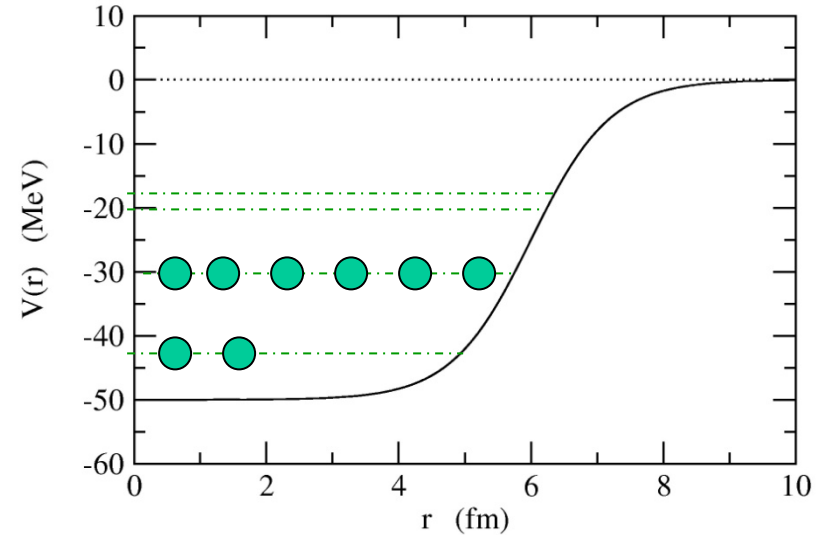
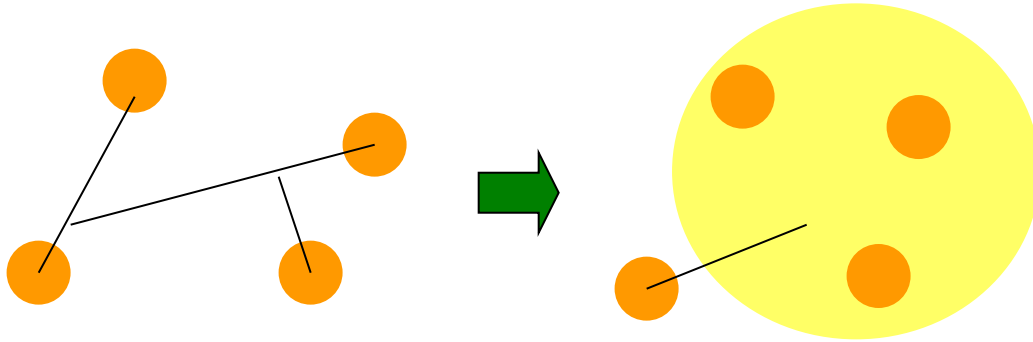
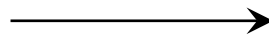


Pairing Correlation (対相関)

平均場近似



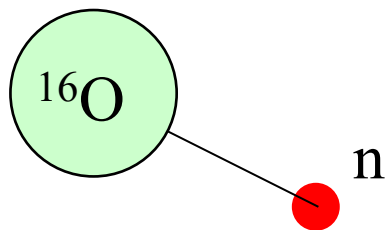
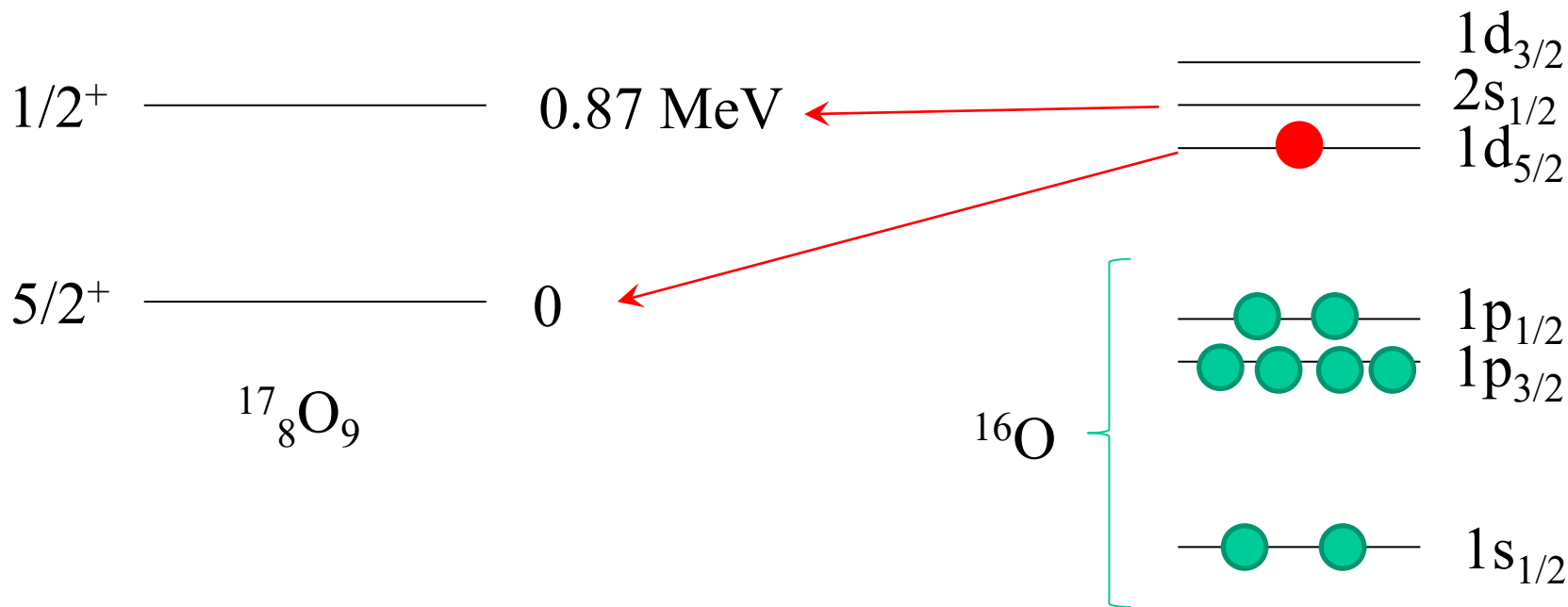
ポテンシャルの中での
独立粒子描像



