

# 共鳴散乱理論

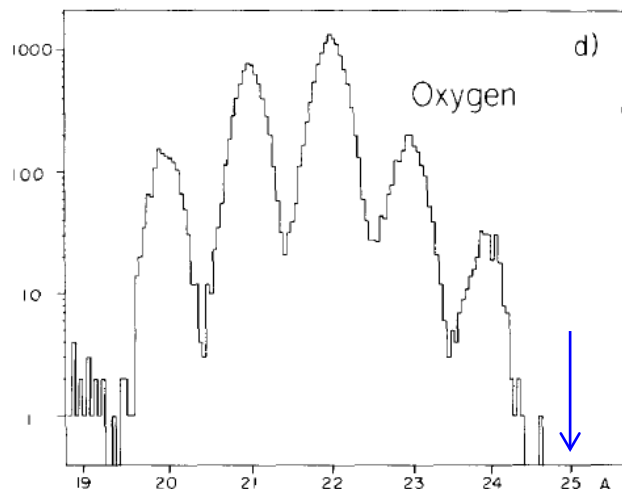
- ドリップ線の外側の原子核
- 共鳴状態の一般論
- 共鳴状態の様々な記述法

# 酸素同位体のドリップ線

## 酸素原子核 (Z=8)

✓ 安定同位体:  $^{16}\text{O}$  (99.757%),  $^{17}\text{O}$  (0.038%),  $^{18}\text{O}$  (0.205%)

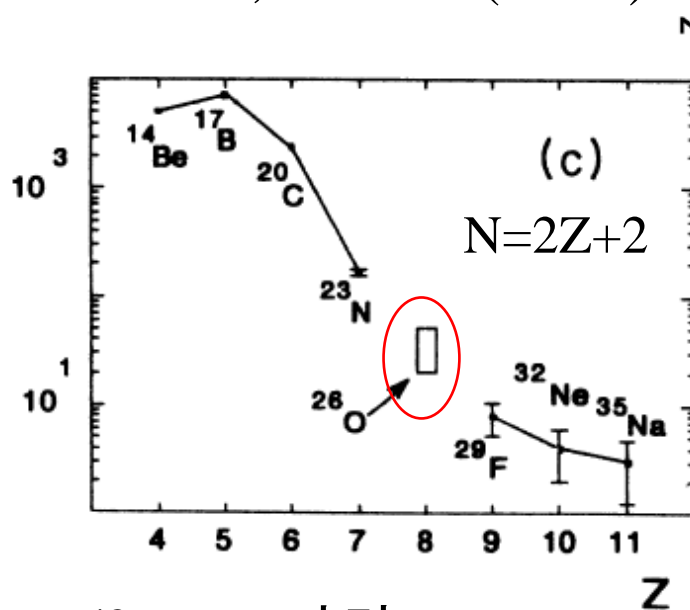
✓  $^{24}\text{O}$  の発見: A.G. Artukh et al., PL32B (1970) 43



### $^{40}\text{Ar}$ の破碎

M. Langevin et al.,  
PL150B ('85) 71

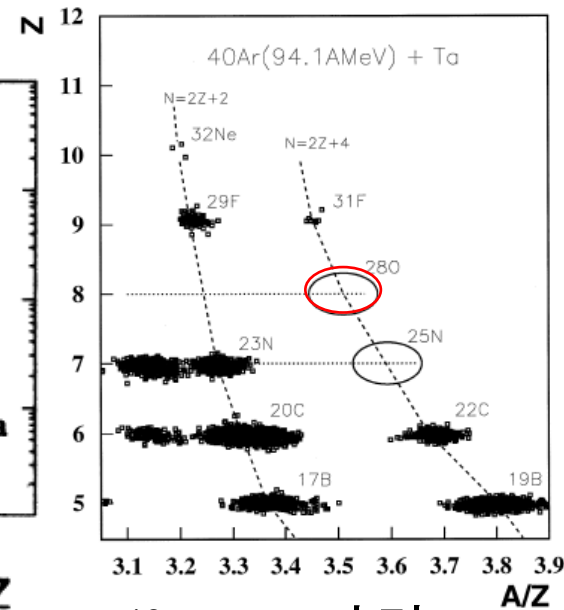
$^{25}\text{O}$  は不検出



### $^{48}\text{Ca}$ の破碎

D. Guillemaud-Mueller et al.,  
PRC41 ('90) 937

$^{26}\text{O}$  は不検出



### $^{40}\text{Ar}$ の破碎

H. Sakurai et al.,  
PLB448 ('99) 180

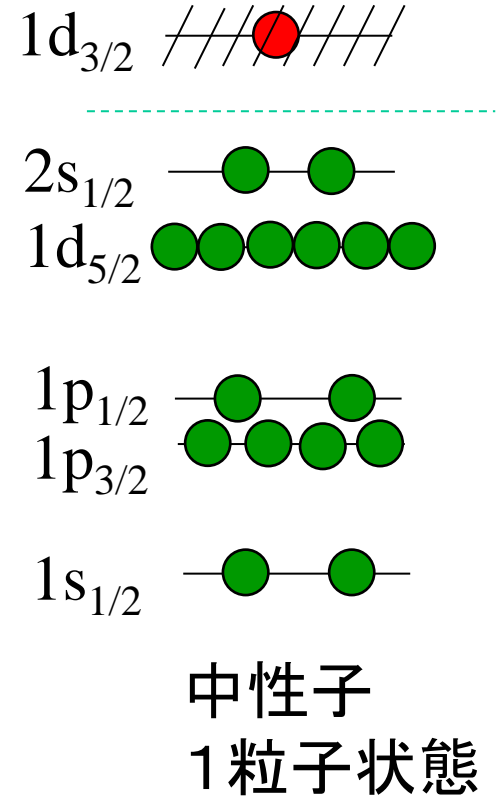
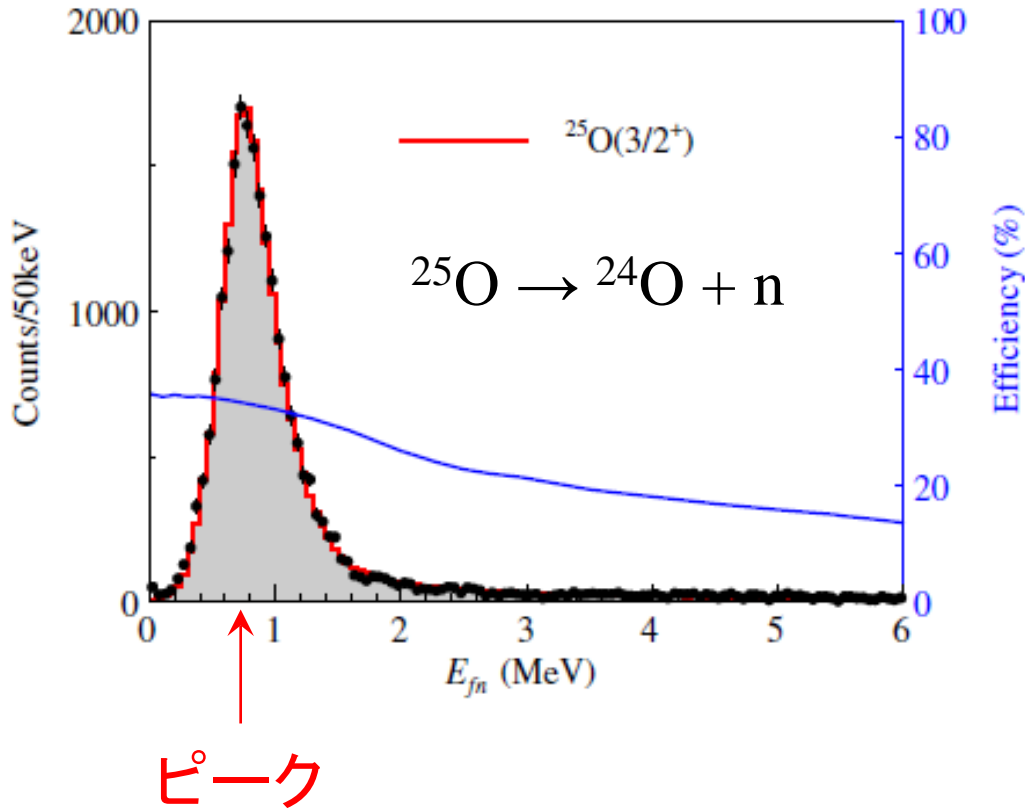
$^{28}\text{O}$  は不検出

➡ 酸素の中性子ドリップ線は  $^{24}\text{O}$  で確定。 $^{25,26,28}\text{O}$  は非束縛。

# $^{25}\text{O}$ はどのように見えるのか?

$^{22}\text{O}$	$^{23}\text{O}$	$^{24}\text{O}$	$^{25}\text{O}$	$^{26}\text{O}$
-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

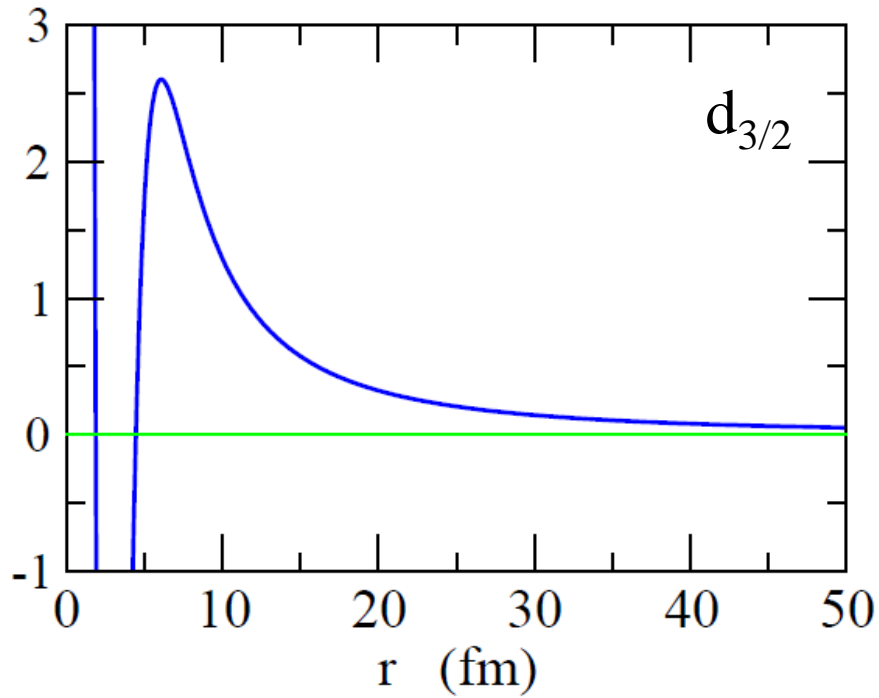
$^{26}_9\text{F}_{17}$  から1つ陽子を抜いて  $^{25}_8\text{O}_{17}$  を生成 → 1中性子を放出して崩壊



Y. Kondo et al., PRL116 ('16) 102503

$1d_{3/2}$  の「準束縛」状態と解釈することができる

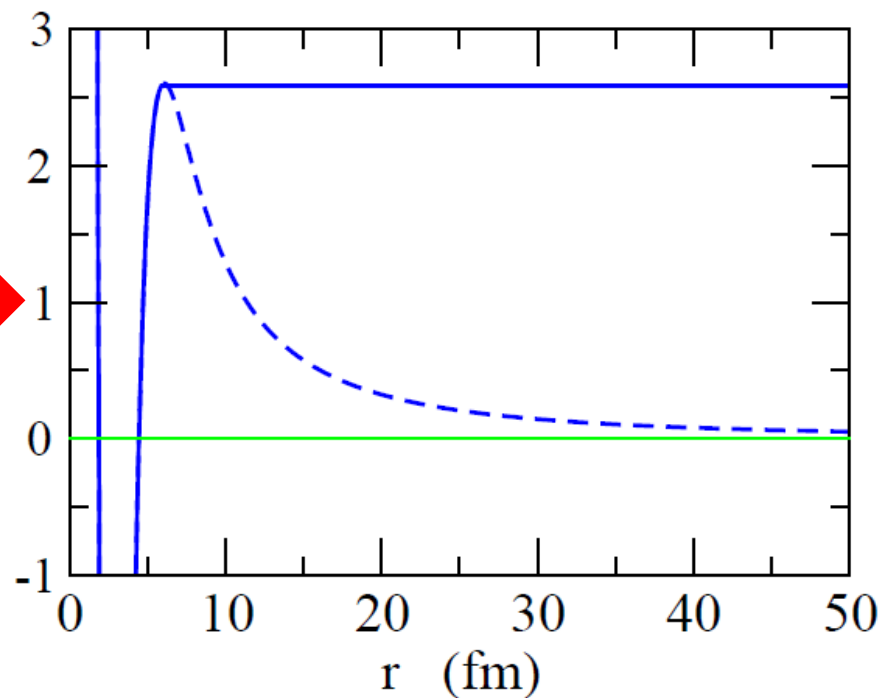
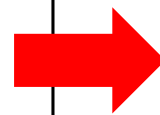
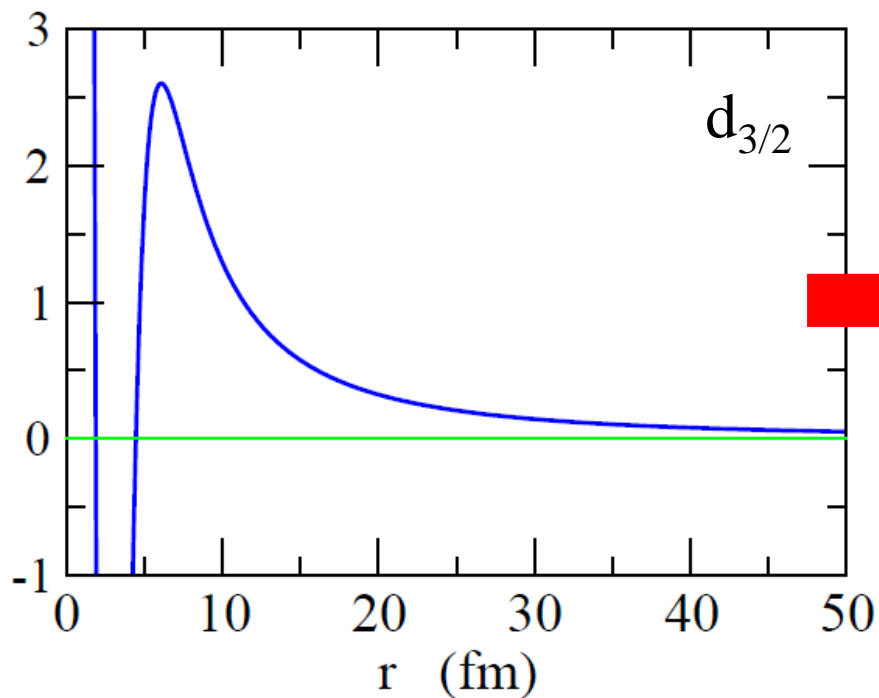
## 準束縛状態とは?



実際のポテンシャル

束縛状態は  $E < 0$  の領域のみ

## 準束縛状態とは?



実際のポテンシャル

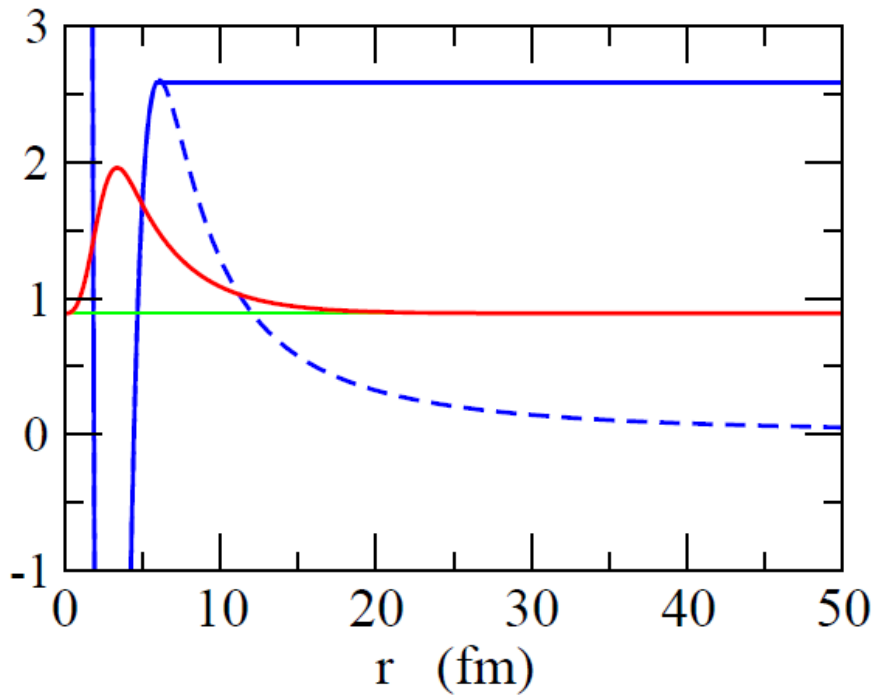
束縛状態は  $E < 0$  の領域のみ

このようにポテンシャルを  
変更すると

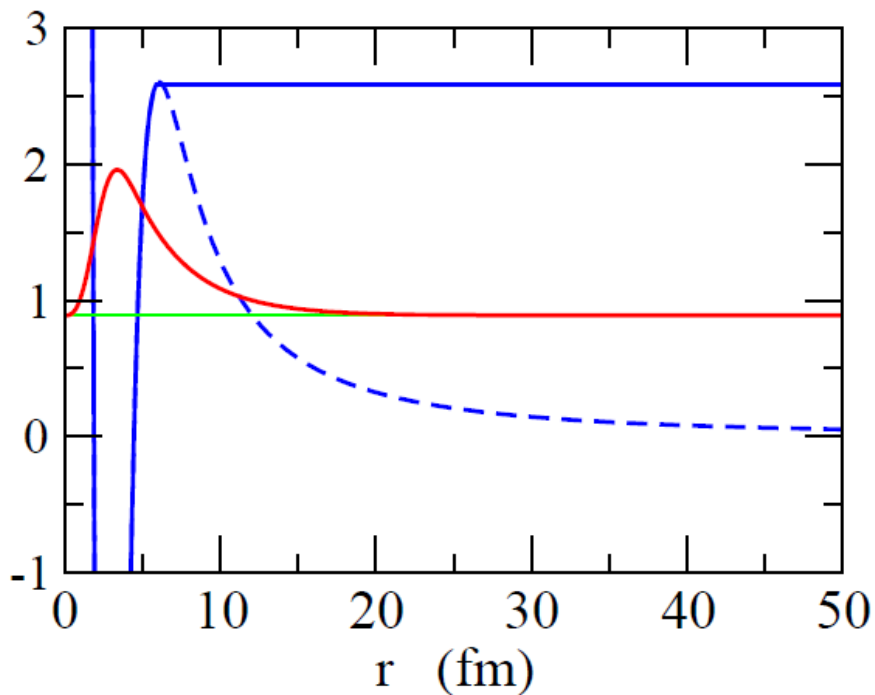
→  $E > 0$  でも束縛状態が  
できる

= 準束縛(準安定)状態

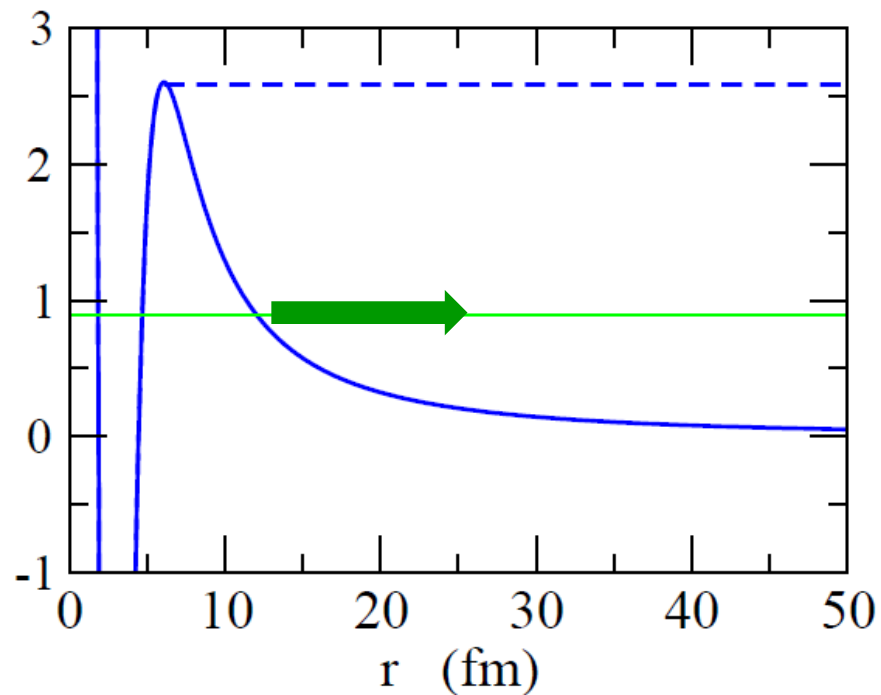
## 準束縛状態とは?



