{i < j} v_{ij} \rightarrow H = \sum_i (T_i + V_i) + \underbrace{\sum_{i < j} v_{ij} - \sum_i V_i}_{\text{平均からのずれ (残留相互作用)}}$$

$0^+$  ————— 1.74 MeV

$2^+, 3^+$  ————— 0.78 MeV

$0^+, 2^+, 4^+$  ————— 0

$^{18}_8\text{O}_{10}$

6 levels

平均からのずれ  
(残留相互作用)

開殻核:

$\Delta E$  が小さい

→ 残留相互作用を無視  
できない

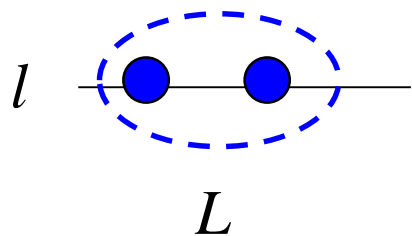
## 対相関(ペアリング)

$$H = \sum_{i=1}^A \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + V_{\text{HF}}(i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} v(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) - \sum_i V_{\text{HF}}(i)$$

簡単のために、残留相互作用としてデルタ関数を仮定してみる  
(超短距離力)

$$v_{\text{res}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sim -g \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

摂動論で残留相互作用の効果を見積もってみる:



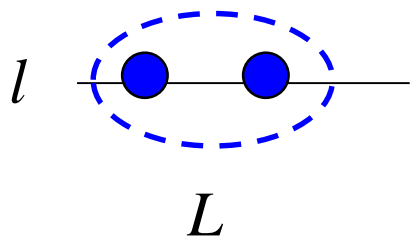
非摂動な波動関数:

角運動量  $l$  の状態に中性子2個、それが  
全角運動量  $L$  を組んでいる

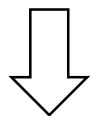
$$|(ll)LM\rangle = \sum_{m,m'} \langle lmlm' | LM \rangle \psi_{lm}(\mathbf{r}) \psi_{lm'}(\mathbf{r}')$$

## 対相関(ペアリング)

$$v_{\text{res}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sim -g \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$



$$|(ll)LM\rangle = \sum_{m,m'} \langle lmlm'|LM\rangle \psi_{lm}(\mathbf{r}) \psi_{lm'}(\mathbf{r}')$$



残留相互作用によるエネルギー変化:

$$\begin{aligned} \Delta E_L &= \langle (ll)LM | v_{\text{res}} | (ll)LM \rangle \\ &= -g I_r^{(l)} \frac{(2l+1)^2}{4\pi} \begin{pmatrix} l & l & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \end{aligned}$$

$$I_r^{(l)} = \int_0^\infty r^2 dr (R_l(r))^4$$

$$\Delta E_L = -g I_r^{(l)} \frac{(2l+1)^2}{4\pi} \begin{pmatrix} l & l & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \equiv -g I_r^{(l)} \frac{A(l; L)}{4\pi}$$

$A(l; L)$	$L=0$	$L=2$	$L=4$	$L=6$	$L=8$
$l=2$	5.00	1.43	1.43	---	---
$l=3$	7.00	1.87	1.27	1.63	---
$l=4$	9.00	2.34	1.46	1.26	1.81

$$\Delta E_L = -g I_r^{(l)} \frac{(2l+1)^2}{4\pi} \begin{pmatrix} l & l & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \equiv -g I_r^{(l)} \frac{A(l; L)}{4\pi}$$

$A(l; L)$	$L=0$	$L=2$	$L=4$	$L=6$	$L=8$
$l=2$	<b>5.00</b>	1.43	1.43	---	---
$l=3$	<b>7.00</b>	1.87	1.27	1.63	---
$l=4$	<b>9.00</b>	2.34	1.46	1.26	1.81

$$\Delta E_L = -g I_r^{(l)} \frac{(2l+1)^2}{4\pi} \begin{pmatrix} l & l & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \equiv -g I_r^{(l)} \frac{A(l; L)}{4\pi}$$

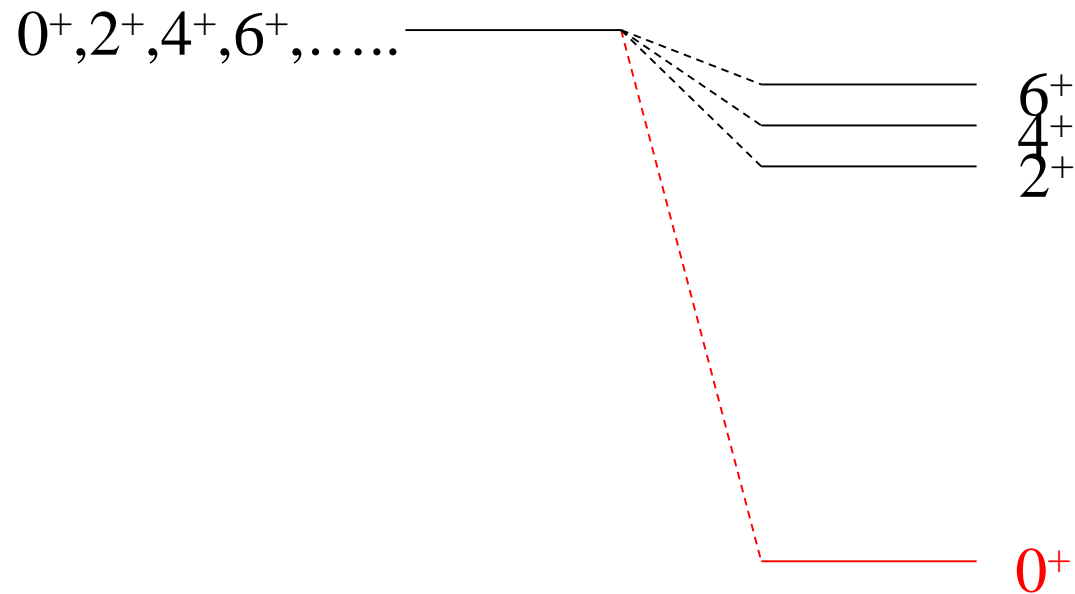
$A(l; L)$	$L=0$	$L=2$	$L=4$	$L=6$	$L=8$
$l=2$	5.00	1.43	1.43	---	---
$l=3$	7.00	1.87	1.27	1.63	---
$l=4$	9.00	2.34	1.46	1.26	1.81

$0^+, 2^+, 4^+, 6^+, \dots$  —————

残留相互  
作用なし

$$\Delta E_L = -g I_r^{(l)} \frac{(2l+1)^2}{4\pi} \begin{pmatrix} l & l & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \equiv -g I_r^{(l)} \frac{A(l; L)}{4\pi}$$

$A(l; L)$	$L=0$	$L=2$	$L=4$	$L=6$	$L=8$
$l=2$	5.00	1.43	1.43	---	---
$l=3$	7.00	1.87	1.27	1.63	---
$l=4$	9.00	2.34	1.46	1.26	1.81

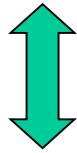
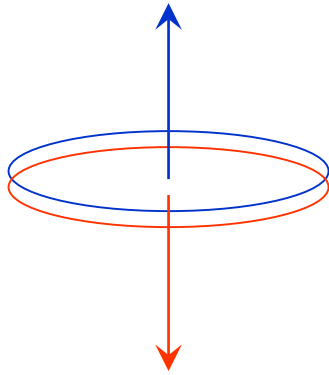


残留相互  
作用なし

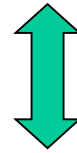
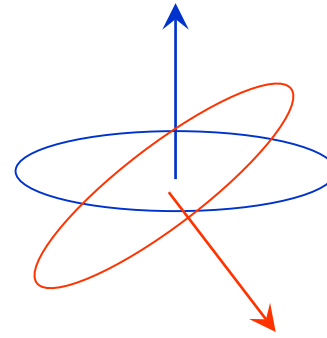
残留相互  
作用あり



