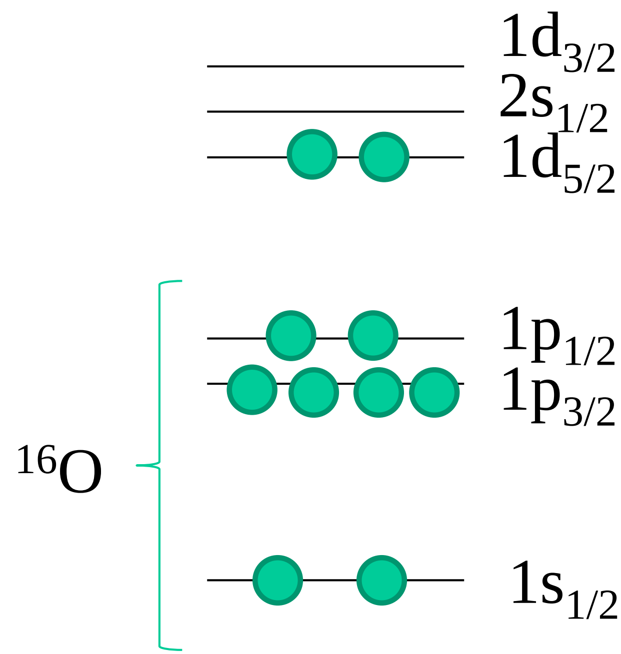
対相関

単純な平均場近似(独立粒子描像):

6 levels

0^+		1.74 MeV
$2^+,3^+$		0.78 MeV
$0^+,2^+,4^+$		0

$^{18}_{8}O_{10}$

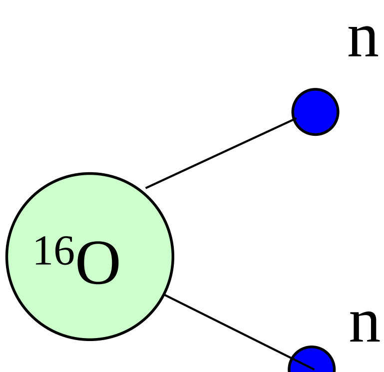


実際には:

2^+		1.98 MeV
0^+		0

$^{18}_{8}O_{10}$

たったの2本!



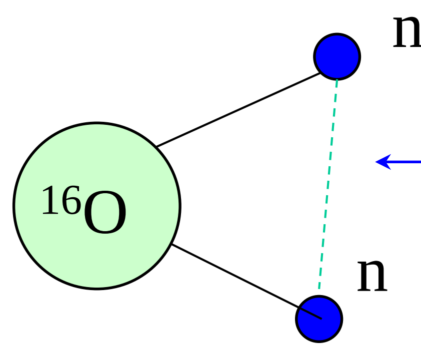
$$H=\sum_i T_i+\sum_{i<j} v_{ij} \to H=\sum_i (T_i+V_i)+\underbrace{\cancel{\sum_{i<j} v_{ij}-\sum_i V_i}}$$

平均からのずれ
（残留相互作用）

残留相互作用は完全に無視してもよいのか?

答え：no

開殻原子核では重要な役割を果たすことが知られている（ペアリング）



(note) 摂動論がいい条件

$$H = H_0 + \Delta V$$

$$H_0|\phi_n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)}|\phi_n^{(0)}\rangle$$

$$\rightarrow |\phi_n\rangle = |\phi_n^{(0)}\rangle + \sum_{m\neq n} \frac{\langle\phi_m^{(0)}|\Delta V|\phi_n^{(0)}\rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}|\phi_m^{(0)}\rangle$$

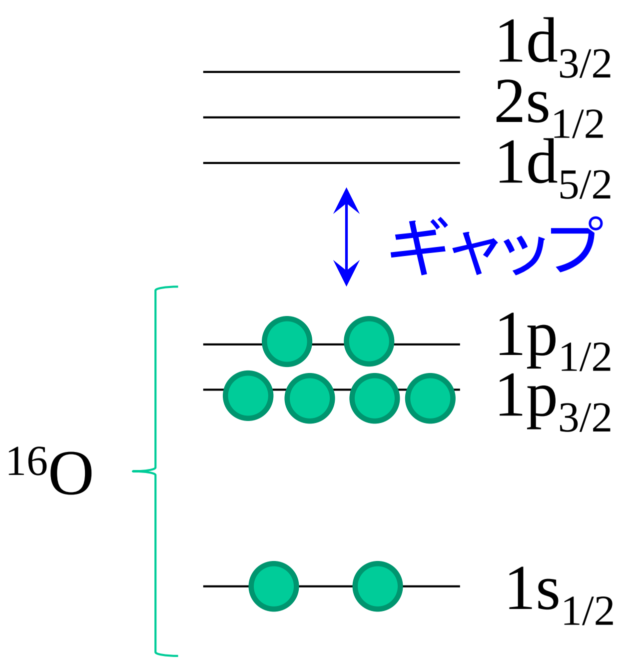
$$\Longrightarrow \quad \boxed{|\langle\phi_m^{(0)}|\Delta V|\phi_n^{(0)}\rangle| \ll |E_n^{(0)} - E_m^{(0)}|}$$

なら ΔV を無視できる

$$H = H_0 + \Delta V$$

$$\Rightarrow \boxed{\left|\langle \phi_m^{(0)} | \Delta V | \phi_n^{(0)} \rangle\right| \ll \left| E_n^{(0)} - E_m^{(0)} \right| \quad \text{なら } \Delta V \text{ を無視できる}}$$

$$H = \sum_i T_i + \sum_{i<j} v_{ij} \rightarrow H = \sum_i (T_i + V_i) + \underbrace{\sum_{i<j} v_{ij} - \sum_i V_i}_{\text{平均からのずれ（残留相互作用）}}$$



閉殻核：
ギャップのためにΔEが大きい
→ 残留相互作用を無視できる

$$H = H_0 + \Delta V$$

$\Rightarrow$ $$|\langle\phi_m^{(0)}|\Delta V|\phi_n^{(0)}\rangle| \ll |E_n^{(0)} - E_m^{(0)}|$$

ならΔ*V*を無視できる

$$H = \sum_i T_i + \sum_{i<j} v_{ij} \to H = \sum_i (T_i + V_i) + \cancel{\underbrace{\sum_{i<j} v_{ij} - \sum_i V_i}}$$

平均からのずれ
（残留相互作用）

0^+	——	1.74 MeV
$2^+, 3^+$	——	0.78 MeV
$0^+, 2^+, 4^+$	——	0

$^{18}_{8}O_{10}$

6 levels

開殻核：
Δ*E*が小さい
→ 残留相互作用を無視
できない

対相関（ペアリング）

$$H=\sum_{i=1}^{A}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}_i^2+V_{\mathrm{HF}}(i)\right)+\frac{1}{2}\sum_{i,j}^{A}v(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}_j)-\sum_i V_{\mathrm{HF}}(i)$$

簡単のために、残留相互作用としてデルタ関数を仮定してみる
（超短距離力）

$$v_{\mathrm{res}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\qquad\sim -g\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

<u>摂動論で残留相互作用の効果を見積もってみる:</u>

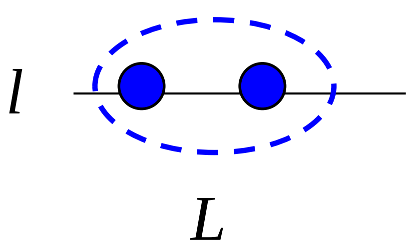
対相関（ペアリング）

$$H=\sum_{i=1}^{A}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}_i^2+V_{\rm HF}(i)\right)+\underline{\underline{\frac{1}{2}\sum_{i,j}^{A}v(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}_j)-\sum_i V_{\rm HF}(i)}}$$