## 準束縛状態とは?



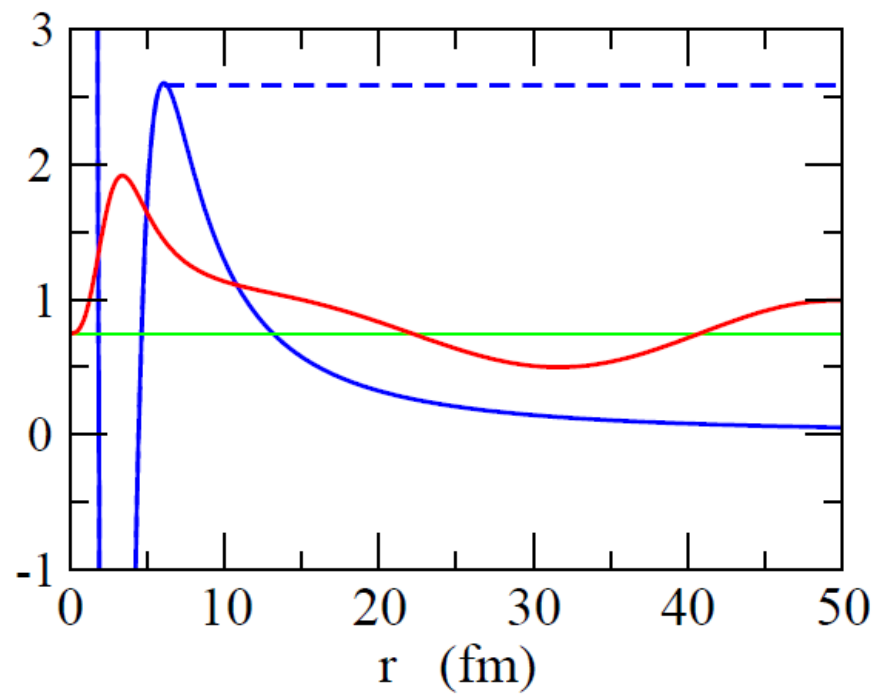
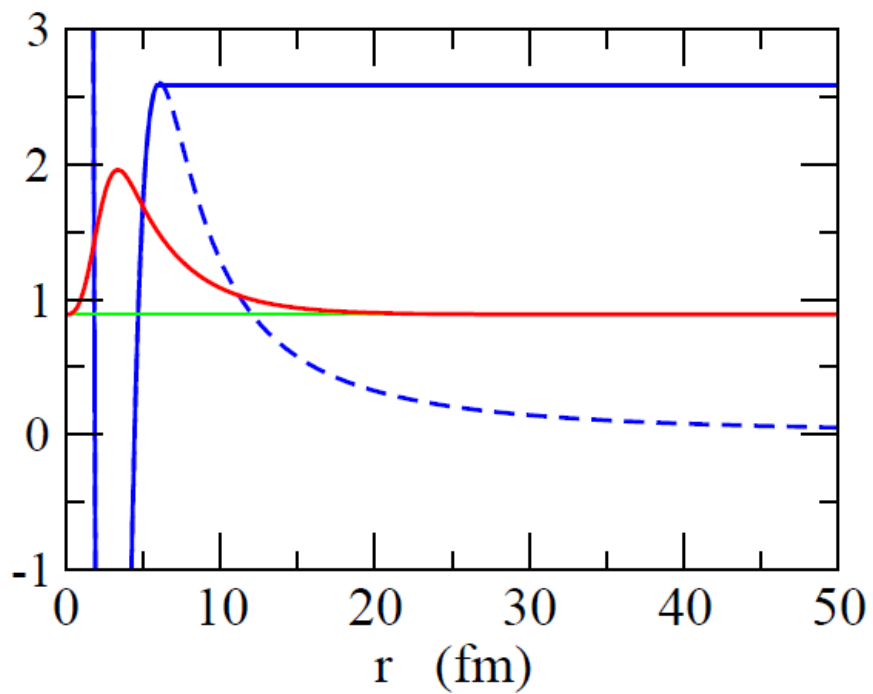
束縛状態 = 無限の寿命



実際には有限の寿命で  
障壁をトンネルし崩壊

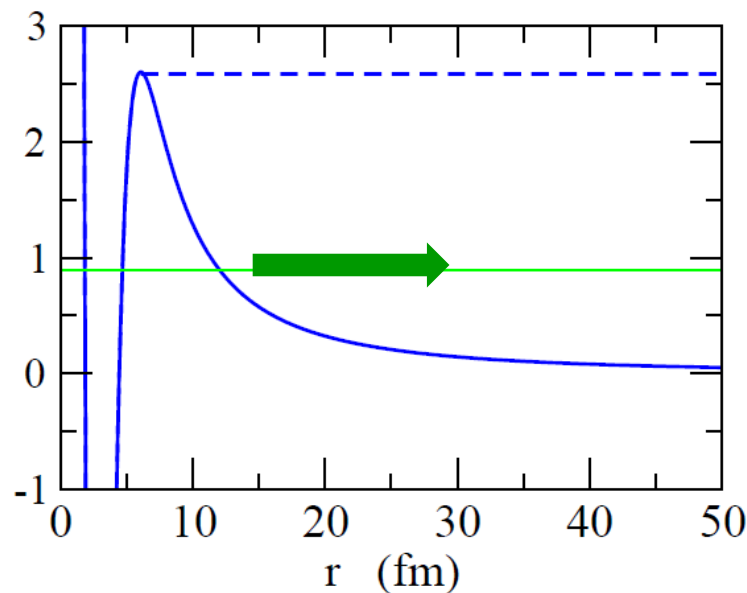
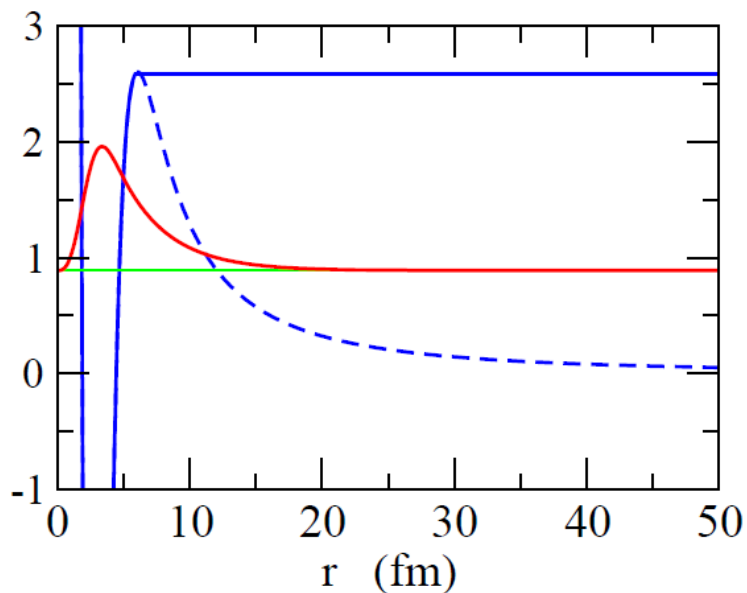
「準束縛(準安定)状態」

## 準束縛状態とは?





# ガモフ状態



トンネル効果で波動関数が  
 沁み出し、**外向きの波として崩壊**

$$\begin{aligned}
 u(r) &\sim r^{l+1} && (r \rightarrow 0) \\
 &\rightarrow \mathcal{N} e^{i(kr - l\pi/2)} && (r \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

共鳴幅



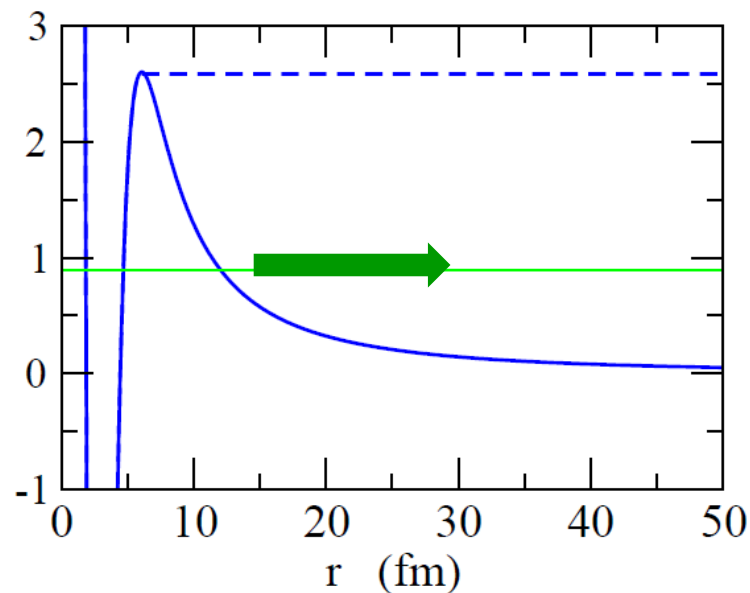
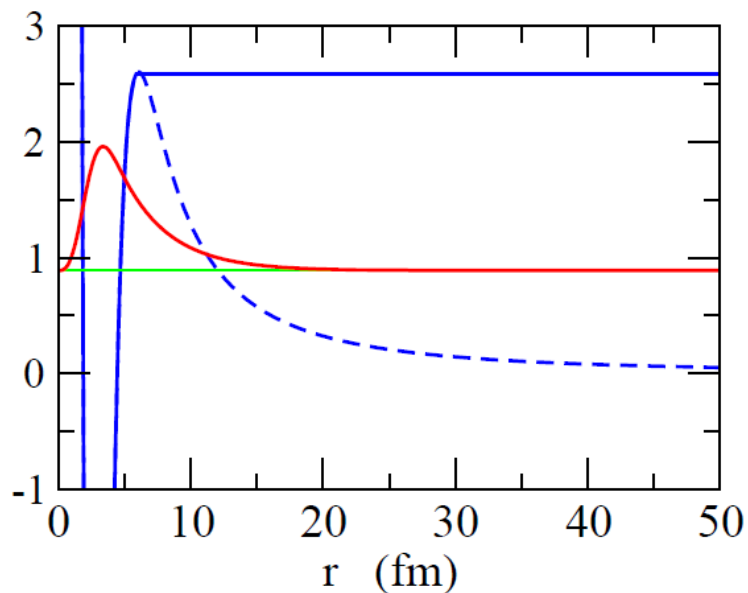
$$E \rightarrow E_R - i \frac{\Gamma}{2}$$



共鳴エネルギー

⇒ エネルギーを複素数にしなければならない:

# ガモフ状態



トンネル効果で波動関数が  
 沁み出し、**外向きの波として崩壊**

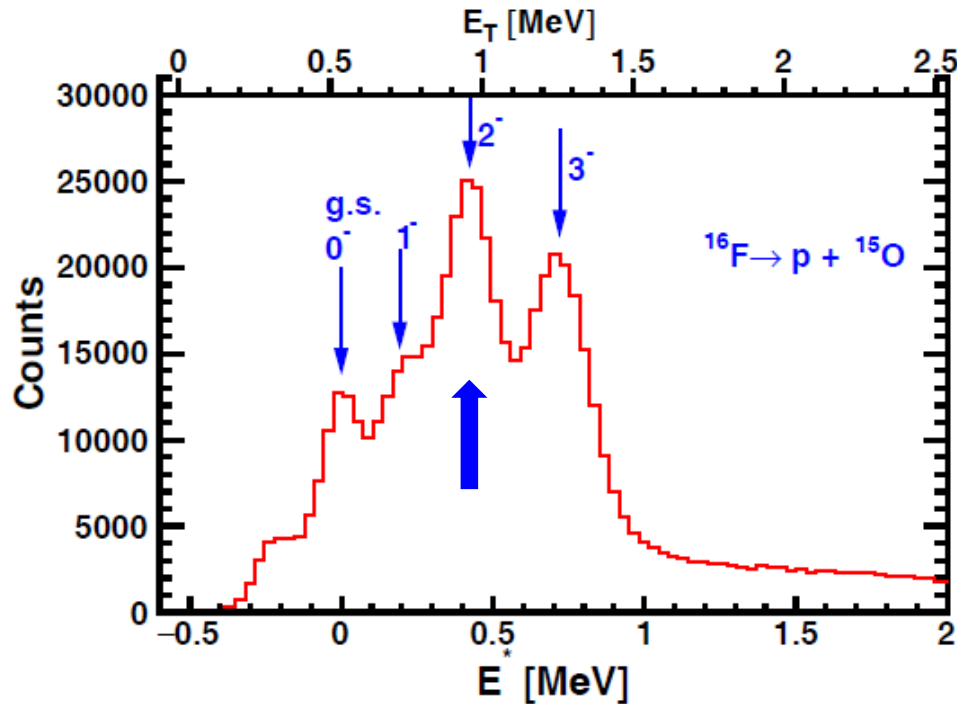
$$E \rightarrow E_R - i\frac{\Gamma}{2}$$

$$\begin{aligned}
 P_{\text{sur}}(t) &\equiv |\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|^2 \\
 &= |\langle \psi(0) | e^{-iHt/\hbar} | \psi(0) \rangle|^2 \\
 &= |\langle \psi(0) | e^{-i(E_R - i\Gamma/2)t/\hbar} | \psi(0) \rangle|^2 \\
 &= e^{-\Gamma t/\hbar} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\hbar/\Gamma \text{ が準安定状態の寿命}}
 \end{aligned}$$

# 共鳴状態と弾性散乱(共鳴散乱)

陽子非束縛核  $^{16}_9\text{F}_7$

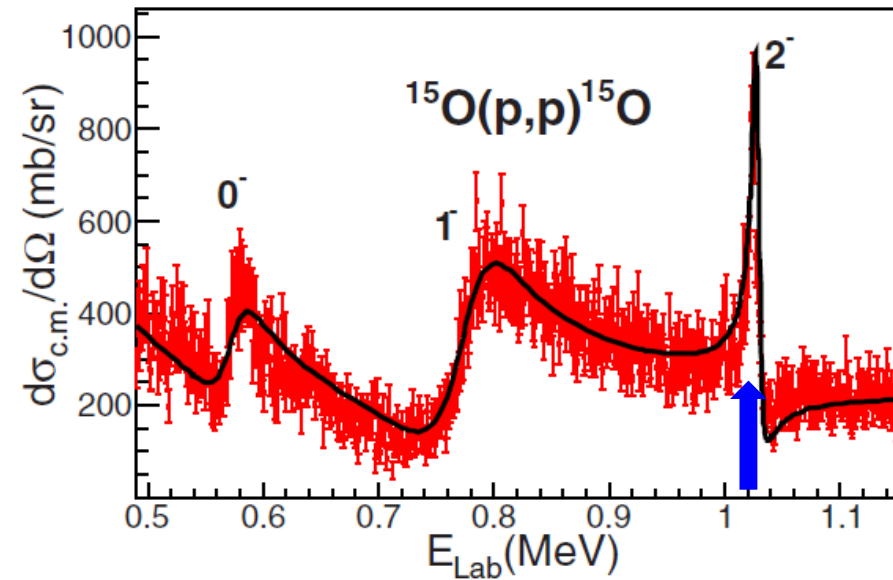
$^{17}_{10}\text{Ne}$ から1つ陽子を抜いて  
 $^{16}_9\text{F}$ を生成 → 崩壊スペクトル



R.J. Charity,  
Eur. Phys. J. Plus 131 ('16) 63

# まず実際の現象から

$^{15}\text{O} + \text{p}$  弾性散乱の断面積



$\theta_{\text{cm}} = 180$  deg.