## 簡単な解釈:



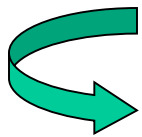
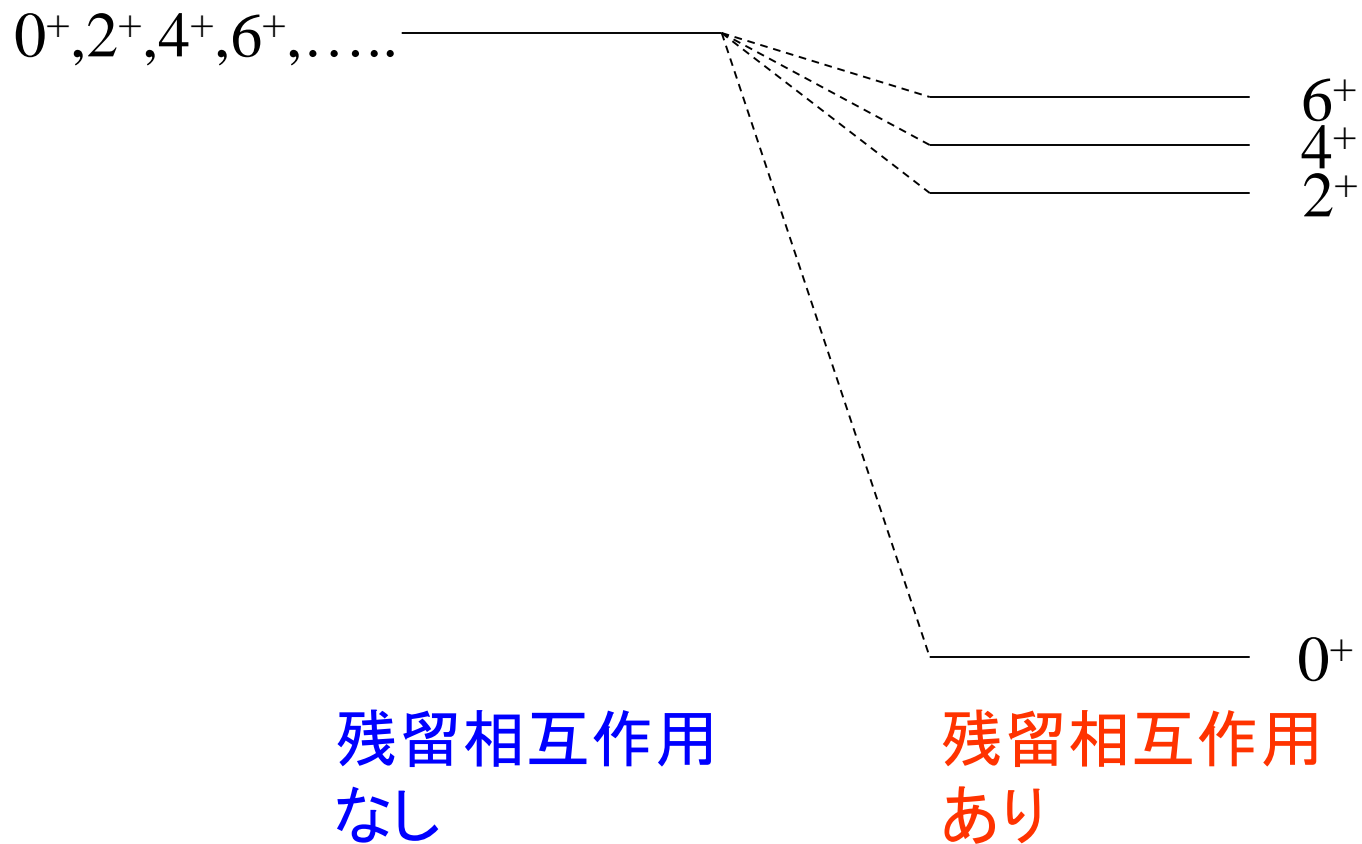
$L=0$  対



$L \neq 0$  対

$L=0$  対に対して空間的重なりが最大(エネルギー的に得)

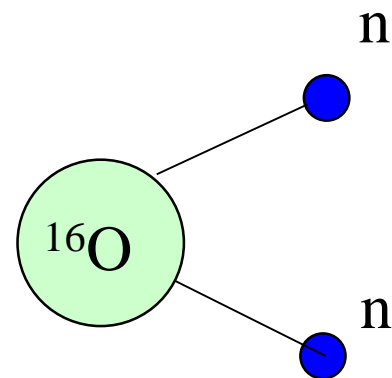
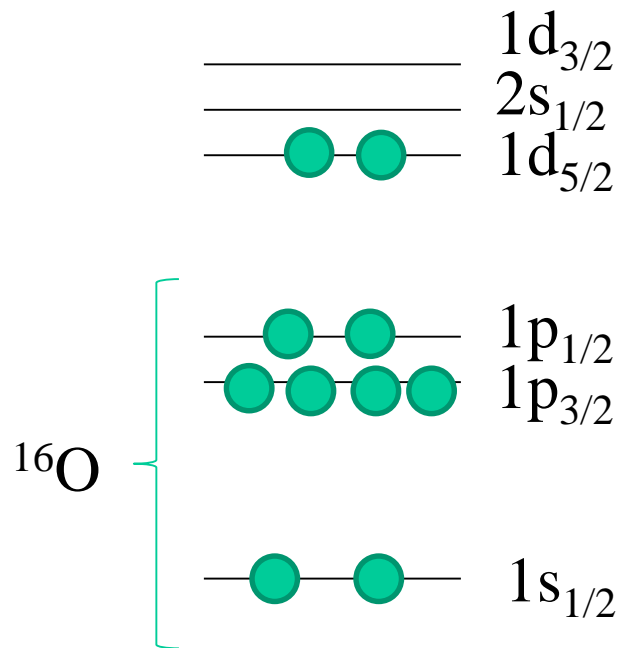
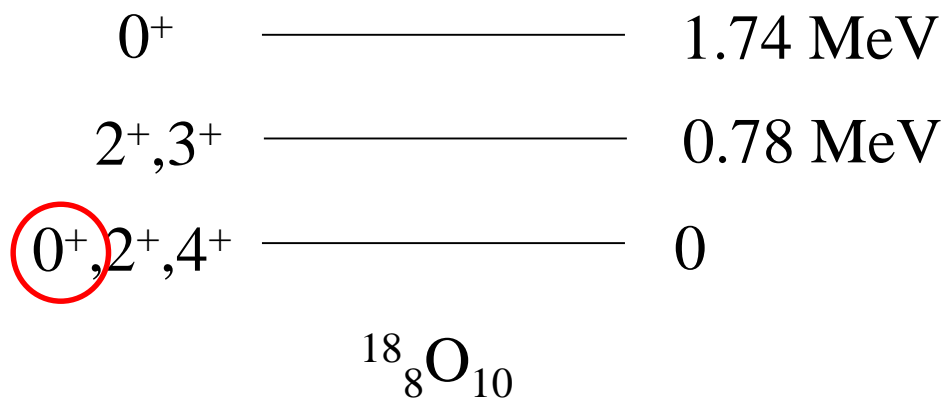
“対相関”



## 原子核の基底状態のスピ

- 偶々核: 例外なしに  $0^+$
- 奇核: 最外殻核子の角運動量と一致

# 単純な平均場近似:



# 単純な平均場近似:

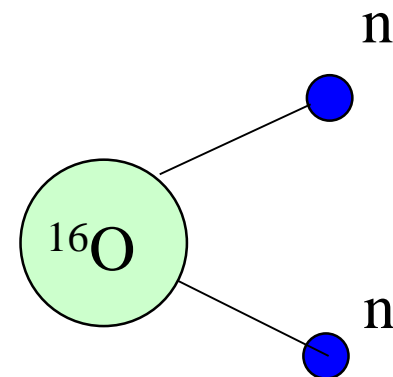
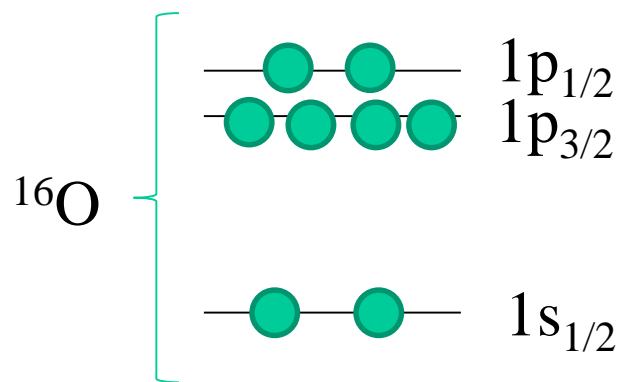
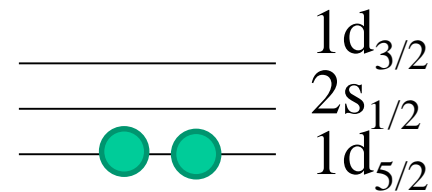
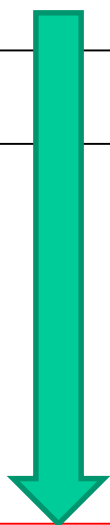
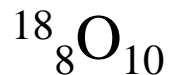
$0^+$  ————— 1.74 MeV