簡単のために、残留相互作用としてデルタ関数を仮定してみる
（超短距離力）

$$v_{\rm res}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\quad\sim -g\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

摂動論で残留相互作用の効果を見積もってみる:

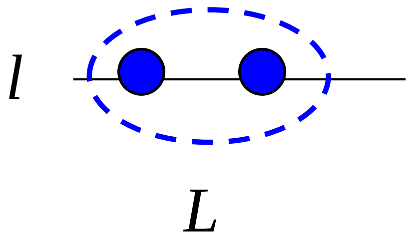


非摂動な波動関数:
角運動量 l の状態に中性子2個、それが
全角運動量 L を組んでいる

$$\boxed{|(ll)LM\rangle=\sum_{m,m'}\langle lmlm'|LM\rangle\psi_{lm}(\boldsymbol{r})\psi_{lm'}(\boldsymbol{r}')}$$

対相関（ペアリング）

$$v_{\rm res}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \quad \sim -g\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$



$$\boxed{|(ll)LM\rangle = \sum_{m,m'} \langle lmlm'|LM\rangle \psi_{lm}(\boldsymbol{r})\psi_{lm'}(\boldsymbol{r}')}$$

$$\Downarrow$$

残留相互作用によるエネルギー変化：

$$\begin{aligned}\Delta E_L &= \langle (ll)LM|v_{\rm res}|(ll)LM\rangle \\ &= -g\,I_r^{(l)}\,\frac{(2l+1)^2}{4\pi}\begin{pmatrix} l & l & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2\end{aligned}$$

$$I_r^{(l)} = \int_0^\infty r^2 dr\,(R_l(r))^4$$

$$\Delta E_L \;=\; -g\, I_r^{(l)}\, \frac{(2l+1)^2}{4\pi} \begin{pmatrix} l & l & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \equiv -g\, I_r^{(l)}\, \frac{A(ll;L)}{4\pi}$$

$A(ll;L)$	L=0	L=2	L=4	L=6	L=8
l = 2	5.00	1.43	1.43	---	---
l = 3	7.00	1.87	1.27	1.63	---
l = 4	9.00	2.34	1.46	1.26	1.81

$$\Delta E_L = -g\, I_r^{(l)} \frac{(2l+1)^2}{4\pi} \begin{pmatrix} l & l & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \equiv -g\, I_r^{(l)} \frac{A(ll;L)}{4\pi}$$

$A(ll;L)$	L=0	L=2	L=4	L=6	L=8
l = 2	5.00	1.43	1.43	---	---
l = 3	7.00	1.87	1.27	1.63	---
l = 4	9.00	2.34	1.46	1.26	1.81

$$\Delta E_L = -g\, I_r^{(l)} \frac{(2l+1)^2}{4\pi} \begin{pmatrix} l & l & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \equiv -g\, I_r^{(l)} \frac{A(ll;L)}{4\pi}$$

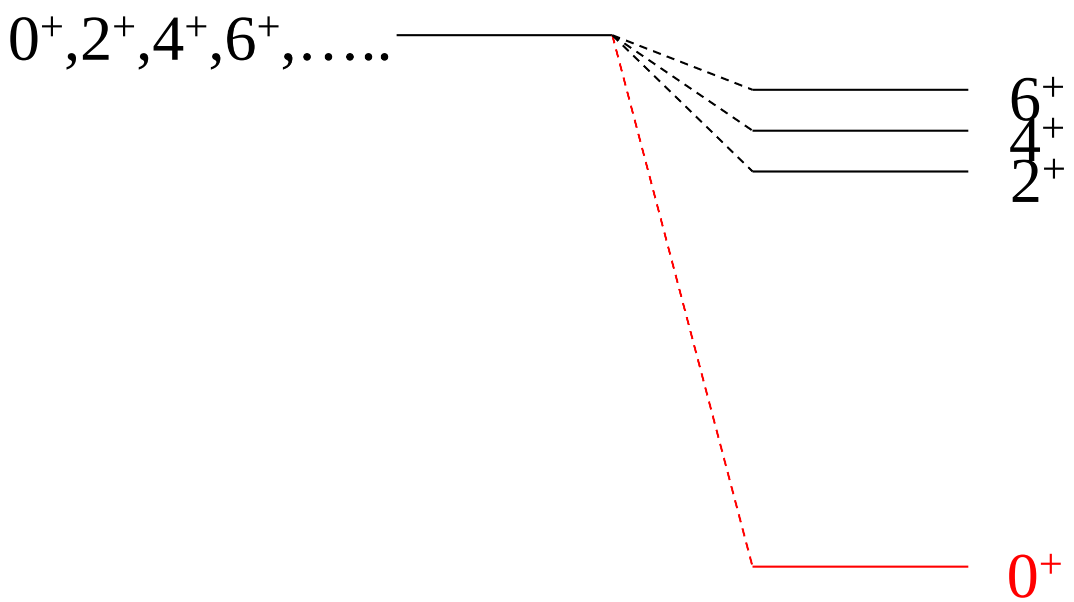
$A(ll;L)$	L=0	L=2	L=4	L=6	L=8
l = 2	5.00	1.43	1.43	---	---
l = 3	7.00	1.87	1.27	1.63	---
l = 4	9.00	2.34	1.46	1.26	1.81

$0^+, 2^+, 4^+, 6^+, \ldots\ldots$

残留相互
作用なし

$$\Delta E_L = -g\, I_r^{(l)} \frac{(2l+1)^2}{4\pi} \begin{pmatrix} l & l & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \equiv -g\, I_r^{(l)} \frac{A(ll;L)}{4\pi}$$

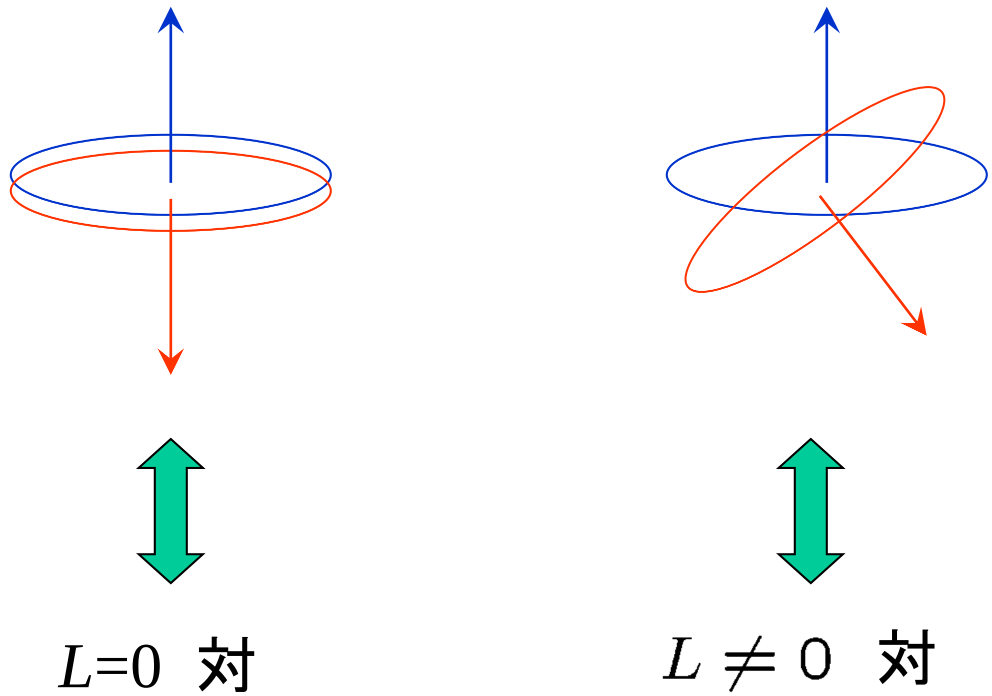
$A(ll;L)$	$L=0$	$L=2$	$L=4$	$L=6$	$L=8$
$l = 2$	5.00	1.43	1.43	---	---
$l = 3$	7.00	1.87	1.27	1.63	---
$l = 4$	9.00	2.34	1.46	1.26	1.81