I. Stefan et al., PRC90('14) 014307

共鳴エネルギーで弾性散乱の断面積が増大(共鳴散乱)

# 共鳴状態と弾性散乱(共鳴散乱)

## 次に散乱理論

### 自由粒子の運動:

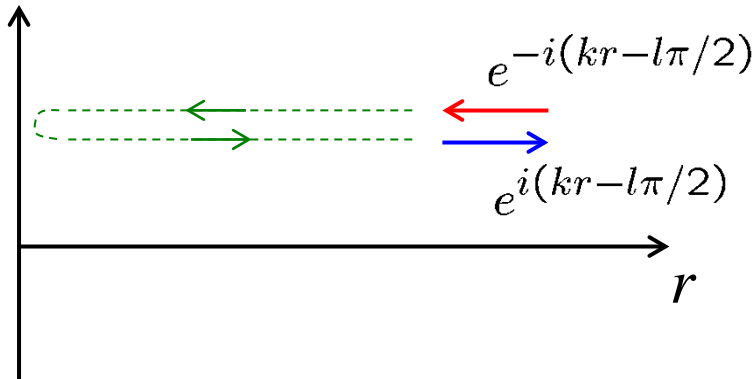
$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - E\right)\psi(\mathbf{r}) = 0$$

✓ 解:

$$\psi(\mathbf{r}) \propto j_l(kr)Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})\chi_{m_s}$$

✓ 遠方での振る舞い:

$$\begin{aligned} j_l(kr) &\rightarrow \frac{1}{kr} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) \\ &= \frac{-1}{2ikr} \left( e^{-i(kr-l\pi/2)} - e^{i(kr-l\pi/2)} \right) \end{aligned}$$



## 共鳴状態と弾性散乱(共鳴散乱)

### 自由粒子の運動:

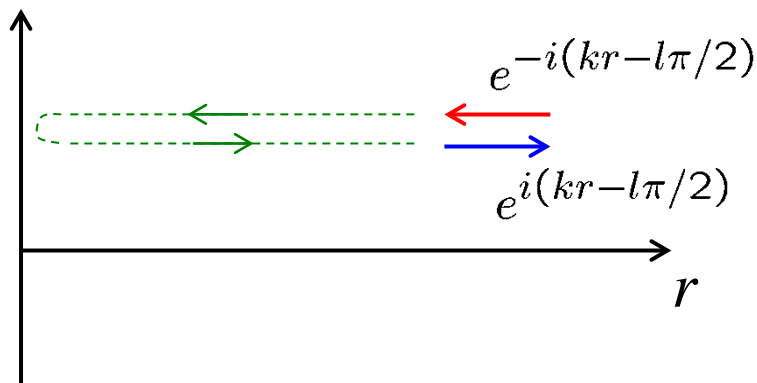
$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - E\right)\psi(\mathbf{r}) = 0$$

✓解:

$$\psi(\mathbf{r}) \propto j_l(kr)Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})\chi_{m_s}$$

✓遠方での振る舞い:

$$\begin{aligned} j_l(kr) &\rightarrow \frac{1}{kr} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) \\ &= \frac{-1}{2ikr} \left( e^{-i(kr-l\pi/2)} - e^{i(kr-l\pi/2)} \right) \end{aligned}$$



## 次に散乱理論

### ポテンシャル中の運動:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r) - E\right)\psi(\mathbf{r}) = 0$$

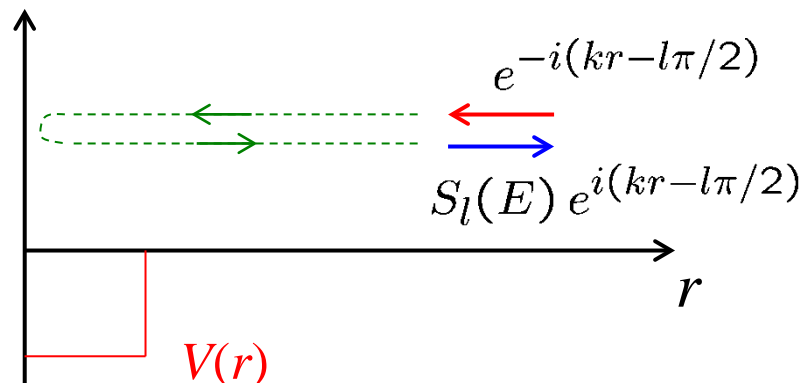
✓解:

$$\psi(\mathbf{r}) \propto R_l(r)Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})\chi_{m_s}$$

✓遠方での振る舞い:

$$R_l(r) \rightarrow \frac{-1}{2ikr} \left( e^{-i(kr-l\pi/2)} - S_l(E) e^{i(kr-l\pi/2)} \right)$$

\* 吸収がなければ  $|S_l(E)| = 1$



## 共鳴状態と弾性散乱(共鳴散乱)

### 自由粒子の運動:

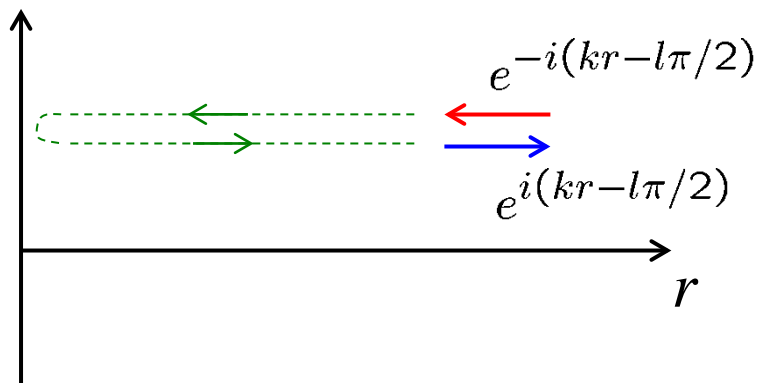
$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - E\right)\psi(\mathbf{r}) = 0$$

✓解:

$$\psi(\mathbf{r}) \propto j_l(kr)Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})\chi_{m_s}$$

✓遠方での振る舞い:

$$\begin{aligned} j_l(kr) &\rightarrow \frac{1}{kr} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) \\ &= \frac{-1}{2ikr} \left( e^{-i(kr-l\pi/2)} - e^{i(kr-l\pi/2)} \right) \end{aligned}$$



## 次に散乱理論

### ポテンシャル中の運動:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r) - E\right)\psi(\mathbf{r}) = 0$$

✓解:

$$\psi(\mathbf{r}) \propto R_l(r)Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})\chi_{m_s}$$

✓遠方での振る舞い:

$$R_l(r) \rightarrow \frac{-1}{2ikr} \left( e^{-i(kr-l\pi/2)} - S_l(E) e^{i(kr-l\pi/2)} \right)$$

\* 吸収がなければ  $|S_l(E)| = 1$

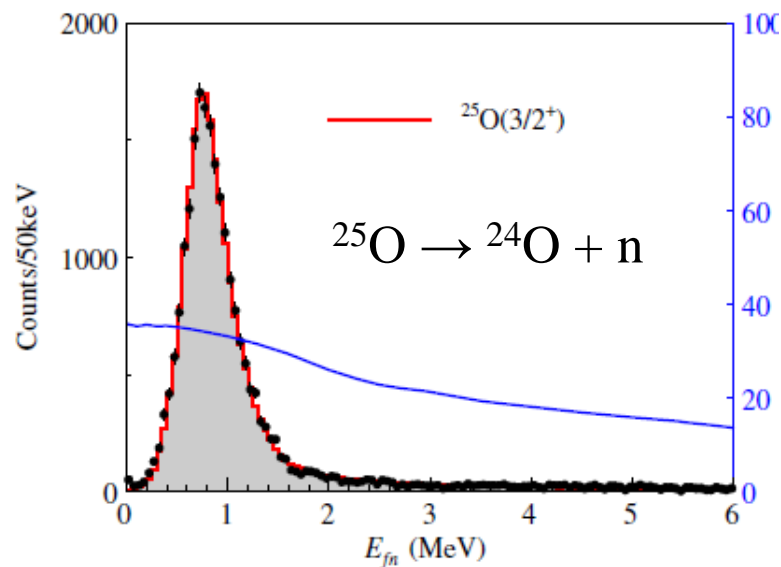
位相のずれ (phase shift)

$$S_l(E) = e^{2i\delta_l(E)}$$

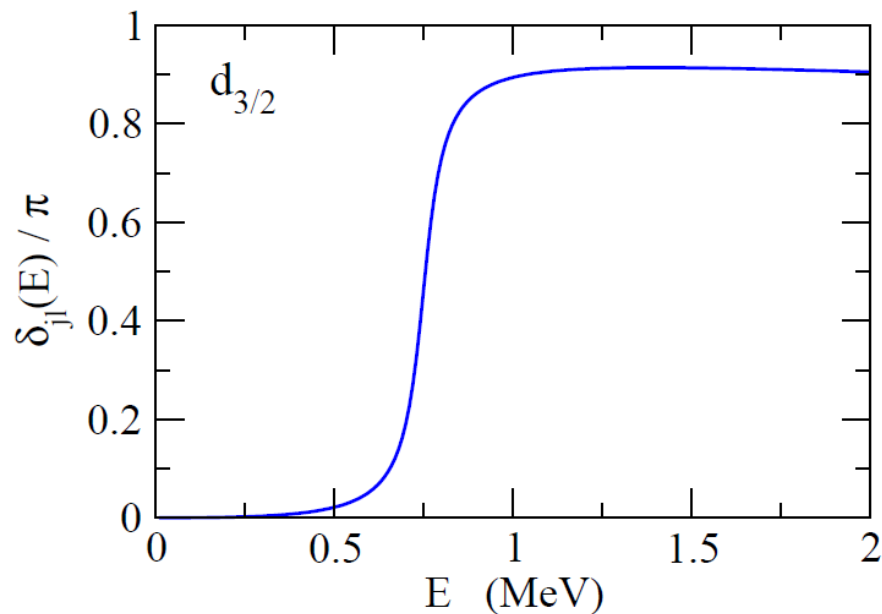
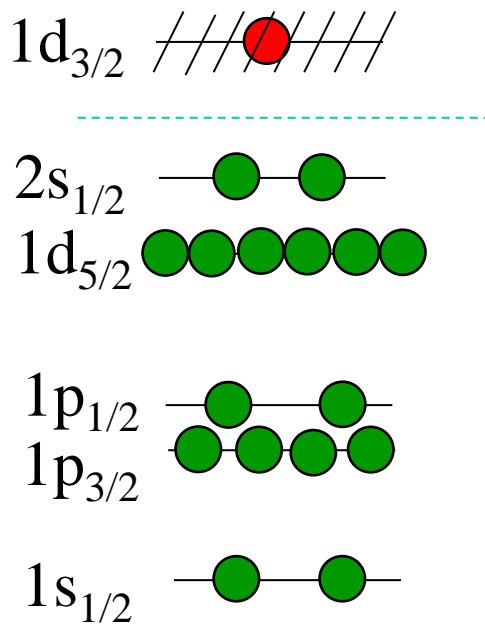
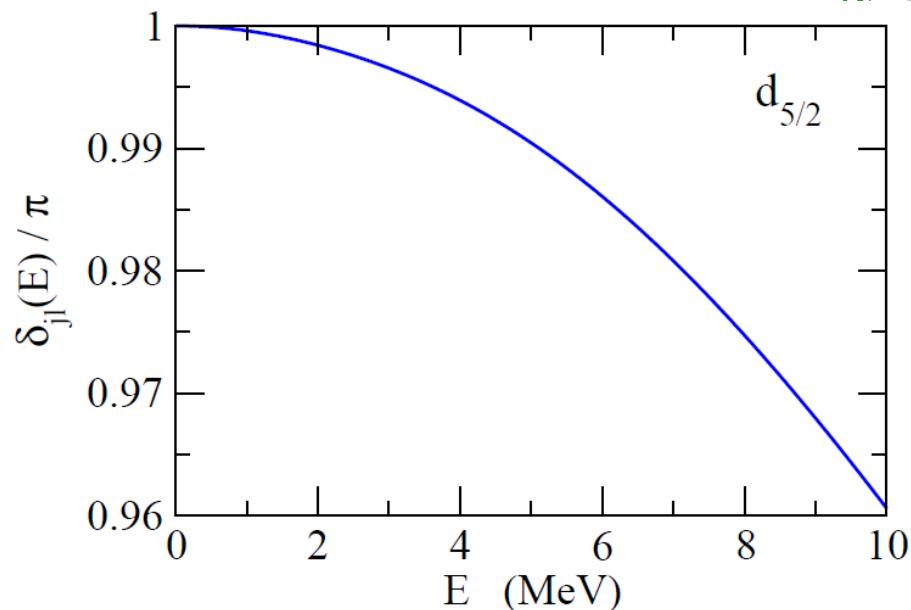


$$R_l(r) \rightarrow -\frac{e^{i\delta_l(E)}}{kr} \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l(E))$$

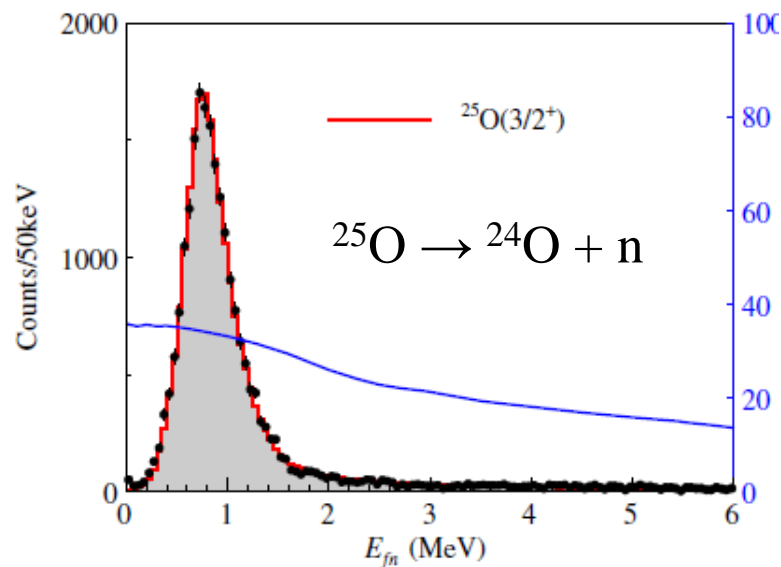
# 共鳴があると位相のずれはどう振る舞う?



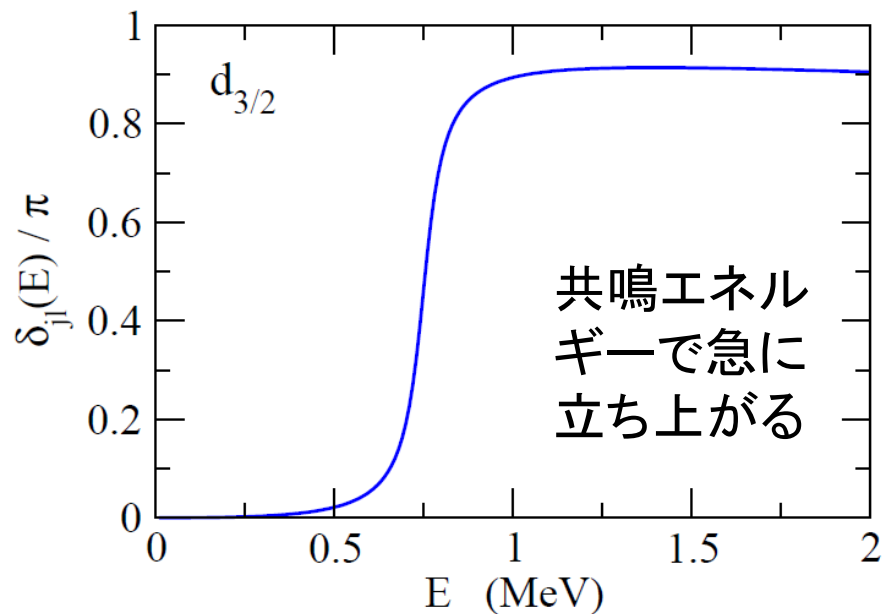
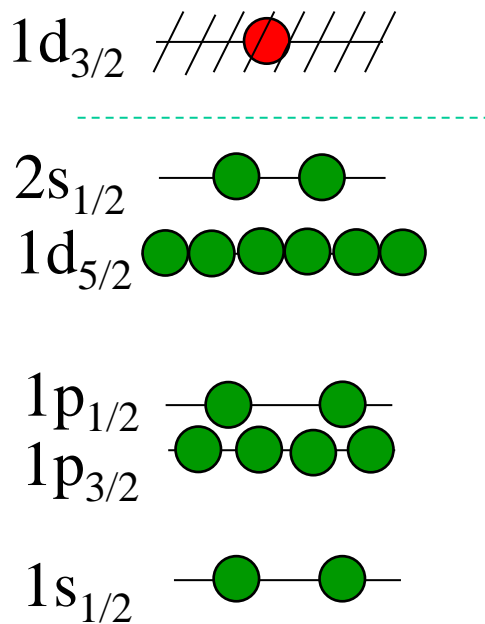
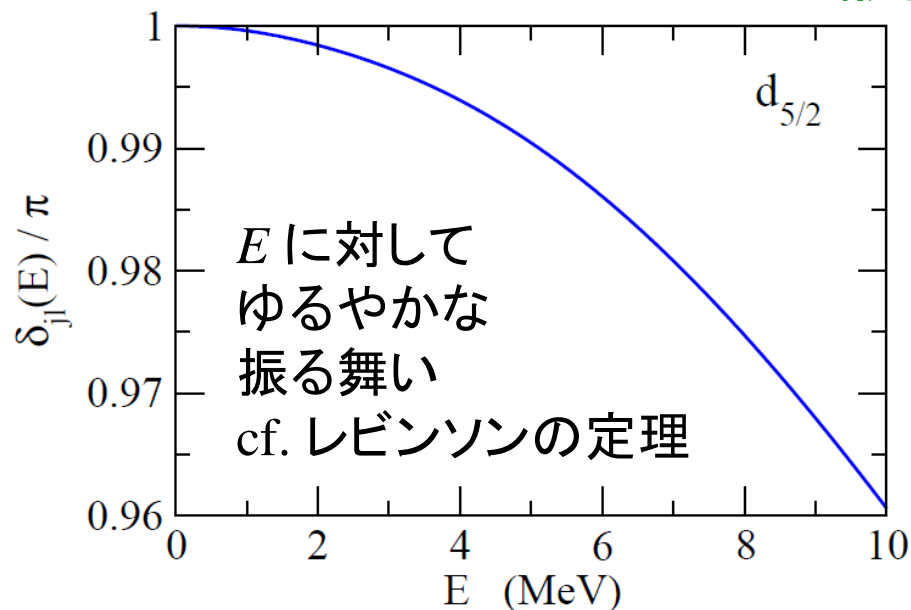
## WS ポテンシャルによる n- $^{24}\text{O}$ 散乱



