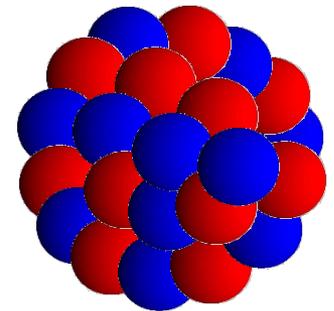


# 原子核理論基礎論A

原子核理論研究室(物2)  
萩野浩一

## シラバス

- 大西 {
1. はじめに(原子核の基本的性質)(1コマ)
  2. 核力とその起源(3コマ)
  3. クォークとハドロン(1コマ)
  4. 核物質の相図と状態方程式(2コマ)
- 萩野 {
5. 殻模型と魔法数(1コマ)
  6. 平均場理論と核変形(3コマ)
  7. 中性子過剰核の物理(2コマ)
  8. 非束縛核と共鳴散乱理論(1コマ)



核子多体系の量子力学

## シラバス(基礎論A)

大西

1. はじめに(原子核の基本的性質)(1コマ)
2. 核力とその起源(3コマ)
3. クォークとハドロン(1コマ)
4. 核物質の相図と状態方程式(2コマ)

萩野

5. 殻模型と魔法数(1コマ)
6. 平均場理論と核変形(3コマ)
7. 中性子過剰核の物理(2コマ)
8. 非束縛核と共鳴散乱理論(1コマ)

主に基底状態

## シラバス(基礎論B)

萩野

1. 原子核の集団運動とその微視的理解(3コマ)
2. 原子核反応論基礎(1コマ)
3. 核融合反応(1コマ)
4. 核分裂:現象論と微視的理論(1コマ)
5. ニホニウムと超重元素の物理(1コマ)

主に励起状態  
と核反応

後半は  
大西

6. 以降、大西(QCD,高エネルギー重イオン衝突、  
有限温度・有限密度の場の理論)

# 原子核理論基礎論A

原子核理論研究室(物2)  
萩野浩一

## シラバス

- |    |                                 |
|----|---------------------------------|
| 大西 | 1. はじめに(原子核の基本的性質)(1コマ)         |
|    | 2. 核力とその起源(3コマ)                 |
|    | 3. クォークとハドロン(1コマ)               |
|    | 4. 核物質の相図と状態方程式(2コマ)            |
| 萩野 | 5. 殻模型と魔法数(1コマ) 6/16            |
|    | 6. 平均場理論と核変形(3コマ) 6/23, 30, 7/7 |
|    | 7. 中性子過剰核の物理(2コマ) 7/14, 21      |
|    | 8. 非束縛核と共鳴散乱理論(1コマ) 7/28        |

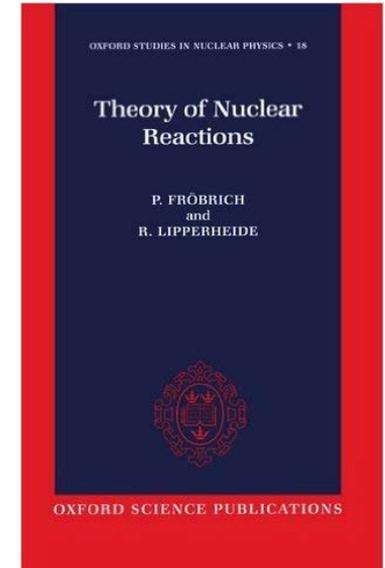
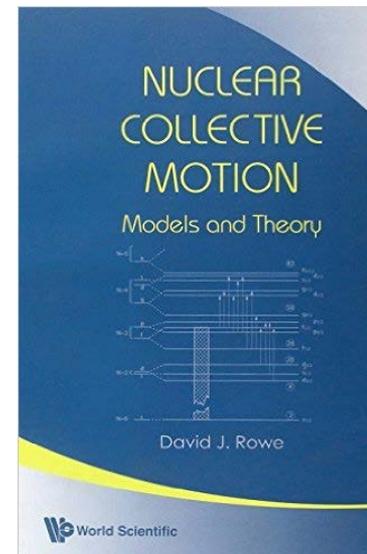
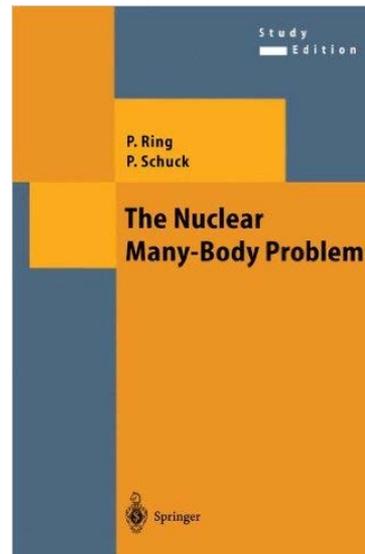
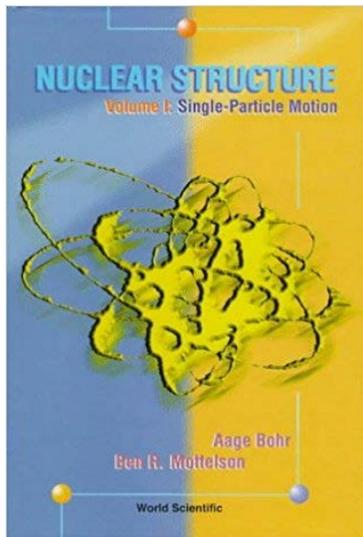
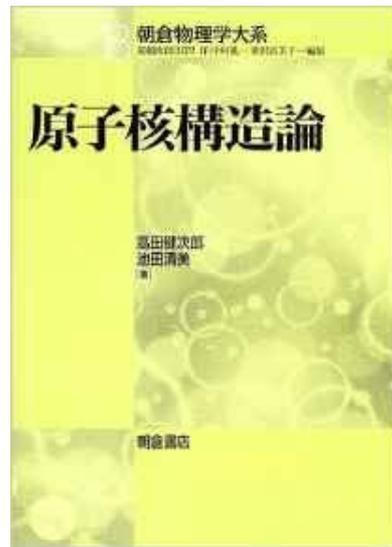
成績： レポート80%、出席など20%