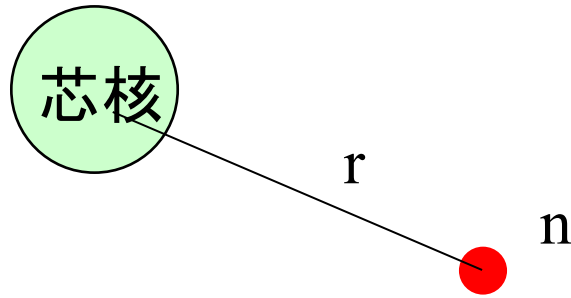
核子間の相互作用:
核子の感じるポテンシャル
としてののみ



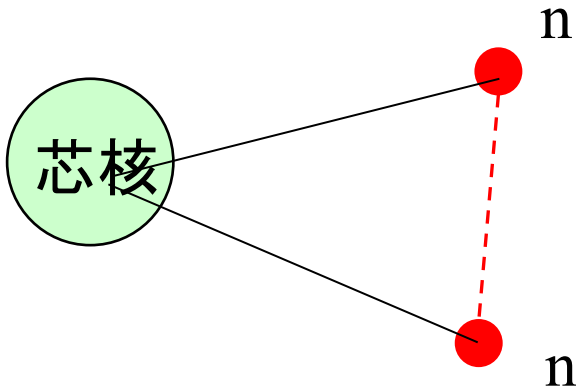
魔法数の説明



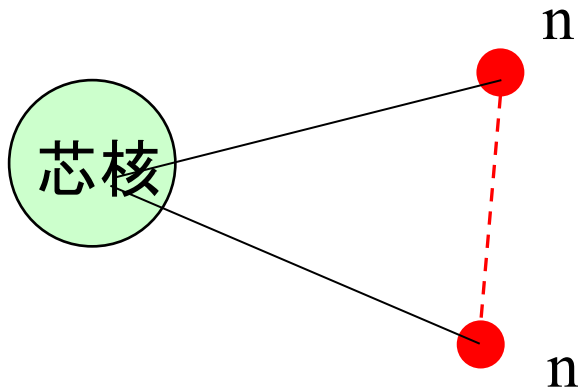
対相関



芯核のまわりに中性子が2個あるとどうなる？

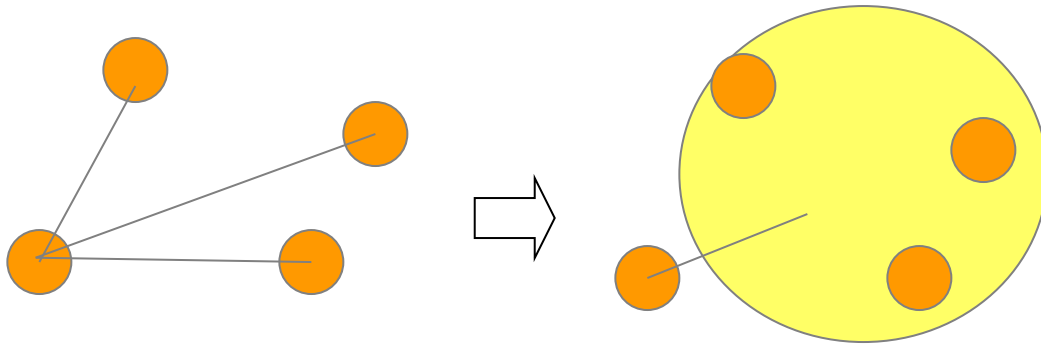


2中性子間に働く相互作用の影響は？



2中性子間に働く相互作用の影響は?

平均場理論

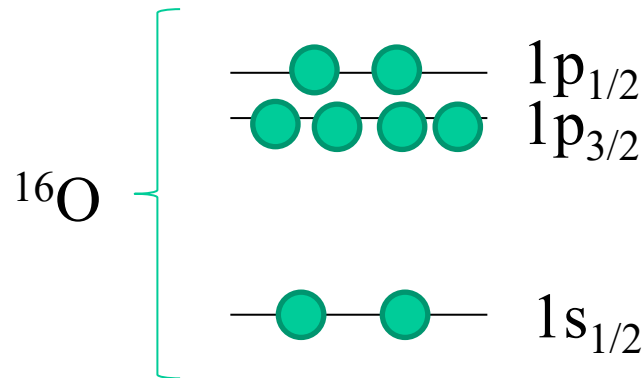
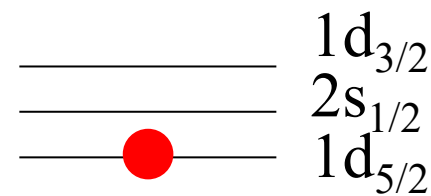


他の核子との相互作用を平均的に取り扱う

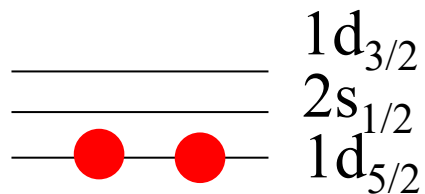
単純な平均場近似 → 2中性子が独立に運動
(2中性子間の相互作用は平均ポテンシャル
にのみ反映される)

$1/2^+$ ————— 0.87 MeV

$5/2^+$ ————— 0
 $^{17}_8\text{O}_9$

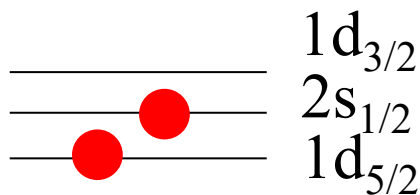


^{18}O の状態を予想すると。。。



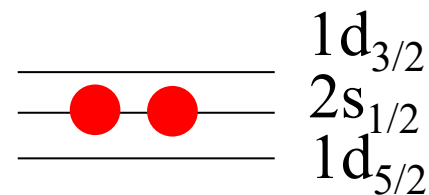
$E = 0$

$I^\pi = d_{5/2} \times d_{5/2}$
 $= 0^+, 2^+, 4^+$



$E = 0.87 \text{ MeV}$

$I^\pi = d_{5/2} \times s_{1/2}$
 $= 2^+, 3^+$



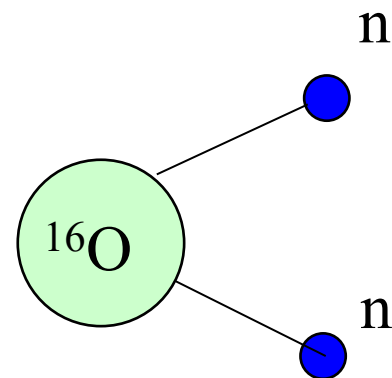
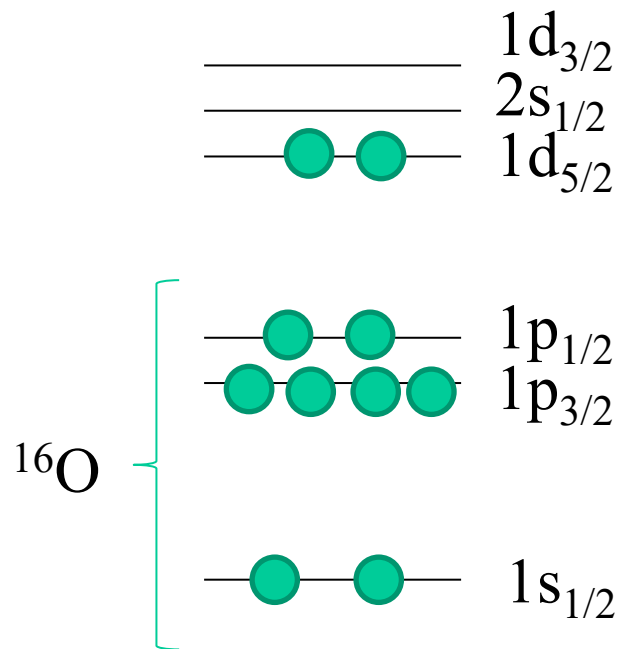
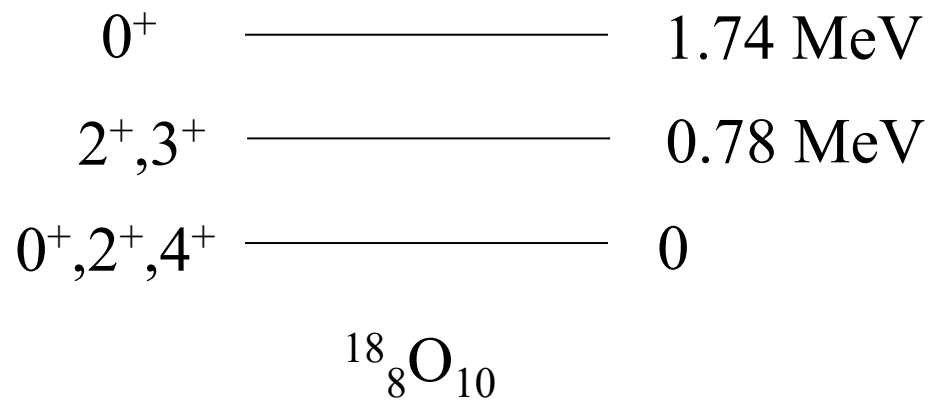
$E = 0.87 \times 2 = 1.74 \text{ MeV}$