# 共鳴があると位相のずれはどう振る舞う?

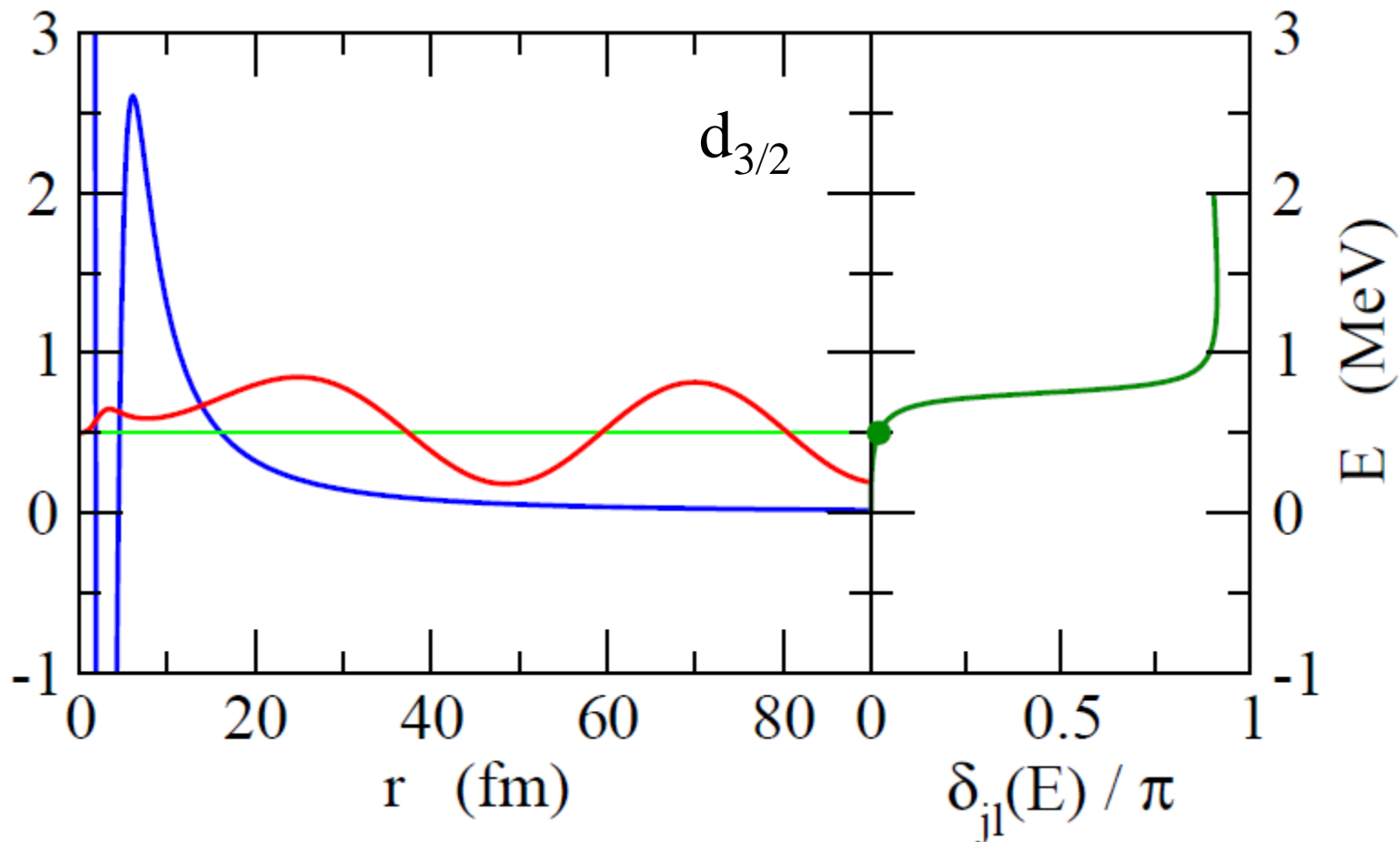


## WS ポテンシャルによる $n$ - $^{24}\text{O}$ 散乱



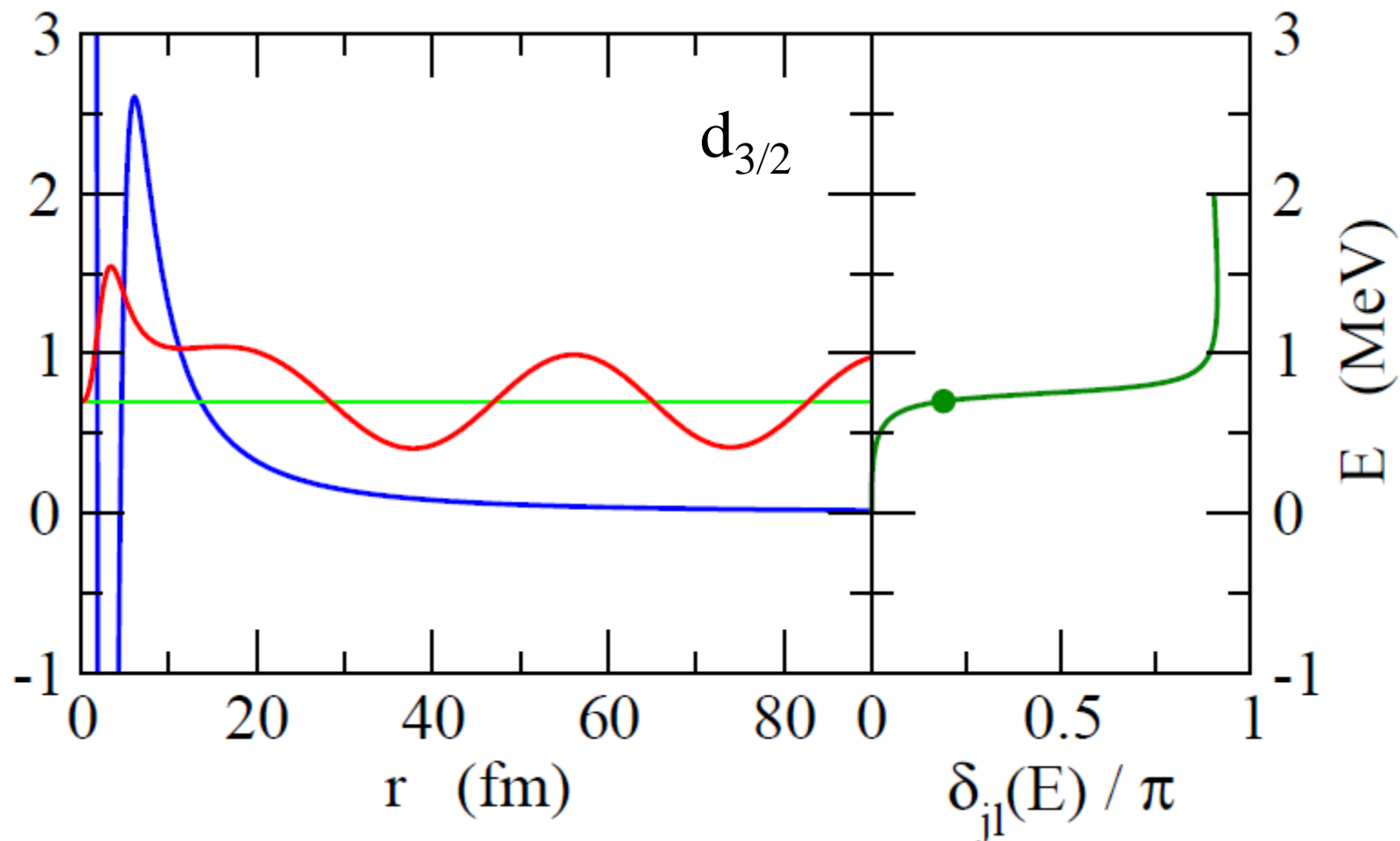


## それでは波動関数は?



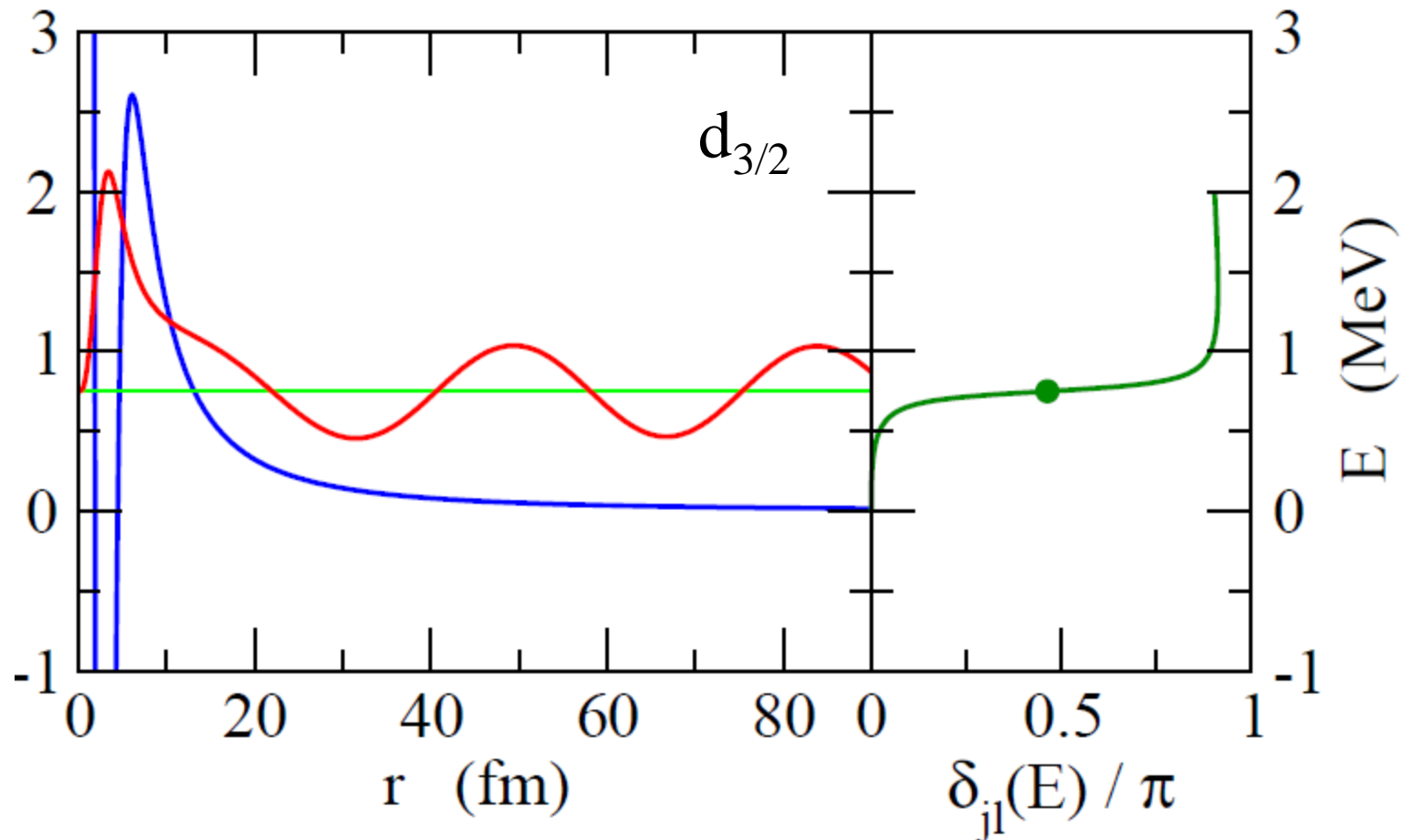
$$rR_{j_l}(r) \rightarrow \sqrt{\frac{2m}{\pi k \hbar^2}} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{j_l}(E)\right); \quad \int dr \psi_E(r) \psi_{E'}^*(r) = \delta(E - E')$$

## それでは波動関数は?



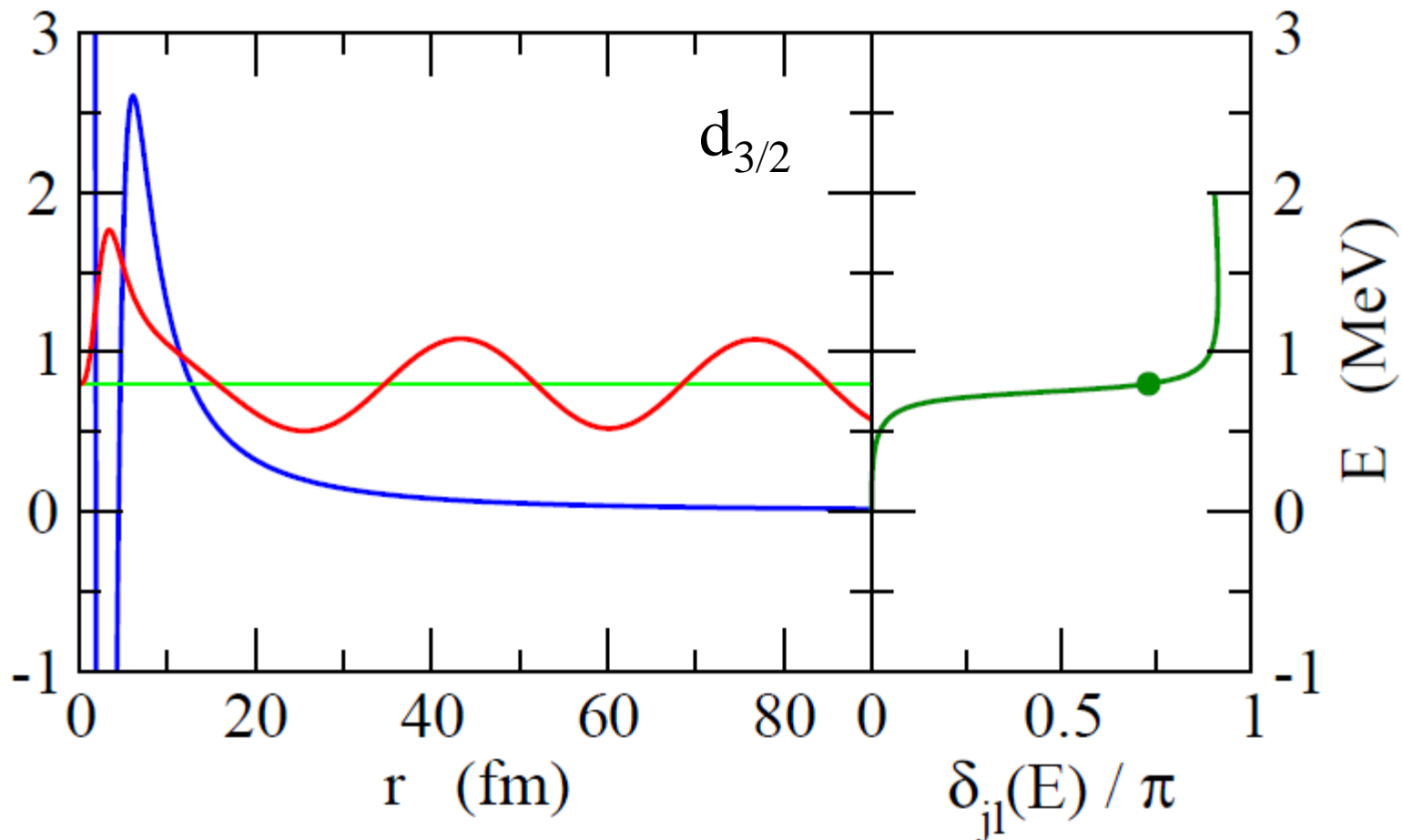
$$rR_{j,l}(r) \rightarrow \sqrt{\frac{2m}{\pi k \hbar^2}} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{j,l}(E)\right); \quad \int dr \psi_E(r) \psi_{E'}^*(r) = \delta(E - E')$$

## それでは波動関数は?



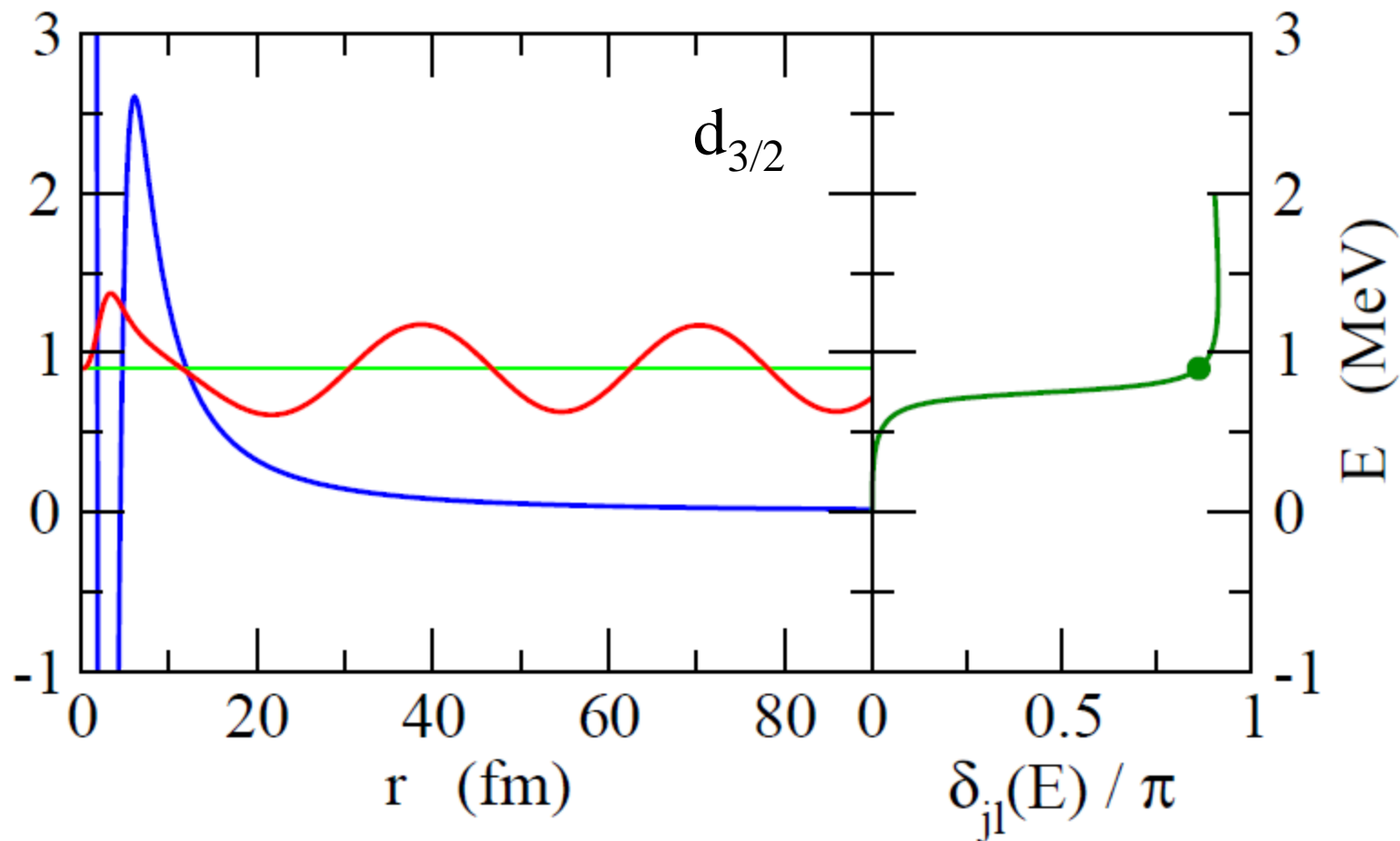
$$rR_{jl}(r) \rightarrow \sqrt{\frac{2m}{\pi k \hbar^2}} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{jl}(E)\right); \quad \int dr \psi_E(r) \psi_{E'}^*(r) = \delta(E - E')$$