残留相互作用なし　　残留相互作用あり

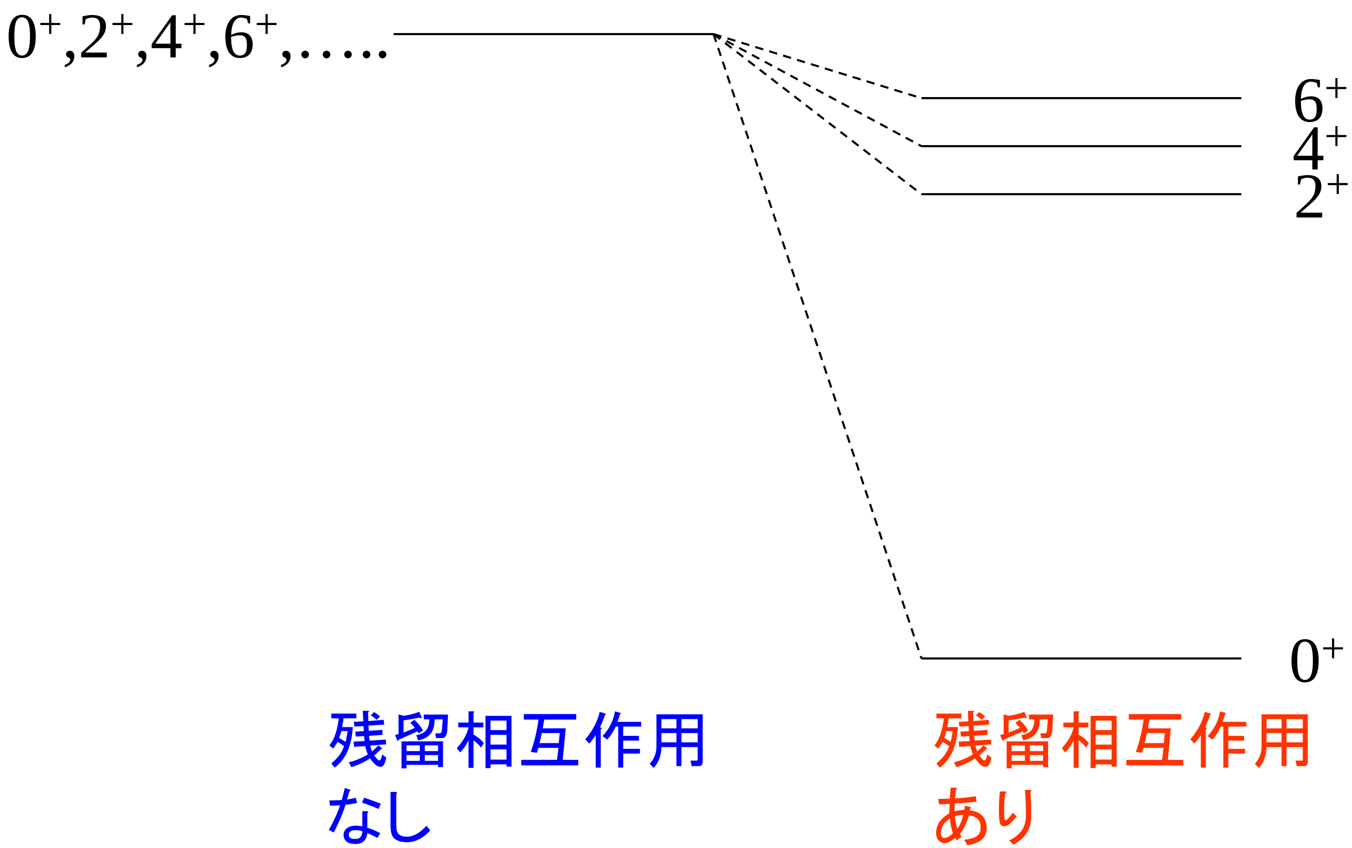
簡単な解釈:

簡単な解釈:



L=0 対に対して空間的重なりが最大（エネルギー的に得）

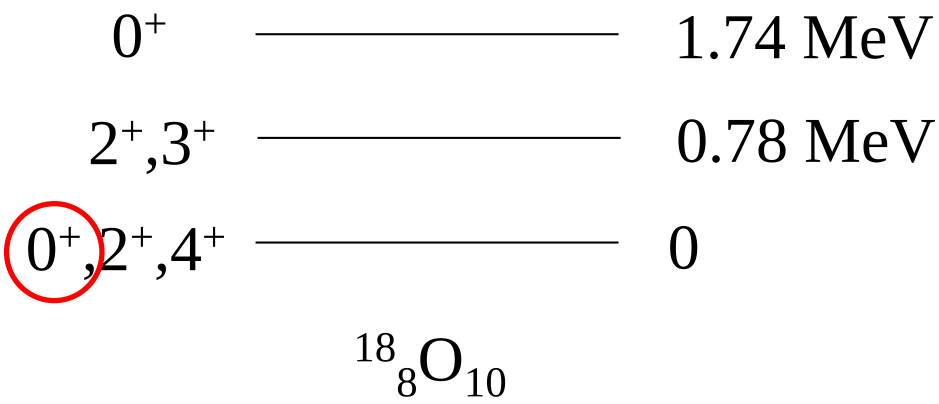
“対相関”



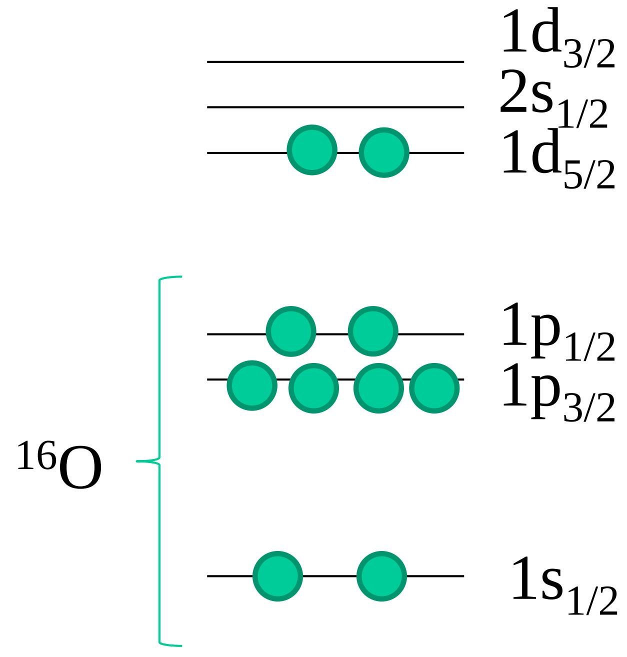
<u>原子核の基底状態のスピン</u>

- 偶々核:例外なしに 0^+
- 奇核: 最外殻核子の角運動量と一致

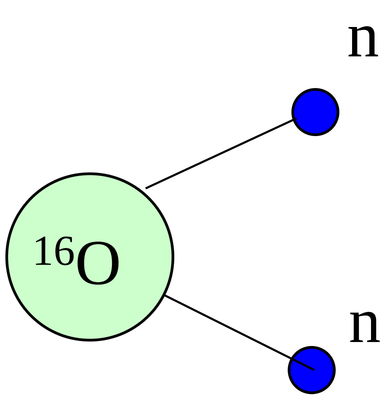
単純な平均場近似:



0^+ 1.74 MeV
$2^+, 3^+$ 0.78 MeV
$0^+, 2^+, 4^+$ 0
$^{18}_{8}O_{10}$

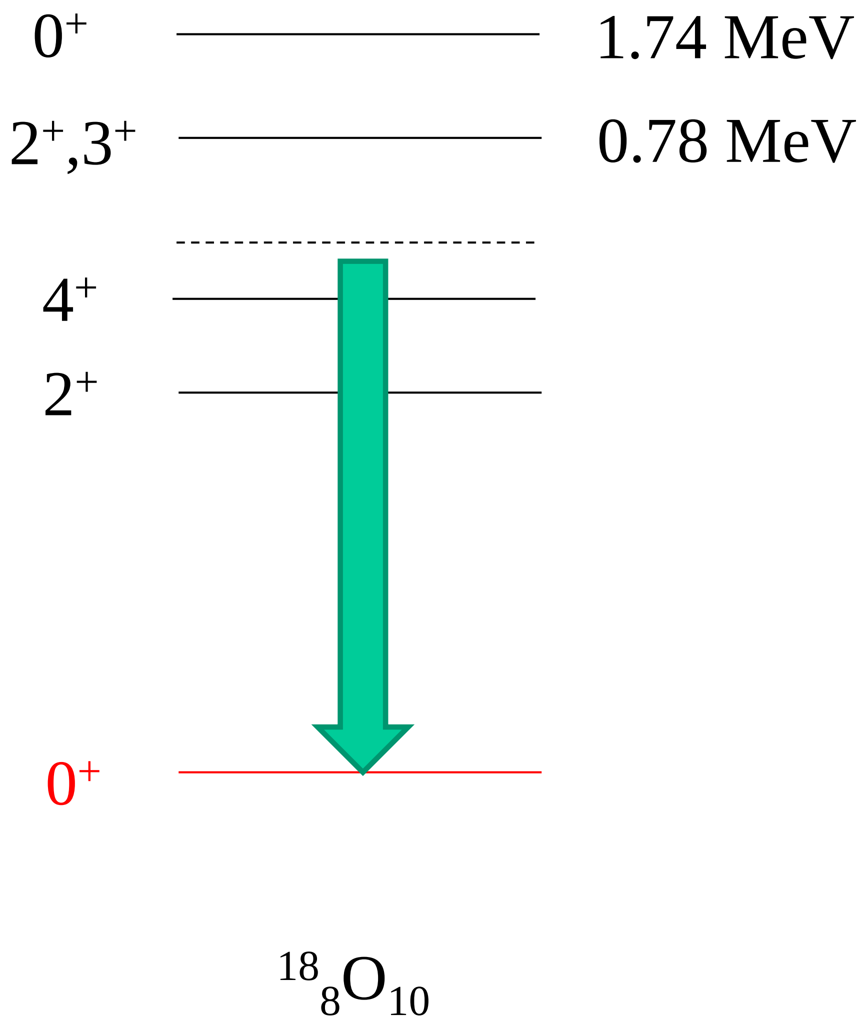


$1d_{3/2}$
$2s_{1/2}$
$1d_{5/2}$
$1p_{1/2}$
$1p_{3/2}$
^{16}O
$1s_{1/2}$

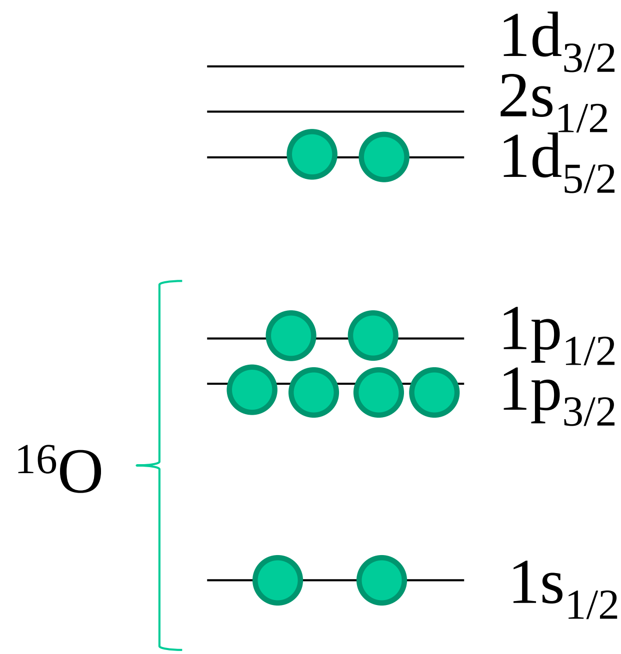


n
^{16}O
n

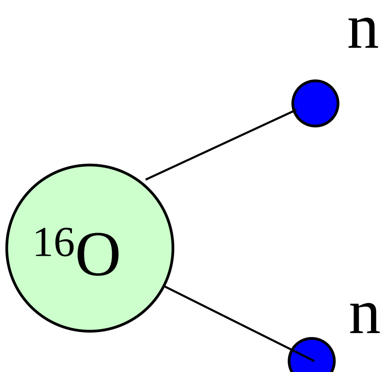
単純な平均場近似:



0+ 1.74 MeV
2+,3+ 0.78 MeV
4+
2+
0+
188O10



1d3/2
2s1/2
1d5/2
1p1/2
1p3/2
16O
1s1/2

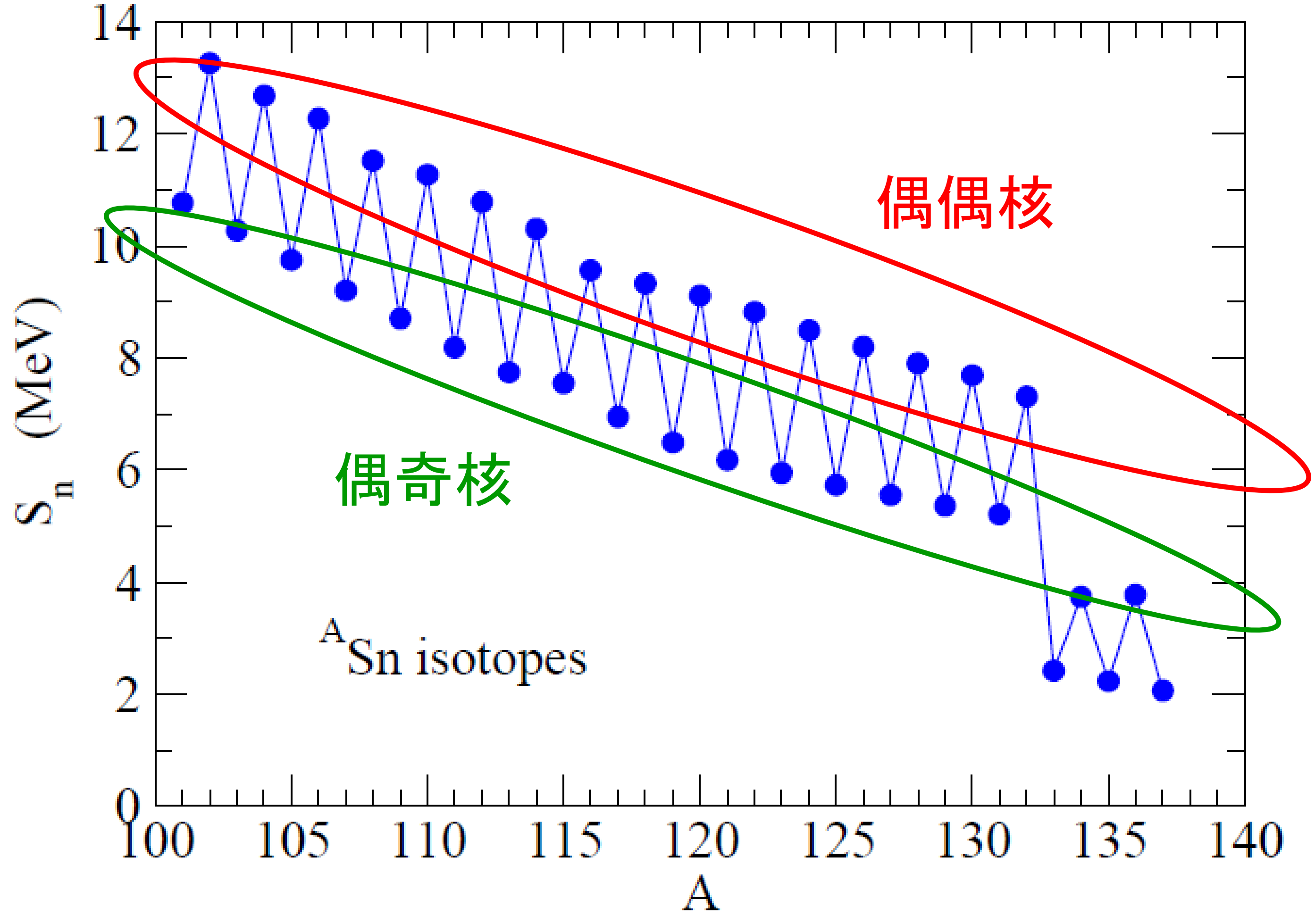


n
16O
n

対相関エネルギー

偶数個の中性子から1つ中性子を取る方が奇数個から取るより大きなエネルギーが必要:対相関

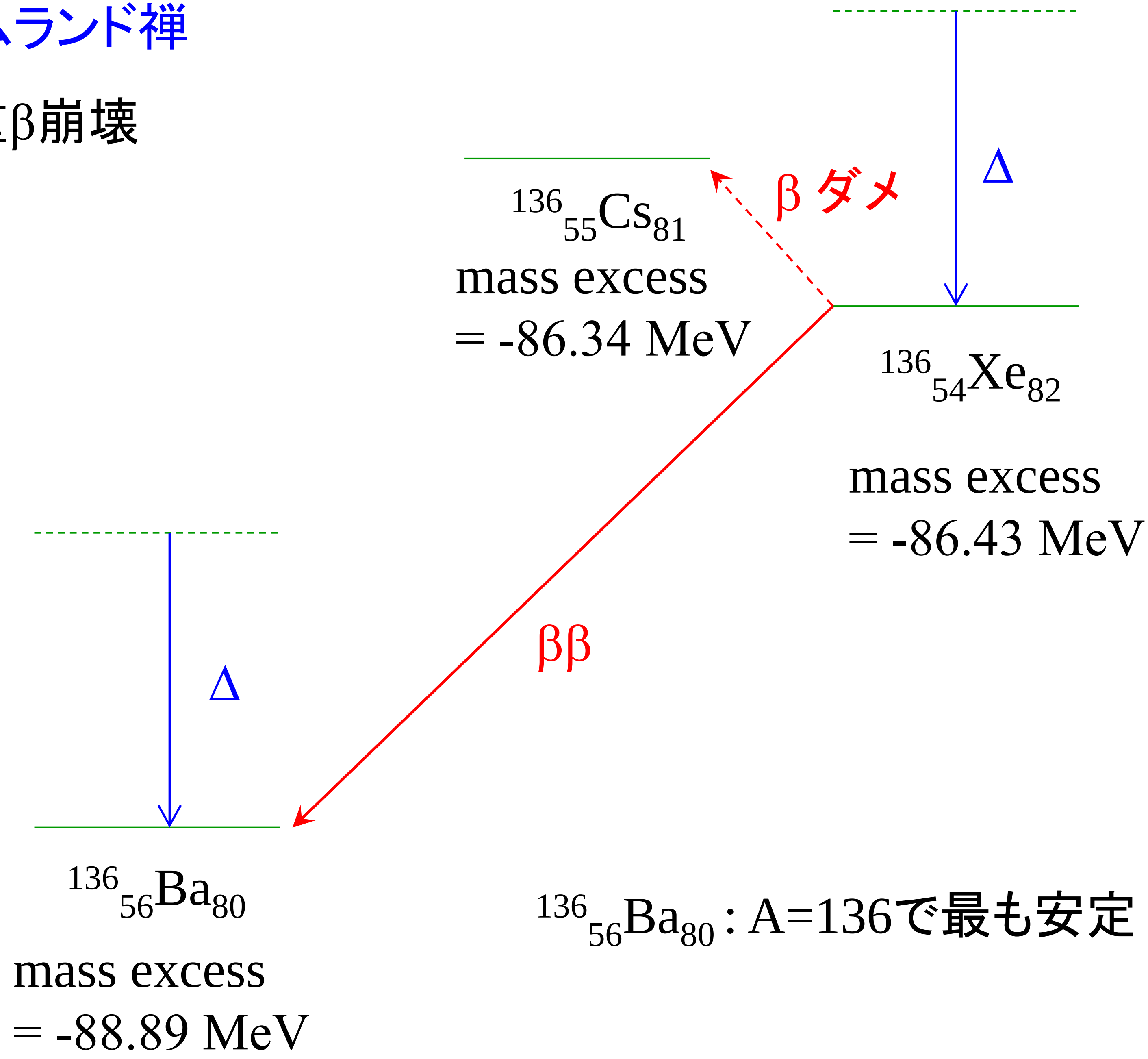
even-odd staggering



1n separation energy: $S_n\,(A,Z) = B(A,Z) - B(A\text{-}1,Z)$

（参考）カムランド禅

^{136}Xeの2重β崩壊



$^{136}{}_{56}Ba_{80}$: A=136で最も安定

(参考)中性子誘起核分裂

$$n + {}^{235}\mathrm{U} \longrightarrow {}^{236}\mathrm{U}^{*} \longrightarrow \mathrm{fission}$$