Zoomへの接続方法？

PandA から接続すれば出席が自動的

質問： 適宜聞いて下さい。  
チャットに書き込んでもOK。

# 参考書



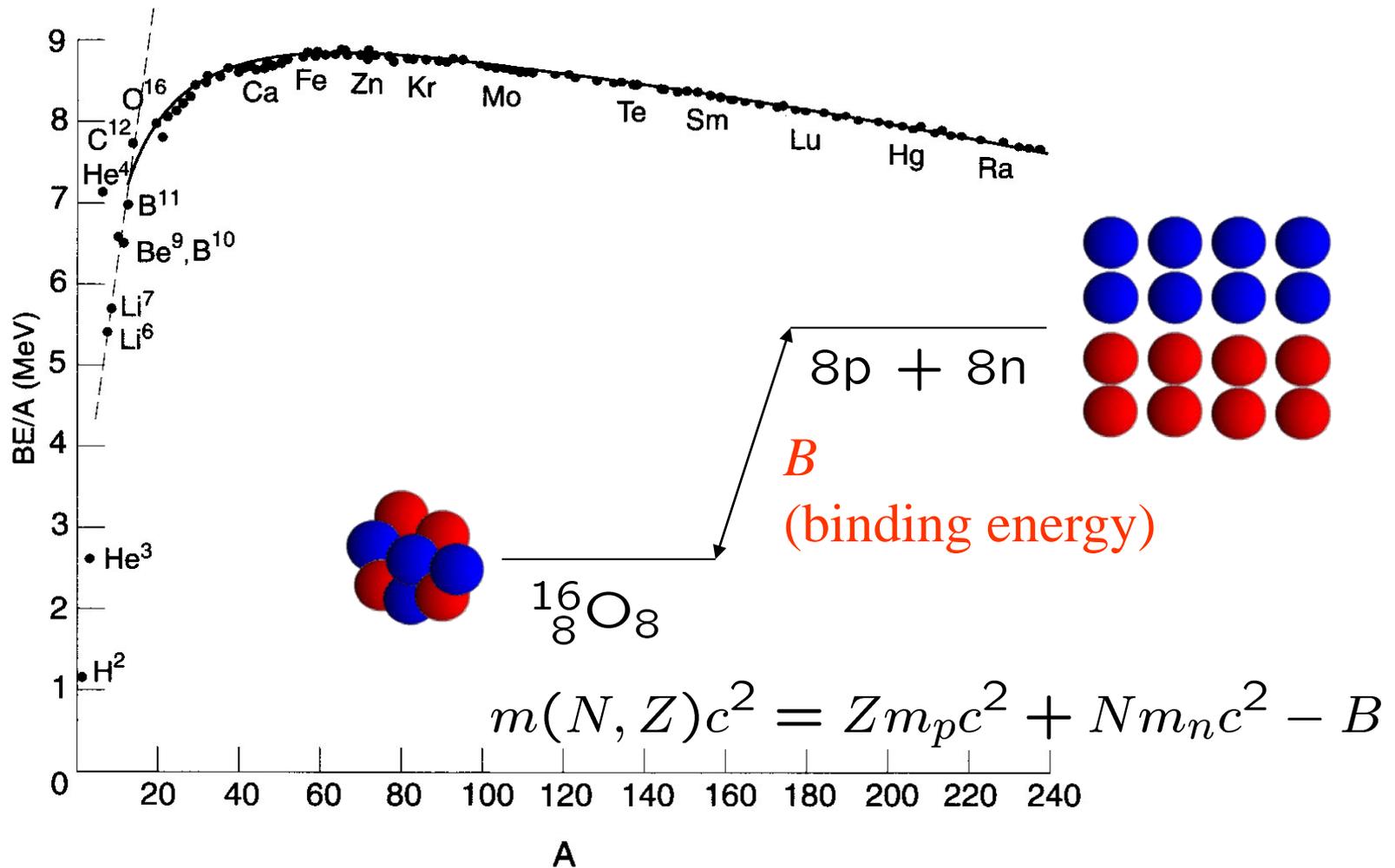
Bohr-Mottelson

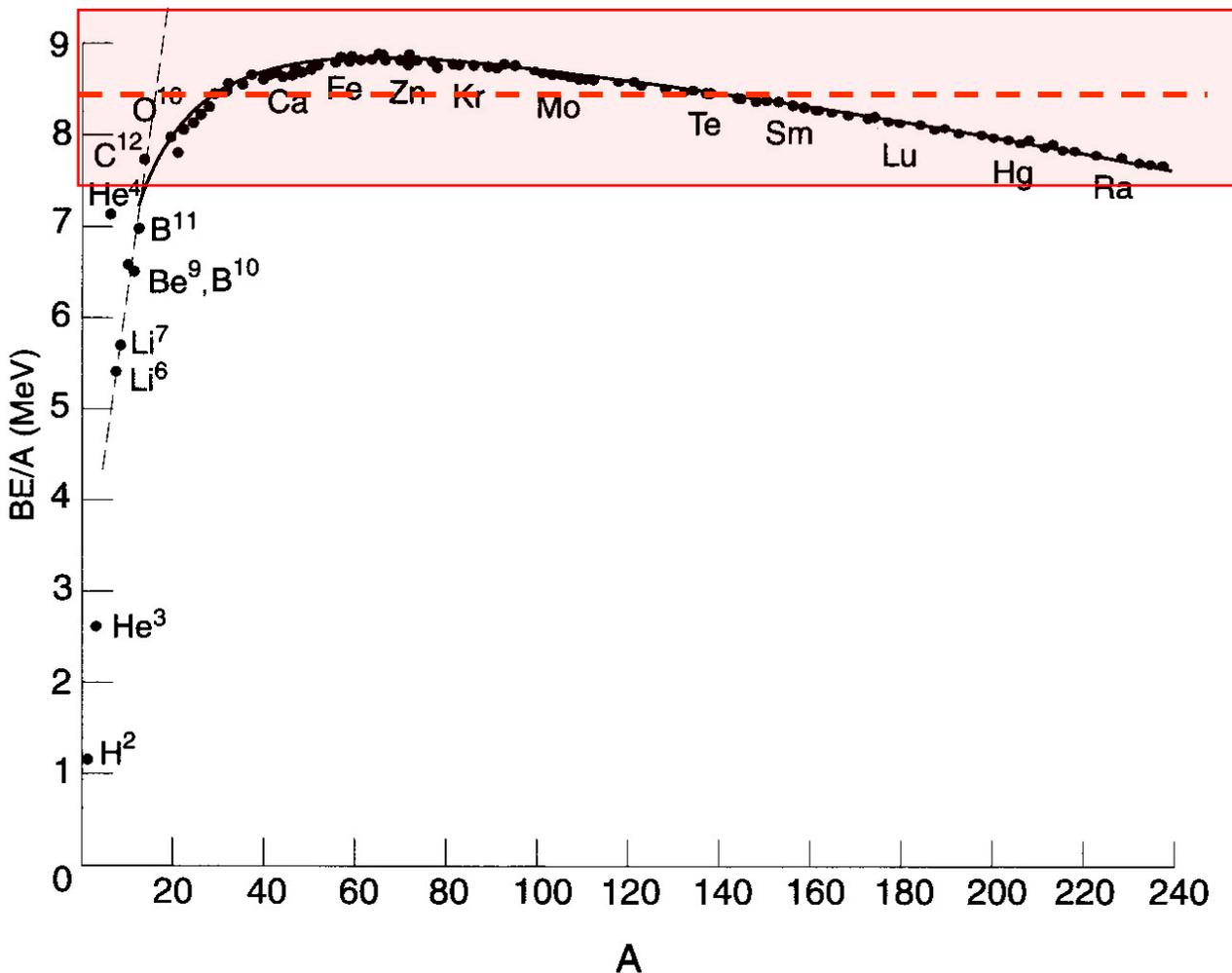
Ring-Schuck

Rowe

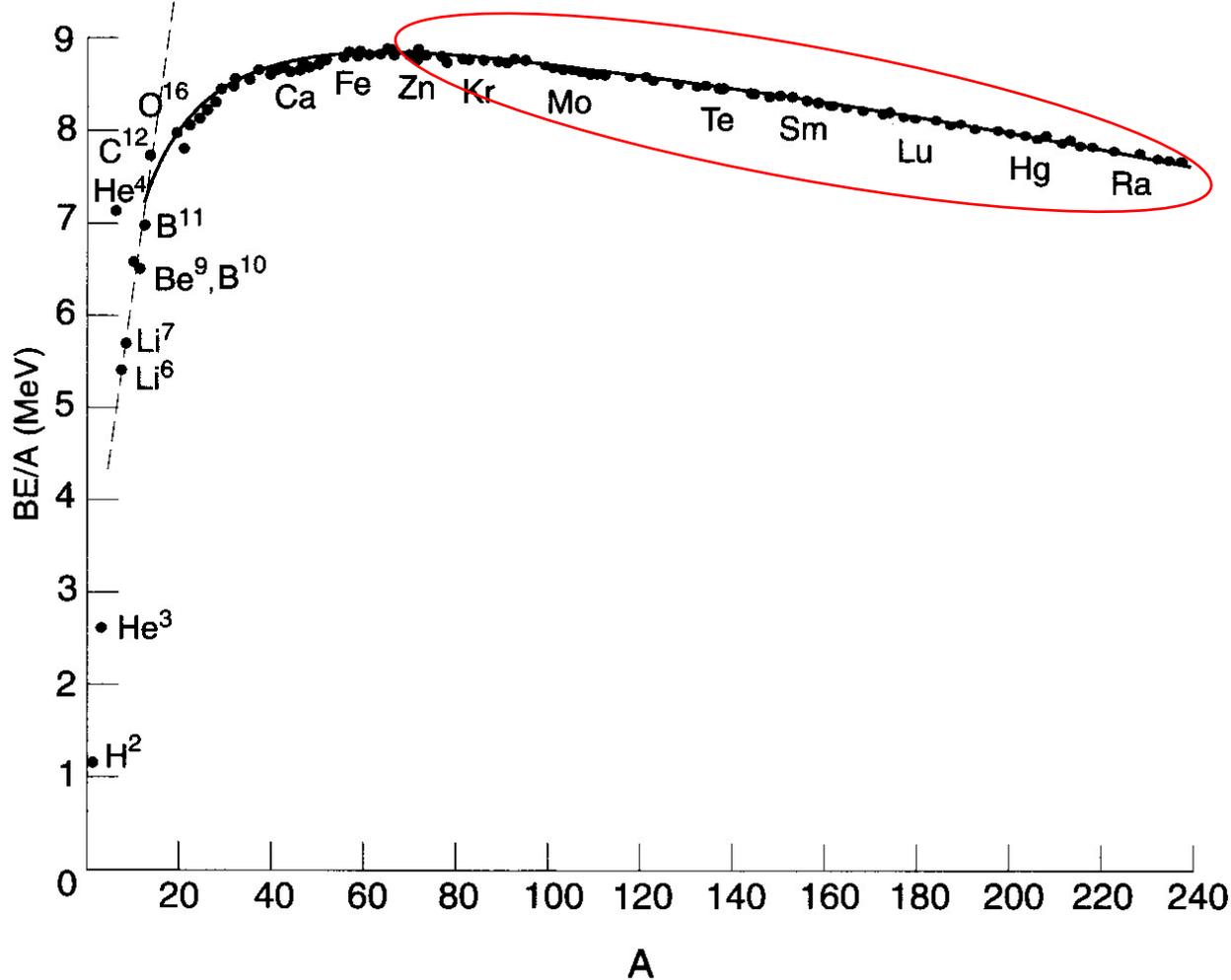
Frobrich  
-Lipperheide

# 原子核の質量



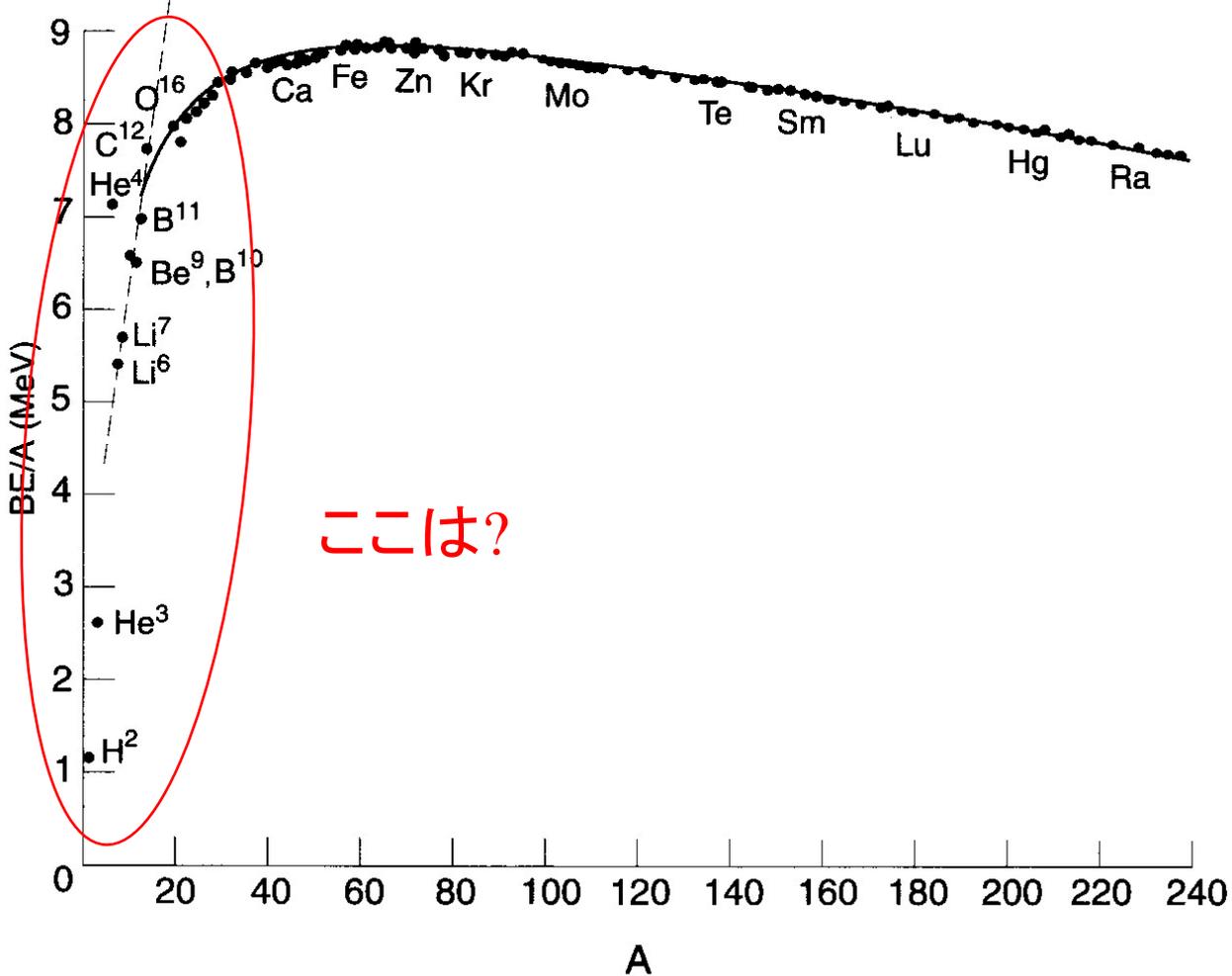


1.  $B(N,Z)/A \sim 8.5 \text{ MeV} (A > 12) \iff$  短距離力 (核子間相互作用)  
 (ほぼ一定)



1.  $B(N,Z)/A \sim 8.5 \text{ MeV} (A > 12) \iff$  短距離力(核子間相互作用)
2. 重い原子核に対してはクーロン力の影響

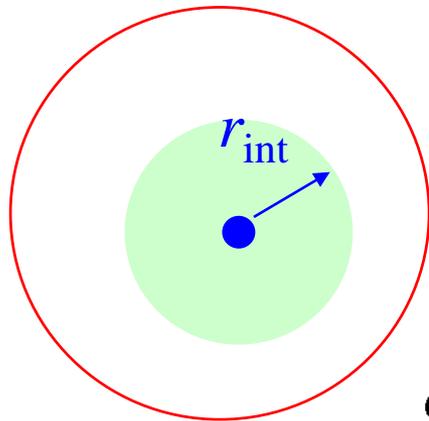
←  $B/A$  が  $A$  に比例して減少  
 (長距離力(クーロン力)がはたらいっている証拠)



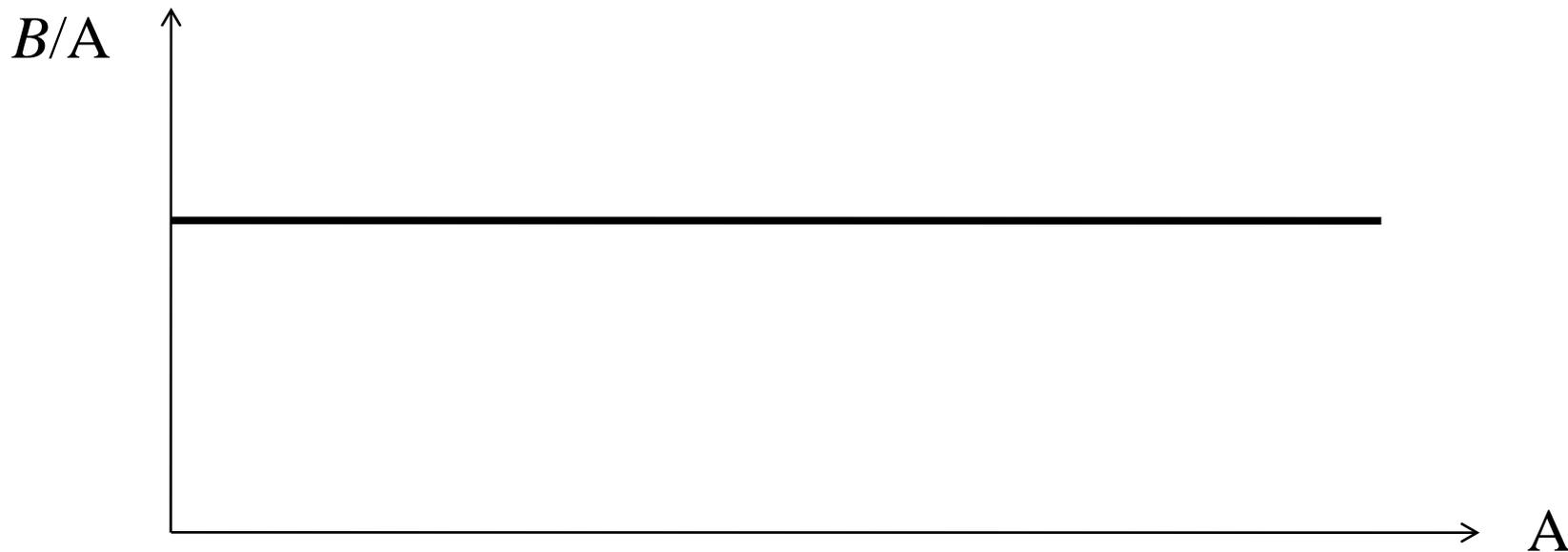
1.  $B(N,Z)/A \sim 8.5 \text{ MeV}$  ( $A > 12$ )  $\iff$  短距離力(核子間相互作用)
2. 重い原子核に対してはクーロン力の影響  
 ←  $B/A$  が  $A$  に比例して減少  
 (長距離力(クーロン力)がはたらいっている証拠)

もし、それぞれの核子が近くの $\alpha$ 個の粒子とだけ相互作用するとしたら:

$$B \sim \alpha A/2 \longrightarrow B/A \sim \alpha/2 \text{ (const.)}$$

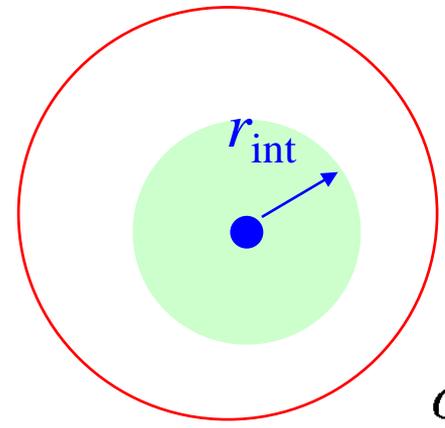


$$\alpha = \frac{4\pi}{3} r_{\text{int}}^3 \cdot \rho$$



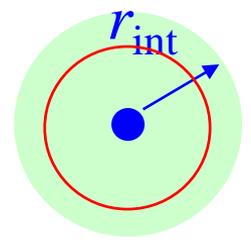
もし、それぞれの核子が近くの $\alpha$ 個の粒子とだけ相互作用するとしたら:

$$B \sim \alpha A/2 \longrightarrow B/A \sim \alpha/2 \text{ (const.)}$$

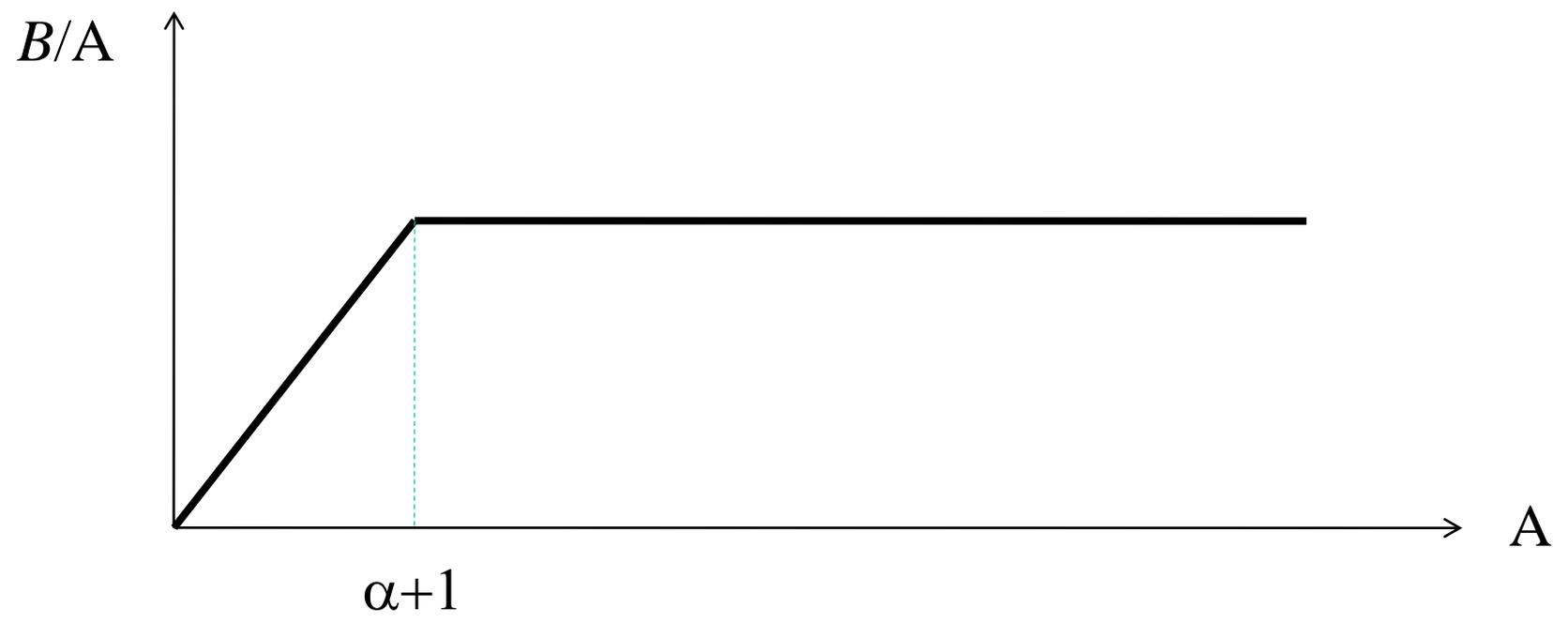


$$\alpha = \frac{4\pi}{3} r_{\text{int}}^3 \cdot \rho$$

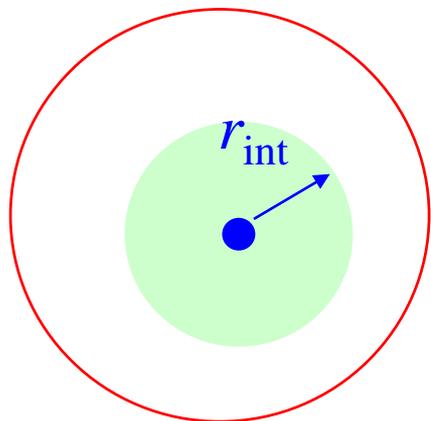
小さな原子核だと



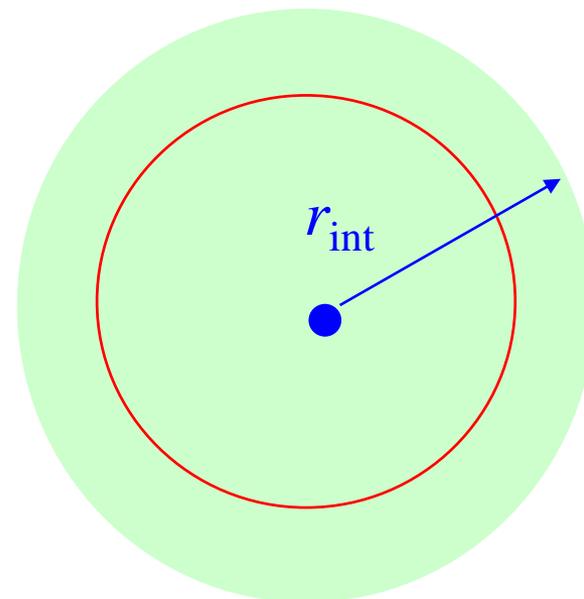
$$\rightarrow B/A \propto A - 1$$



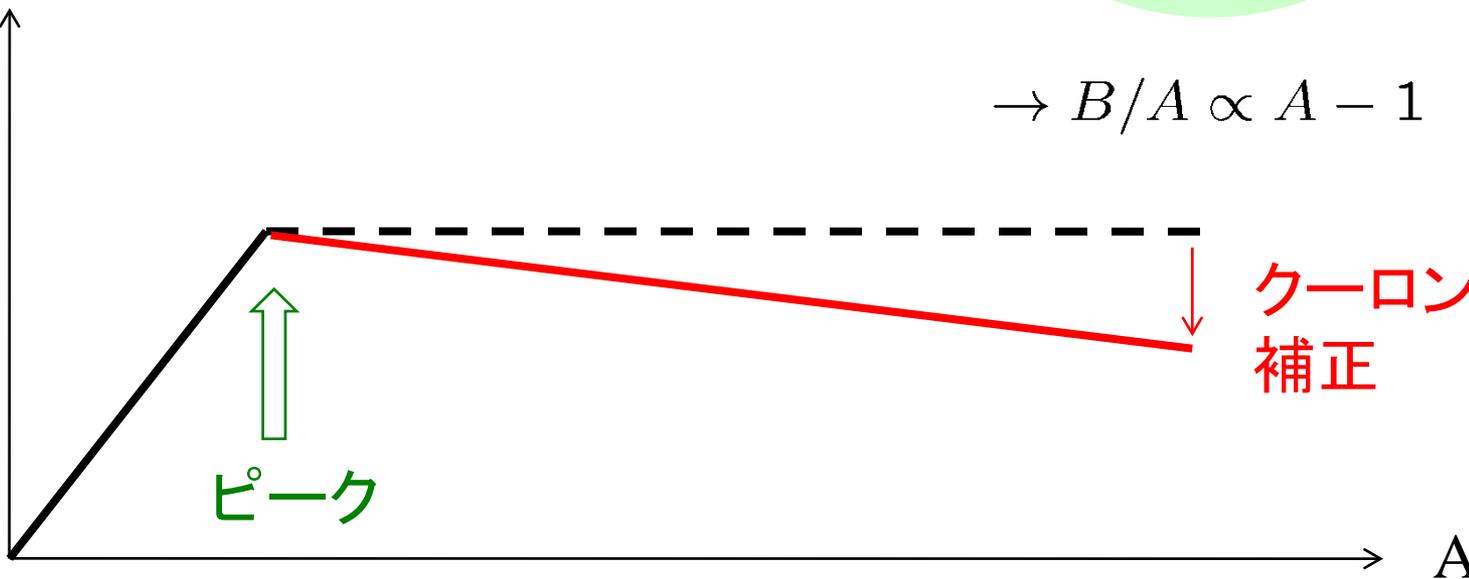
核力



クーロン力



$B/A$

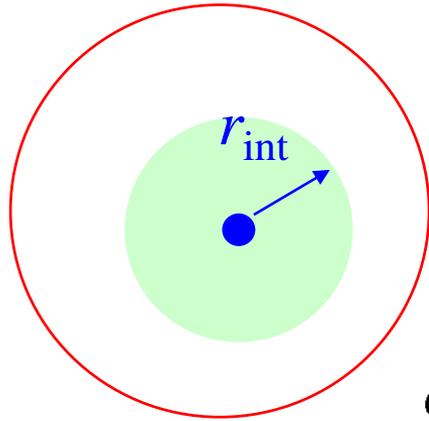


$\rightarrow B/A \propto A - 1$

クーロンによる補正

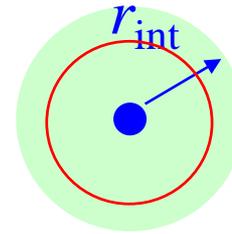
ピーク

# 核力のレンジの見積もり

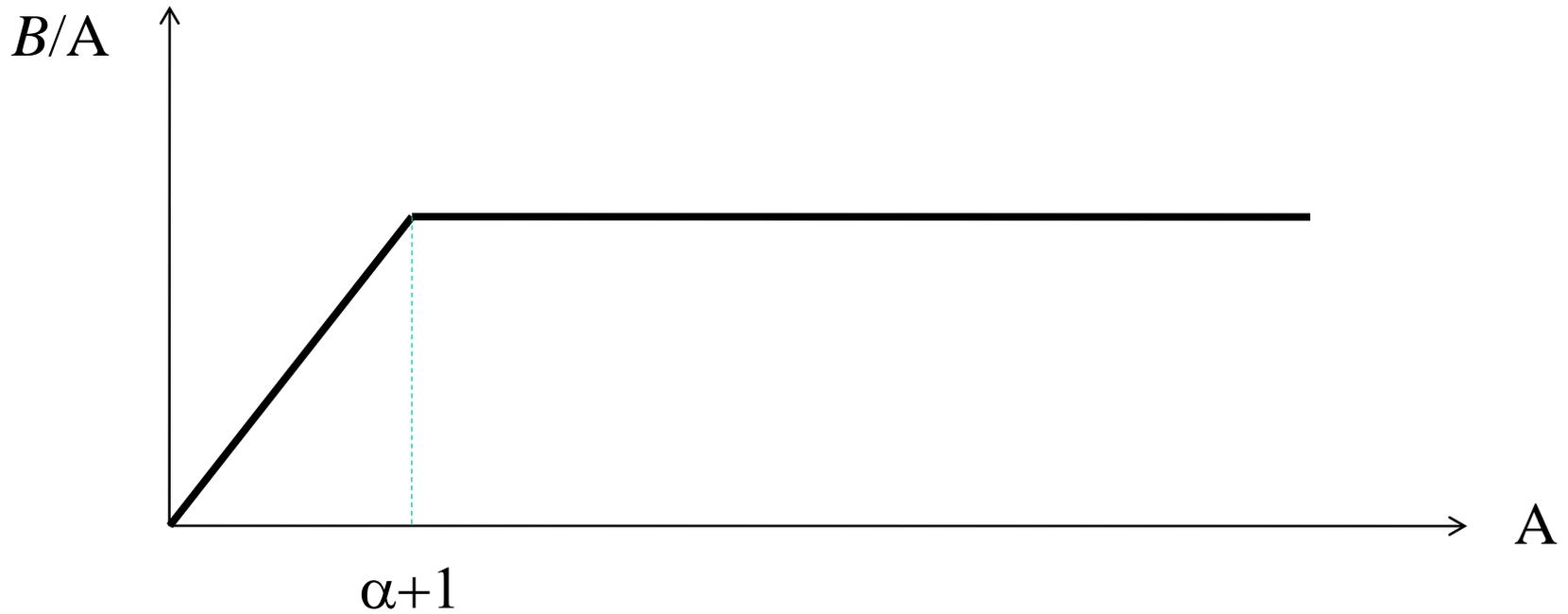


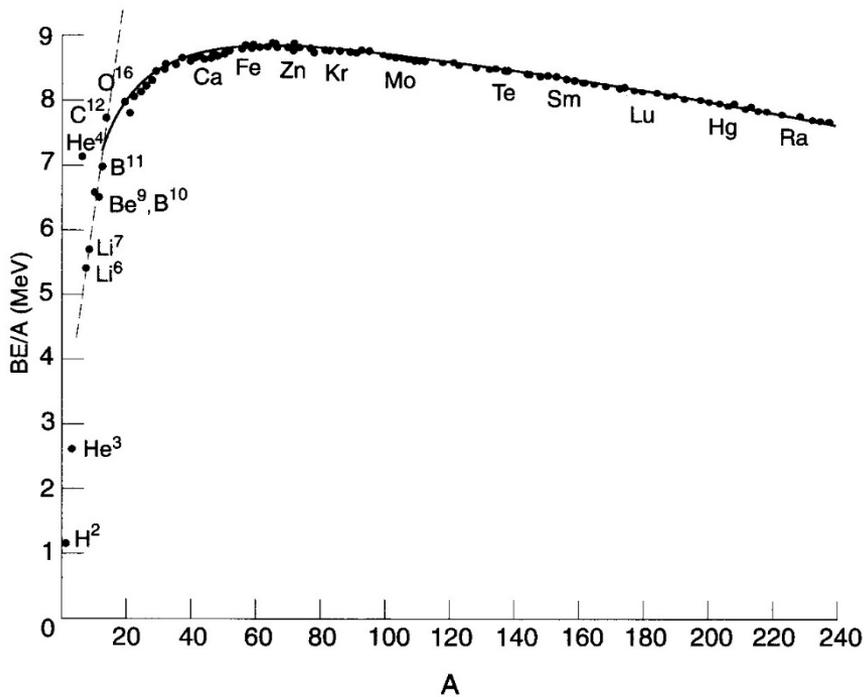
$$\alpha = \frac{4\pi}{3} r_{\text{int}}^3 \cdot \rho$$