## それでは波動関数は?



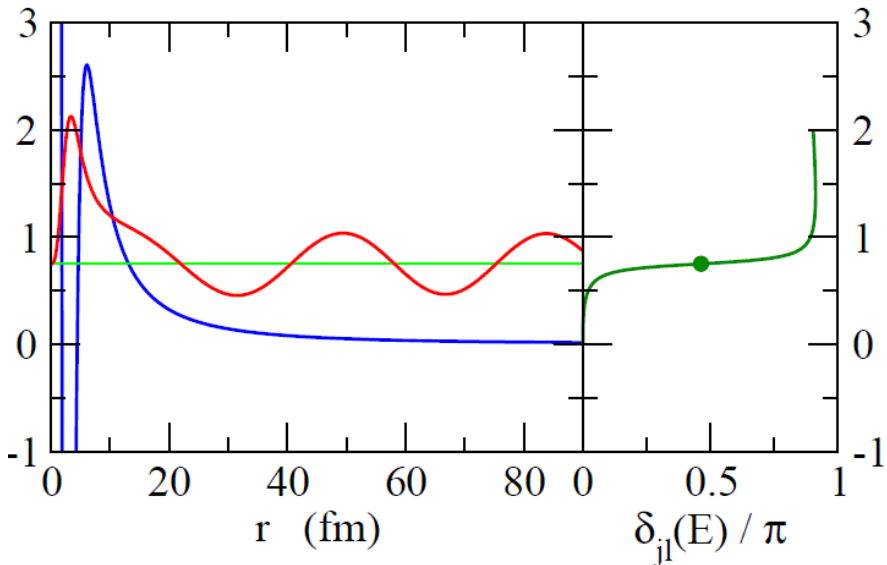
$$rR_{j,l}(r) \rightarrow \sqrt{\frac{2m}{\pi k \hbar^2}} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{j,l}(E)\right); \quad \int dr \psi_E(r) \psi_{E'}^*(r) = \delta(E - E')$$

## それでは波動関数は?



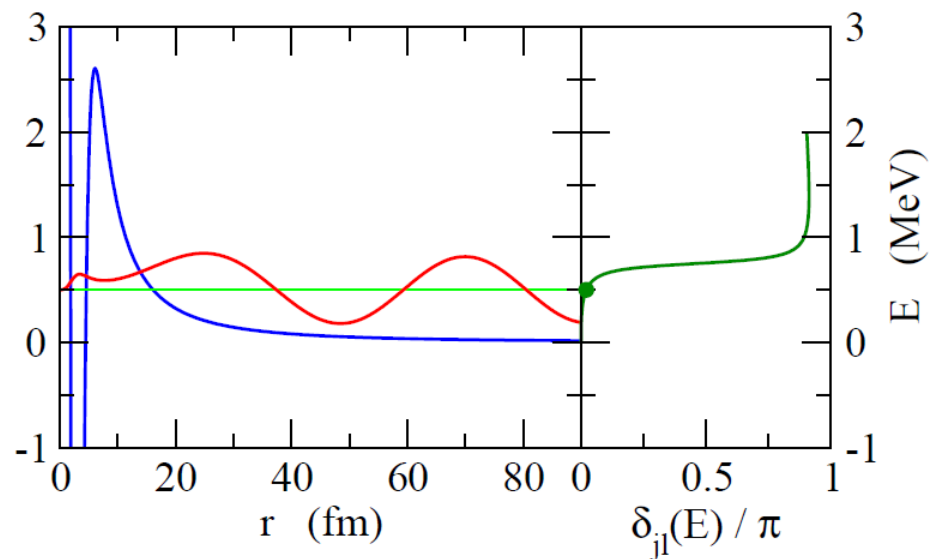
$$rR_{j,l}(r) \rightarrow \sqrt{\frac{2m}{\pi k \hbar^2}} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{j,l}(E)\right); \quad \int dr \psi_E(r) \psi_{E'}^*(r) = \delta(E - E')$$

## それでは波動関数は?



on-resonance:

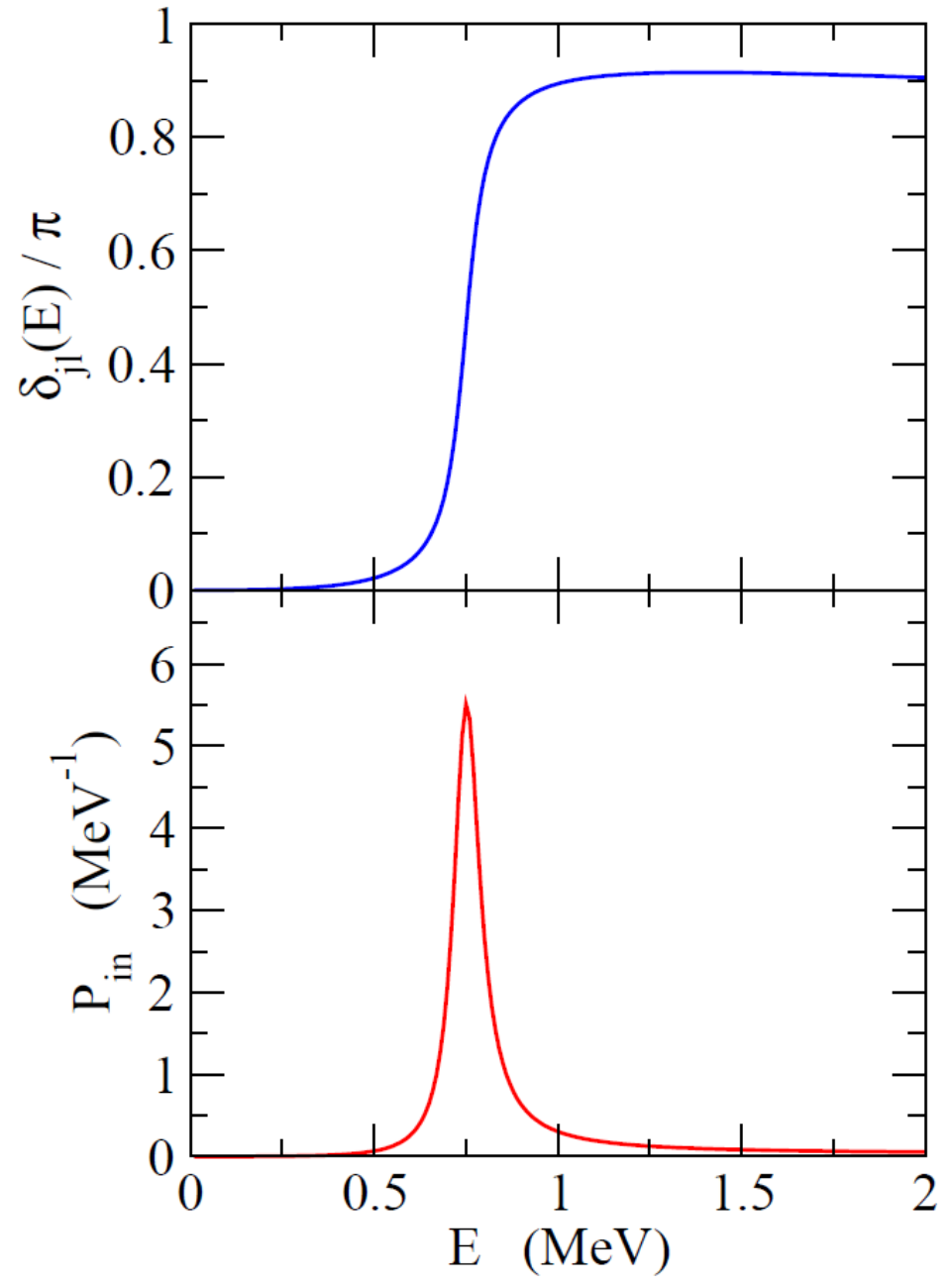
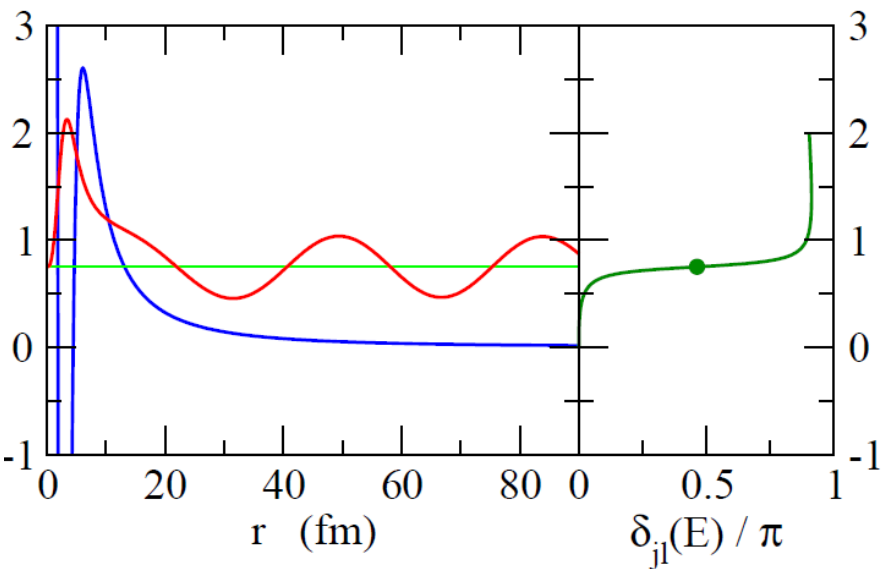
波動関数は障壁の内側で  
大きな振幅



off-resonance:

障壁の内側では振幅が  
小さい

# それでは波動関数は?



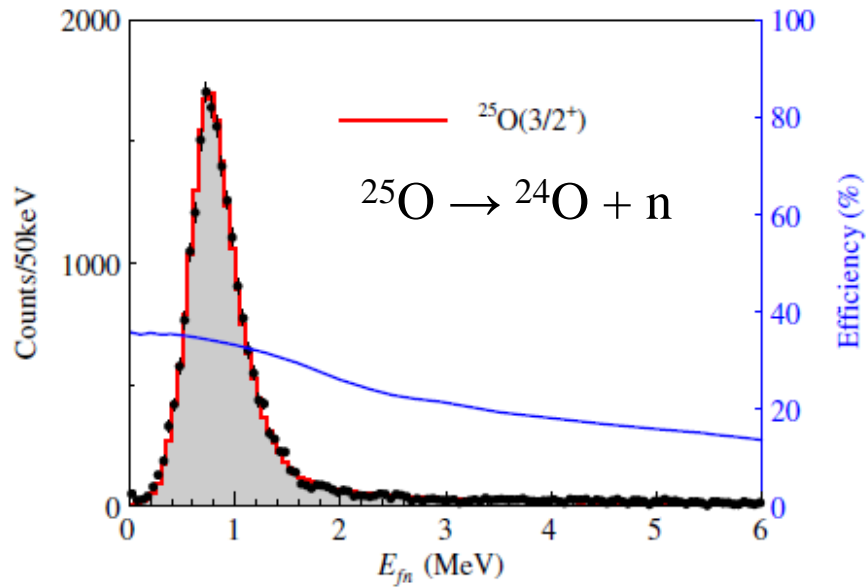
on-resonance:  
波動関数は障壁の内側で  
大きな振幅

障壁内部の存在確率

$$P_{in} \equiv \int_0^{r_b} r^2 dr |R_{jl}(r)|^2$$

# 不変質量スペクトルの解析

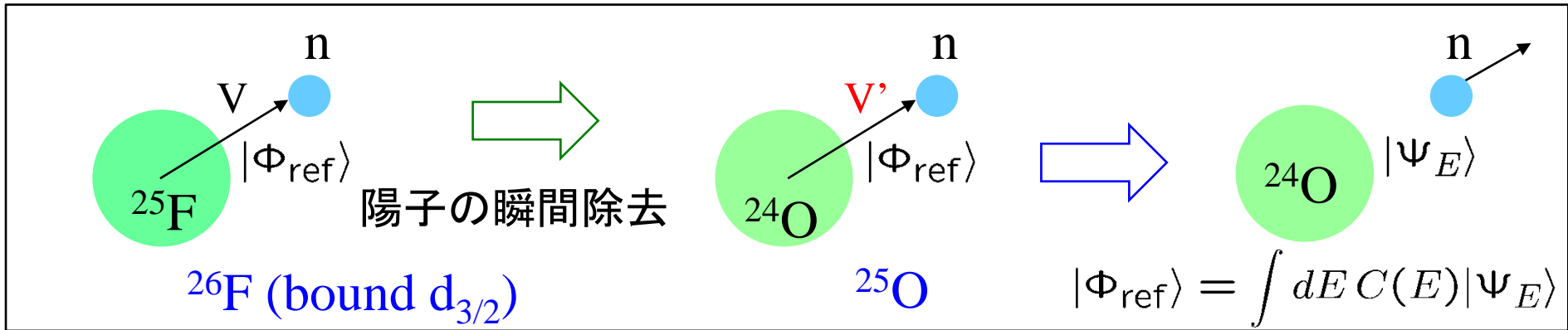
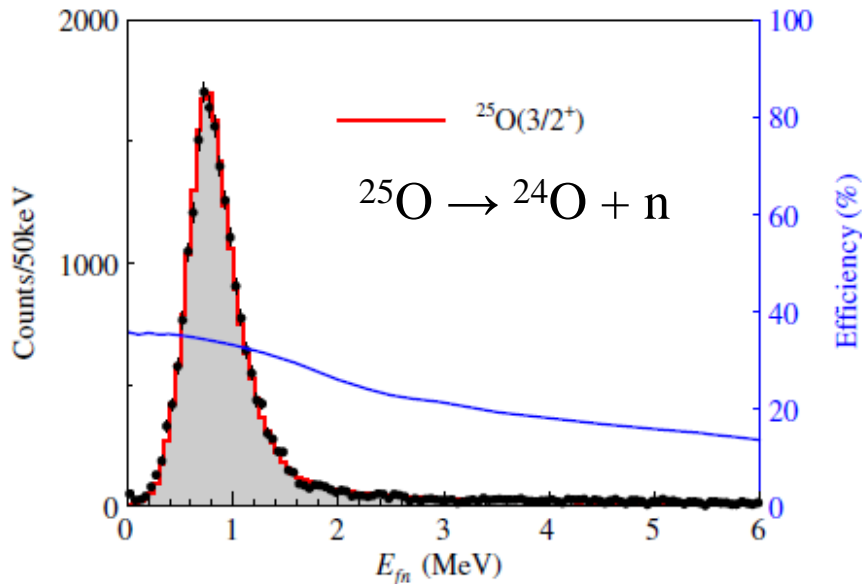
$^{26}_9\text{F}_{17}$  から1つ陽子を抜いて  $^{25}_8\text{O}_{17}$  を生成 → 1中性子を放出して崩壊





# 不変質量スペクトルの解析

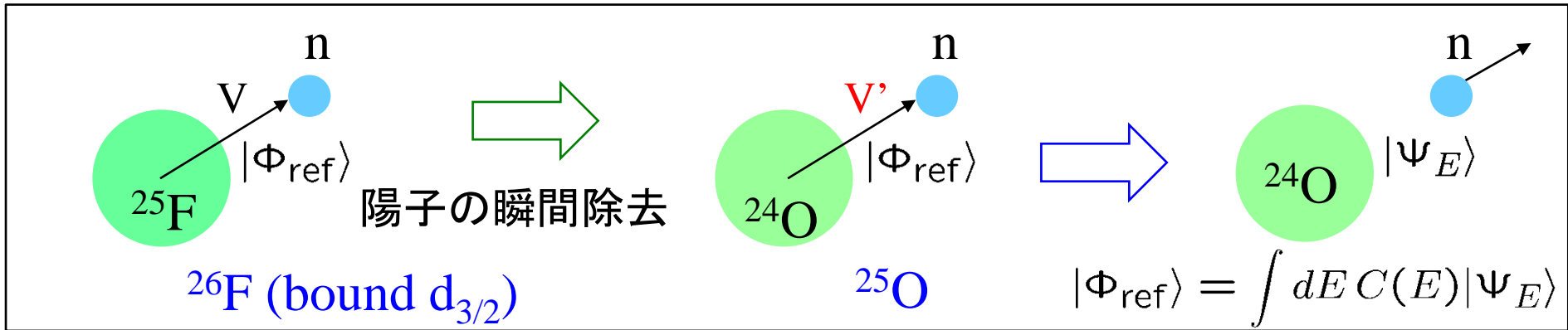
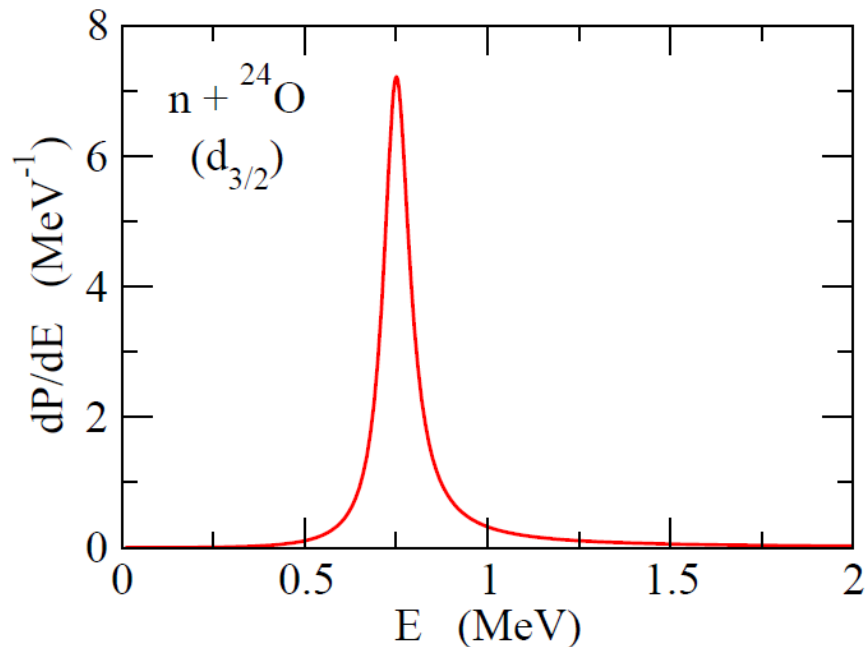
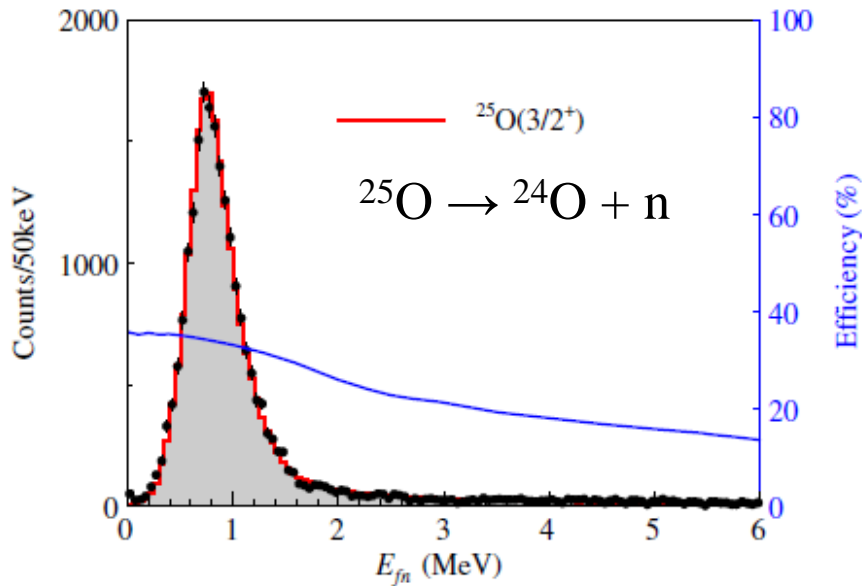
$^{26}_9\text{F}_{17}$  から1つ陽子を抜いて  $^{25}_8\text{O}_{17}$  を生成 → 1中性子を放出して崩壊