$I^\pi = s_{1/2} \times s_{1/2} = 0^+$

2 MeV 以下に少なくとも6本の状態(?)

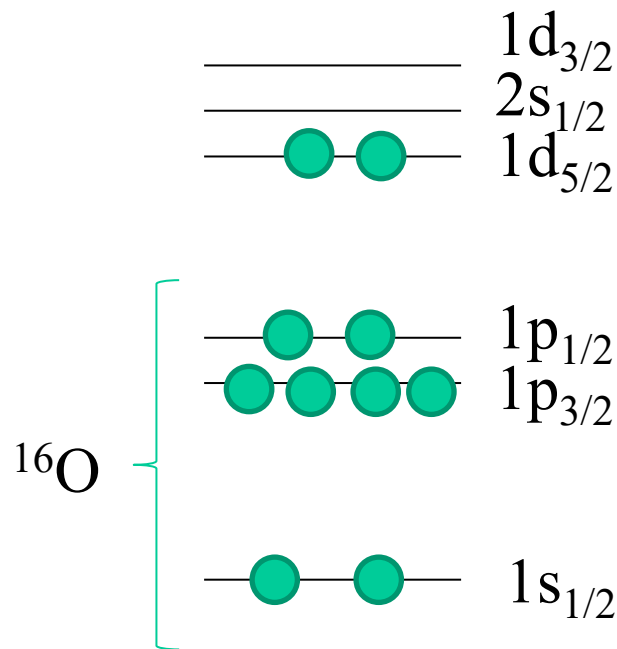
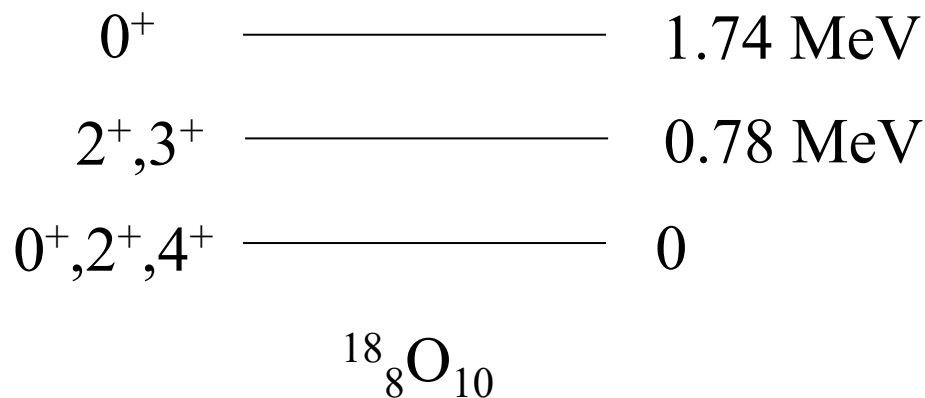
単純な平均場近似:

6 levels

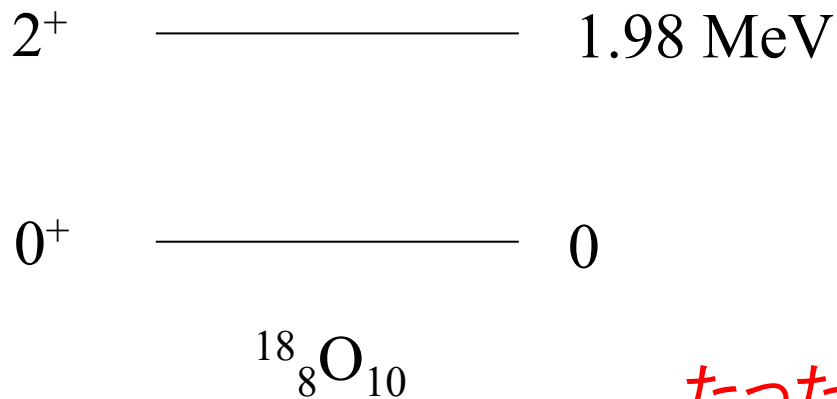


単純な平均場近似:

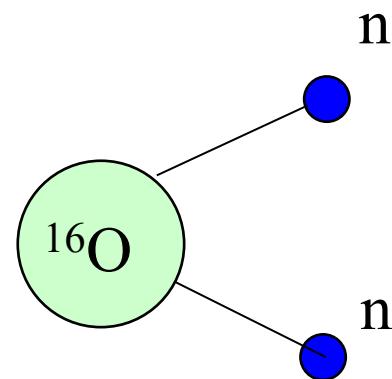
6 levels



実際には:



たったの2本!



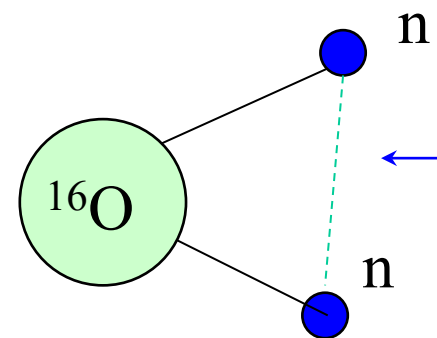
$$H = \sum_i T_i + \sum_{i < j} v_{ij} \rightarrow H = \sum_i (T_i + V_i) + \underbrace{\sum_{i < j} v_{ij} - \sum_i V_i}_{\text{平均からのずれ (残留相互作用)}}$$

平均からのずれ
(残留相互作用)

残留相互作用は完全に無視してもよいのか?

答え: no

開殻原子核では重要な役割を果たす
ことが知られている(ペアリング)



(note) 摂動論がよい条件

$$H = H_0 + \Delta V$$

$$H_0 |\phi_n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)} |\phi_n^{(0)}\rangle$$

$$\rightarrow |\phi_n\rangle = |\phi_n^{(0)}\rangle + \sum_{m \neq n} \frac{\langle \phi_m^{(0)} | \Delta V | \phi_n^{(0)} \rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} |\phi_m^{(0)}\rangle$$



$$|\langle \phi_m^{(0)} | \Delta V | \phi_n^{(0)} \rangle| \ll |E_n^{(0)} - E_m^{(0)}|$$

なら ΔV を無視できる

$$H = H_0 + \Delta V$$



$$|\langle \phi_m^{(0)} | \Delta V | \phi_n^{(0)} \rangle| \ll |E_n^{(0)} - E_m^{(0)}|$$

なら ΔV を無視できる

$$H = \sum_i T_i + \sum_{i < j} v_{ij} \rightarrow H = \sum_i (T_i + V_i) + \underbrace{\sum_{i < j} v_{ij} - \sum_i V_i}_{\text{平均からのずれ (残留相互作用)}}$$