$2^+, 3^+$  ————— 0.78 MeV

$4^+$

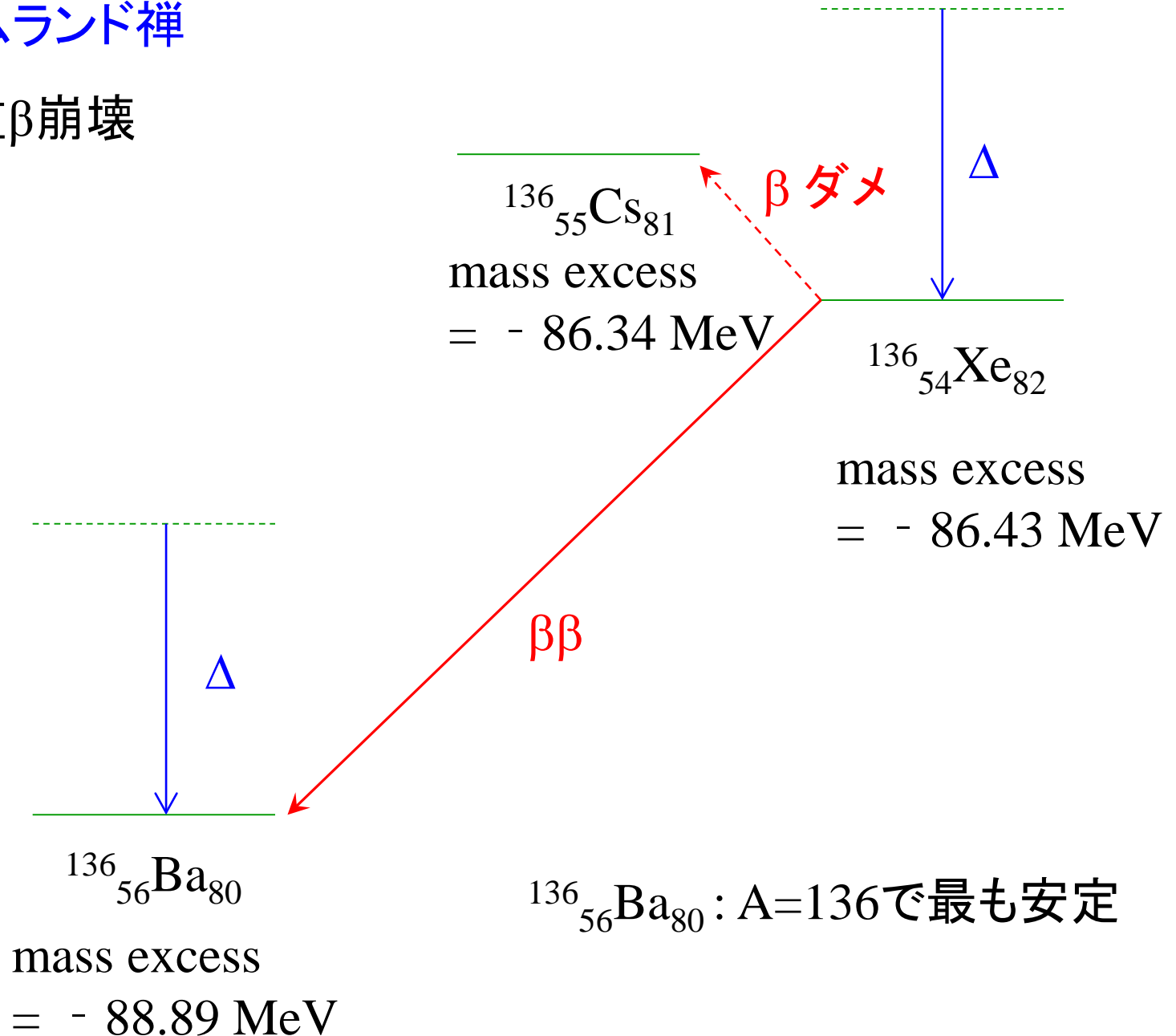
$2^+$

$0^+$



# (参考)カムランド禅

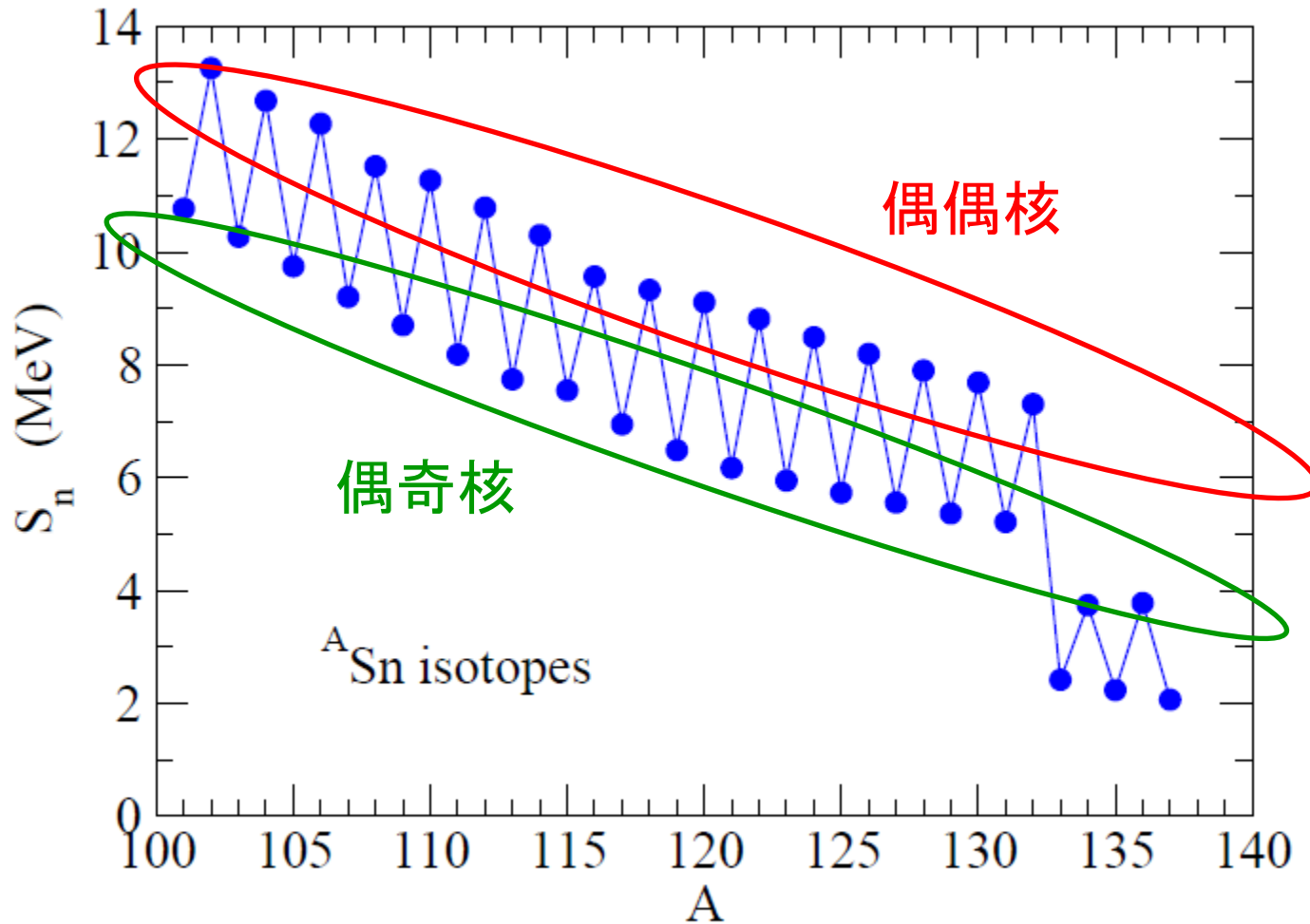
## $^{136}\text{Xe}$ の2重 $\beta$ 崩壊



# 対相関エネルギー

偶数個の中性子から1つ中性子  
を取る方が奇数個から取るより  
大きなエネルギーが必要: 対相関

even-odd staggering



$$\text{1n separation energy: } S_n(A, Z) = B(A, Z) - B(A-1, Z)$$

## (参考) 中性子誘起核分裂

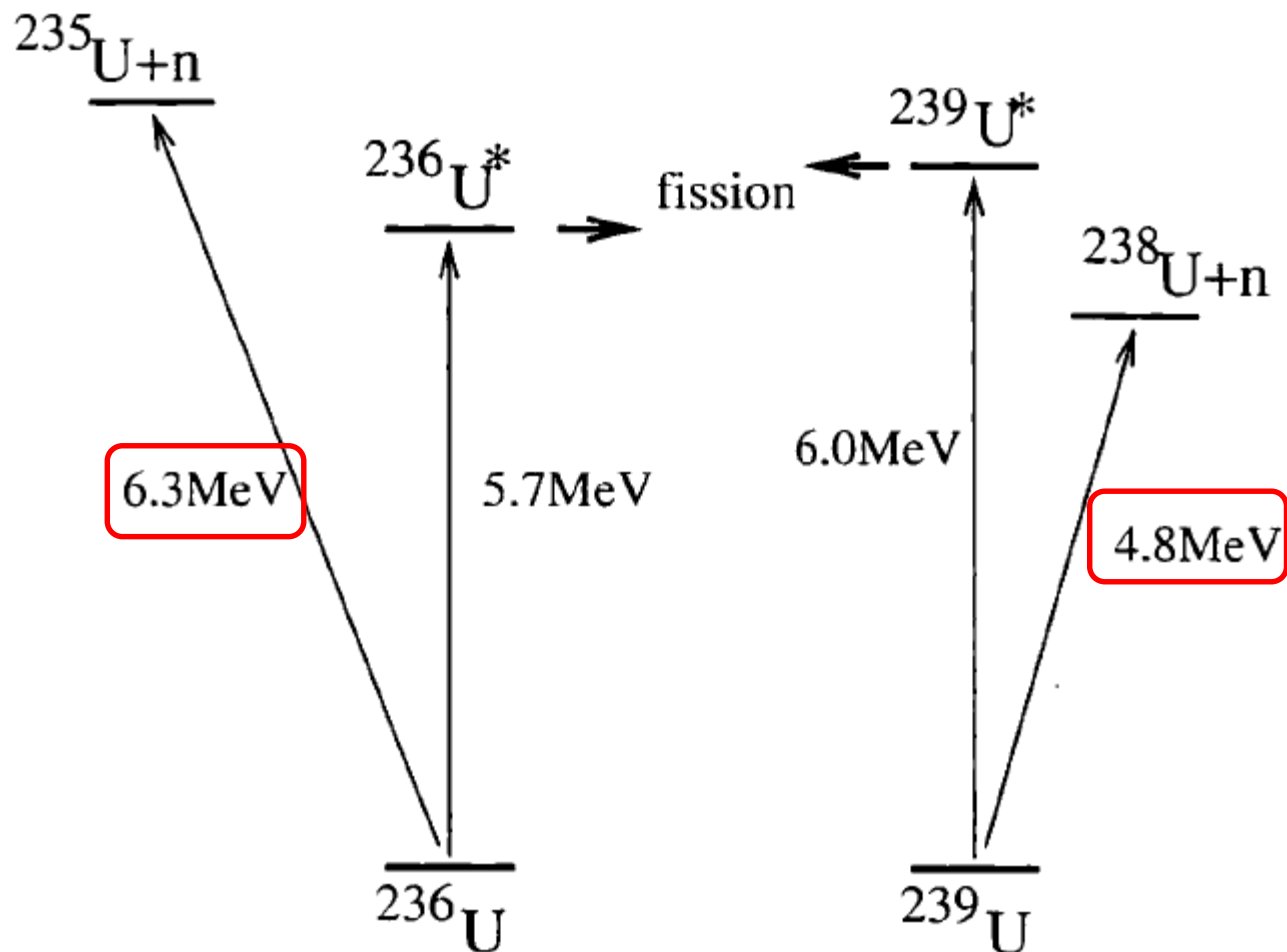
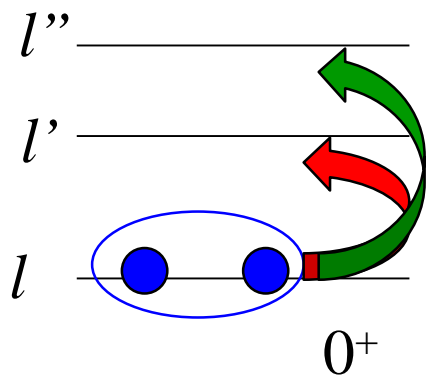
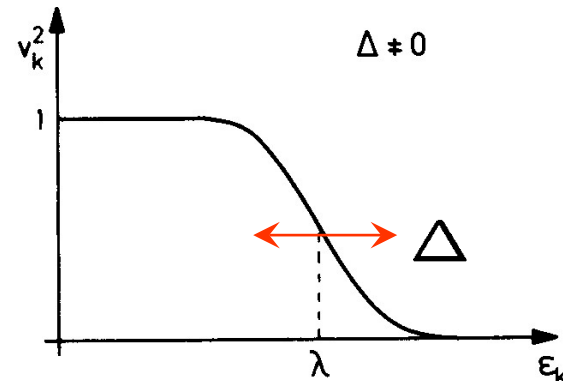
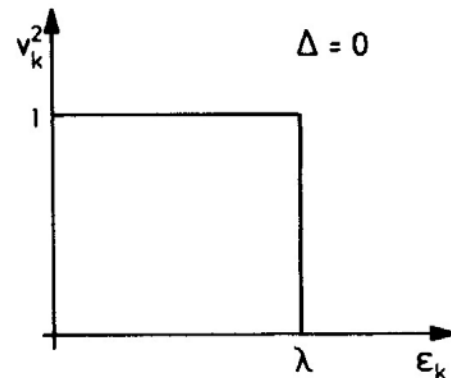