# 不変質量スペクトルの解析

$^{26}_9\text{F}_{17}$  から1つ陽子を抜いて  $^{25}_8\text{O}_{17}$  を生成 → 1中性子を放出して崩壊

$$\frac{dP}{dE} = |\langle \Phi_{\text{ref}} | \Psi_E \rangle|^2$$

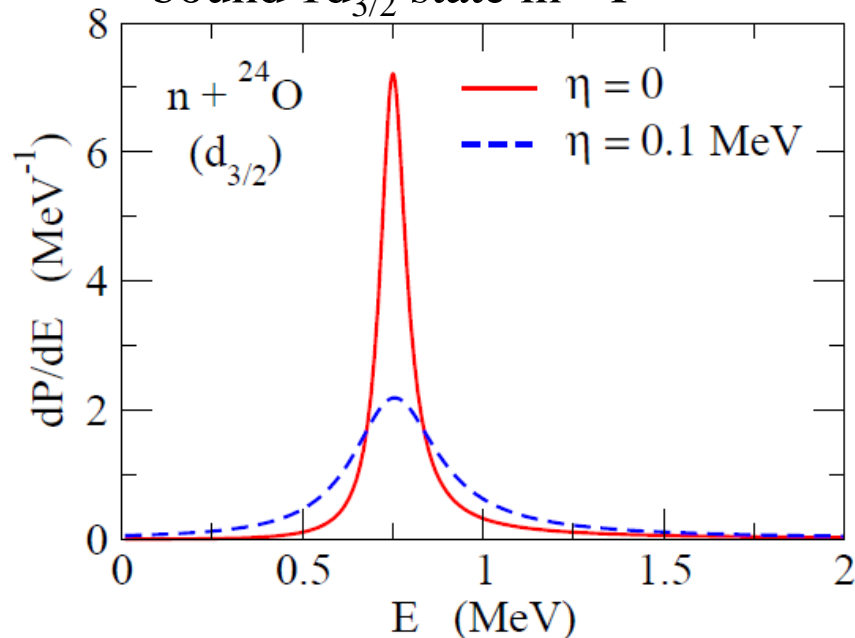


# 不変質量スペクトルの解析

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dE} &= |\langle \Phi_{\text{ref}} | \Psi_E \rangle|^2 = \int dE' |\langle \Phi_{\text{ref}} | \Psi_{E'} \rangle|^2 \delta(E - E') \\ &\rightarrow \frac{1}{\pi} \text{Im} \int dE' |\langle \Phi_{\text{ref}} | \Psi_{E'} \rangle|^2 \underbrace{\frac{1}{E' - E - i\eta}}\end{aligned}$$

Reference state:

bound  $1d_{3/2}$  state in  $^{26}\text{F}$



$$= 1 / (H - E - i\eta) = G(E)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{x - i\eta} = P \frac{1}{x} + i\pi\delta(x)$$

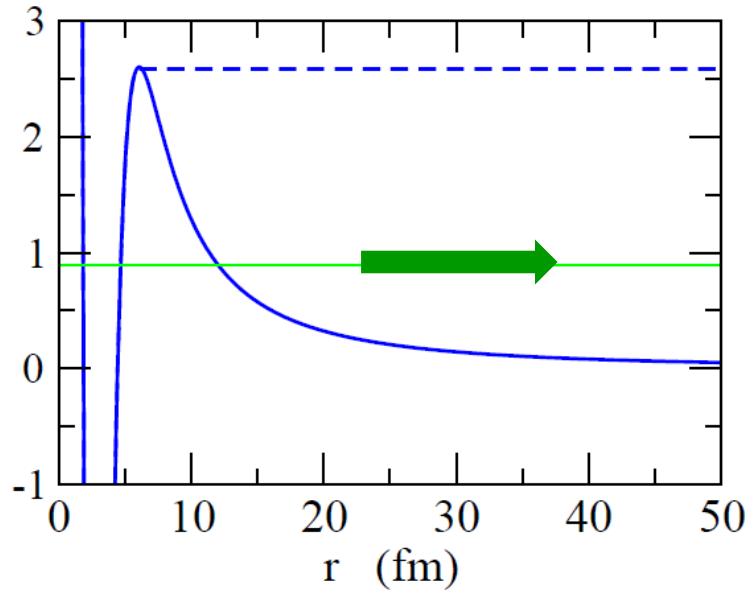
有限の  $\eta$  でも計算できる  
(数値計算上便利)

## ガモフ状態と散乱状態の関係

- ◆ よく、「共鳴状態 = S行列の極 (ポール)」という言い方を聞くけど、それはどういう意味?
- ◆ どうしてS行列のポールが共鳴状態と関係しているの?

# ガモフ状態と散乱状態の関係

## ガモフ状態

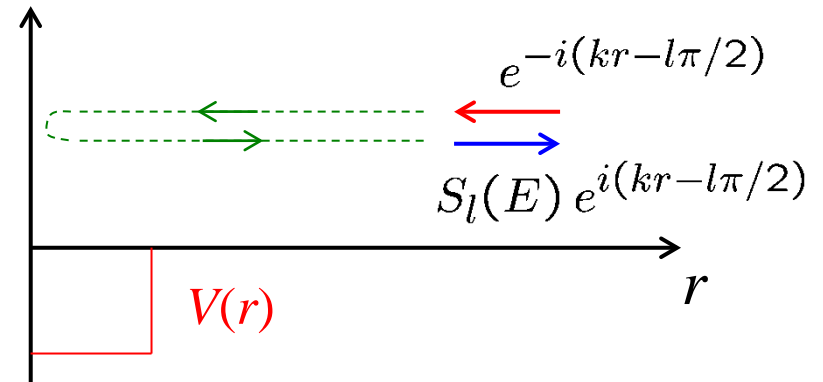


## 外向波境界条件

$$u_l(r) \rightarrow \mathcal{N} e^{i(kr - l\pi/2)}$$

$$E \rightarrow E_R - i\frac{\Gamma}{2}$$

## 散乱状態



## 散乱の境界条件

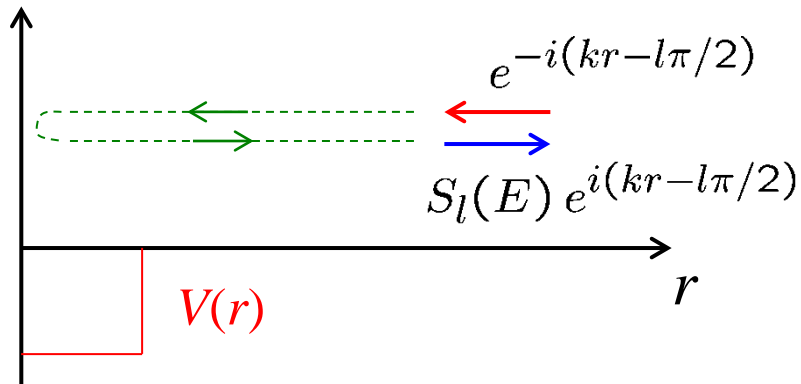
$$u_l(r) \rightarrow \mathcal{N} \left( e^{-i(kr - l\pi/2)} - S_l(E) e^{i(kr - l\pi/2)} \right)$$

$$S_l(E) = e^{2i\delta_l(E)}$$

$E$  : real

# ガモフ状態と散乱状態の関係

## 散乱状態



## 散乱の境界条件

$$u_l(r) \rightarrow \mathcal{N} \left( e^{-i(kr-l\pi/2)} - S_l(E) e^{i(kr-l\pi/2)} \right)$$

$$S_l(E) = e^{2i\delta_l(E)}$$

$E$  : real

もし、 $S_l(E)$  が発散するような  $E$  があれば、

$$u_l(r) \sim \tilde{\mathcal{N}} e^{i(kr-l\pi/2)} \quad (\text{外向波})$$

ただし、エネルギー  $E$  を複素平面へ解析接続しなければならない:

$$E \rightarrow E_R - i\frac{\Gamma}{2}$$

➡ ガモフ状態     $\longleftrightarrow$     S 行列の極 (ポール)

## Breit-Wigner の公式

S-行列が  $\epsilon = E_R - i\frac{\Gamma}{2}$  で極を持つとすると、

$$S(E) = e^{2i\delta_0(E)} \cdot \frac{E - \epsilon^*}{E - \epsilon} \quad \leftarrow |S(E)| = 1$$

$\delta_0(E)$  は  $E$  のゆるやかな関数 (background phase shift)

このとき、

$$\begin{aligned} S(E) &= e^{2i\delta_0(E)} \cdot \frac{E - E_R - i\Gamma/2}{E - E_R + i\Gamma/2} \\ &= e^{2i\delta_0(E)} \left( 1 - \frac{i\Gamma}{E - E_R + i\Gamma/2} \right) \end{aligned}$$

## Breit-Wigner の公式

S-行列が  $\epsilon = E_R - i\frac{\Gamma}{2}$  で極を持つとすると、

$$S(E) = e^{2i\delta_0(E)} \cdot \frac{E - \epsilon^*}{E - \epsilon} \quad \leftarrow |S(E)| = 1$$

$\delta_0(E)$  は  $E$  のゆるやかな関数 (background phase shift)

$E - \epsilon^* = c e^{i\delta_r(E)}$  とすると、

$$S(E) = e^{2i\delta_0(E)} \cdot \frac{c e^{i\delta_r(E)}}{c e^{-i\delta_r(E)}} = e^{2i\delta_0(E)} e^{2i\delta_r(E)}$$

$$E - \epsilon^* = E - E_R - i\Gamma/2 = c e^{i\delta_r} = c(\cos \delta_r + i \sin \delta_r)$$

$$\rightarrow \tan \delta_r = \frac{\sin \delta_r}{\cos \delta_r} = \frac{-\Gamma/2}{E - E_R}$$

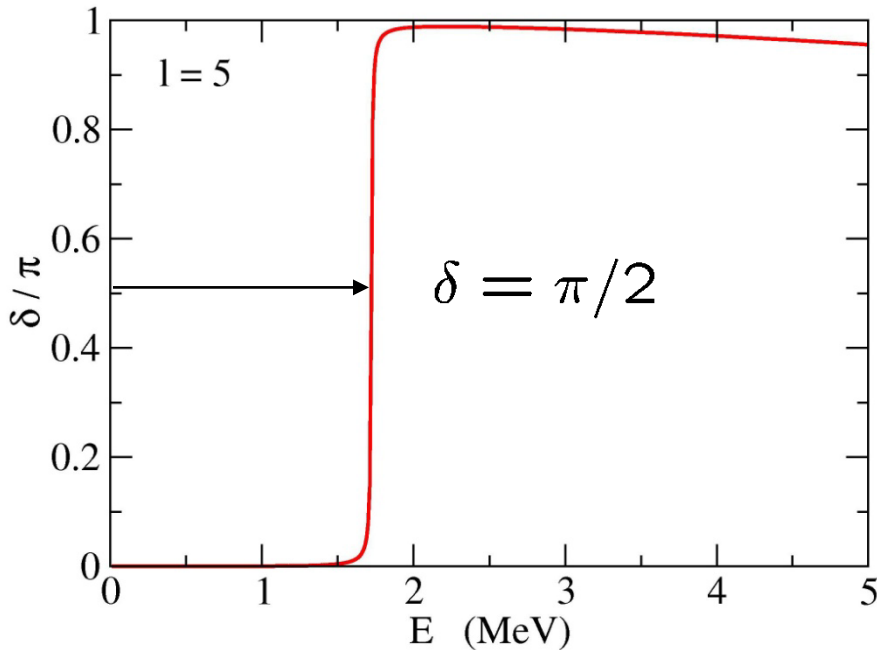


$$\delta(E) = \delta_r(E) + \delta_0(E) = \tan^{-1} \left( \frac{\Gamma}{2(E_R - E)} \right) + \delta_0(E)$$



# Breit-Wigner の公式

幅が狭ければ、位相のずれが  $\pi/2$  を切る時に共鳴



Breit-Wigner formula:

$$\delta(E) = \tan^{-1} \frac{\Gamma}{2(E_R - E)} + \delta_0(E)$$

$$\Rightarrow \delta(E_R) \sim \pi/2$$

$$\Gamma = \frac{2}{\delta'(E_R)}$$

$$V_0 = -50 \text{ MeV}$$

$$R_0 = 1.27 * 200^{1/3} \text{ fm}$$

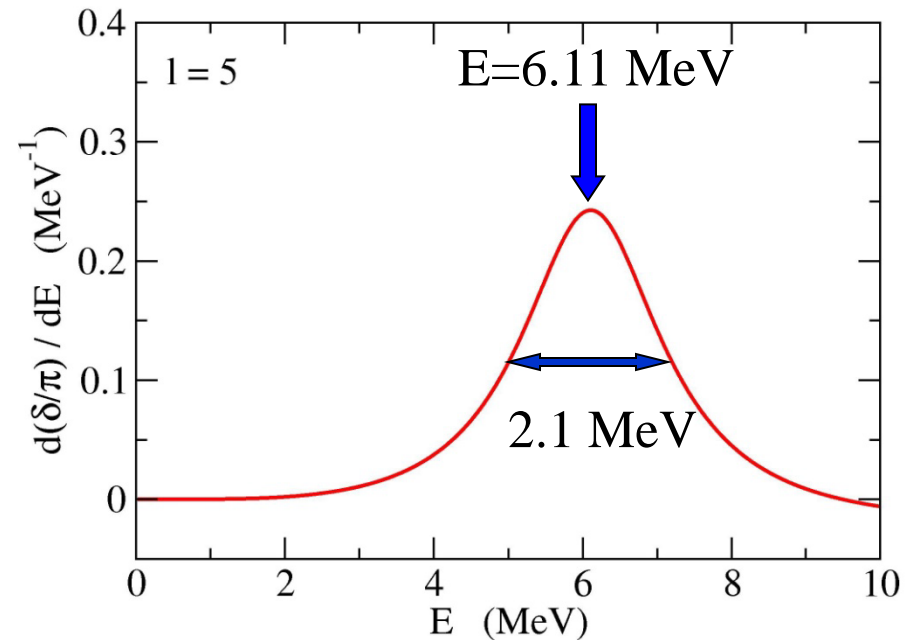
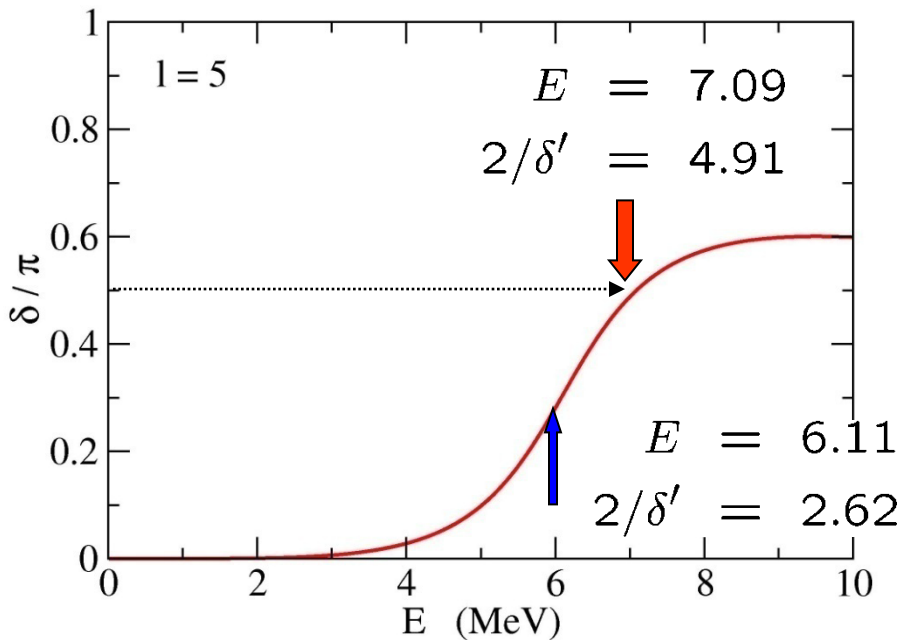
$$a = 0.67 \text{ fm}$$

$$\mu = 200 m_N / 201$$

(note) ただし、幅が広いと  $\pi/2$  とは限らない

$$\delta(E) = \tan^{-1} \frac{\Gamma}{2(E_R - E)} + \delta_0(E)$$

background phase shift



Gamow state:  $E = 6.01$  MeV  
 $\Gamma = 2.22$  MeV

## レポート問題6(×切:12月5日(土))

$$\delta_l(E) \sim \delta_r(E) = \tan^{-1} \left( \frac{\Gamma}{2(E_R - E)} \right)$$