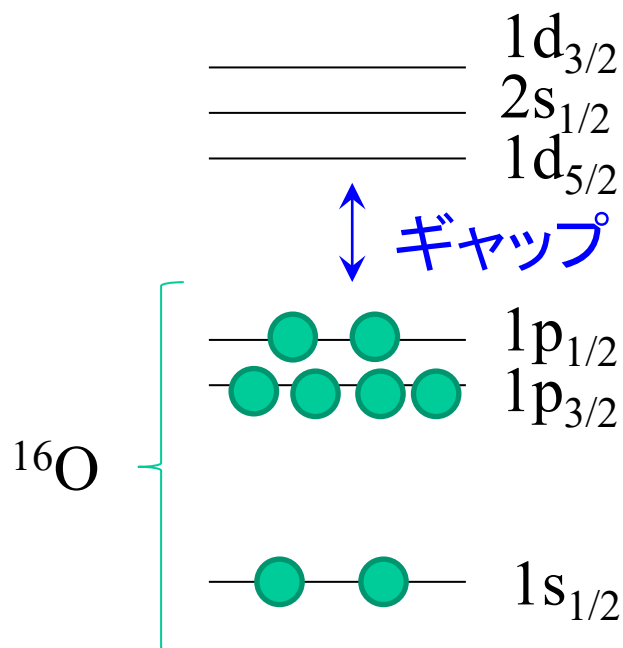
平均からのずれ
(残留相互作用)

閉殻核:

ギャップのために ΔE が大きい
→ 残留相互作用を無視できる

開殻核: ΔE が小さい

→ 残留相互作用を無視できない



対相関(ペアリング)

$$H = \sum_{i=1}^A \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + V_{\text{HF}}(i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j}^A v(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) - \sum_i V_{\text{HF}}(i)$$

簡単のために、残留相互作用としてデルタ関数を仮定してみる
(超短距離力)

$$v_{\text{res}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sim -g \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

摂動論で残留相互作用の効果を見積もってみる:

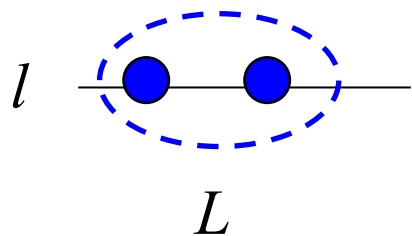
対相関(ペアリング)

$$H = \sum_{i=1}^A \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + V_{\text{HF}}(i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} v(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) - \sum_i V_{\text{HF}}(i)$$

簡単のために、残留相互作用としてデルタ関数を仮定してみる
(超短距離力)

$$v_{\text{res}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sim -g \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

摂動論で残留相互作用の効果を見積もってみる:



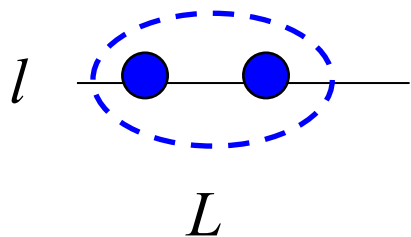
非摂動な波動関数:

角運動量 l の状態に中性子2個、それが
全角運動量 L を組んでいる

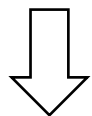
$$|(ll)LM\rangle = \sum_{m,m'} \langle lmlm' | LM \rangle \psi_{lm}(\mathbf{r}) \psi_{lm'}(\mathbf{r}')$$

対相関(ペアリング)

$$v_{\text{res}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sim -g \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$



$$|(ll)LM\rangle = \sum_{m,m'} \langle lmlm'|LM\rangle \psi_{lm}(\mathbf{r}) \psi_{lm'}(\mathbf{r}')$$



残留相互作用によるエネルギー変化:

$$\begin{aligned} \Delta E_L &= \langle (ll)LM | v_{\text{res}} | (ll)LM \rangle \\ &= -g I_r^{(l)} \frac{(2l+1)^2}{4\pi} \begin{pmatrix} l & l & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \end{aligned}$$

$$I_r^{(l)} = \int_0^\infty r^2 dr (R_l(r))^4$$

$$\Delta E_L = -g I_r^{(l)} \frac{(2l+1)^2}{4\pi} \begin{pmatrix} l & l & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \equiv -g I_r^{(l)} \frac{A(l; L)}{4\pi}$$

$A(l; L)$	$L=0$	$L=2$	$L=4$	$L=6$	$L=8$
$l=2$	5.00	1.43	1.43	---	---
$l=3$	7.00	1.87	1.27	1.63	---
$l=4$	9.00	2.34	1.46	1.26	1.81

$$\Delta E_L = -g I_r^{(l)} \frac{(2l+1)^2}{4\pi} \begin{pmatrix} l & l & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \equiv -g I_r^{(l)} \frac{A(l; L)}{4\pi}$$

$A(l; L)$	$L=0$	$L=2$	$L=4$	$L=6$	$L=8$
$l=2$	5.00	1.43	1.43	---	---
$l=3$	7.00	1.87	1.27	1.63	---
$l=4$	9.00	2.34	1.46	1.26	1.81

$$\Delta E_L = -g I_r^{(l)} \frac{(2l+1)^2}{4\pi} \begin{pmatrix} l & l & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \equiv -g I_r^{(l)} \frac{A(l; L)}{4\pi}$$

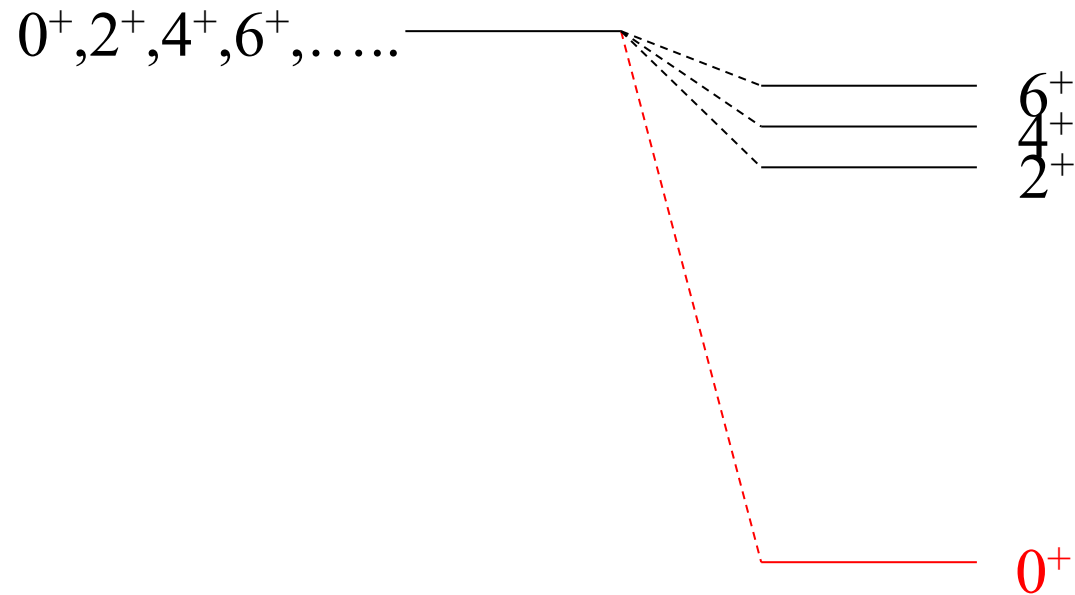
$A(l; L)$	$L=0$	$L=2$	$L=4$	$L=6$	$L=8$
$l=2$	5.00	1.43	1.43	---	---
$l=3$	7.00	1.87	1.27	1.63	---
$l=4$	9.00	2.34	1.46	1.26	1.81