(参考)中性子誘起核分裂

$$n + {}^{235}U \longrightarrow {}^{236}U^* \longrightarrow \text{fission}$$

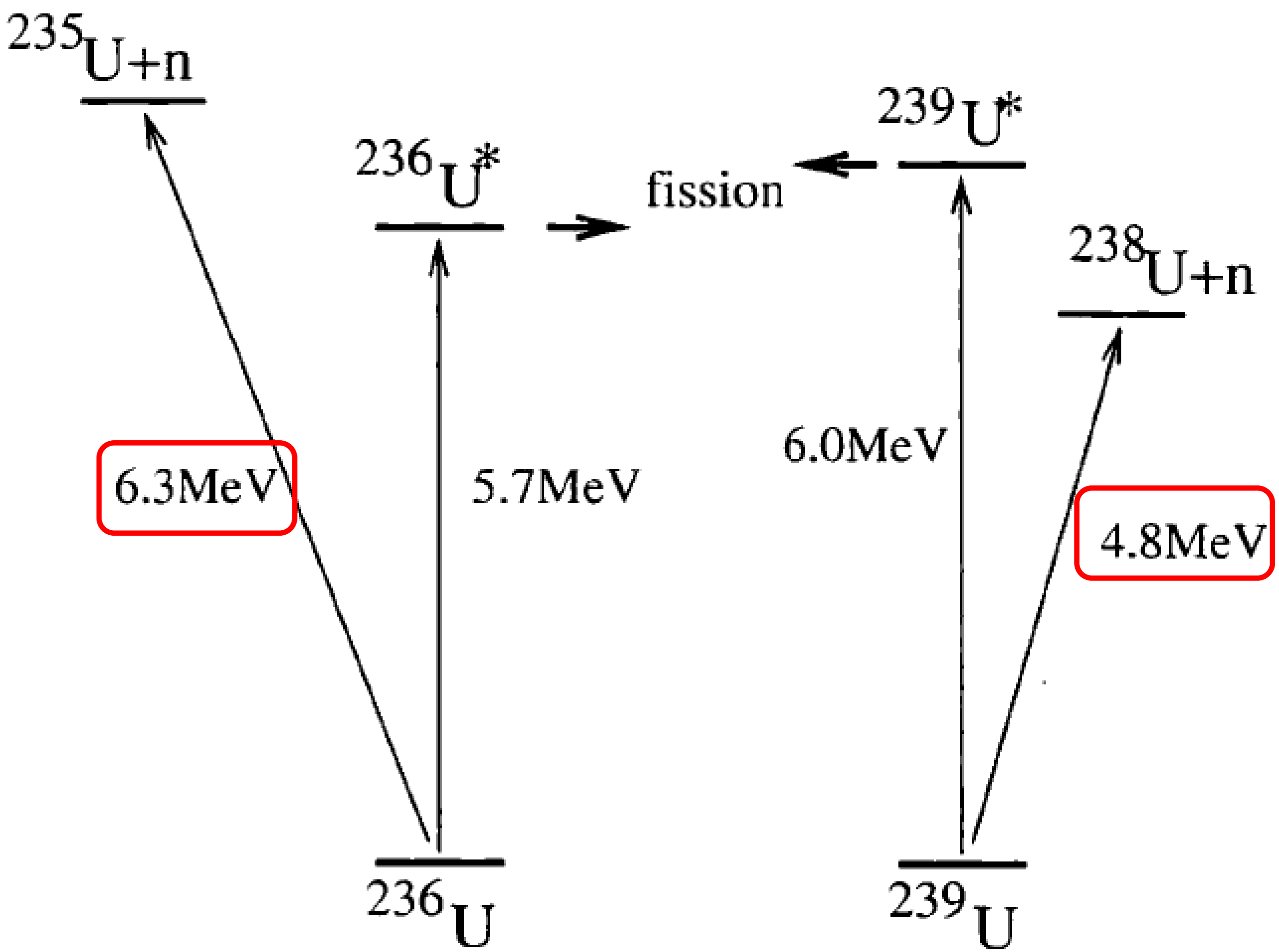
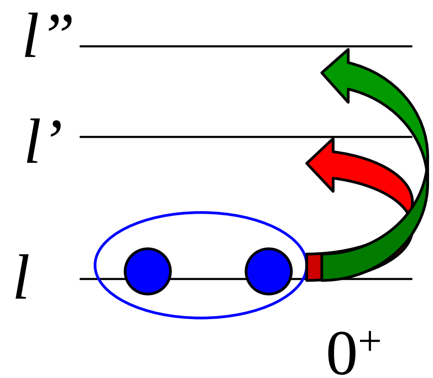
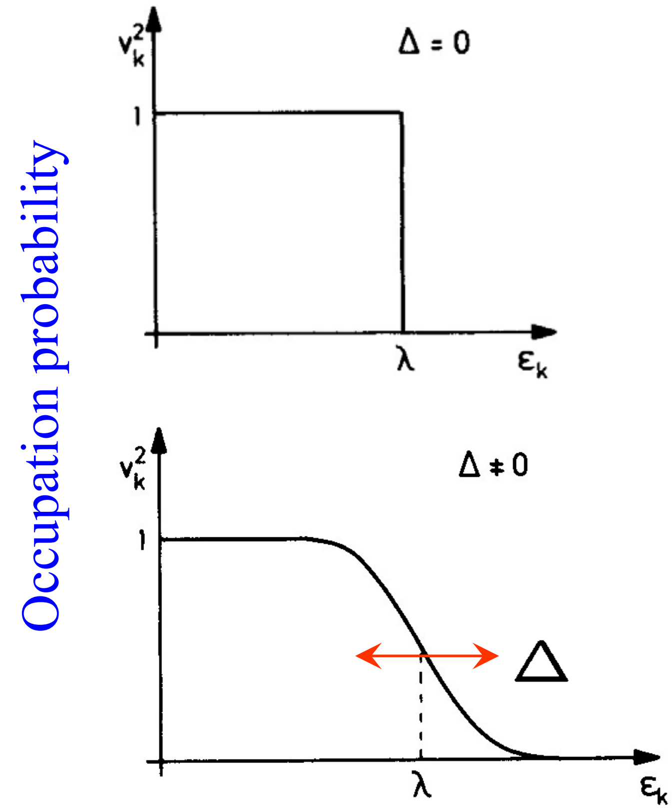


Fig. 6.6. Levels of the systems $A = 236$ and $A = 239$ involved in the fission of ${}^{236}U$ and ${}^{239}U$. The addition of a motionless (or thermal) neutron to ${}^{235}U$ can lead to the fission of ${}^{236}U$. On the other hand, fission of ${}^{239}U$ requires the addition of a neutron of kinetic energy $T_n = 6.0 - 4.8 = 1.2$ MeV.

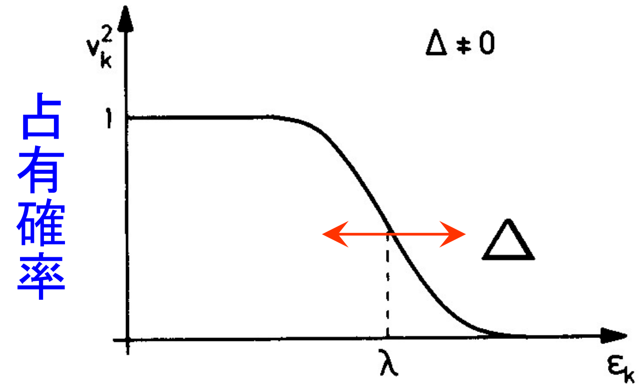
波動関数:



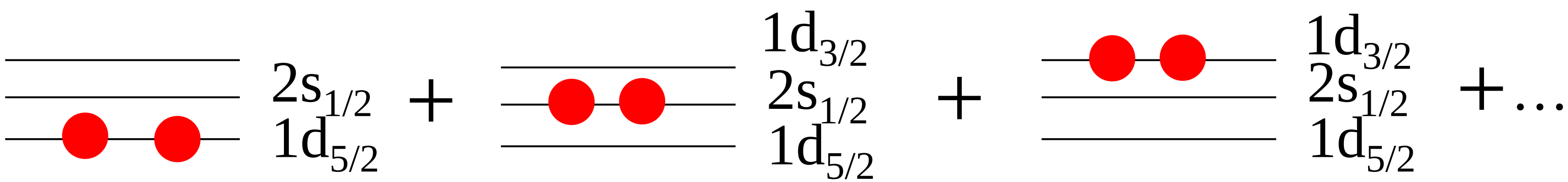


$$
\begin{aligned}
|\Psi_{0+}\rangle &= |(ll)L=0\rangle \\
&\quad + \sum_{l'} \frac{\langle (l'l')L=0|v_{\mathrm{res}}|(ll)L=0\rangle}{2\epsilon_l - 2\epsilon_{l'}} |(l'l')L=0\rangle + \cdots
\end{aligned}
$$