で与えられるとき、この角運動量に対する全散乱断面積

$$\sigma_l = \frac{4\pi}{k^2} (2l + 1) \sin^2 \delta_l$$

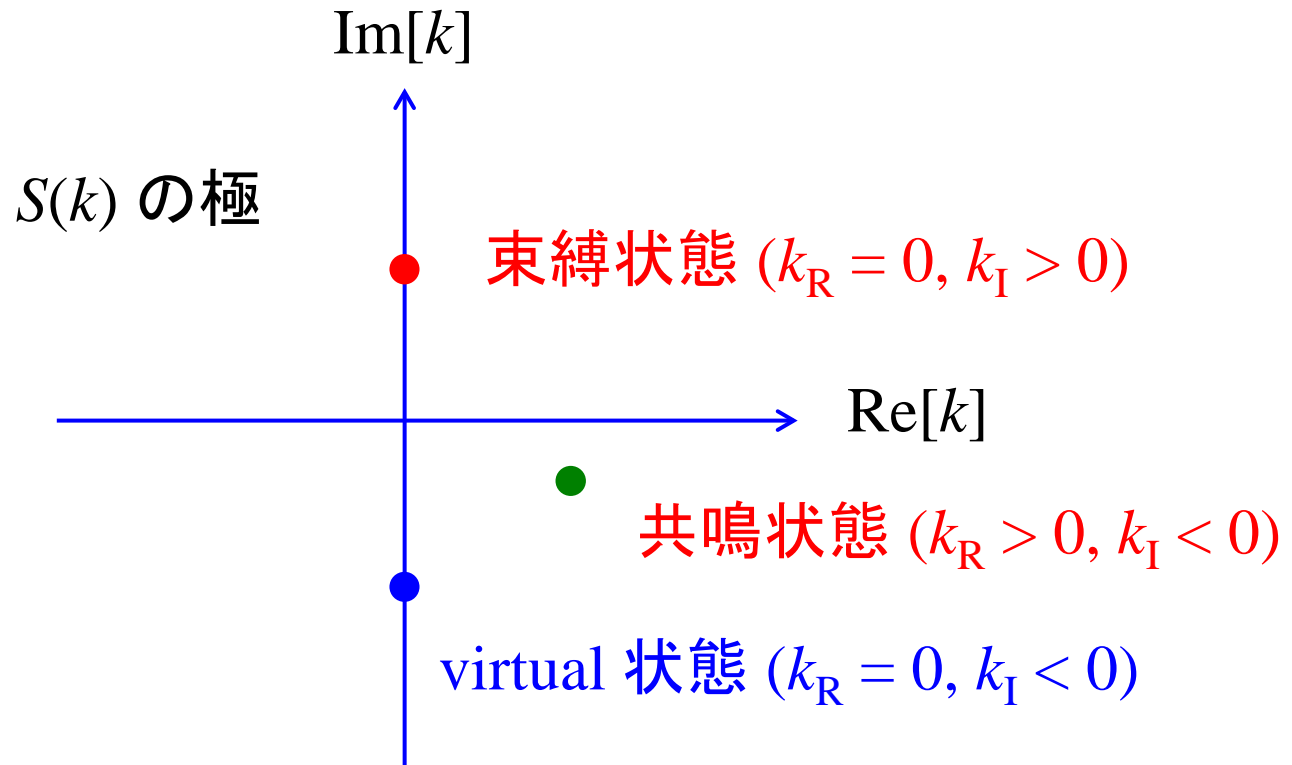
を求めよ。

## virtual state について

散乱問題: 正の実数エネルギー (これが物理的な観測量)



複素エネルギー (または複素運動量) 平面で実軸の近くの  
S 行列の極



## virtual state について

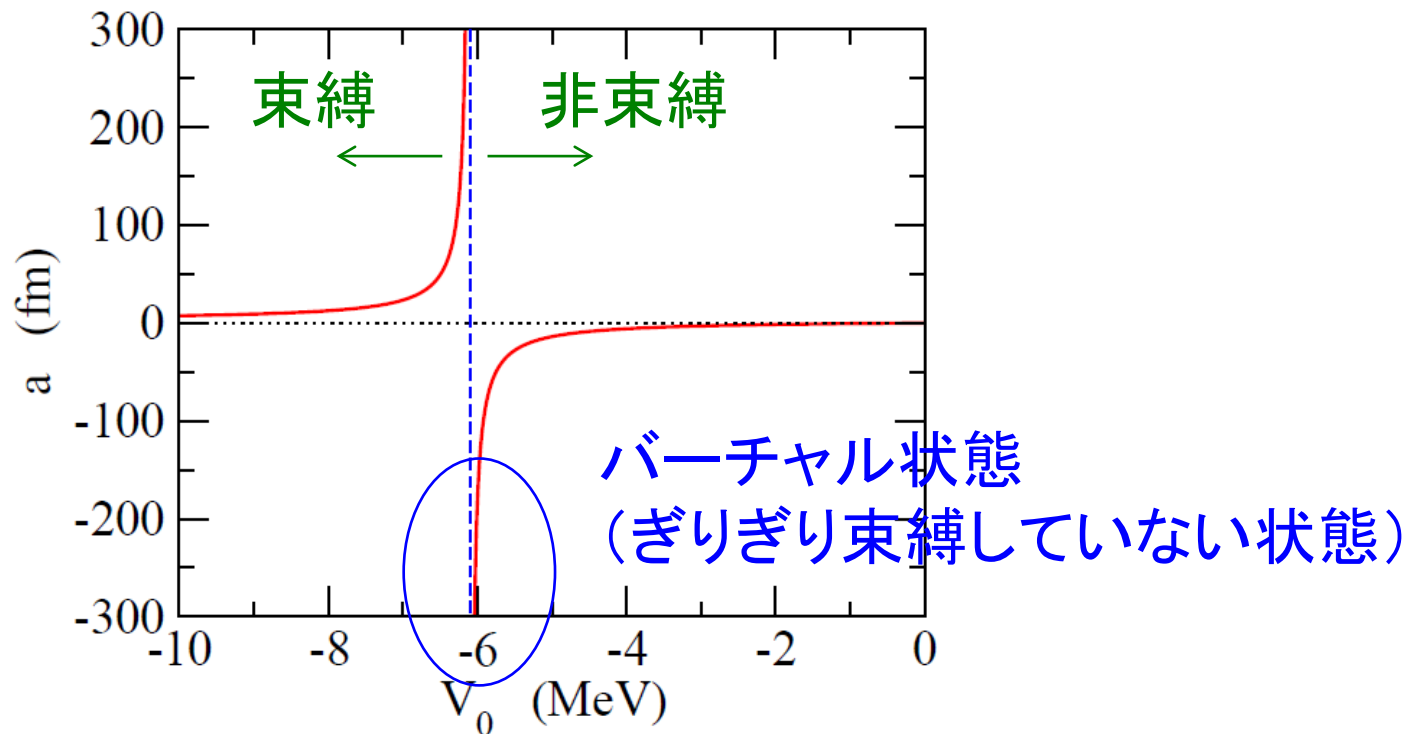
極低エネルギーでの散乱を考える(従って s-wave のみ)

effective range expansion:

$$k \cot \delta(k) \sim -\frac{1}{a} + \frac{1}{2}r_e k^2 + \dots$$

## virtual state について

散乱長は  $E = 0$  の束縛状態を作るときに正で発散



Woods-Saxon ポテンシャルで  
ポテンシャルの深さを変える

$$(R = 2.736 \text{ fm}, a_0 = 0.67 \text{ fm})$$

## 散乱長の物理的意味

半径  $R$  の井戸型ポテンシャル:

$$a = R \left( 1 - \frac{\tan \kappa R}{\kappa R} \right)$$

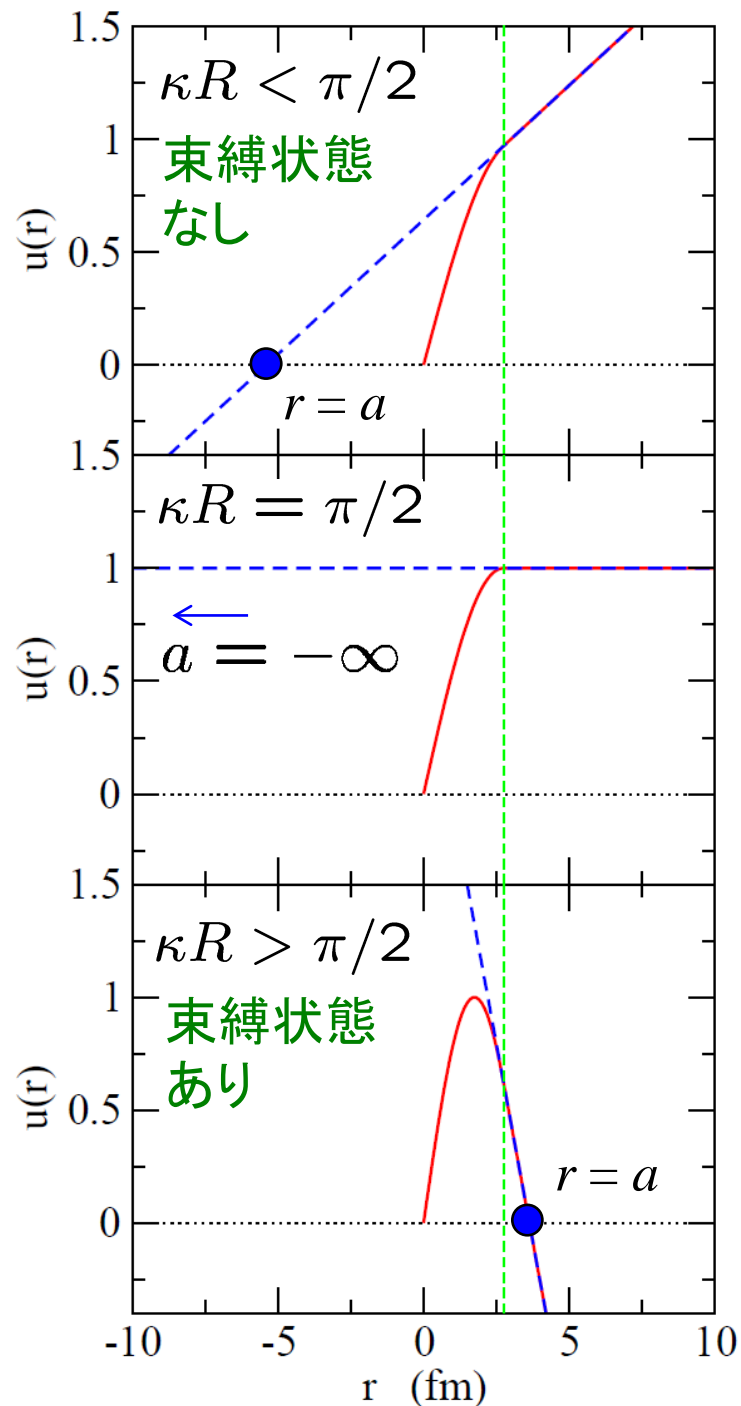
$$\kappa = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}$$

$$u(r) = A \sin(\kappa r) \quad (r < R)$$

$$\curvearrowright f(r) \equiv u(R) + u'(R)(r - R)$$

は  $r = a$  で  $f(a) = 0$ 。

すなわち、散乱長は  $r = R$  で波動関数を一次近似したときに、その直線が  $x$  軸を切る点。



## virtual state について

極低エネルギーでの散乱を考える(従って s-wave のみ)

effective range expansion:  $k \cot \delta(k) \sim -\frac{1}{a} + \frac{1}{2}r_e k^2 + \dots$

このとき、

$$\begin{aligned} S(k) &= \frac{e^{i\delta}}{e^{-i\delta}} = \frac{\cos \delta + i \sin \delta}{\cos \delta - i \sin \delta} \\ &= \frac{\cot \delta + i}{\cot \delta - i} \\ &\sim \frac{-1/a + ik}{-1/a - ik} \end{aligned}$$

極は  $k = i \frac{1}{a}$

$a < 0$  なら virtual 状態、 $a > 0$  なら(浅い)束縛状態



## virtual state について

極低エネルギーでの散乱を考える(従って s-wave のみ)

effective range expansion:  $k \cot \delta(k) \sim -\frac{1}{a} + \frac{1}{2}r_e k^2 + \dots$

このとき、

$$S(k) \sim \frac{-1/a + ik}{-1/a - ik}$$

極は  $k = i \frac{1}{a}$

極が実軸に近い  $\longrightarrow |a|$  が大

このとき、弾性散乱の全断面積:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta = \frac{4\pi}{(k \cot \delta)^2 + k^2} \sim 4\pi a^2 \quad : \text{large}$$

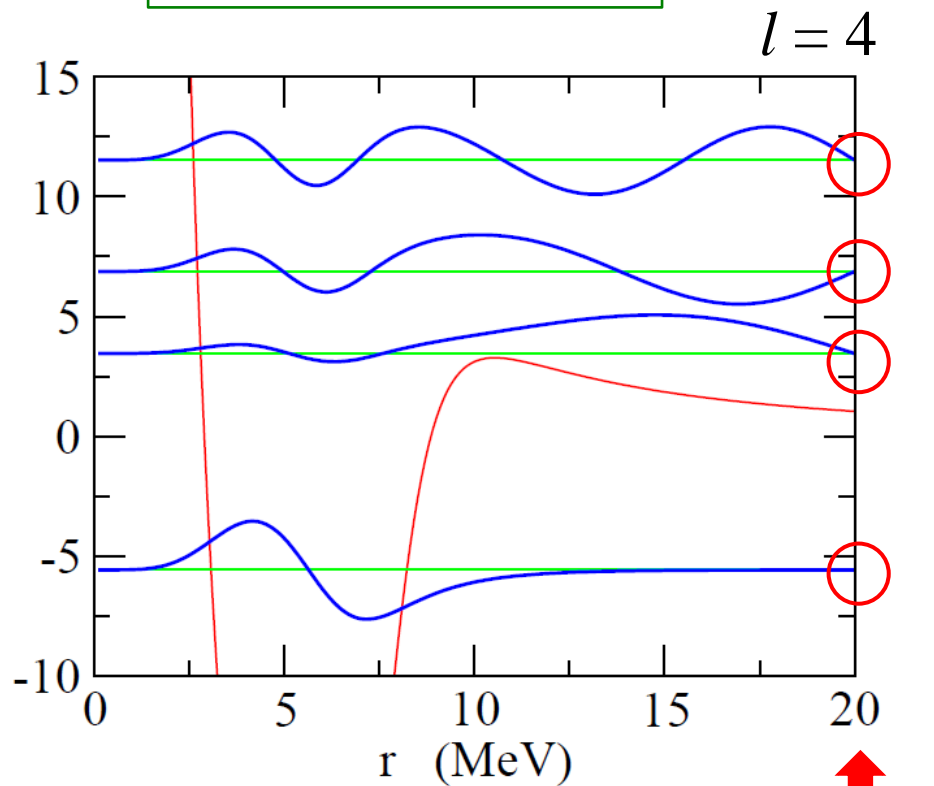
## 共鳴状態に対する他の計算法

- ✓ stabilization method
- ✓ complex scaling method
- ✓ ACCC法

## stabilization method

box 境界条件 = 散乱状態の離散化

$$u_{jl}(R_{\text{box}}) = 0$$



$$V_0 = -50 \text{ MeV}$$

$$R_0 = 1.27 * 200^{1/3} \text{ fm}$$

$$a = 0.67 \text{ fm}$$

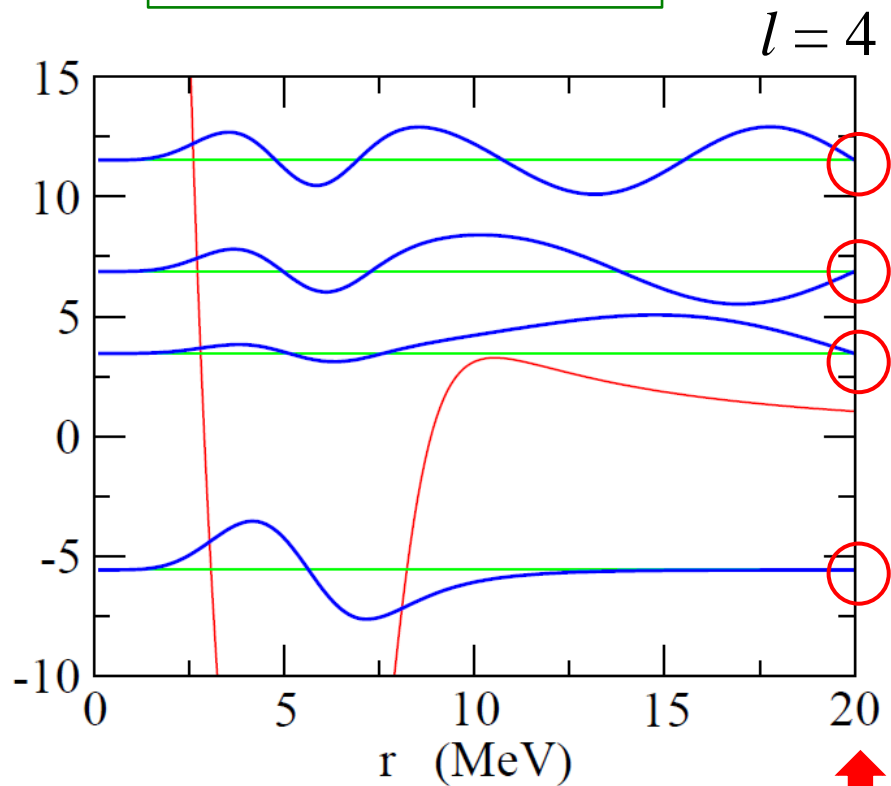
$$\mu = 200 m_N / 201$$

$R_{\text{box}}$

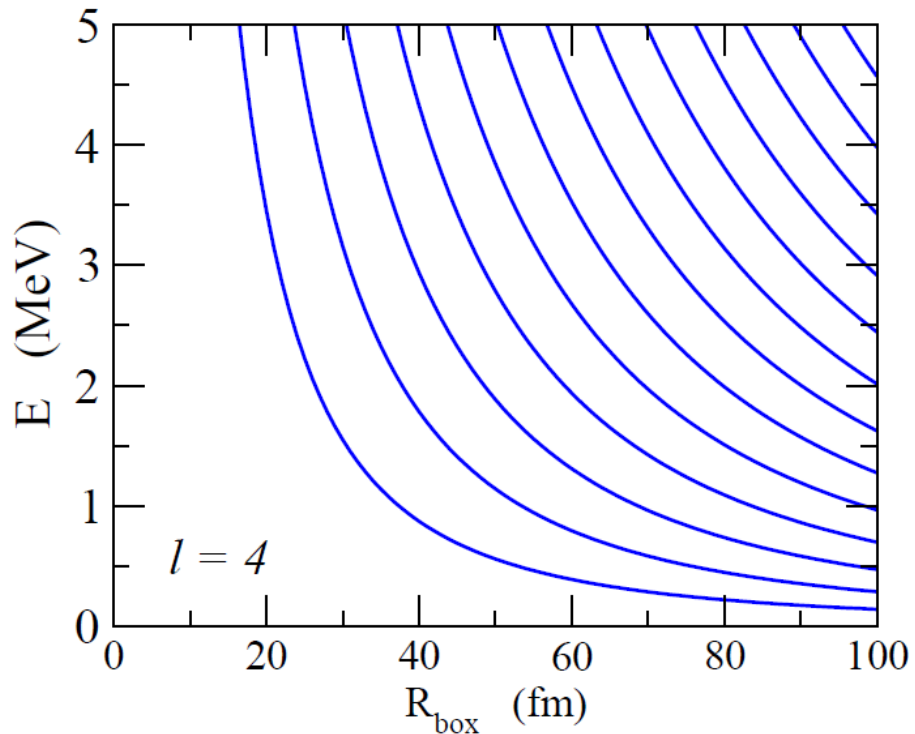
# stabilization method

box 境界条件 = 散乱状態の離散化

$$u_{jl}(R_{\text{box}}) = 0$$



$R_{\text{box}}$  を変えるとどうなるか?