$0^+, 2^+, 4^+, 6^+, \dots$ —————

残留相互
作用なし

$$\Delta E_L = -g I_r^{(l)} \frac{(2l+1)^2}{4\pi} \begin{pmatrix} l & l & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \equiv -g I_r^{(l)} \frac{A(l; L)}{4\pi}$$

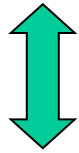
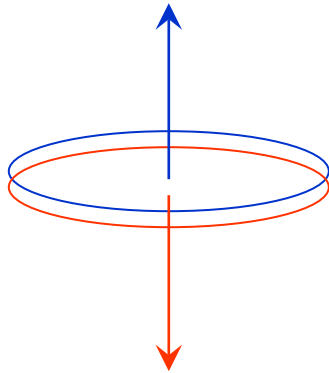
$A(l; L)$	$L=0$	$L=2$	$L=4$	$L=6$	$L=8$
$l=2$	5.00	1.43	1.43	---	---
$l=3$	7.00	1.87	1.27	1.63	---
$l=4$	9.00	2.34	1.46	1.26	1.81



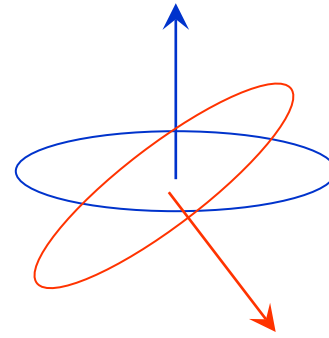
残留相互
作用なし

残留相互
作用あり

簡単な解釈:



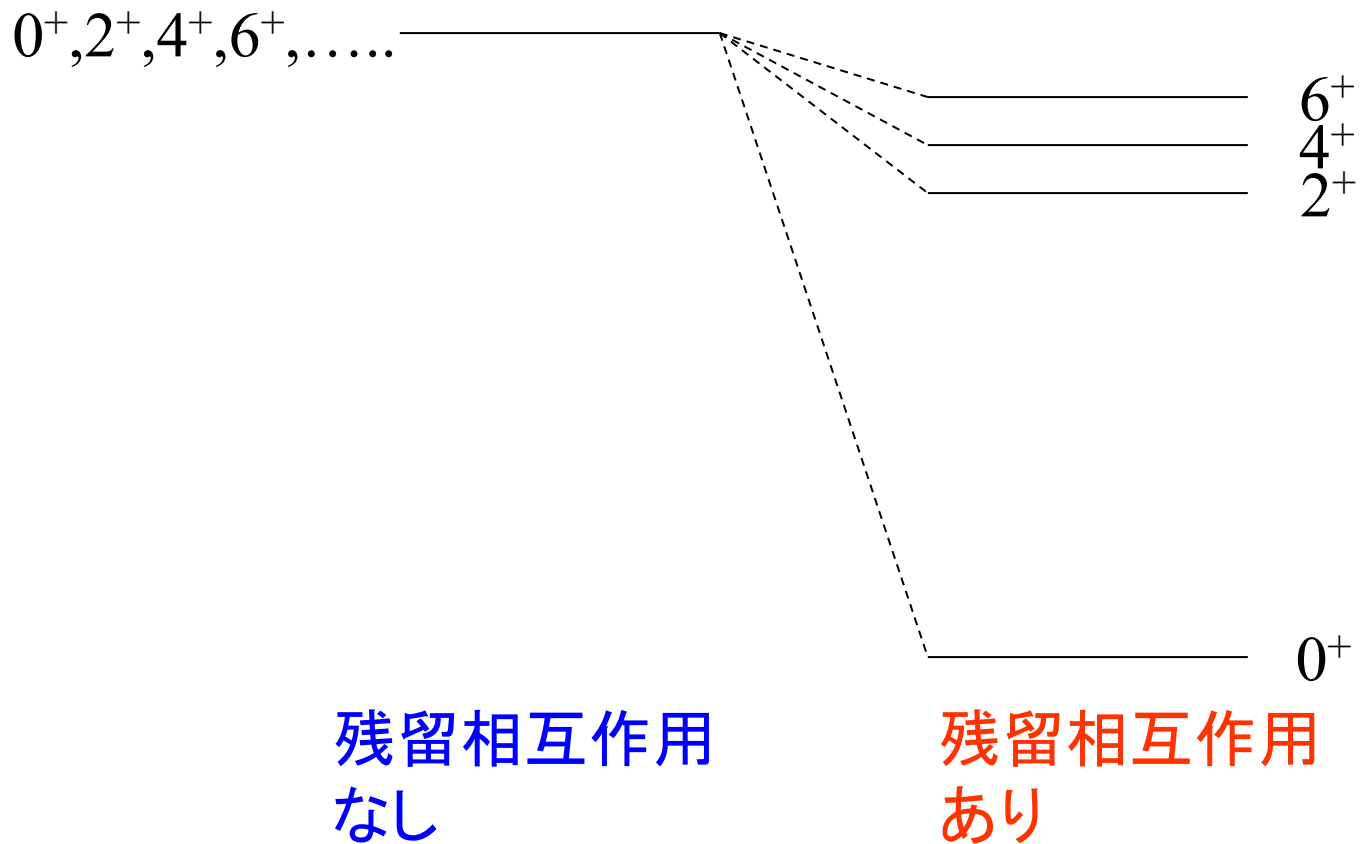
$L=0$ 対



$L \neq 0$ 対

$L=0$ 対に対して空間的重なりが最大(エネルギー的に得)

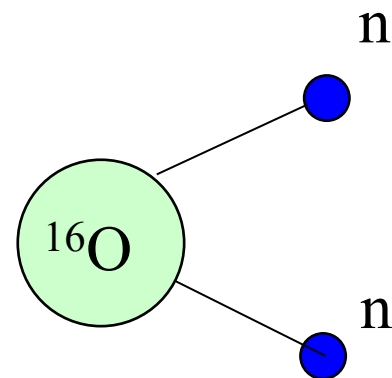
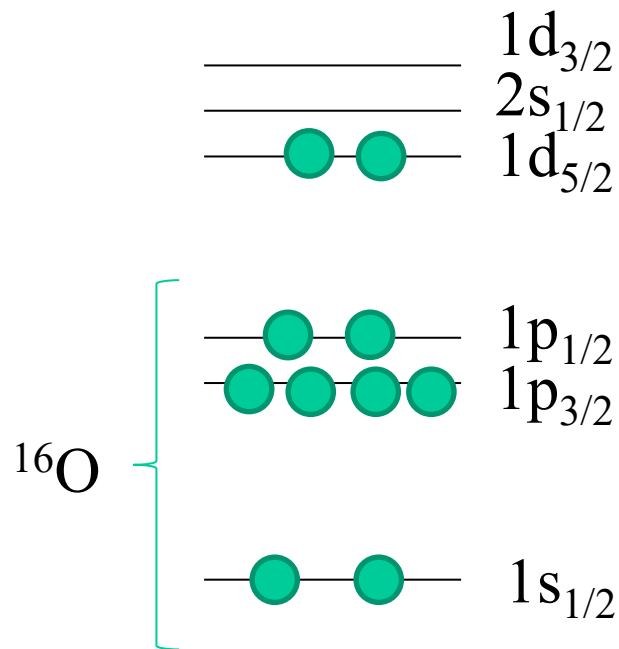
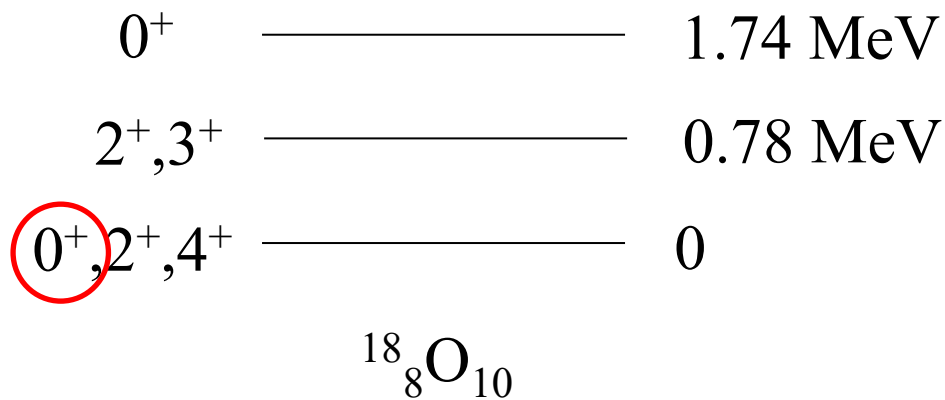
“対相関”