Fig. 6.6. Levels of the systems  $A = 236$  and  $A = 239$  involved in the fission of  $^{236}\text{U}$  and  $^{239}\text{U}$ . The addition of a motionless (or thermal) neutron to  $^{235}\text{U}$  can lead to the fission of  $^{236}\text{U}$ . On the other hand, fission of  $^{239}\text{U}$  requires the addition of a neutron of kinetic energy  $T_n = 6.0 - 4.8 = 1.2 \text{ MeV}$ .

# 波動関数:



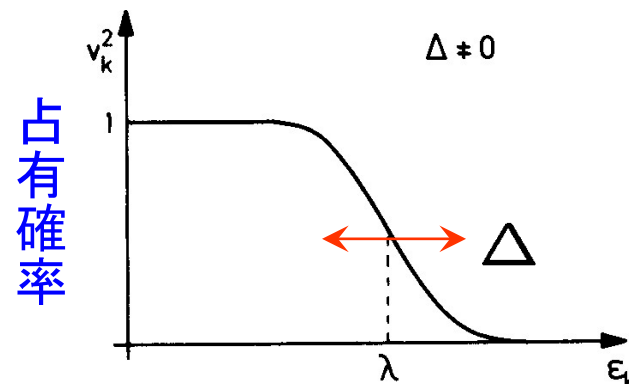
Occupation probability



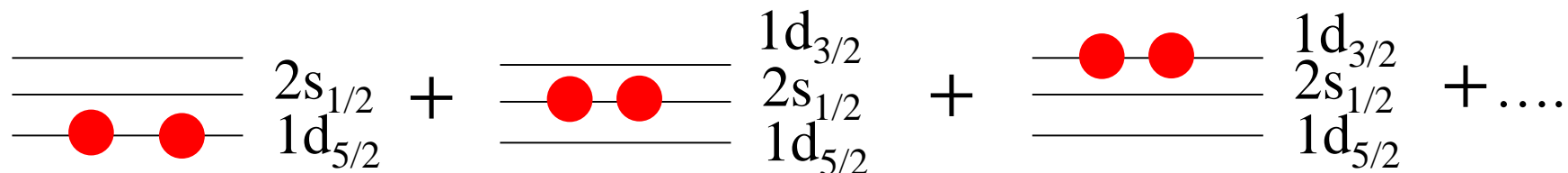
$$\begin{aligned}
 |\Psi_{0+}\rangle &= |(ll)L=0\rangle \\
 &+ \sum_{l'} \frac{\langle (l'l')L=0 | v_{\text{res}} | (ll)L=0 \rangle}{2\epsilon_l - 2\epsilon_{l'}} |(l'l')L=0\rangle + \dots
 \end{aligned}$$



## 波動関数:



$$|\Psi_{\text{g.s.}}\rangle =$$



いろいろな配位を混ぜることによって対相関エネルギーを稼ぐ

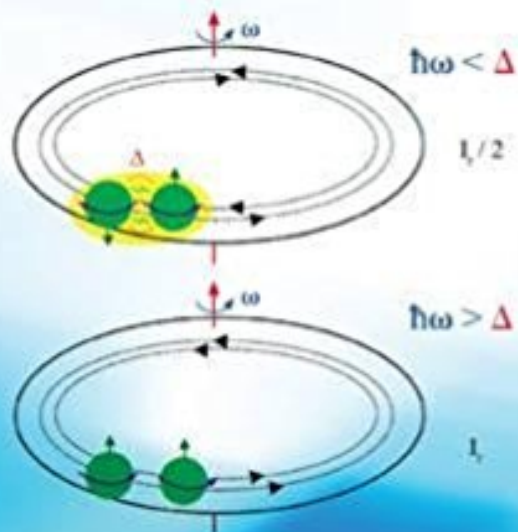
→ 各軌道は部分的にのみ占有されることになる

cf. BCS 理論

超流動状態

# Fifty Years of Nuclear BCS

Pairing in Finite Systems



Ricardo A Broglia  
Vladimir Zelevinsky  
*editors*

 World Scientific

# Nuclear Superfluidity

Pairing in Finite Systems

D. M. BRINK  
R. A. BROGLIA

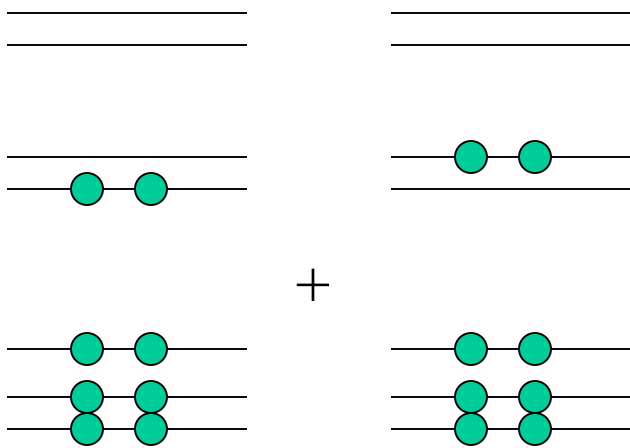
CAMBRIDGE MONOGRAPHS  
ON PARTICLE PHYSICS, NUCLEAR PHYSICS  
AND COSMOLOGY

24

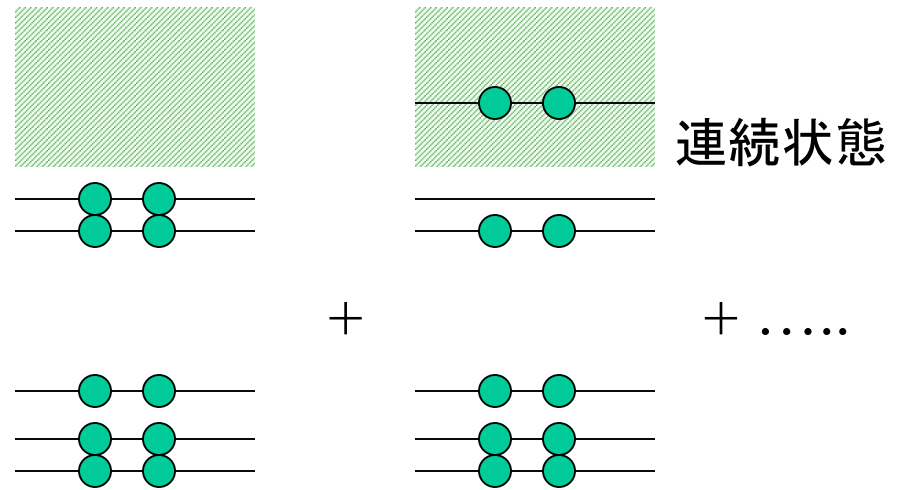
# 弱束縛核における対相関

$$H = \sum_i T_i + \sum_{i < j} v_{ij} \rightarrow H = \sum_i (T_i + V_i) + \underbrace{\sum_{i < j} v_{ij} - \sum_i V_i}_{\text{平均からのずれ (残留相互作用)}}$$

平均からのずれ  
(残留相互作用)