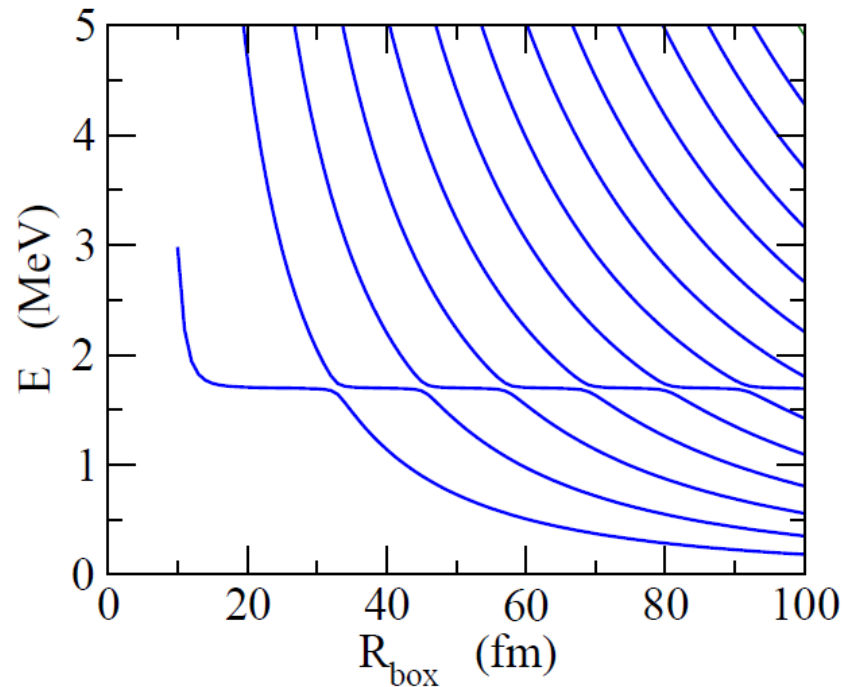
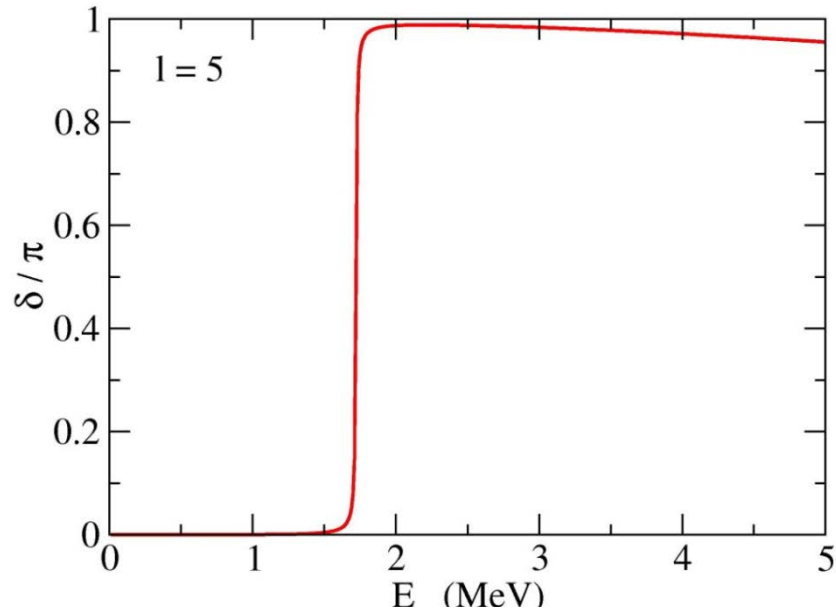


$V_0 = -50$  MeV  
 $R_0 = 1.27 * 200^{1/3}$  fm  
 $a = 0.67$  fm  
 $\mu = 200 m_N / 201$

↑  
 $R_{\text{box}}$

- ✓  $R_{\text{box}}$  の関数として単調に減少
- ✓  $R_{\text{box}}$  が大きい方が  $dk$  が小

## 共鳴がある場合



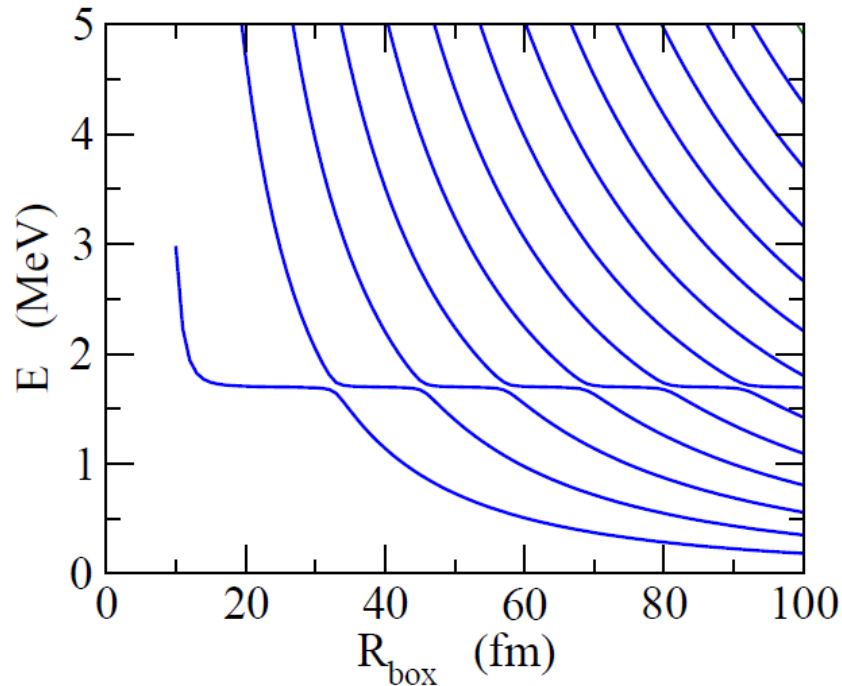
共鳴のエネルギーで離散化されたエネルギーが安定化

“stabilization method”

A.U. Hazi and H.S. Taylor,  
PRA 1 ('70) 1109

$L^2$ 基底で共鳴エネルギーと  
共鳴幅を計算する

## 共鳴がある場合



共鳴のエネルギーで離散化されたエネルギーが安定化

“stabilization method”

A.U. Hazi and H.S. Taylor,  
PRA 1 ('70) 1109

$L^2$ 基底で共鳴エネルギーと  
共鳴幅を計算する

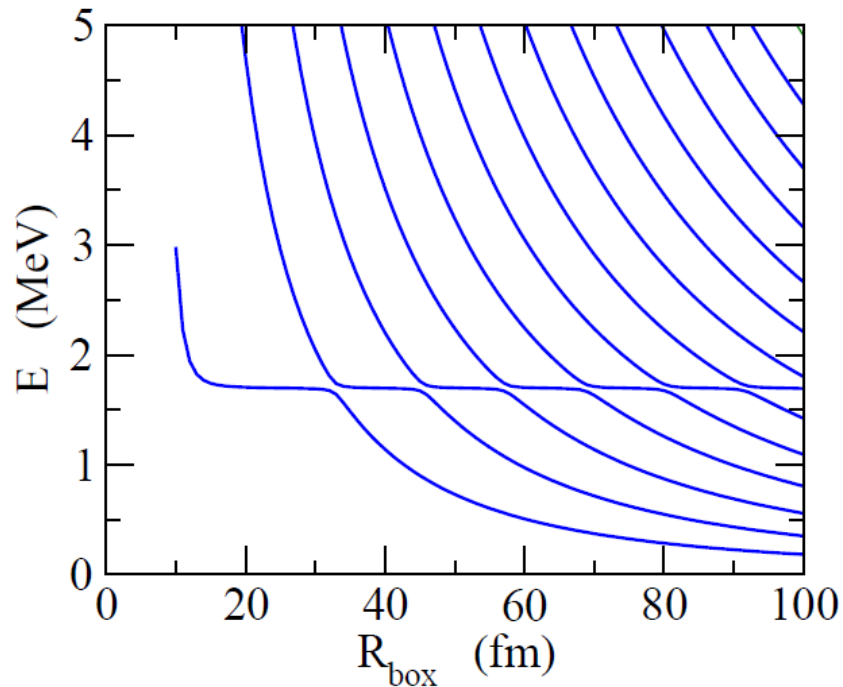
## 何故共鳴準位が安定するのか?

$$u_l(r) \rightarrow \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l(E)\right) \quad \Rightarrow \quad kR - \frac{l\pi}{2} + \delta_l(E) = n\pi$$

$$R \text{ で微分すると: } \frac{\partial k}{\partial R} R + k + \frac{\partial \delta_l}{\partial R} = 0 \quad \longrightarrow \quad R \frac{\partial k}{\partial E} \cdot \frac{\partial E}{\partial R} + k + \frac{\partial \delta_l}{\partial E} \cdot \frac{\partial E}{\partial R} = 0$$

$$\text{共鳴準位: } \frac{\partial \delta_l}{\partial E} = \text{large} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial E}{\partial R} = \text{small}} \quad \frac{\partial E}{\partial R} \sim -k \left(\frac{\partial \delta_l}{\partial E}\right)^{-1} < 0$$

## 共鳴がある場合



共鳴のエネルギーで離散化されたエネルギーが安定化

“stabilization method”

A.U. Hazi and H.S. Taylor,  
PRA 1 ('70) 1109

$L^2$ 基底で共鳴エネルギーと  
共鳴幅を計算する

$$\left(\frac{\partial E}{\partial R}\right)_{E=E_R} = -\frac{2E_R}{R + \frac{2}{\Gamma} \frac{k_R \hbar^2}{m}}$$

← Breit-Wigner

$$\Rightarrow \Gamma = \frac{2k_R \hbar^2}{m} \cdot \frac{1}{-R - 2E_R \left[ \left(\frac{\partial E}{\partial R}\right)_{E=E_R} \right]^{-1}}$$

C.H. Maier, L.S. Cederbaum, and W. Domcke, J. of Phys. B13 ('80) L119  
L. Zhang et al., PRC77 ('08) 014312

✓ 複素座標スケーリング法 (北大グループ)

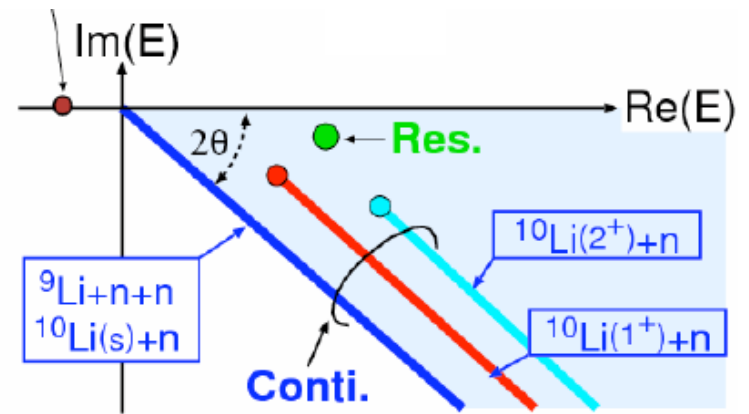
$$r \rightarrow r e^{i\theta}, p \rightarrow p e^{-i\theta}$$

$\theta > 0$

として  $H(q)$  を対角化。

$$\psi(r) \sim e^{i(k_R - ik_I)r} \rightarrow \infty \quad (r \rightarrow \infty)$$

$$\implies \psi(r) \sim e^{i(k_R - ik_I)(r \cos \theta + ir \sin \theta)} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty)$$



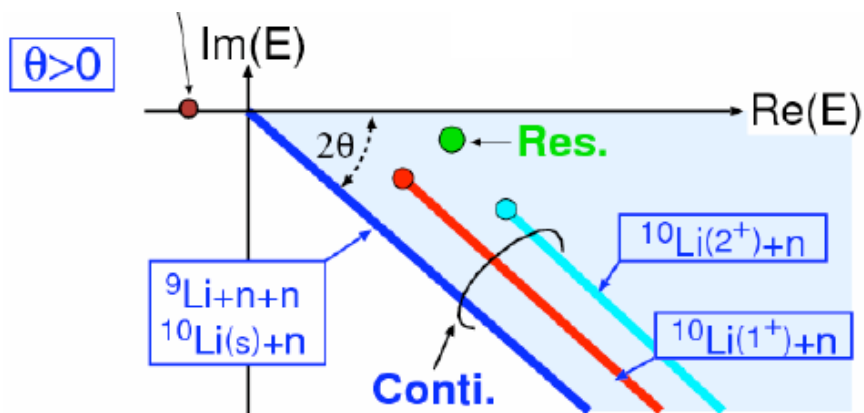
スライド: 明孝之氏



✓ 複素座標スケーリング法 (北大グループ)

$$r \rightarrow r e^{i\theta}, p \rightarrow p e^{-i\theta}$$

として  $H(q)$  を対角化。

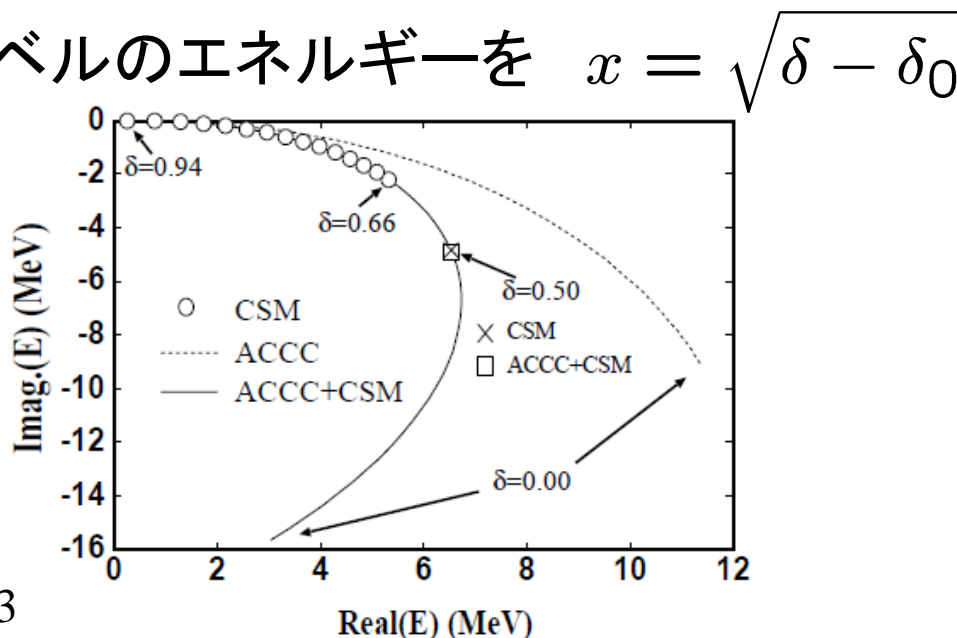


✓ ACCC (Analytic Continuation in the Coupling Constant) 法

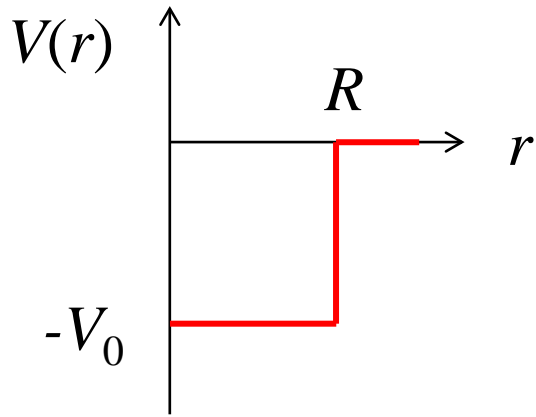
$$H \rightarrow H + \delta \cdot V$$

として  $\delta \sim 1$  で求めた束縛レベルのエネルギーを  $x = \sqrt{\delta - \delta_0}$  の関数として  $\delta=0$  に外挿 ( $\delta_0$  はゼロ束縛となる  $\delta$ )

スライド: 明孝之氏



# レポート問題7(×切:12月5日(土))



左の図のような井戸型ポテンシャルを考える。このとき、角運動量  $l$  に対する動径波動関数は球ベッセル関数、球ハンケル関数を用いて以下のようなになる。

$$R_l(r) = \begin{cases} j_l(\tilde{k}r) & (r < R) \\ A(h_l^{(-)}(kr) - S_l h_l^{(+)}(kr)) & (r \geq R) \end{cases}$$

$$k = \sqrt{2mE/\hbar^2}, \quad \tilde{k} = \sqrt{2m(E + V_0)/\hbar^2}$$

$r=R$  における波動関数の接続条件により  $S$  行列が解析的に求まる:

$$S_l(E) = \frac{L_l(E) - \tilde{S}_l(E) + iP_l(E)}{L_l(E) - \tilde{S}_l(E) - iP_l(E)} e^{2i\phi_l}$$

ここで、 $F_l(r) \equiv kr j_l(kr)$ ,  $G_l(r) \equiv -kr n_l(kr)$ ,  $R_l(r) = \frac{u_l(r)}{r}$

$$F'_l(r) \equiv R \frac{dF_l}{dr}, \quad G'_l(r) \equiv R \frac{dG_l}{dr}$$

$$L_l \equiv R \left( \frac{d}{dr} u_l(r) \right)_{r=R} \frac{1}{u_l(R)}$$

$$P_l = \frac{kR}{G_l(R)^2 + F_l(R)^2}$$

$$\tilde{S}_l = \frac{G_l(R)G'_l(R) + F_l(R)F'_l(R)}{G_l(R)^2 + F_l(R)^2}$$

$$e^{2i\phi_l} = \frac{G_l(R) - iF_l(R)}{G_l(R) + iF_l(R)}$$

である。

## レポート問題7(×切:12月5日(土)) \* 続き

$$S_l(E) = \frac{L_l(E) - \tilde{S}_l(E) + iP_l(E)}{L_l(E) - \tilde{S}_l(E) - iP_l(E)} e^{2i\phi_l}$$

あるエネルギー  $E_r$  で  $L_l(E_r) - \tilde{S}_l(E_r) = 0$  になったとする。

このとき、

$$L_l(E) - \tilde{S}_l(E) \sim L_l(E_r) - \tilde{S}_l(E_r) - \frac{1}{\gamma_l^2}(E - E_r) = -\frac{1}{\gamma_l^2}(E - E_r)$$

と展開し、 $P_l(E) \sim P_l(E_r)$  と置くことによって S-行列に対する Breit-Wigner の式

$$S_l(E) = \left( 1 - \frac{i\Gamma_l}{E - E_r + i\frac{\Gamma_l}{2}} \right) e^{2i\phi_l}$$

を導け。また、共鳴幅  $\Gamma_l$  が  $\gamma_l$  と  $P_l(E_r)$  を用いてどのように表されるか述べよ。