原子核の基底状態のスピンの

- 偶々核: 例外なしに 0^+
- 奇核: 最外殻核子の角運動量と一致

単純な平均場近似:



単純な平均場近似:

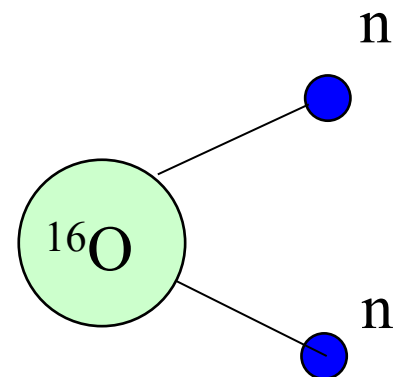
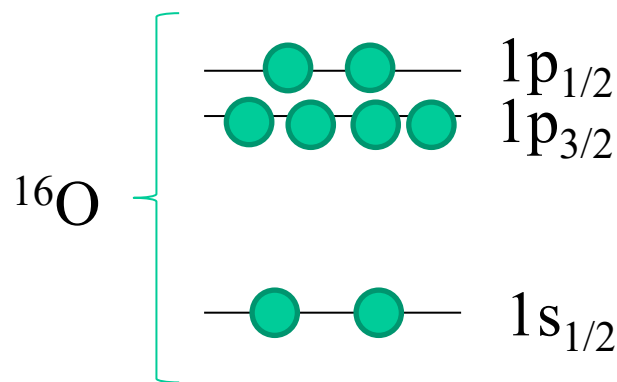
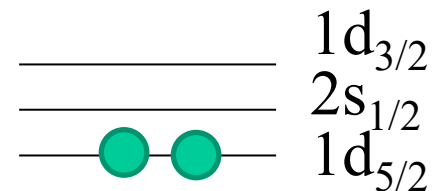
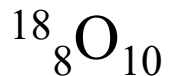
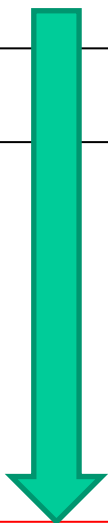
0^+ ————— 1.74 MeV