小さな原子核だと



$$\rightarrow B/A \propto A - 1$$





この図から  $\alpha$  の値を読み取ると、  
 $\alpha \sim 10$  くらい。

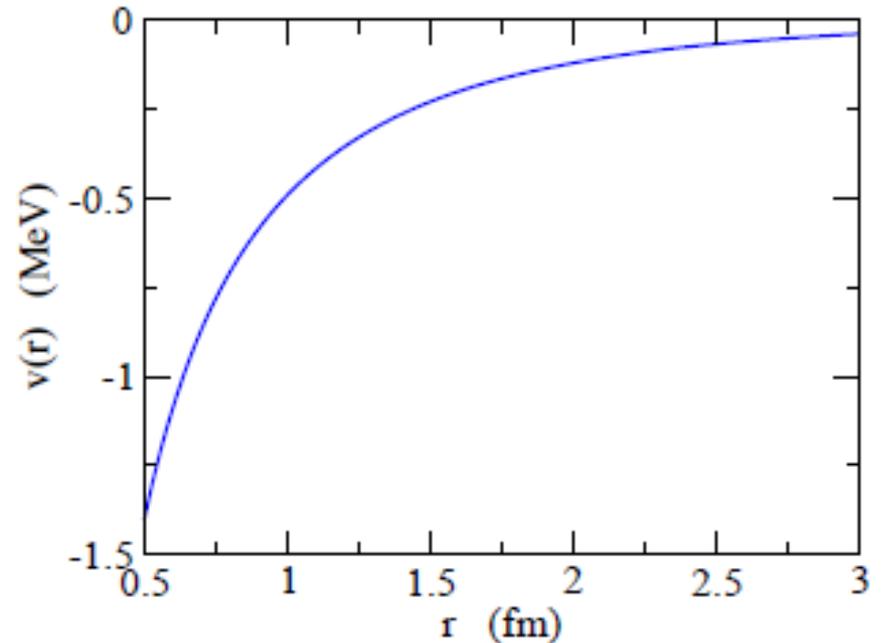


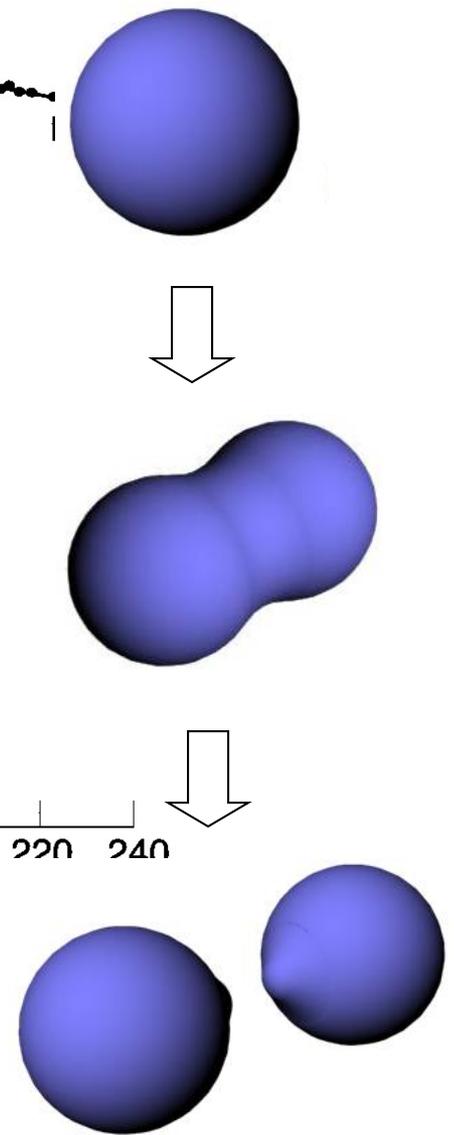
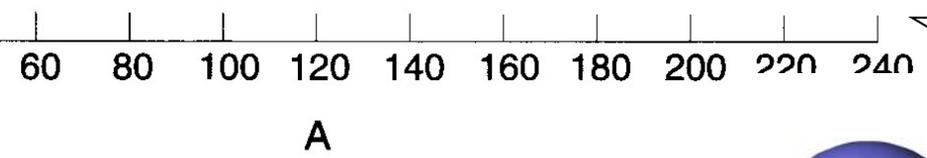
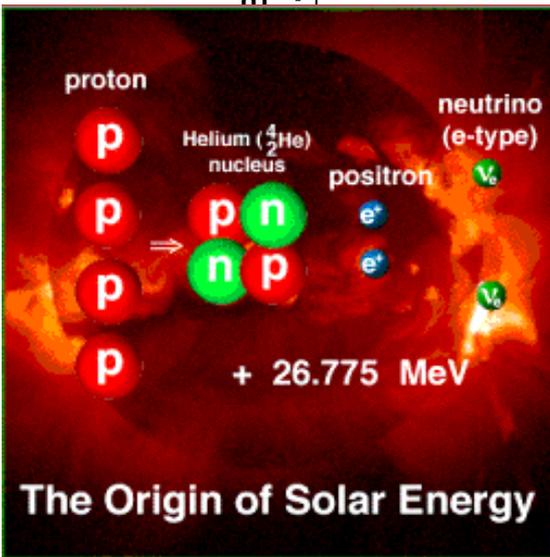
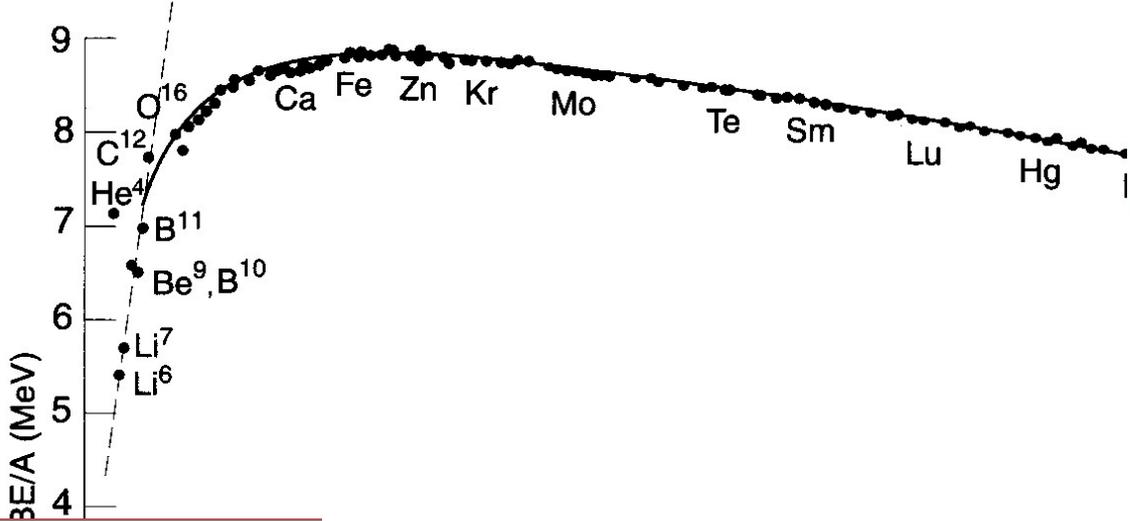
核力の到達距離は、  
 $1.1 \times 10^{1/3} = 2.37 \text{ fm}$  程度。

湯川相互作用:

$$v(r) = -g \frac{e^{-\kappa r}}{r}$$

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\hbar}{m_{\pi} c} = 1.41 \text{ fm}$$





1.  $B(A, Z)/A \approx 0.8 \text{ MeV}$  ( $A > 12$ )  $\iff$  Short range
2. Effect of Coulomb force for heavy nuclei
3. Fusion for light nuclei
4. Fission for heavy nuclei

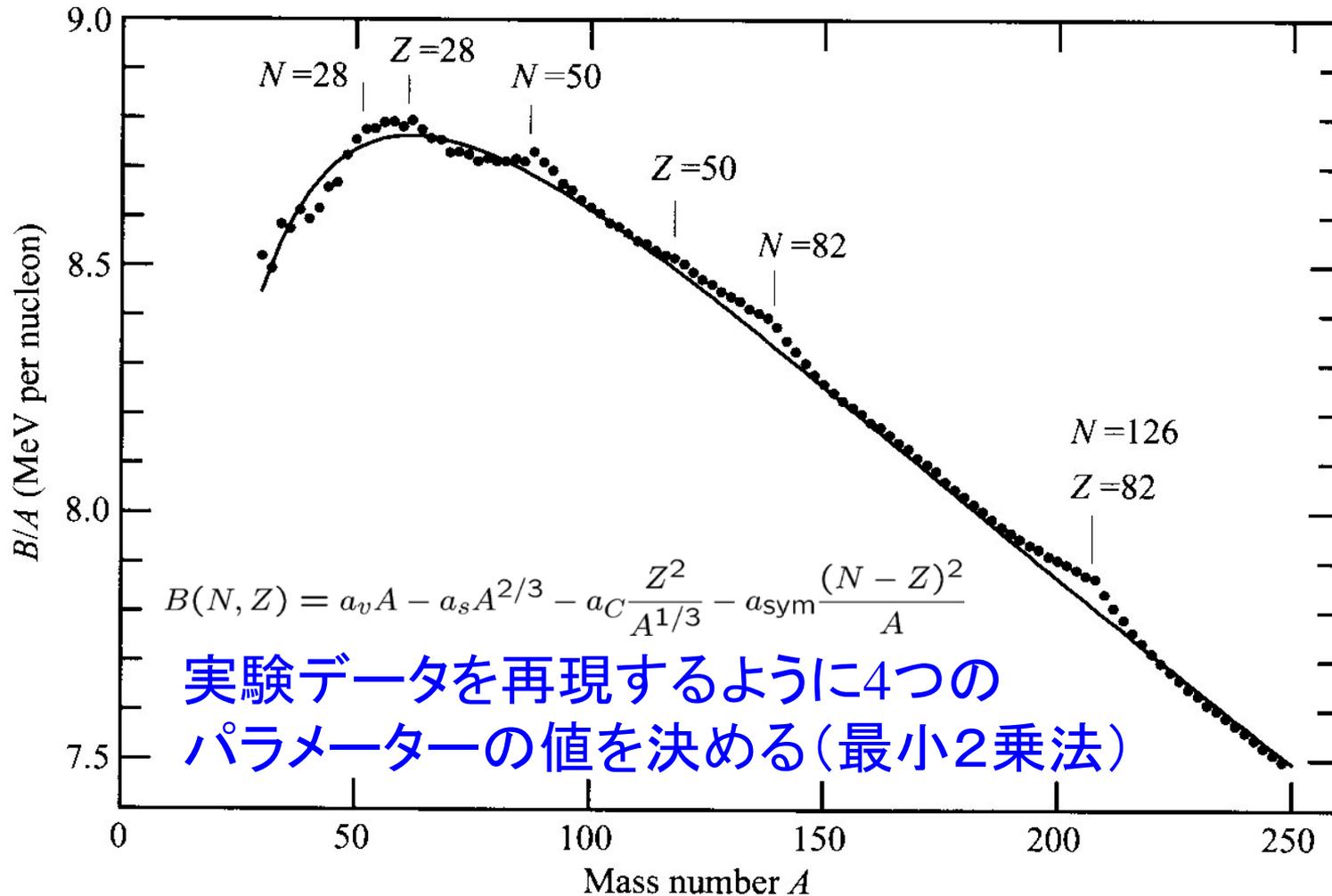
# Semi-empirical mass formula

(Bethe-Weizacker formula: Liquid-drop model)

$$B(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}$$

- Volume energy:  $a_v A$
- Surface energy:  $-a_s A^{2/3}$
- Coulomb energy:  $-a_C Z^2 / A^{1/3}$
- Symmetry energy:  $-a_{\text{sym}} (N - Z)^2 / A$

# どのくらい実験を再現するか？



実験データを再現するように4つの  
パラメーターの値を決める(最小2乗法)

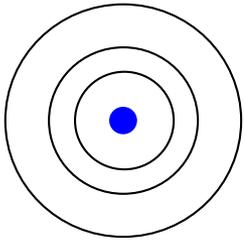
✓ 大体OK、だけど所々にずれ

✓  $N, Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$  (魔法数)に対して束縛エネルギー大

→ 「殻構造」

(note) 原子の魔法数 (貴ガス・希ガス)

He (Z=2), Ne (Z=10), Ar (Z=18), Kr (Z=36), Xe (Z=54), Rn (Z=86)



殻構造

原子核の周りを  
回る電子の軌道が  
埋まると安定に  
なる

元素の周期表

	1A	2A	3A	4A	5A	6A	7A	8	1B	2B	3B	4B	5B	6B	7B	0		
1	H															He		
2	Li	Be									B	C	N	O	F	Ne		
3	Na	Mg									Al	Si	P	S	Cl	Ar		
4	K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr
5	Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn	Sb	Te	I	Xe
6	Cs	Ba	L	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg	Tl	Pb	Bi	Po	At	Rn
7	Fr	Ra	A															
	L	La	Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu		
	A	Ac	Th	Pa	U	Np	Pu	Am	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lr		

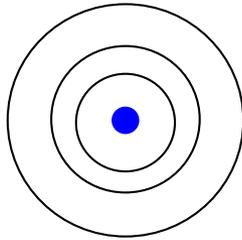
Legend:

- 典型金属元素 (Orange)
- 半金属元素 (Light Green)
- 非金属元素 (Cyan)
- 遷移金属元素 (Yellow)
- 希ガス (Pink)

Copyright © 2002 RSCS

## (note) 原子の魔法数 (貴ガス)

He (Z=2), Ne (Z=10), Ar (Z=18), Kr (Z=36), Xe (Z=54), Rn (Z=86)