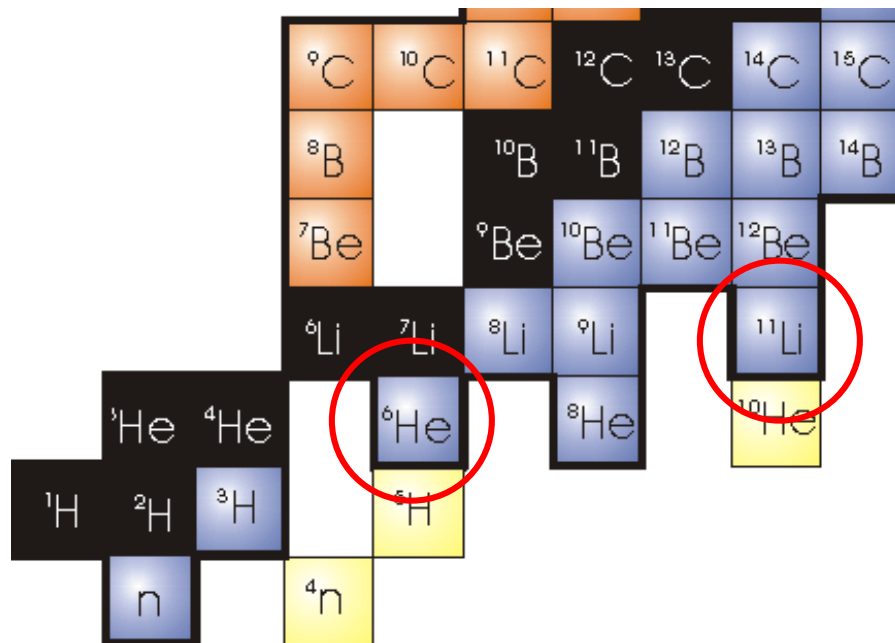
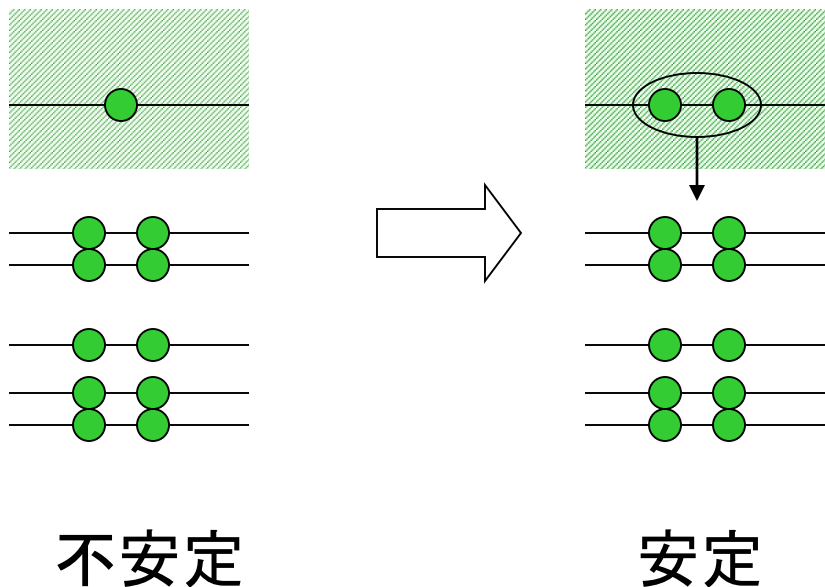
安定な原子核  
→ 超流動状態



弱く束縛された系

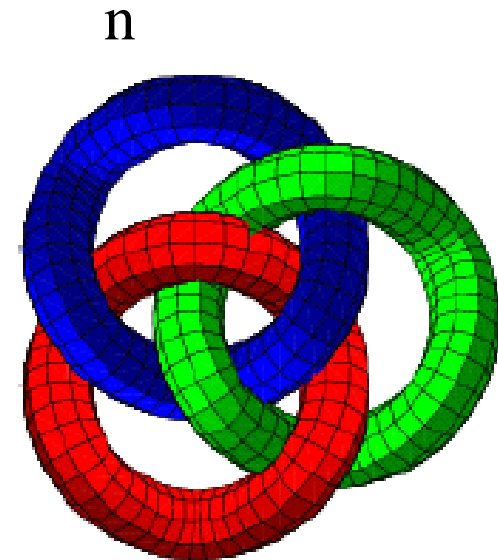
# ボロミアン原子核

残留相互作用 → 引力



“ボロミアン核”

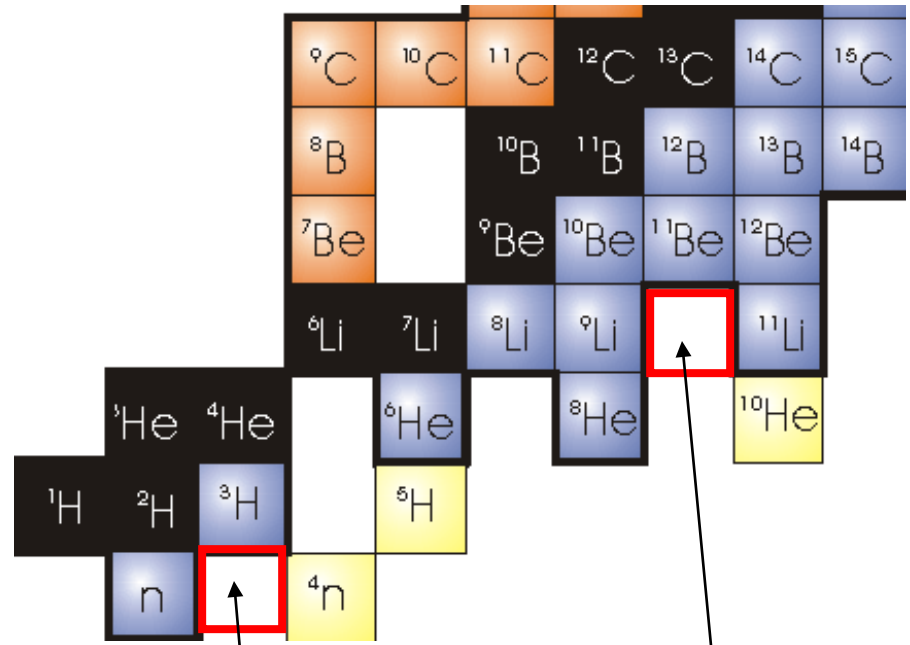
# ボロミアン原子核



${}^9\text{Li}$

ボロミアン核

$n$



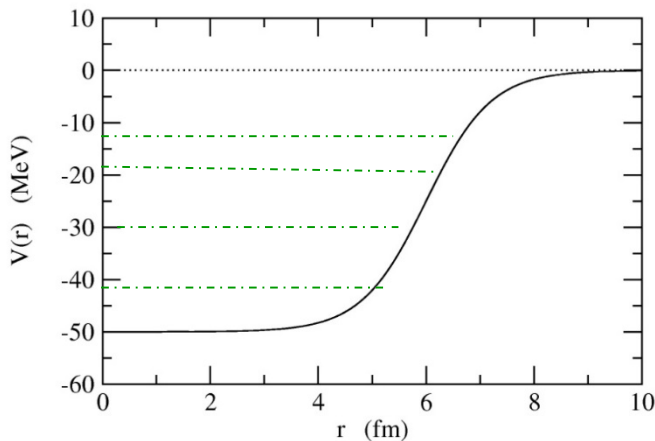
${}^{10}\text{Li}$  ( ${}^9\text{Li}+n$ )  
は存在せず

${}^{2n}$  ( $n+n$ ) は存在せず

他にも、 ${}^6\text{He}$  が典型的な例

# HF+BCS theory

- ① 平均場近似をして核子の感じるポテンシャルを求める  
(平均的な振る舞いをまず決める)



- ② 各準位の占有確率を決める。  
決め方は、残留相互作用も含めてエネルギーが最小になるようにする。

$$|BCS\rangle = \prod_{k>0} (u_k + v_k a_k^\dagger a_{\bar{k}}^\dagger) |0\rangle$$

$$\langle BCS | a_k^\dagger a_k | BCS \rangle = |v_k|^2 \quad \text{占有確率}$$

$$H = \sum_{\nu} \epsilon_k (a_k^{\dagger} a_k + a_{\bar{k}}^{\dagger} a_{\bar{k}}) - G \left( \sum_{k>0} a_k^{\dagger} a_k^{\dagger} \right) \left( \sum_{k>0} a_{\bar{k}} a_k \right)$$

というハミルトニアンを使うと:

$$\Delta = \frac{G}{2} \sum_{\nu>0} \frac{\Delta}{\sqrt{(\epsilon_k - \lambda)^2 + \Delta^2}}$$

ギャップ方程式

$$\Delta = G \sum_{\nu>0} u_{\nu} v_{\nu} \quad \text{ペアリング・ギャップ}$$

$$u_{\nu}^2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\epsilon_{\nu} - \lambda}{\sqrt{(\epsilon_k - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right)$$
$$v_{\nu}^2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\epsilon_{\nu} - \lambda}{\sqrt{(\epsilon_k - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right)$$