$2^+, 3^+$ ————— 0.78 MeV

4^+

2^+

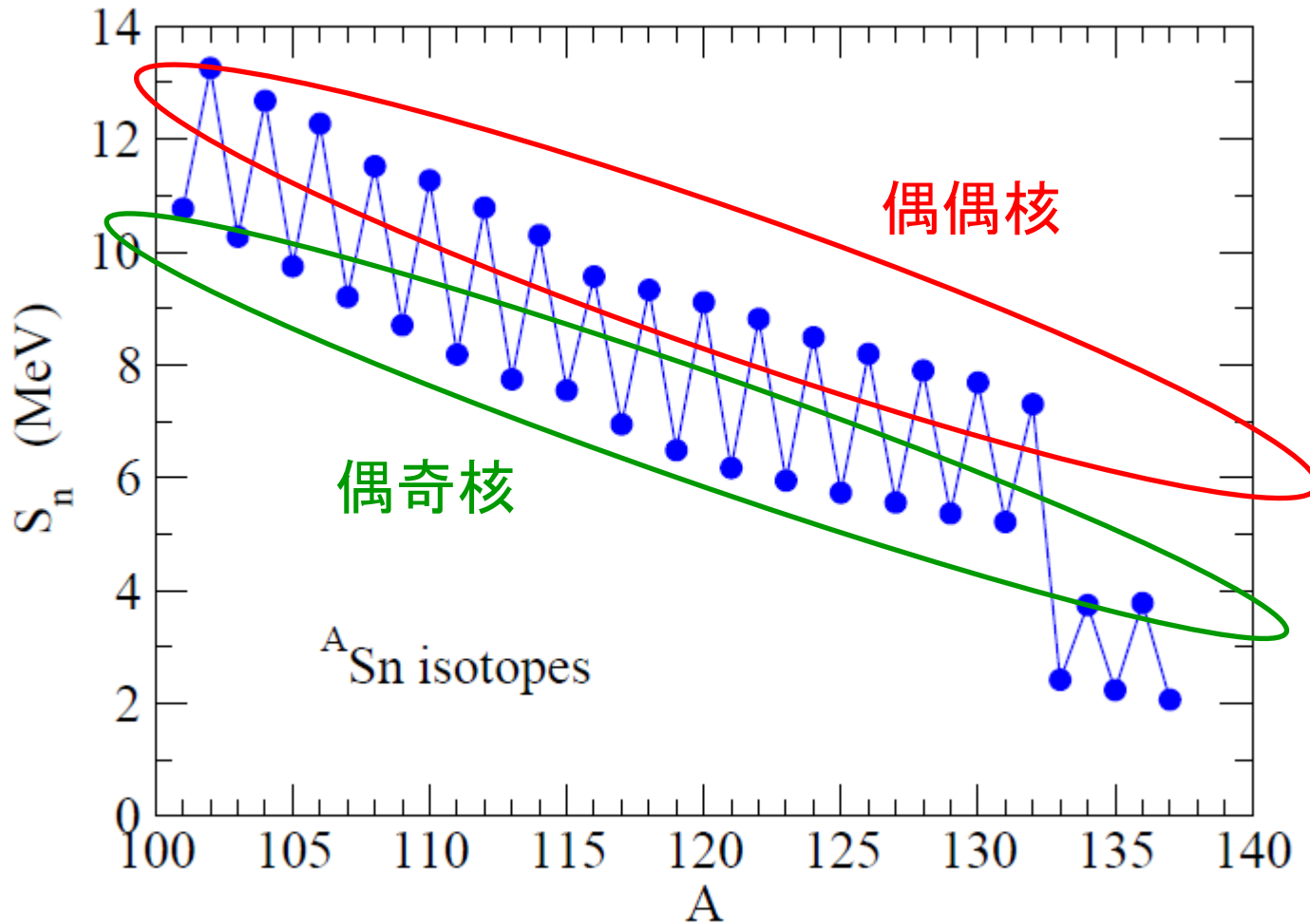
0^+



対相関エネルギー

偶数個の中性子から1つ中性子
を取る方が奇数個から取るより
大きなエネルギーが必要: 対相関

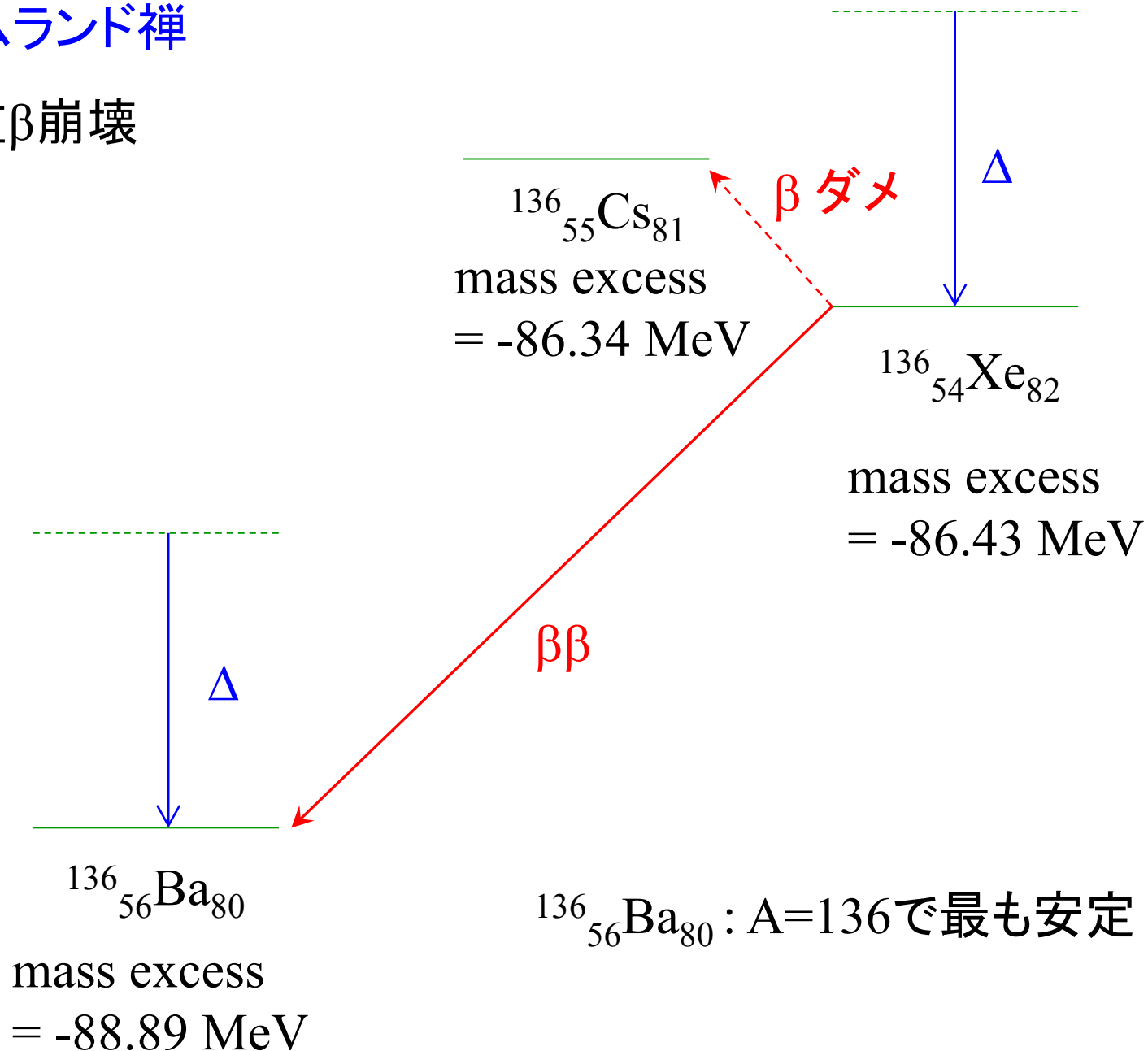
even-odd staggering



1n separation energy: $S_n(A,Z) = B(A,Z) - B(A-1,Z)$

(参考)カムランド禅

^{136}Xe の2重 β 崩壊



(参考) 中性子誘起核分裂

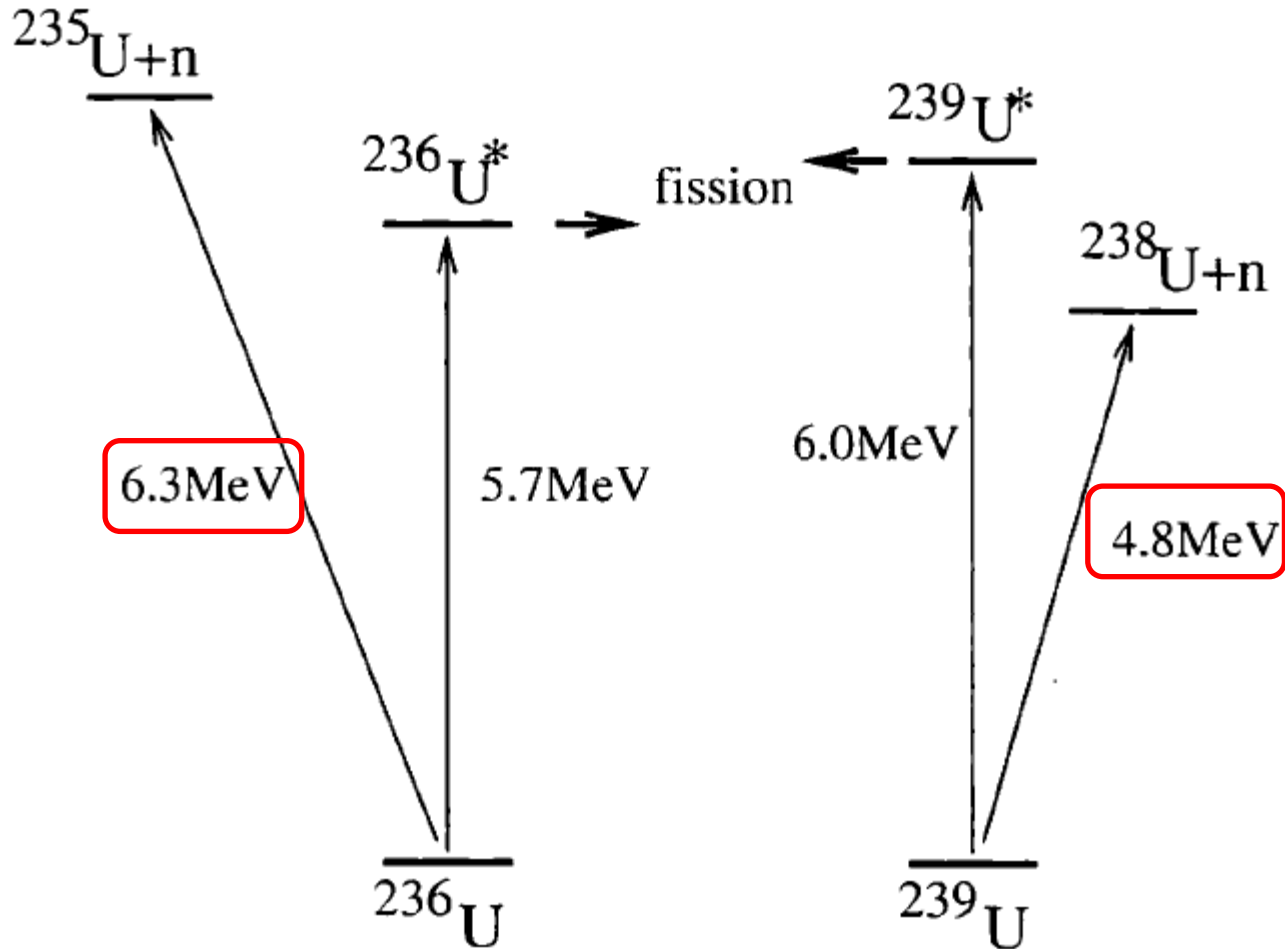
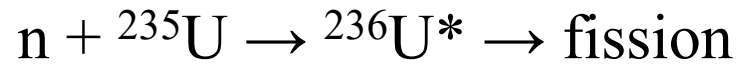
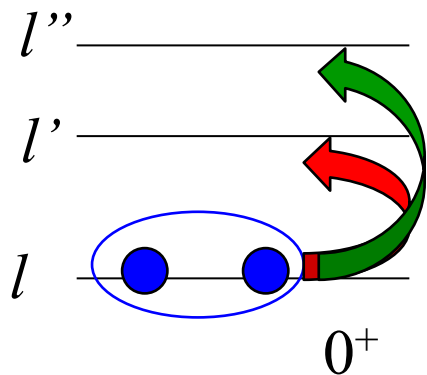
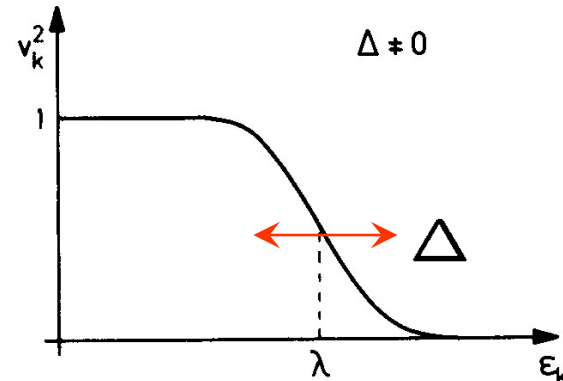
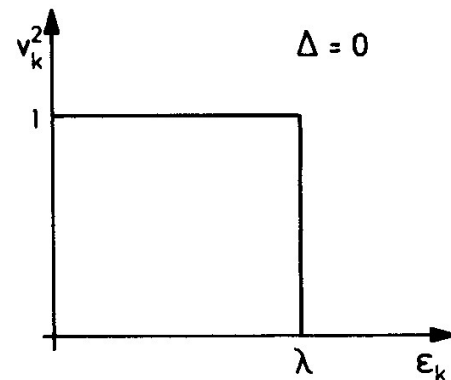


Fig. 6.6. Levels of the systems $A = 236$ and $A = 239$ involved in the fission of ${}^{236}\text{U}$ and ${}^{239}\text{U}$. The addition of a motionless (or thermal) neutron to ${}^{235}\text{U}$ can lead to the fission of ${}^{236}\text{U}$. On the other hand, fission of ${}^{239}\text{U}$ requires the addition of a neutron of kinetic energy $T_n = 6.0 - 4.8 = 1.2 \text{ MeV}$.