波動関数：



$$|\Psi_{g.s.}\rangle =$$



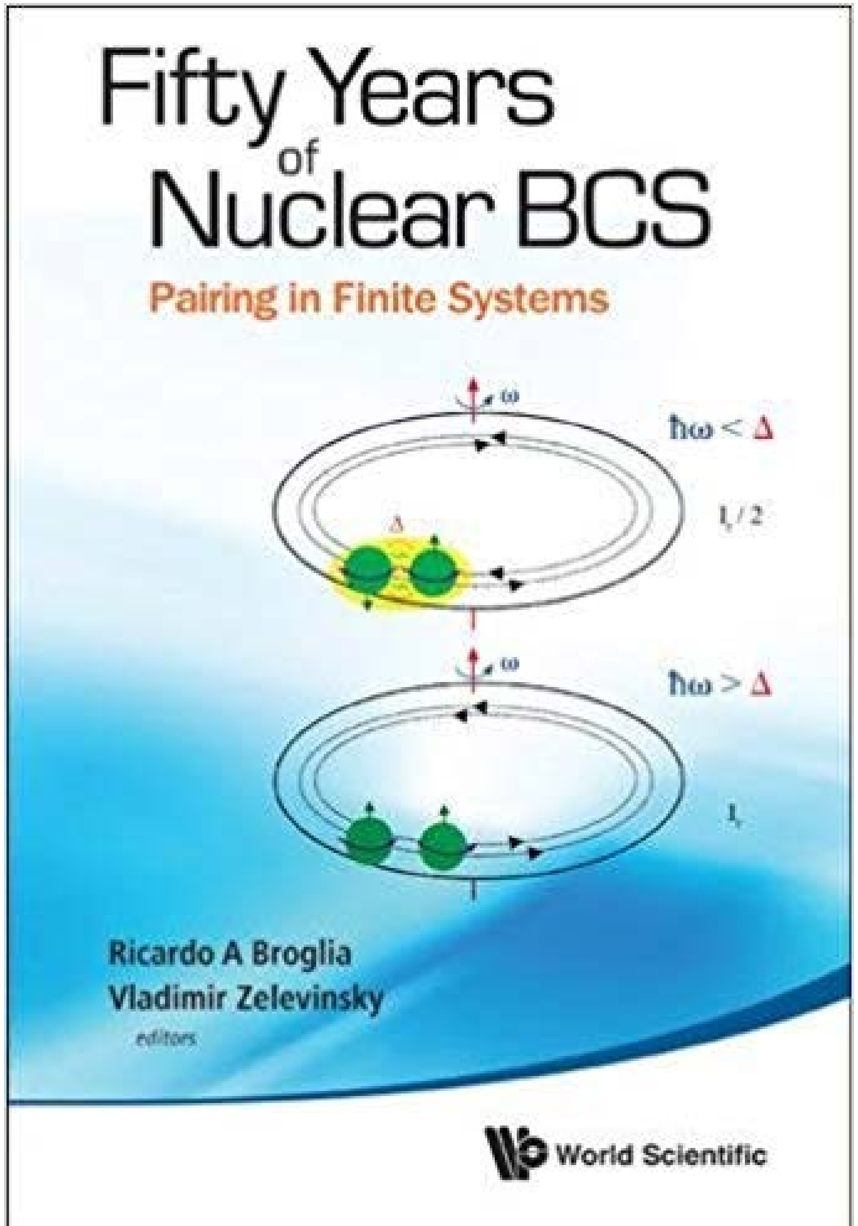
いろいろな配位を混ぜることによって対相関エネルギーを稼ぐ

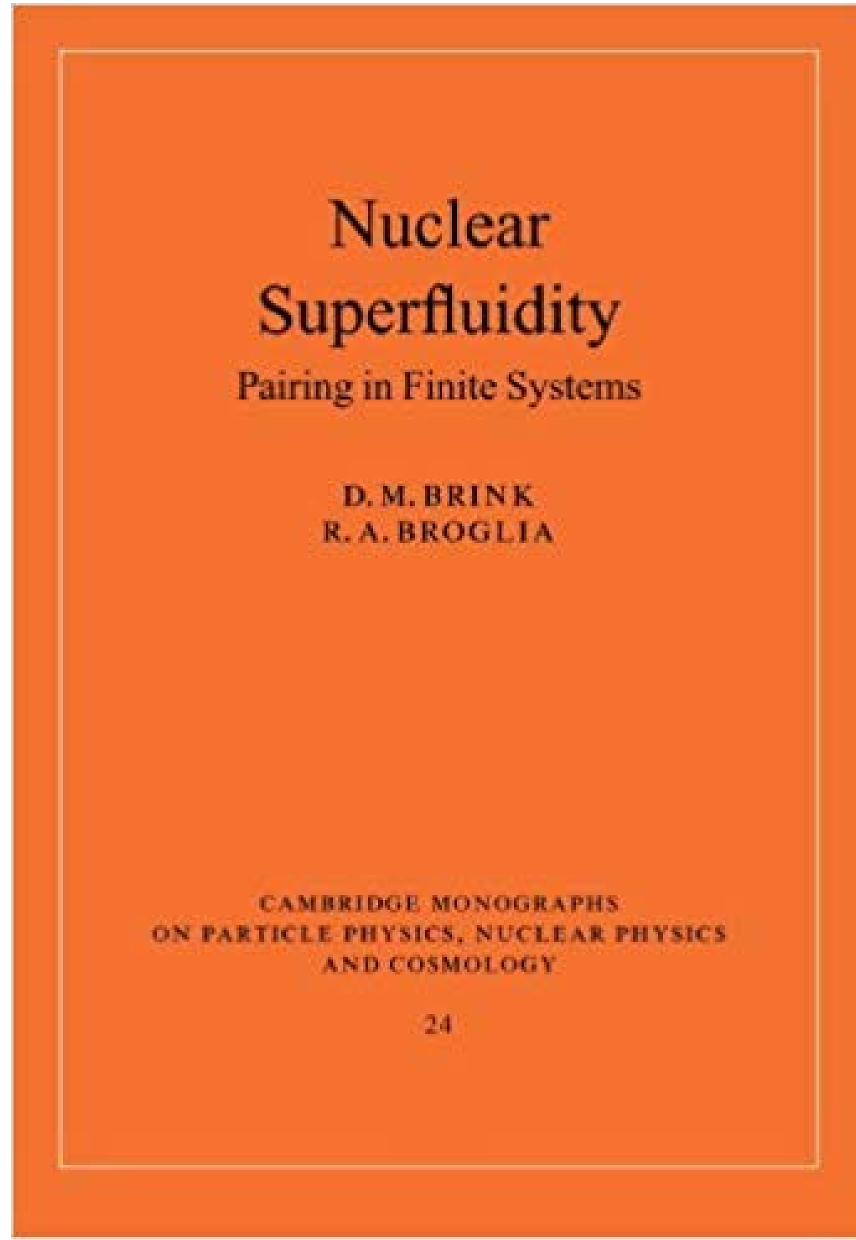
→ 各軌道は部分的にのみ占有されることになる

占有確率はエネルギーを最小化するように決定

cf. BCS 理論

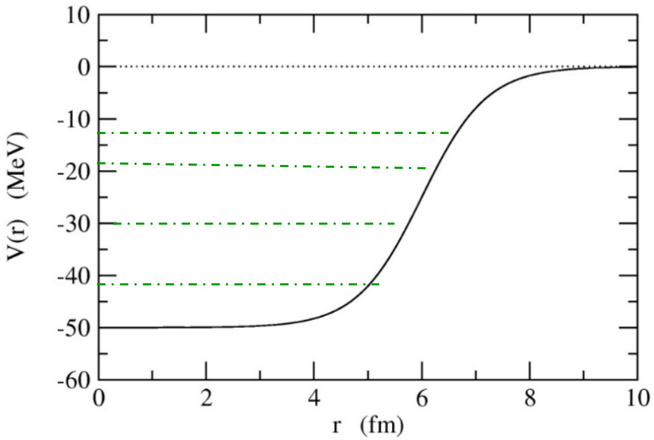
超流動状態


Fifty Years of Nuclear BCS
Pairing in Finite Systems
ħω < Δ
ħω > Δ
Ricardo A Broglia
Vladimir Zelevinsky
editors
World Scientific