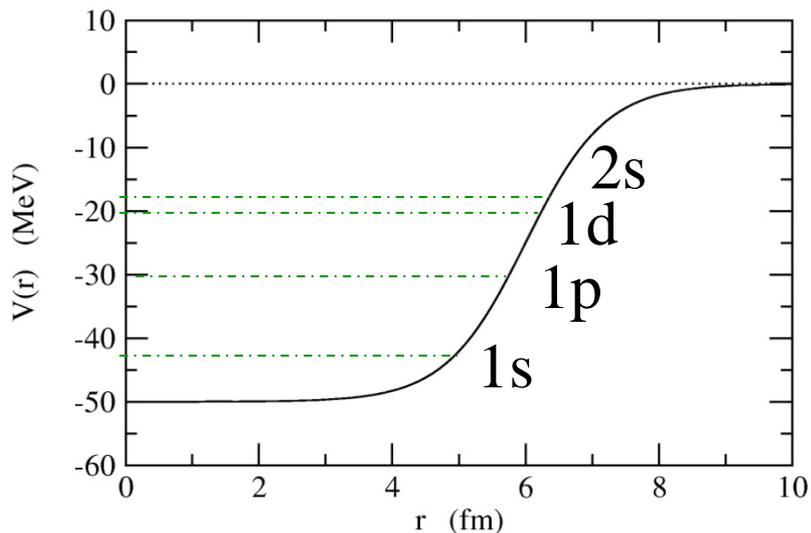
殻構造

原子核の周りを回る電子の軌道が埋まると安定になる

原子核物理における似た試み: ポテンシャル中の独立粒子運動

## Woods-Saxon ポテンシャル

$$V(r) = -V_0/[1 + \exp((r - R_0)/a)]$$

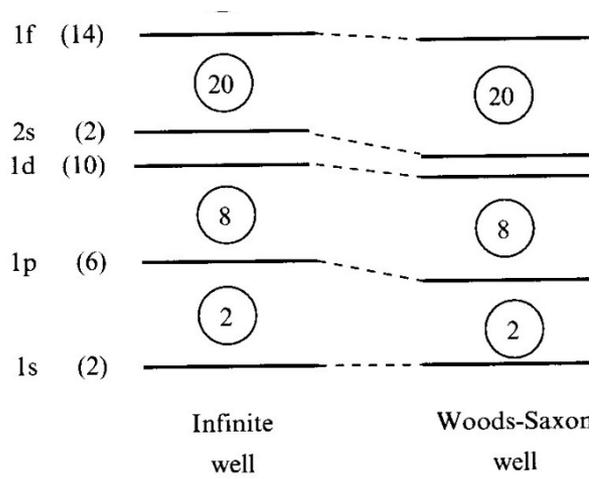


$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) - \epsilon \right] \psi(\mathbf{r}) = 0$$

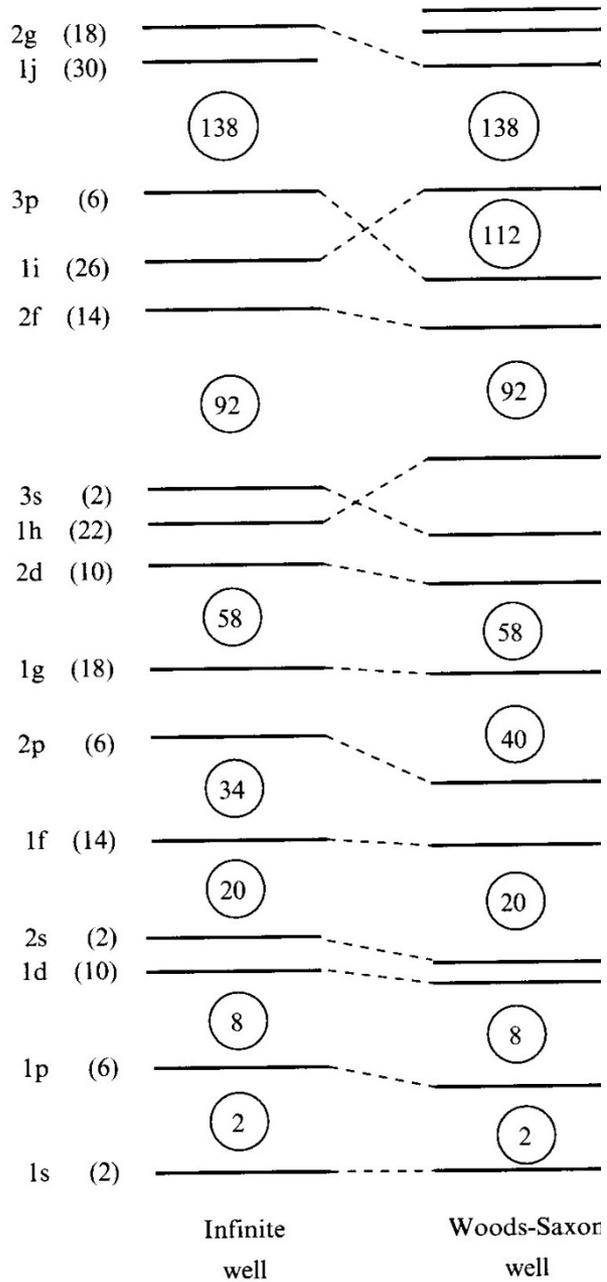
$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \chi_{m_s}$$

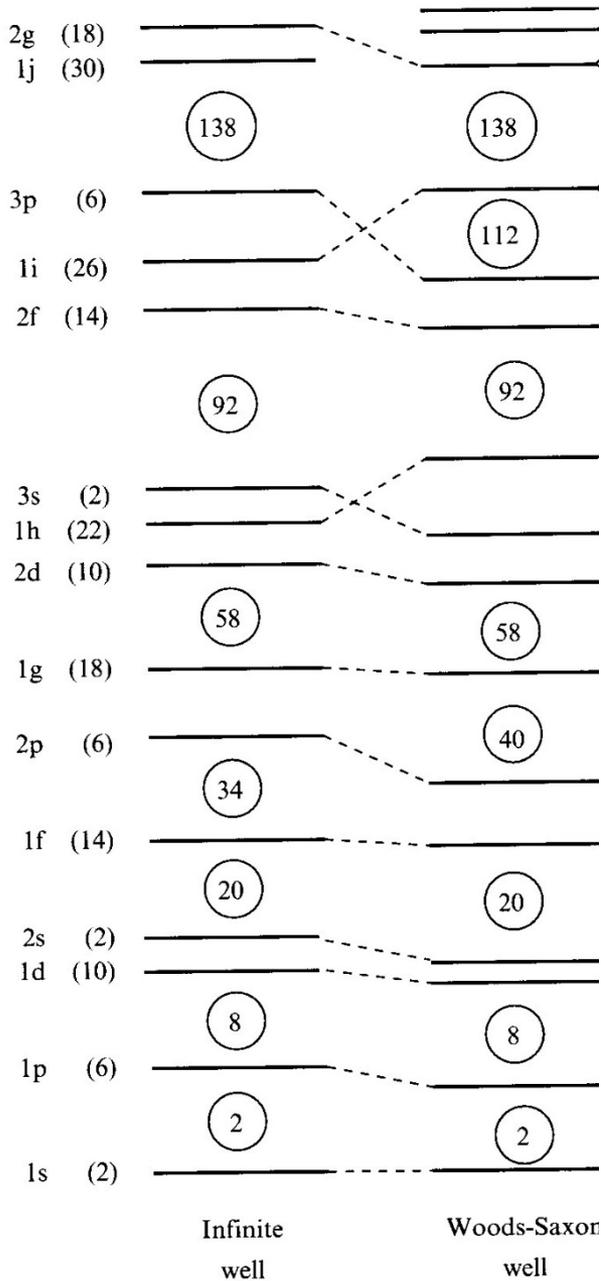
縮退度に応じて下のレベルから核子を順番につめていく

# Nuclear magic numbers: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126

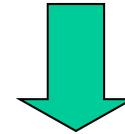


# Nuclear magic numbers: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126





Woods-Saxon itself does not provide the correct magic numbers (2,8,20,28, 50,82,126).



Mayer and Jensen (1949):  
**Strong spin-orbit interaction**



$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) + V_{ls}(r) \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} - \epsilon \right] \psi(\mathbf{r}) = 0$$

$$V_{ls}(r) \sim -\lambda \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \quad (\lambda > 0)$$

## jj 結合殻模型

軌道運動とスピンは独立の自由度

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) - \epsilon \right] \psi(\mathbf{r}) = 0 \implies \psi_{lm m_s}(\mathbf{r}) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \chi_{m_s}$$

## スピン・軌道力

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) + V_{ls}(r) \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} - \epsilon \right] \psi(\mathbf{r}) = 0$$

$$\text{(note) } \mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s} \implies \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} = (j^2 - l^2 - s^2)/2$$

$l$  と  $s$  を結合して  $j$  を組む。

$$\rightarrow j = l \pm 1/2$$

## jj 結合殻模型

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) - \epsilon \right] \psi(\mathbf{r}) = 0 \implies \psi_{lmm_s}(\mathbf{r}) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \chi_{m_s}$$

## スピン・軌道力

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) + V_{ls}(r) \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} - \epsilon \right] \psi(\mathbf{r}) = 0$$

(note)  $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s} \implies \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} = (j^2 - l^2 - s^2)/2$

$l$  と  $s$  を結合して  $j$  を組む。


$$\begin{aligned} \psi_{jlm}(\mathbf{r}) &= \frac{u_{jl}(r)}{r} \mathcal{Y}_{jlm}(\hat{\mathbf{r}}) \\ \mathcal{Y}_{jlm}(\hat{\mathbf{r}}) &= \sum_{m_l, m_s} \langle l \ m_l \ 1/2 \ m_s | j \ m \rangle Y_{lm_l}(\hat{\mathbf{r}}) \chi_{m_s} \end{aligned}$$

$$j^2 |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = j(j+1) |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle$$

$$j_z |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = m |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle$$

$$l^2 |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = l(l+1) |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle$$

$$s^2 |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = 3/4 |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle$$

## jj 結合殻模型

$l$  と  $s$  を結合して  $j$  を組む。

$$\psi_{jlm}(\mathbf{r}) = \frac{u_{jl}(r)}{r} \mathcal{Y}_{jlm}(\hat{\mathbf{r}})$$

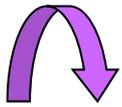
$$j^2 |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = j(j+1) |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle$$

$$j_z |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = m |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle$$

$$l^2 |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = l(l+1) |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle$$

$$s^2 |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = \frac{3}{4} |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle$$

(note)  $j = l + s \implies l \cdot s = (j^2 - l^2 - s^2)/2$



$$l \cdot s |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = \frac{1}{2} \left( j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right) |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle$$

$$l \cdot s |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = \frac{l}{2} |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle \quad (j = l + 1/2)$$

$$l \cdot s |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = -\frac{l+1}{2} |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle \quad (j = l - 1/2)$$

符号が逆！

## jj 結合殻模型

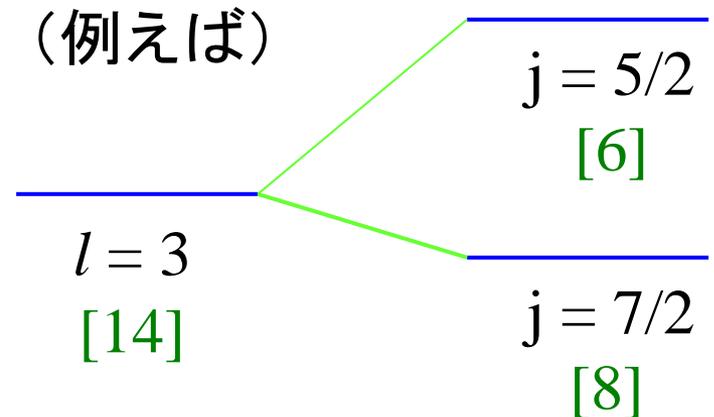
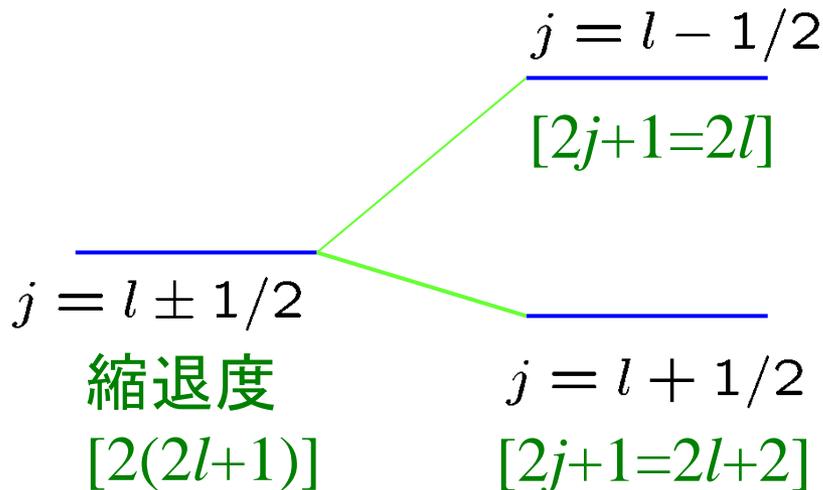
$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) + V_{ls}(r) \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} - \epsilon \right] \psi(\mathbf{r}) = 0$$

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{s} |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = \frac{l}{2} |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle \quad (j = l + 1/2)$$

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{s} |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = -\frac{l+1}{2} |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle \quad (j = l - 1/2)$$

符号が逆！

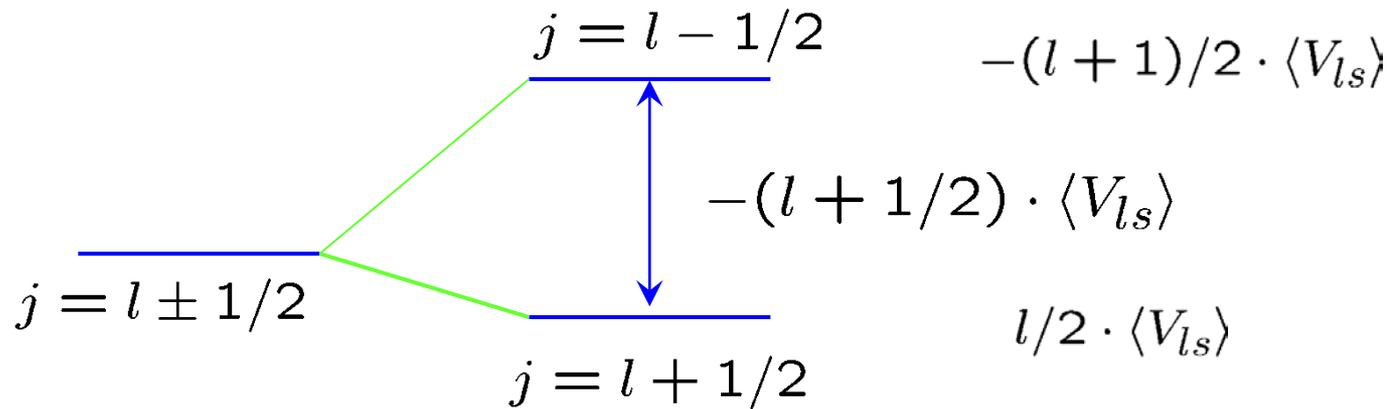
$j = l \pm 1/2$  で準位が分離



## jj 結合殻模型

$$l \cdot s |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = \frac{l}{2} |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle \quad (j = l + 1/2)$$