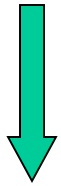
i) Trivial solution: always exists

$$\Delta = 0$$

$$v_\nu^2 = 1 \quad (\epsilon_\nu \leq \lambda)$$

$$= 0 \quad (\epsilon_\nu > \lambda)$$

$$|\Psi\rangle = \prod_{\nu>0} a_\nu^\dagger a_\nu^\dagger |0\rangle$$



$G$  a/o  $N \longrightarrow$  large

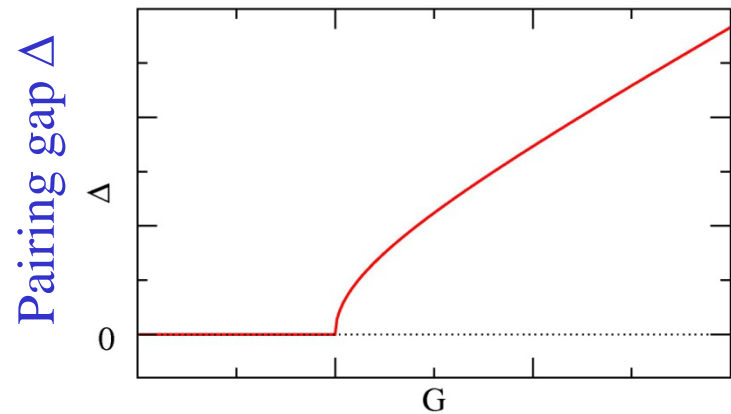
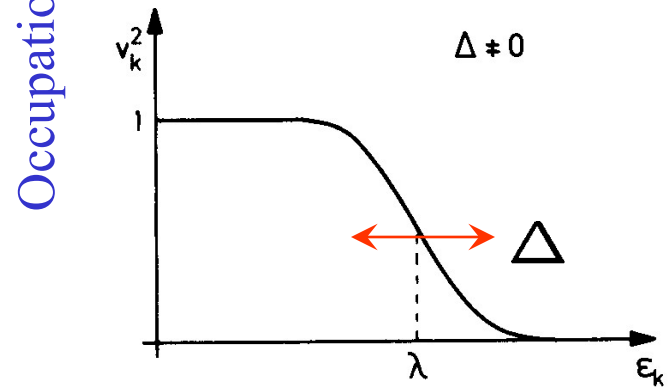
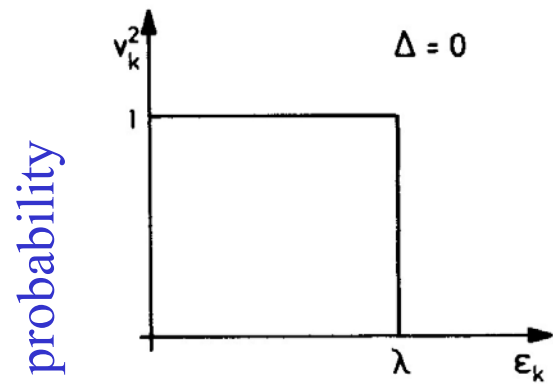
ii) Superfluid solution

$$\Delta \neq 0$$

$$v_\nu^2 < 1$$

$$|BCS\rangle = \prod_{\nu>0} (u_\nu + v_\nu a_\nu^\dagger a_\nu^\dagger) |0\rangle$$

Number fluctuation



Normal-Superfluid phase transition



## Quasi-particle excitations

$$H \sim E_{BCS} + \sum_k E_k \alpha_k^\dagger \alpha_k$$

$$E_k = \sqrt{(\epsilon_k - \lambda)^2 + \Delta^2}$$

$$\alpha_{\nu}^\dagger = u_{\nu} a_{\nu}^\dagger - v_{\nu} a_{\bar{\nu}}, \quad \alpha_{\bar{\nu}}^\dagger = u_{\nu} a_{\bar{\nu}}^\dagger + v_{\nu} a_{\nu}$$

(ボゴリューボフ変換)

(note)

$$E_k = \sqrt{(\epsilon_k - \lambda)^2 + \Delta^2} \geq \Delta$$

(エネルギー・ギャップ)

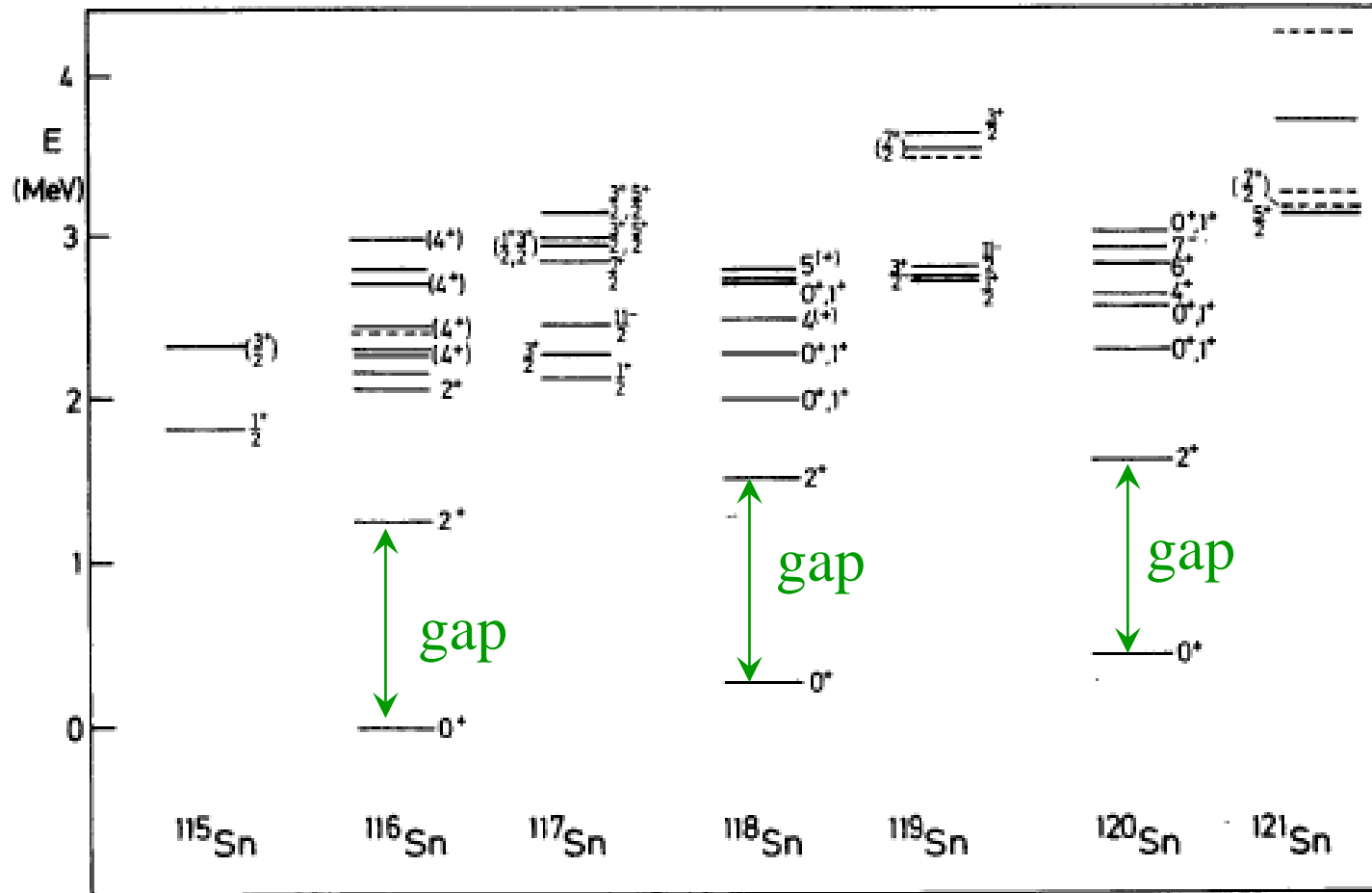
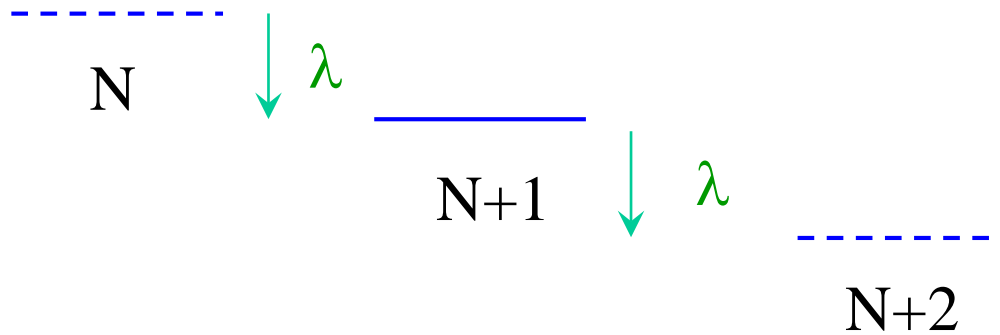


Figure 6.1. Excitation spectra of the  ${}_{50}\text{Sn}$  isotopes.