波動関数:

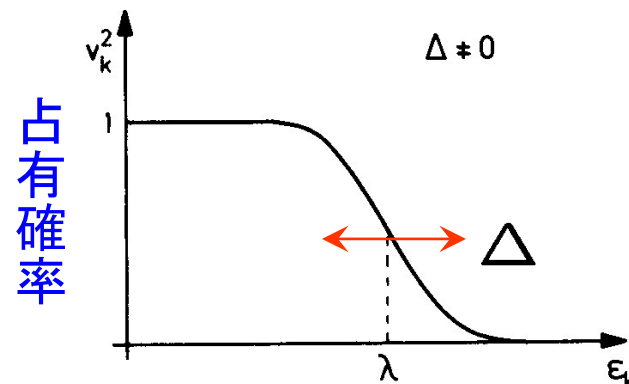


Occupation probability



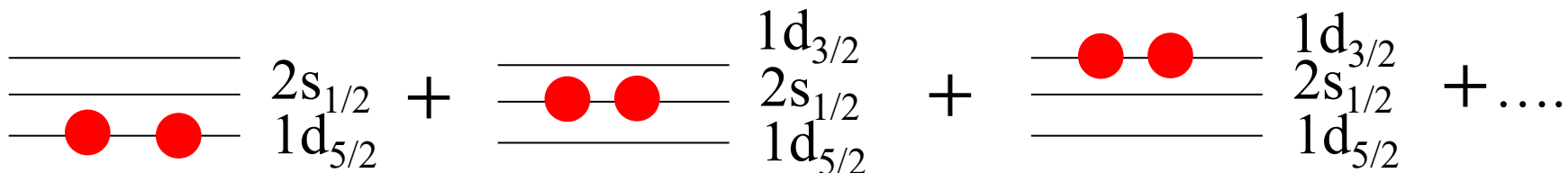
$$\begin{aligned}
 |\Psi_{0+}\rangle &= |(ll)L=0\rangle \\
 &+ \sum_{l'} \frac{\langle (l'l')L=0 | v_{\text{res}} | (ll)L=0 \rangle}{2\epsilon_l - 2\epsilon_{l'}} |(l'l')L=0\rangle + \dots
 \end{aligned}$$

波動関数:



占有確率

$$|\Psi_{\text{g.s.}}\rangle =$$



いろいろな配位を混ぜることによって対相関エネルギーを稼ぐ

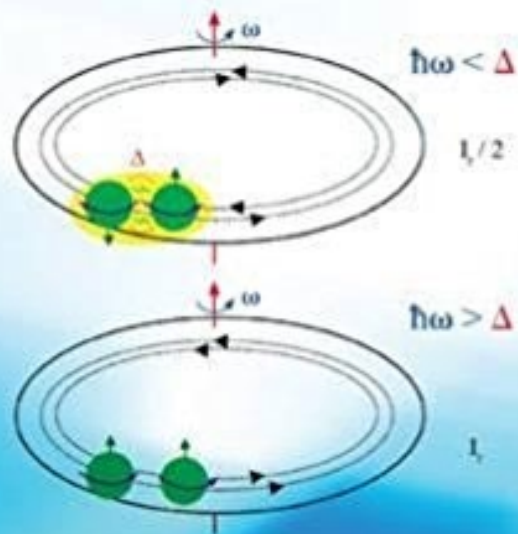
→ 各軌道は部分的にのみ占有されることになる

占有確率はエネルギーを最小化するように決定
cf. BCS 理論

超流動状態

Fifty Years of Nuclear BCS

Pairing in Finite Systems



Ricardo A Broglia
Vladimir Zelevinsky
editors

 World Scientific

Nuclear Superfluidity

Pairing in Finite Systems

D. M. BRINK
R. A. BROGLIA

CAMBRIDGE MONOGRAPHS
ON PARTICLE PHYSICS, NUCLEAR PHYSICS
AND COSMOLOGY

24