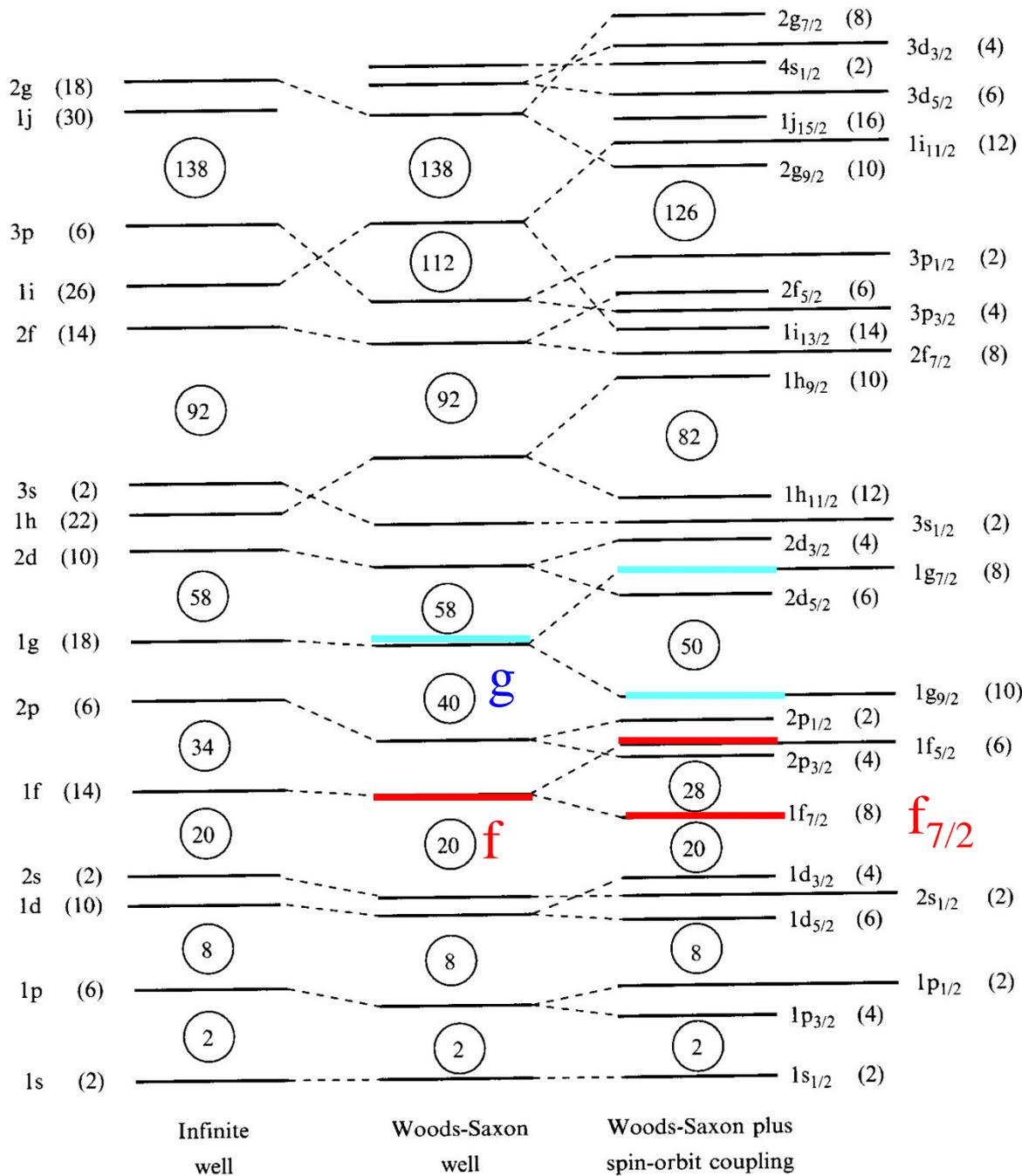
$$l \cdot s |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = -\frac{l+1}{2} |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle \quad (j = l - 1/2)$$



$j = l \pm 1/2$  で準位が分離:  $l$  が大きくなればなるほど  
分離は大

\* ただし、スピン平均はゼロ:

$$+\frac{l}{2} (2(l+1/2) + 1) - \frac{l+1}{2} (2(l-1/2) + 1) = 0$$



g [18] → g<sub>7/2</sub> [8]  
 → g<sub>9/2</sub> [10]

g<sub>7/2</sub>  
 g<sub>9/2</sub>  
 f<sub>5/2</sub>  
 f<sub>7/2</sub>

f [14] → f<sub>5/2</sub> [6]  
 → f<sub>7/2</sub> [8]

# Single particle spectra

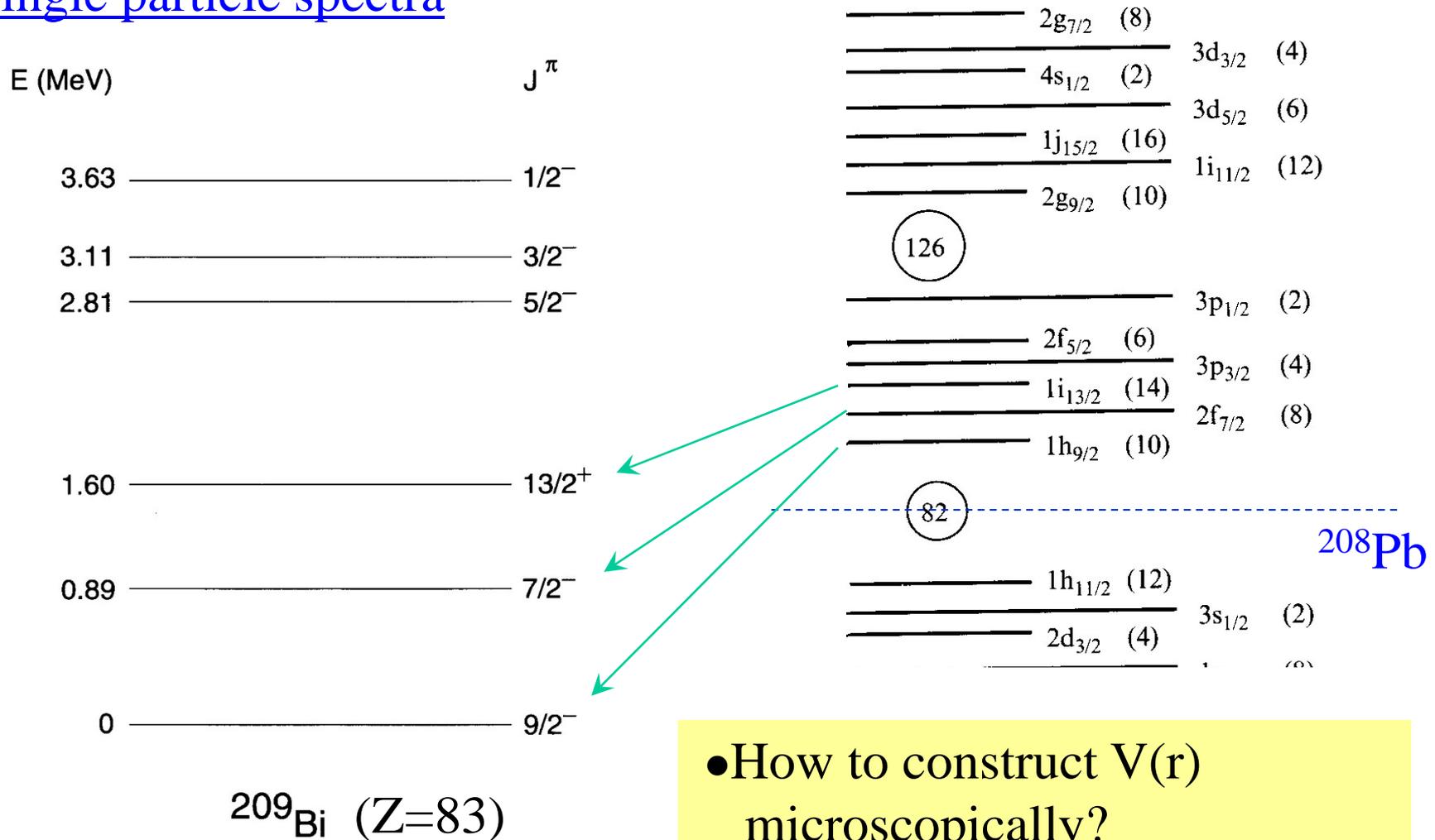
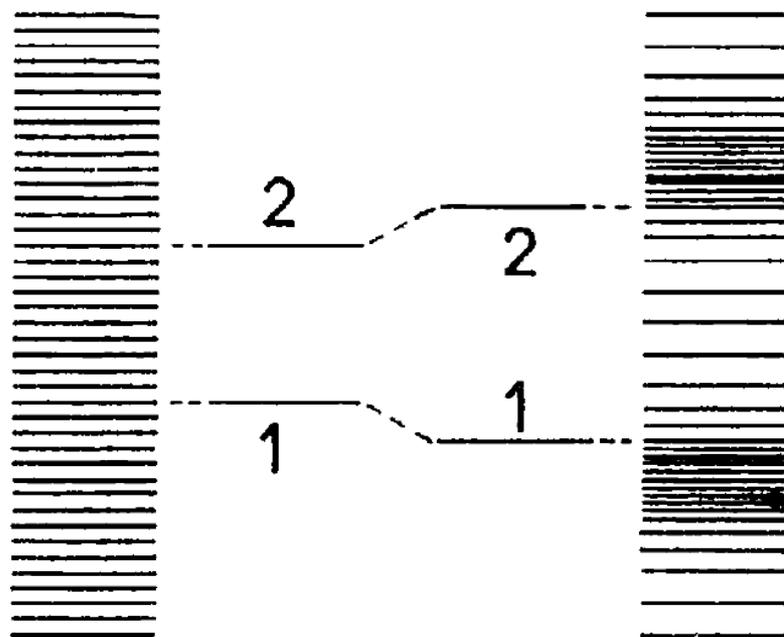


FIG. 3.6. Low-lying single-particle levels of  $^{209}\text{Bi}$ .

- How to construct  $V(r)$  microscopically?
- Does the independent particle picture really hold?

# 何故、閉殻の原子核は安定になるのか？

準位密度



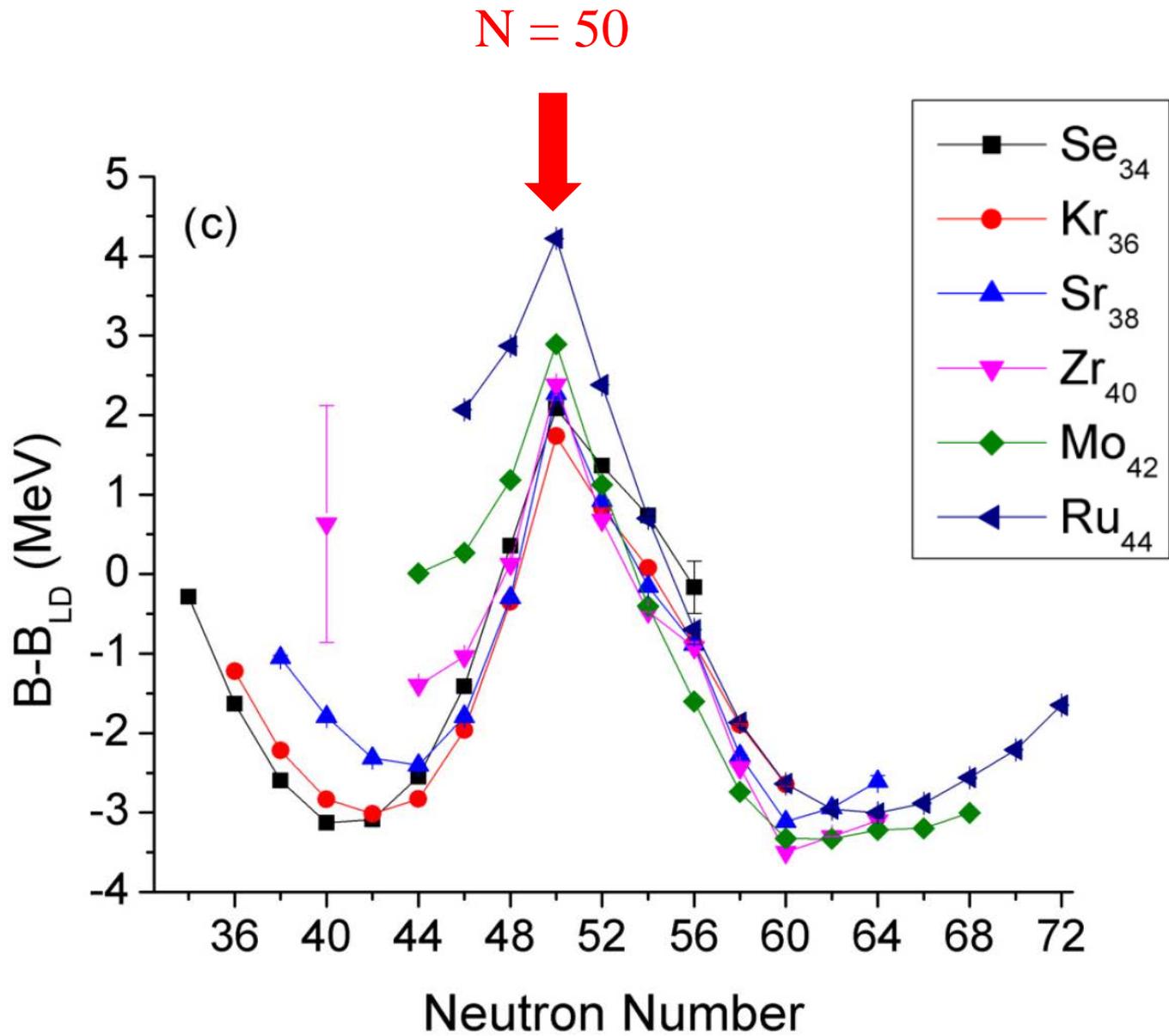
(a)