# Even-odd mass difference and pairing gap

$$E(N + 2, Z) = E(N, Z) + 2\lambda$$

$$E(N + 1, Z) = E(N, Z) + \lambda + \Delta$$



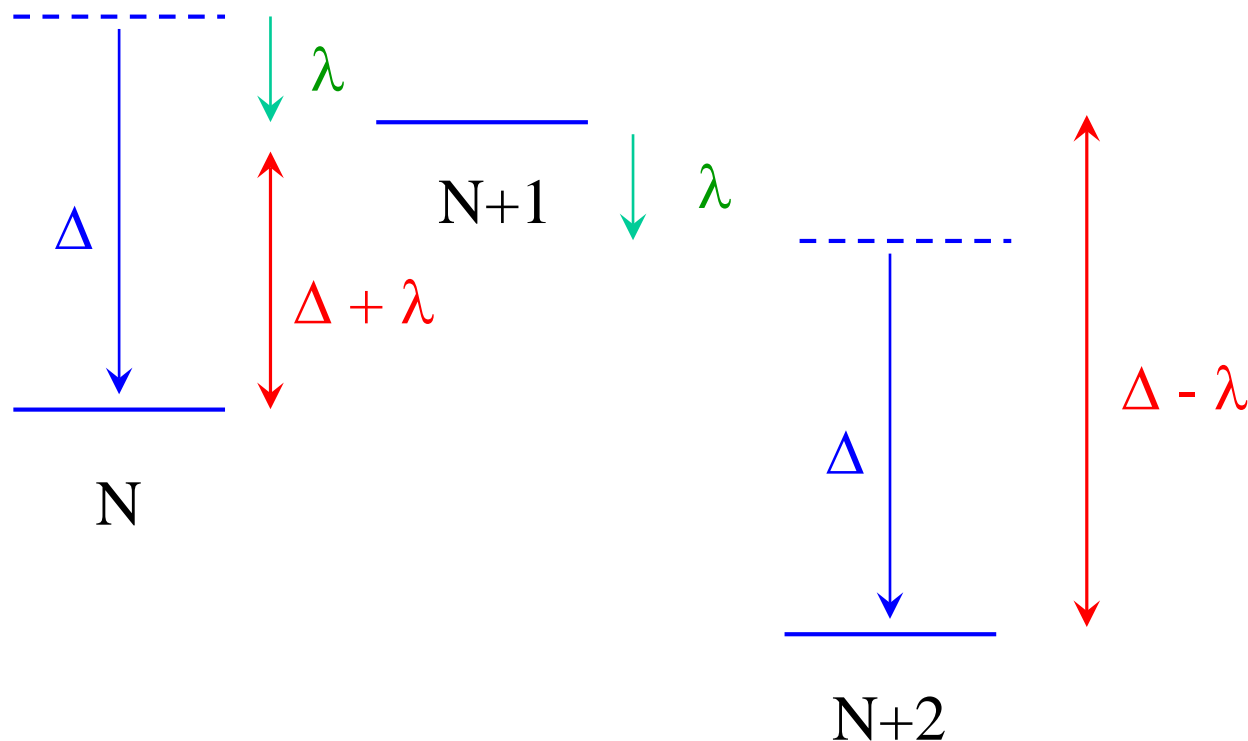
(note)  $\lambda < 0$

$$-\Delta_n \sim [E(N + 2, Z) - 2E(N + 1, Z) + E(N, Z)]/2$$

# Even-odd mass difference and pairing gap

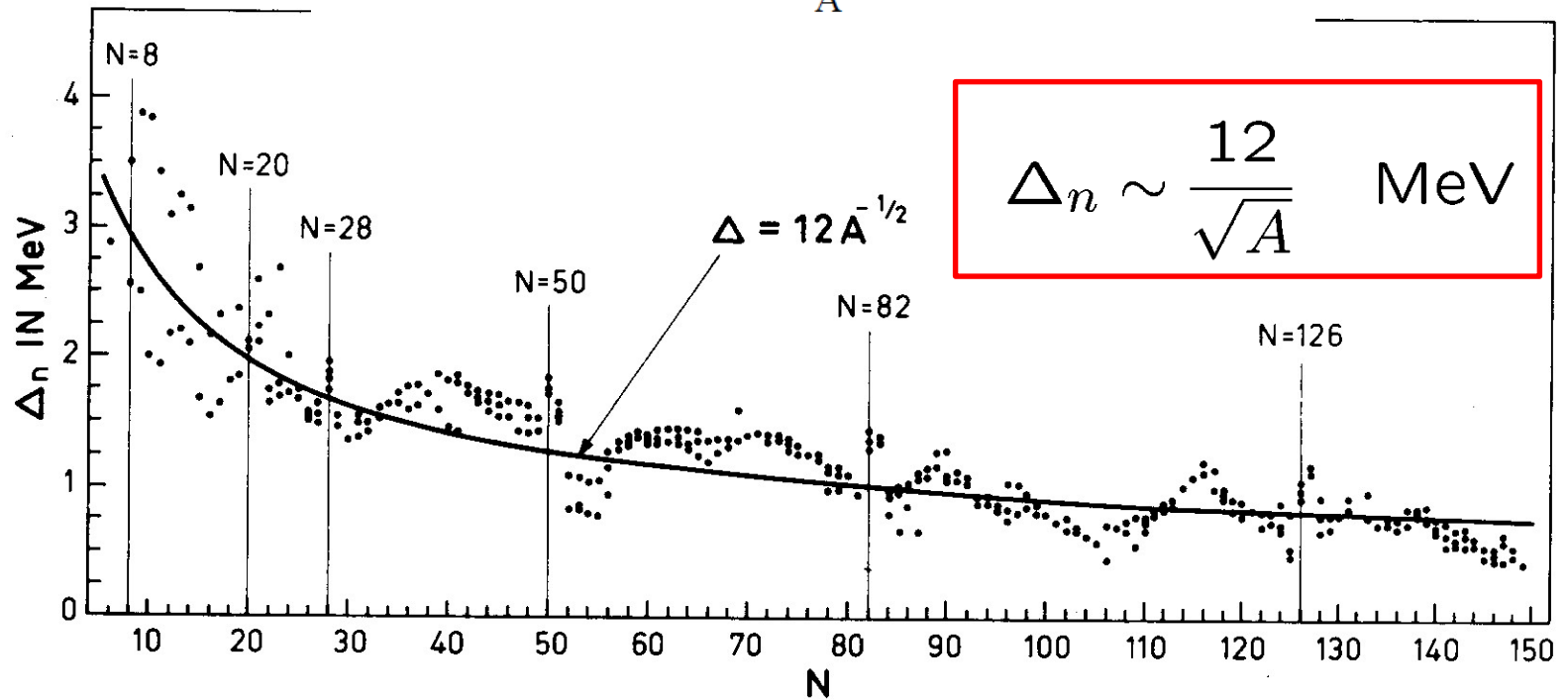
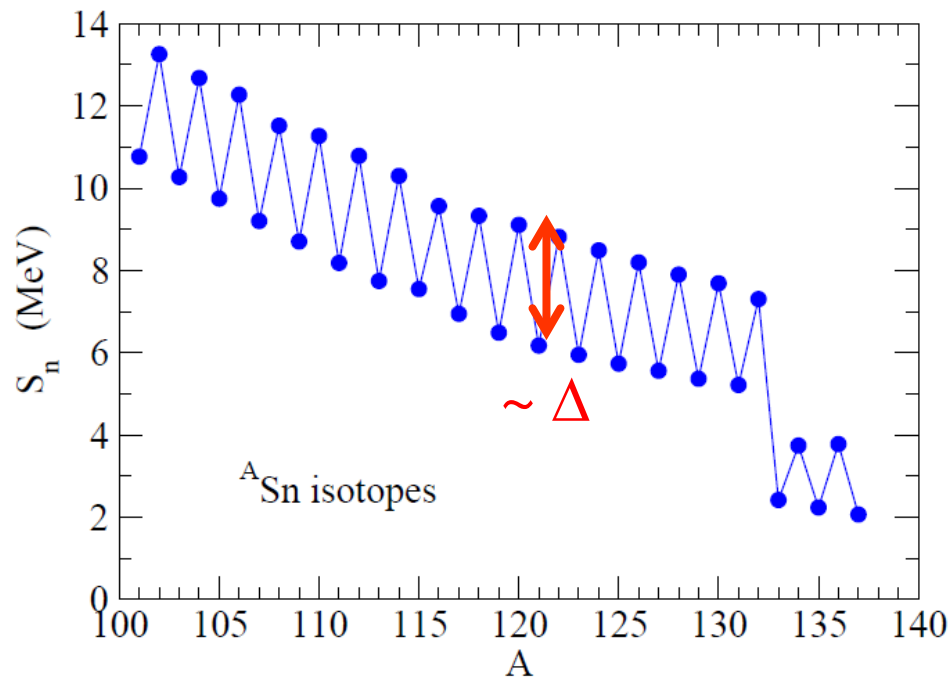
$$E(N + 2, Z) = E(N, Z) + 2\lambda$$

$$E(N + 1, Z) = E(N, Z) + \lambda + \Delta$$



(note)  $\lambda < 0$

$$-\Delta_n \sim [E(N + 2, Z) - 2E(N + 1, Z) + E(N, Z)]/2$$



# Hartree-Fock-Bogoliubov (HFB) Theory

HF+BCS 法: 2ステップ

(まず平均場を求め、次に占有確率)

$$\psi_k(\mathbf{r}), u_k, v_k$$



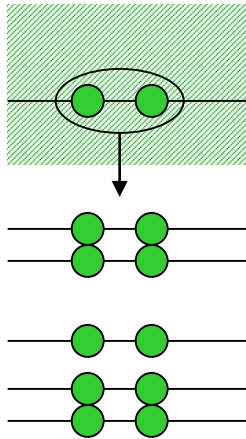
改良: 両方同時に行う

Hartree-Fock-Bogoliubov (HFB) theory:

波動関数と占有確率を同時に求める

$$U_k(\mathbf{r}), V_k(\mathbf{r})$$

cf. weakly bound systems  
(ガスの問題)