Nuclear Superfluidity
Pairing in Finite Systems
D. M. BRINK
R. A. BROGLIA
CAMBRIDGE MONOGRAPHS ON PARTICLE PHYSICS, NUCLEAR PHYSICS AND COSMOLOGY
24

HF+BCS theory

①平均場近似をして核子の感じるポテンシャルを求める
（平均的な振る舞いをまず決める）



②各準位の占有確率を決める。
決め方は、残留相互作用も含めてエネルギーが最小になるようにする。

$$\boxed{|BCS\rangle = \prod_{k>0}\left(u_k + v_k\, a_k^\dagger a_{\bar{k}}^\dagger\right)\Big|0\Big\rangle}$$

$$\Big\langle BCS|a_k^\dagger a_k|BCS\Big\rangle = |v_k|^2$$ 占有確率

$$H = \sum_{\nu} \epsilon_k (a_k^\dagger a_k + a_{\bar{k}}^\dagger a_{\bar{k}}) - G \left(\sum_{k>0} a_k^\dagger a_{\bar{k}}^\dagger \right) \left(\sum_{k>0} a_{\bar{k}} a_k \right)$$

というハミルトニアンを使うと:

$$\Delta = \frac{G}{2} \sum_{\nu>0} \frac{\Delta}{\sqrt{(\epsilon_k - \lambda)^2 + \Delta^2}}$$

ギャップ方程式

$$\Delta = G \sum_{\nu>0} u_\nu v_\nu$$

ペアリング・ギャップ

$$u_\nu^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\epsilon_\nu - \lambda}{\sqrt{(\epsilon_k - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right)$$

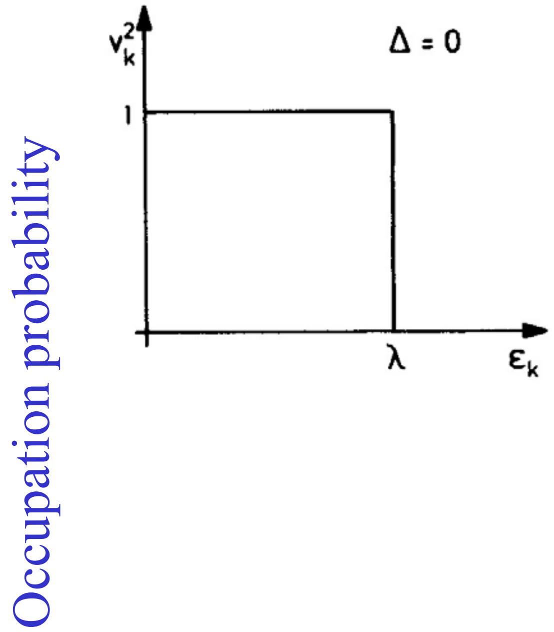
$$v_\nu^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_\nu - \lambda}{\sqrt{(\epsilon_k - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right)$$

i) Trivial solution: always exists

$$\Delta = 0$$

$$\begin{aligned} v_\nu^2 &= 1 \quad (\epsilon_\nu \le \lambda) \\ &= 0 \quad (\epsilon_\nu > \lambda) \end{aligned}$$

$$|\Psi\rangle = \prod_{\nu>0} a_\nu^\dagger a_{\bar{\nu}}^\dagger |0\rangle$$



i) Trivial solution: always exists

$$\Delta = 0$$

$$\begin{aligned} v_\nu^2 &= 1 \quad (\epsilon_\nu \leq \lambda) \\ &= 0 \quad (\epsilon_\nu > \lambda) \end{aligned}$$

$$|\Psi\rangle = \prod_{\nu>0} a_\nu^\dagger a_{\bar{\nu}}^\dagger |0\rangle$$

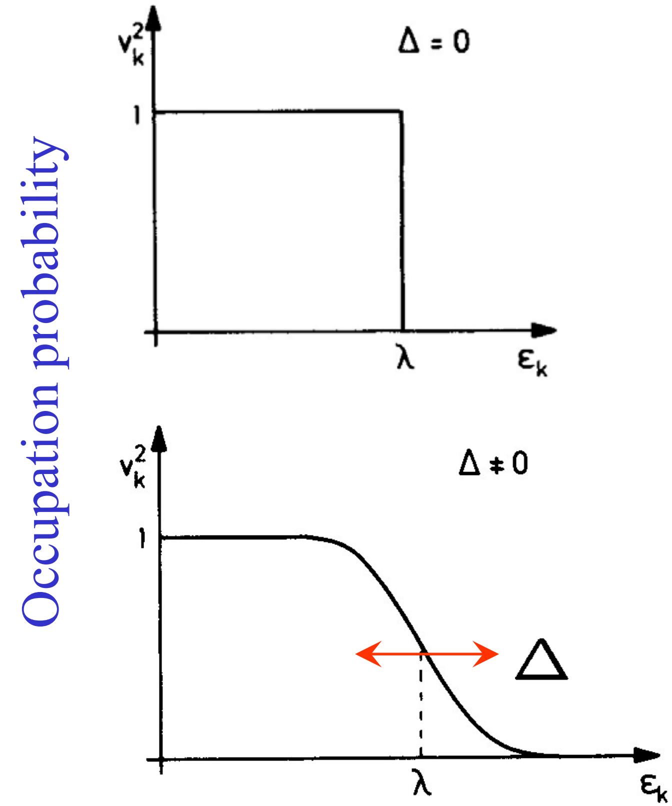
G a/o N $\longrightarrow$ large

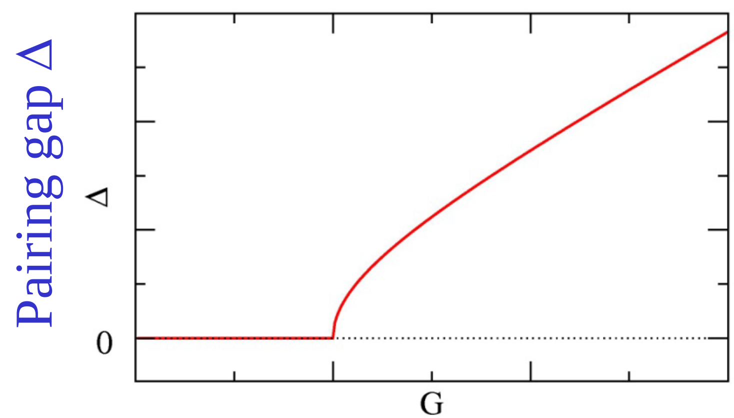
ii) Superfluid solution

$$\Delta \neq 0$$

$$v_\nu^2 < 1$$

$$|BCS\rangle = \prod_{\nu>0} \left(u_\nu + v_\nu\, a_\nu^\dagger a_{\bar{\nu}}^\dagger\right) \Big| 0 \Big\rangle$$





Number fluctuation

Normal-Superfulid phase transition