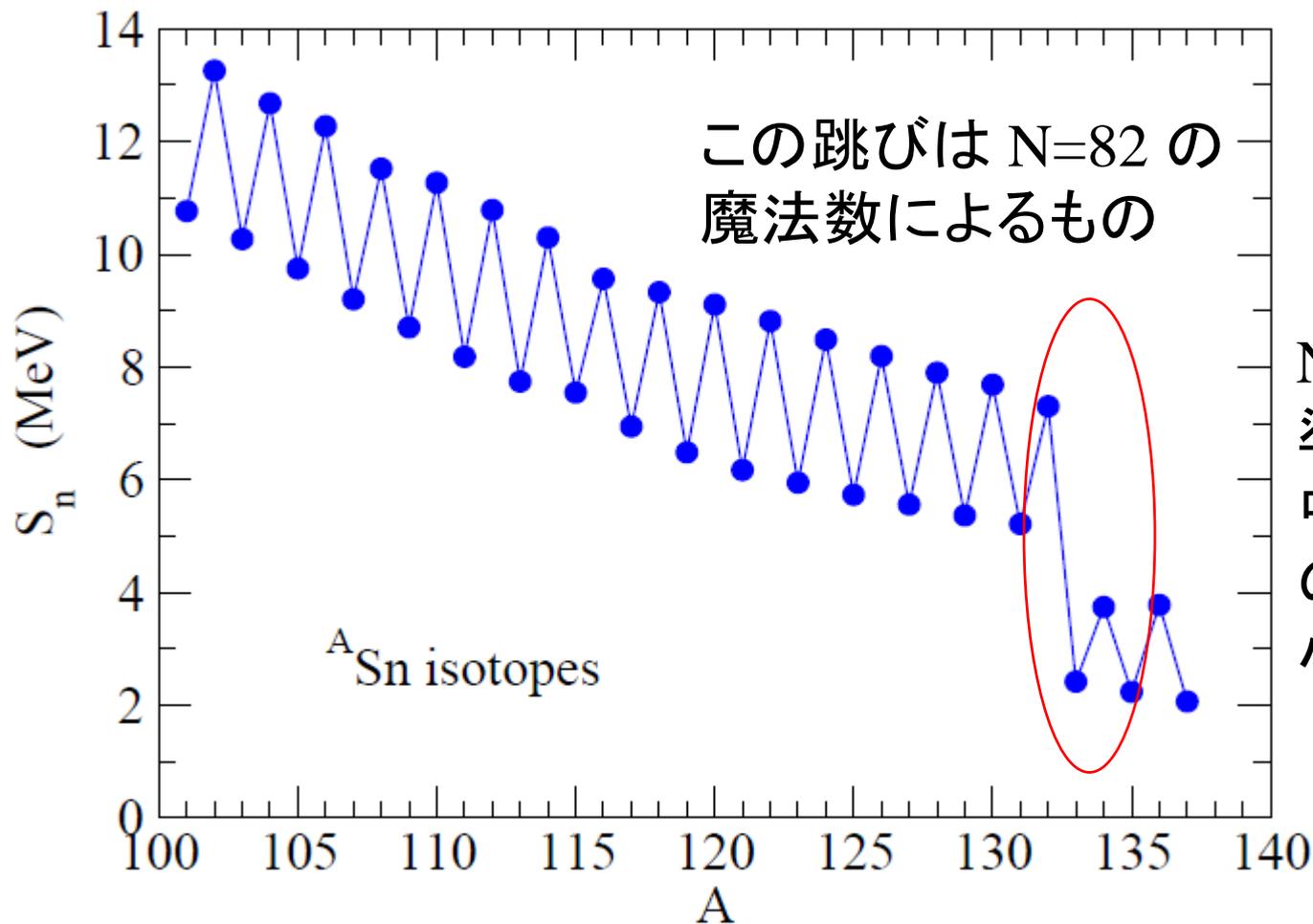
(b)

均一の場合

濃淡がある場合

準位密度に濃淡があれば、下から数えて濃淡の終わりまで準位が  
つまると(図の1の場合)、均一の場合に比べてエネルギーが小さい

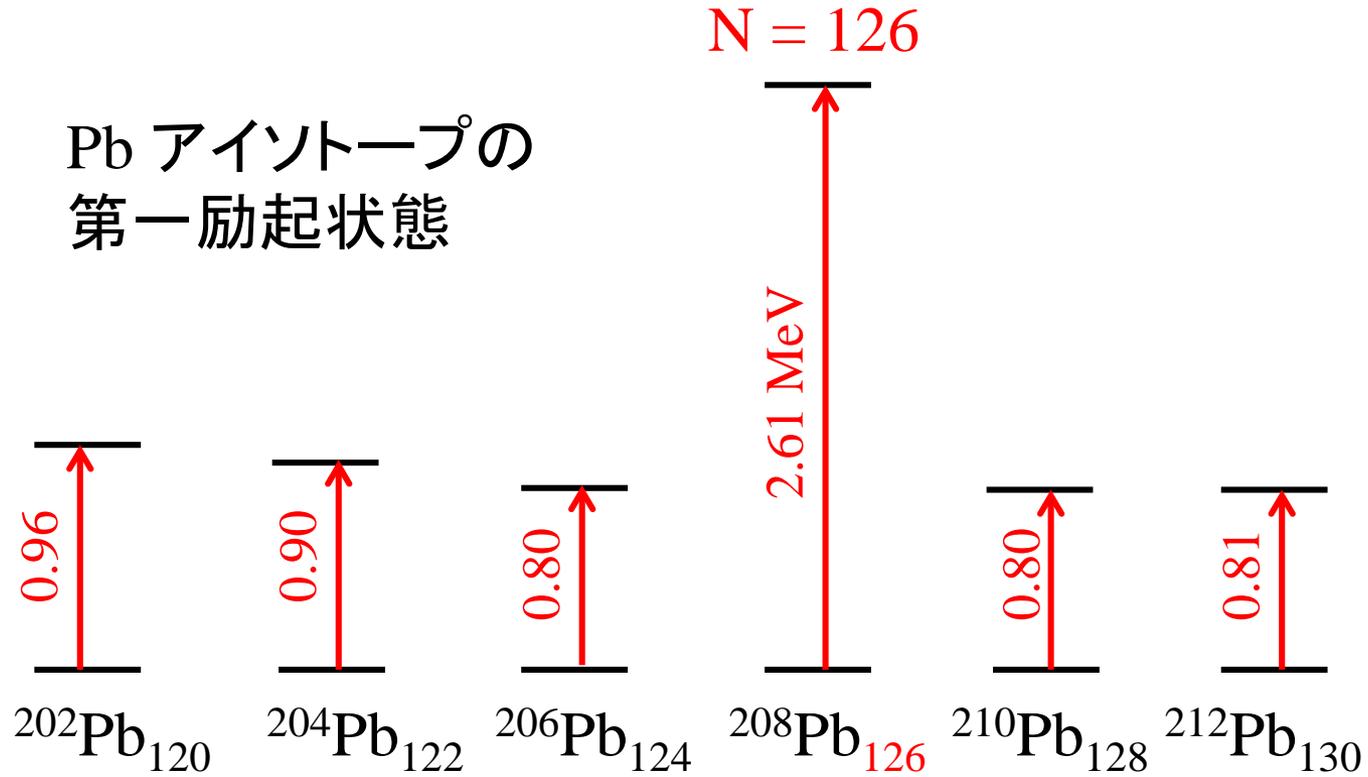




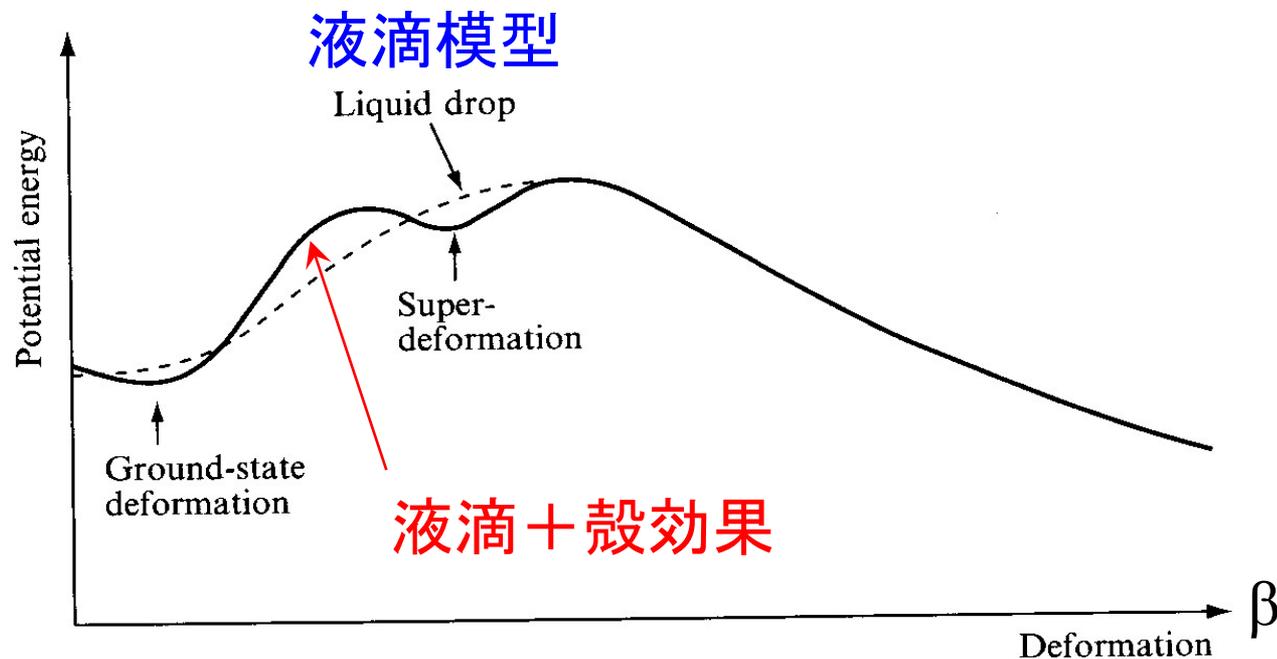
1n separation energy:  $S_n(A,Z) = B(A,Z) - B(A-1,Z)$

# 他の証拠：第一励起状態の励起エネルギー

Pb アイソトープの  
第一励起状態



# 殻構造の帰結：原子核の変形



液滴模型  
殻効果

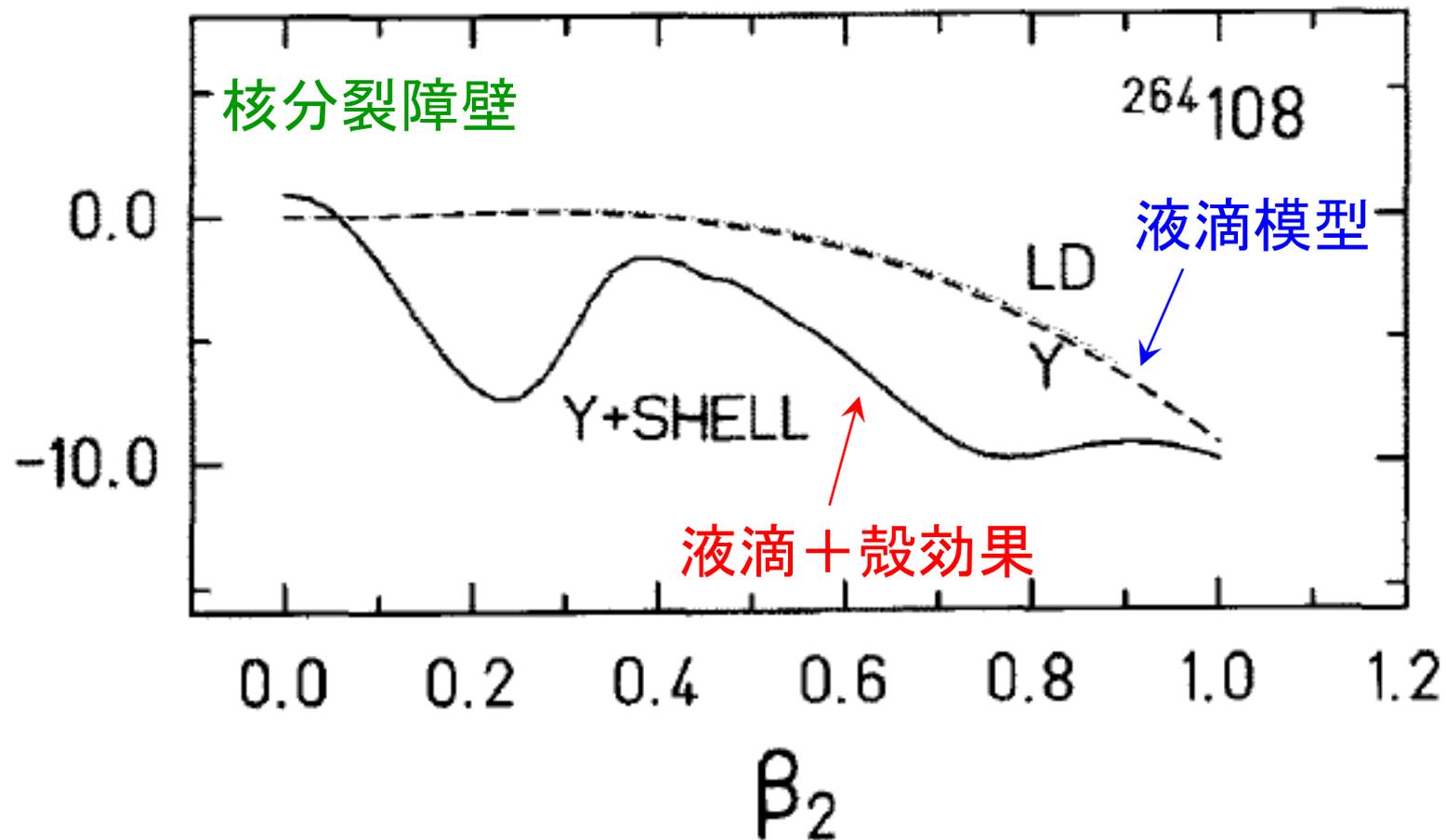


必ず球形

変形状態が基底状態になる場合あり

\* 後でもう少し詳しく解説します。

# 殻構造の帰結：超重核の安定化



殻効果により核分裂障壁が高くなり原子核が安定化する

# 生命誕生のための幸運な偶然

## 原子の魔法数

電子の数が 2, 10, 18, 36, 54, 86

元素の周期表

二重閉殻核

不活性ガス: He, Ne, Ar, Kr, Xe, Rn

Legend:

- 典型金属元素 (Orange)
- 半金属元素 (Green)
- 非金属元素 (Cyan)
- 遷移金属元素 (Yellow)
- 希ガス (Pink)

## 原子核の魔法数

陽子または中性子の数が  
2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 の時安定

→ 例えば  $^{16}_8\text{O}_8$  (二重閉殻核)

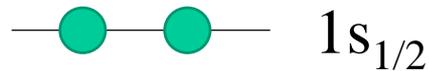
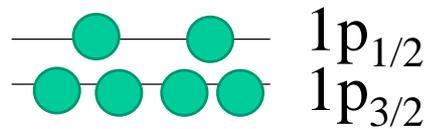
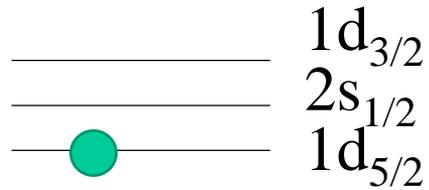
→ 酸素元素は元素合成の過程で数多く生成された

→ しかし、酸素は化学的には「活性」

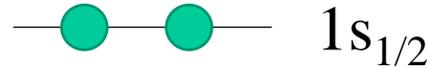
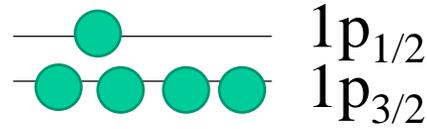
→ 化学反応により様々な複雑な物質をつくり生命に至った

# single-j model

shell model



configuration 1



configuration 2

..... several others

angular momentum (spin) and parity for each configuration?

→ let us first investigate a single-j case

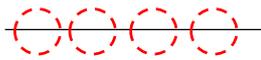
single-j level: one level with an angular momentum  $j$

—————  $j$

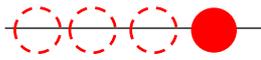
example:  $j = p_{3/2}$

⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ———  $p_{3/2}$

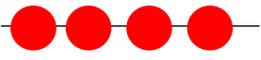
can accommodate 4 nucleons  
( $j_z = +3/2, +1/2, -1/2, -3/2$ )

  $p_{3/2}$  can accommodate 4 nucleons  
( $j_z = +3/2, +1/2, -1/2, -3/2$ )

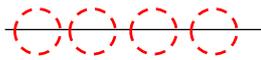
i) 1 nucleon

  $p_{3/2}$    $I^\pi = 3/2^-$   
(there are 4 ways to occupy this level)

ii) 4 nucleons

  $p_{3/2}$

$$I = j_1 + j_2 + j_3 + j_4$$

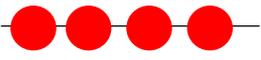

 $p_{3/2}$  can accommodate 4 nucleons  
 $(j_z = +3/2, +1/2, -1/2, -3/2)$

i) 1 nucleon


 $p_{3/2}$ 

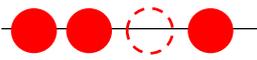
 $I^\pi = 3/2^-$   
 (there are 4 ways to occupy this level)

ii) 4 nucleons

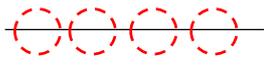

 $p_{3/2}$

$$I = j_1 + j_2 + j_3 + j_4$$

iii) 3 nucleons


 $p_{3/2}$

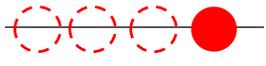
$$I = j_1 + j_2 + j_3$$



$p_{3/2}$

can accommodate 4 nucleons  
( $j_z = +3/2, +1/2, -1/2, -3/2$ )

i) 1 nucleon



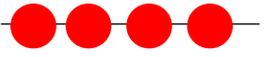
$p_{3/2}$



$$I^\pi = 3/2^-$$

(there are 4 ways to occupy this level)

ii) 4 nucleons



$p_{3/2}$



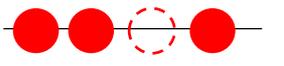
$$I^\pi = 0^+$$

(there is only 1 way to occupy this level)

$$I = j_1 + j_2 + j_3 + j_4$$

parity:  $(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = +1$

iii) 3 nucleons



$p_{3/2}$



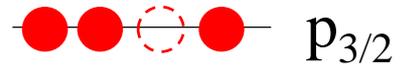
$$I^\pi = 3/2^-$$

(there are 4 ways to make a hole)

$$I = j_1 + j_2 + j_3$$

parity:  $(-1) \times (-1) \times (-1) = -1$

iii) 3 nucleons



$$I^\pi = 3/2^-$$

(there are 4 ways to make a hole)

$$\text{parity: } (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$$

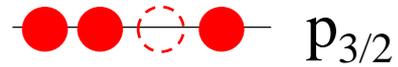
$$I = j_1 + j_2 + j_3$$

iv) 2 nucleons



$$I = j_1 + j_2$$

iii) 3 nucleons



$$I^\pi = 3/2^-$$

(there are 4 ways to make a hole)

$$\text{parity: } (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$$

$$I = j_1 + j_2 + j_3$$

iv) 2 nucleons



$$I = j_1 + j_2$$

there are  $4 \times 3/2 = 6$  ways to occupy this level with 2 nucleons.

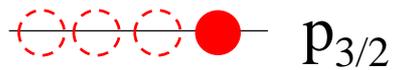


$$I^\pi = 0^+ \text{ or } 2^+ (= 1+5)$$

$$3/2 + 3/2 \rightarrow I = 0, \cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}$$

anti-symmetrization

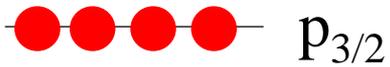
i) 1 nucleon



$$I^\pi = 3/2^-$$

(there are 4 ways to occupy this level)

ii) 4 nucleons

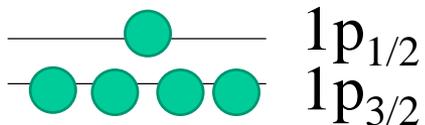
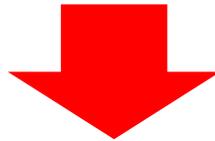


$$I^\pi = 0^+$$

(there is only 1 way to occupy this level)

$$I = j_1 + j_2 + j_3 + j_4$$

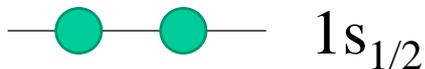
$$\text{parity: } (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = +1$$



$$I^\pi = 1/2^-$$



$$I^\pi = 0^+$$



$$I^\pi = 0^+$$

in total,  
 $I^\pi = 1/2^-$

example: (main) shell model configurations for  $^{11}_5\text{B}_6$

MeV

5.02 —————  $3/2^-$

4.44 —————  $5/2^-$

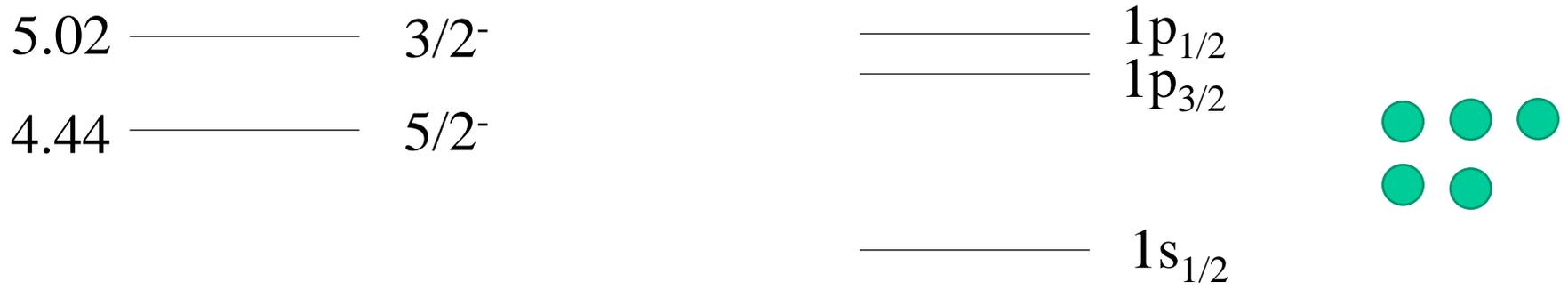
2.12 —————  $1/2^-$

0 —————  $3/2^-$

$^{11}_5\text{B}_6$

example: (main) shell model configurations for  $^{11}\text{B}$

MeV



2.12 —————  $1/2^-$

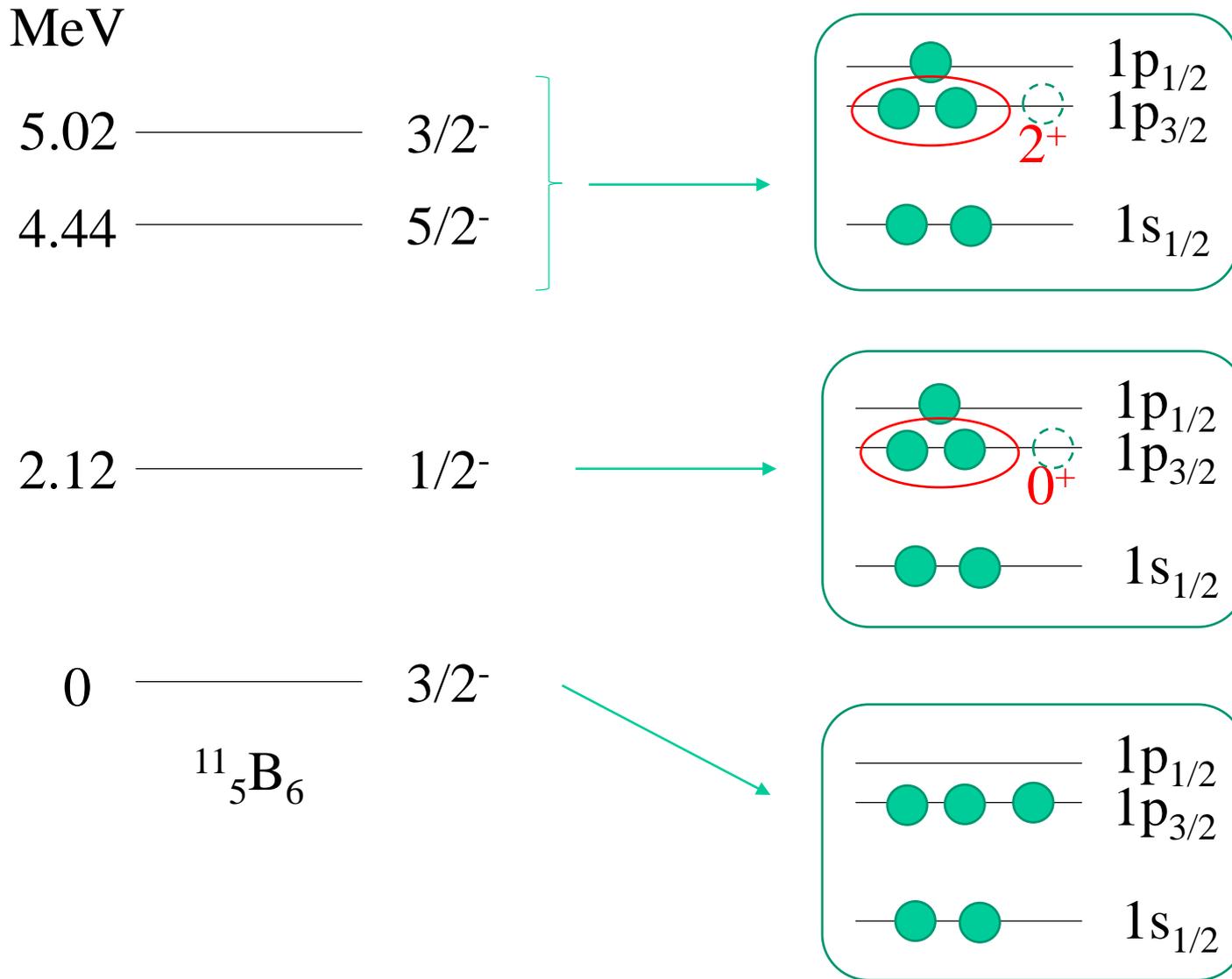
0 —————  $3/2^-$

$^{11}_5\text{B}_6$

single-j

	$p_{3/2}$		$I^\pi = 3/2^-$
	$p_{3/2}$		$I^\pi = 0^+ \text{ or } 2^+$
	$p_{3/2}$		$I^\pi = 3/2^-$
	$p_{3/2}$		$I^\pi = 0^+$

example: (main) shell model configurations for  $^{11}\text{B}$



レポート問題1: 3次元調和振動子では、2s 軌道と 1d 軌道のエネルギーが縮退している。一方で、Woods-Saxon ポテンシャルや井戸型ポテンシャルでは 1d 軌道のエネルギーが下になる。定性的にそうなる理由を説明せよ。

レポート問題2:  $^{17}\text{F}$ の基底状態の陽子の配位を殻模型を使って説明せよ。第一励起状態、第二励起状態はどうなるか？