束縛

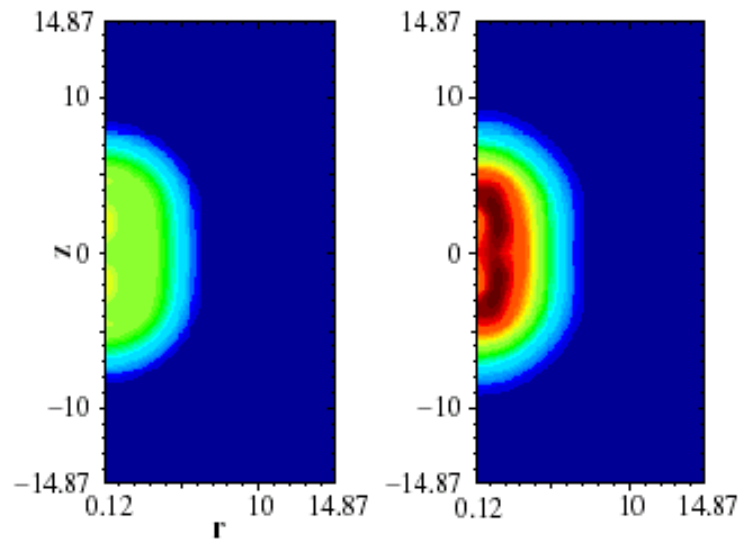


BCS法だと散乱状態をそのまま占有させるので、中性子が抜けていく（束縛核のまわりに中性子のガスができる）。

HFB法だと全体で束縛するということがもともと取り入れられているので中性子ガスは発生しない。

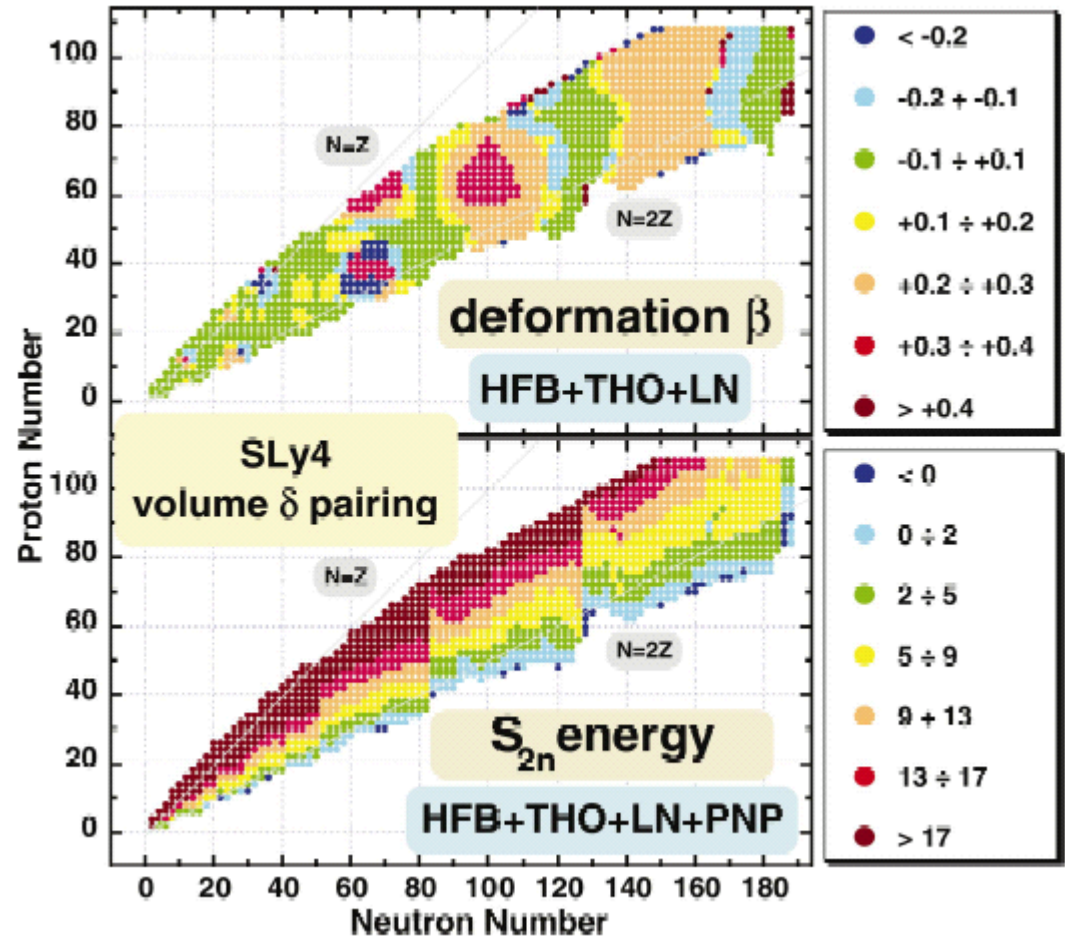
# Application of the HFB method

Density of  $^{110}\text{Zr}$  (SHFB-SLy4)



A. Blazkiewicz et al.,  
PRC71('05)054231

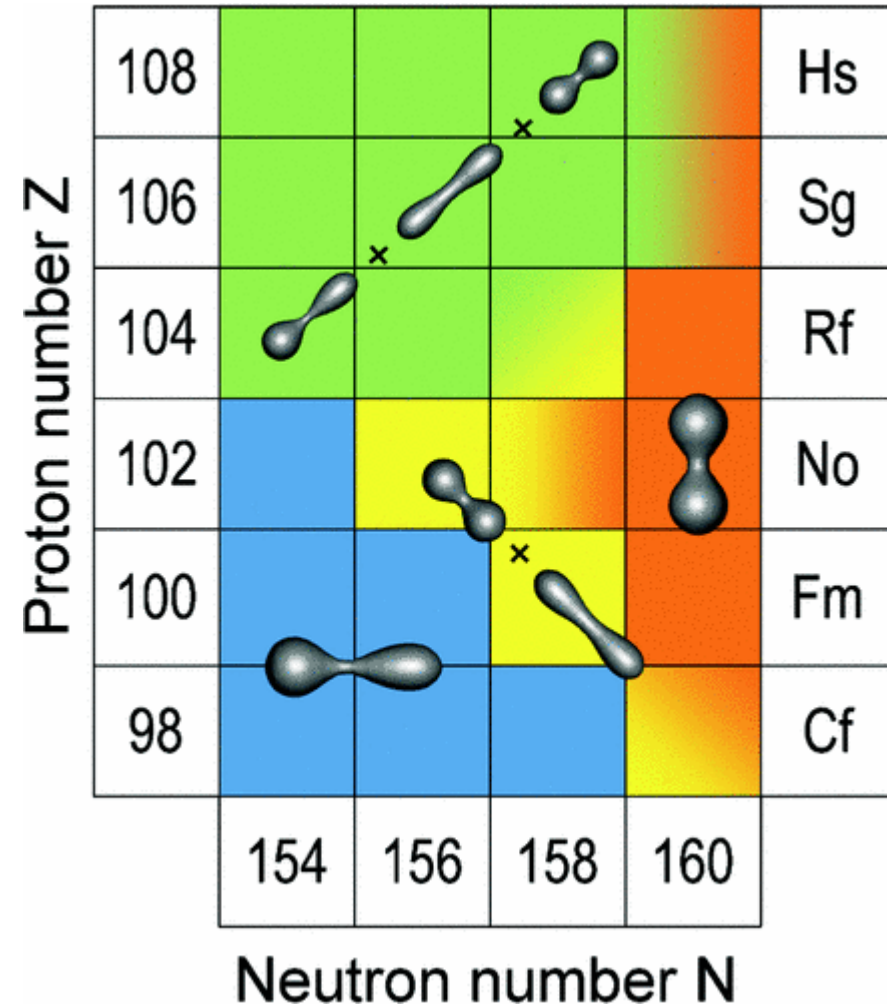
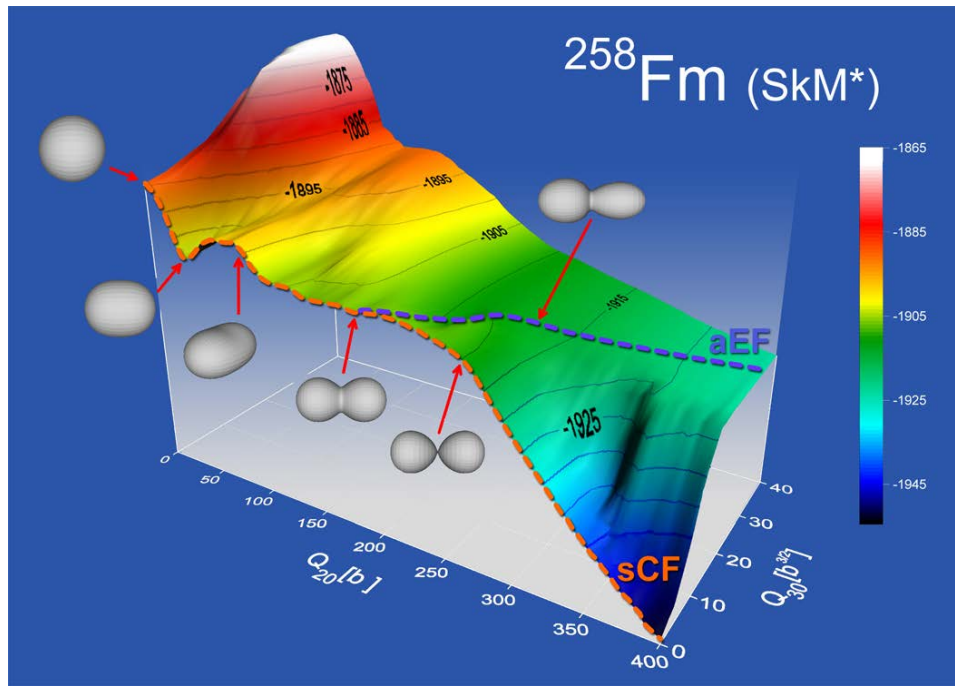
Systematics of  $\beta_2$  and  $S_{2n}$



M.V. Stoitsov et al., PRC68('03)054312



# potential energy surface for fission process



A. Staszczak, A. Baran, J. Dobaczewski,  
and W. Nazarewicz, PRC80 ('09) 014309