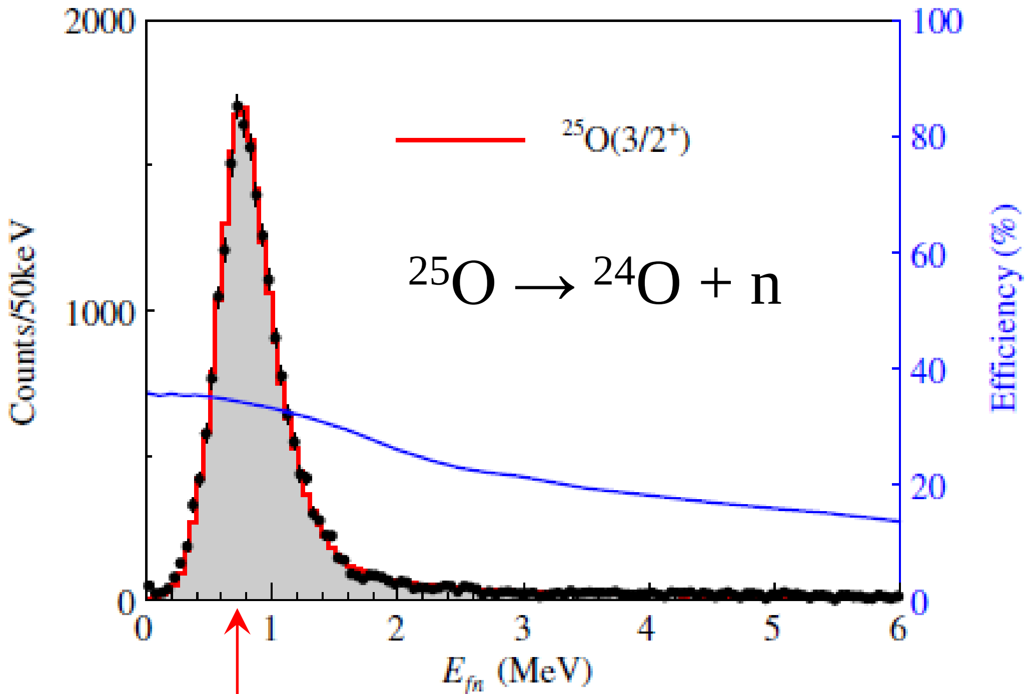
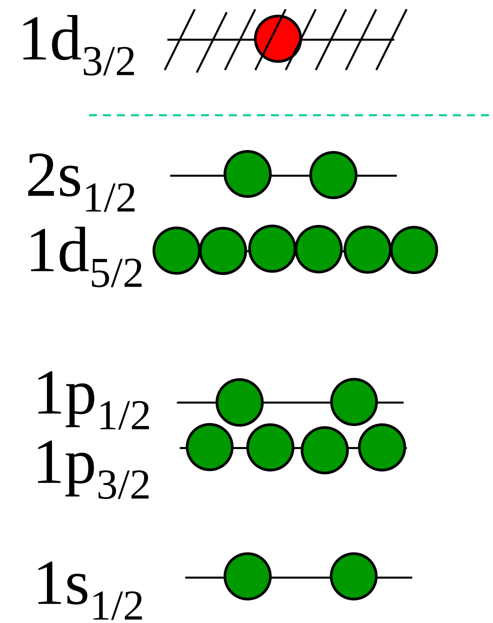
非束縛核の物理

^{22}O	^{23}O	^{24}O	^{25}O	^{26}O

${}^{26}_{9}F_{17}$から1つ陽子を抜いて ${}^{25}_{8}O_{17}$ を生成 → 1中性子を放出して崩壊



ピーク

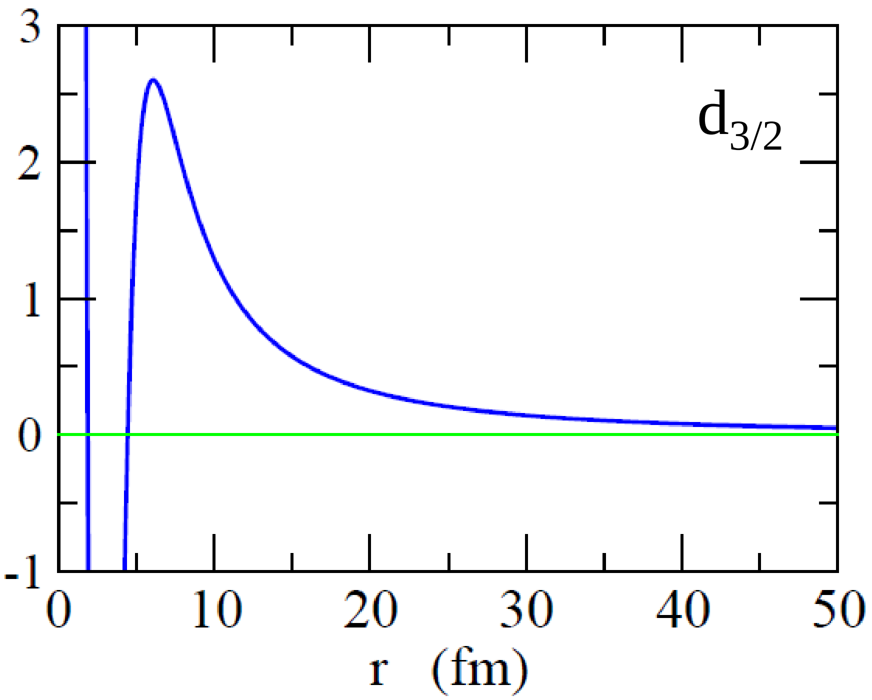


中性子
1粒子状態

Y. Kondo et al., PRL116 (‘16) 102503

$1d_{3/2}$ の「準束縛」状態と解釈することができる

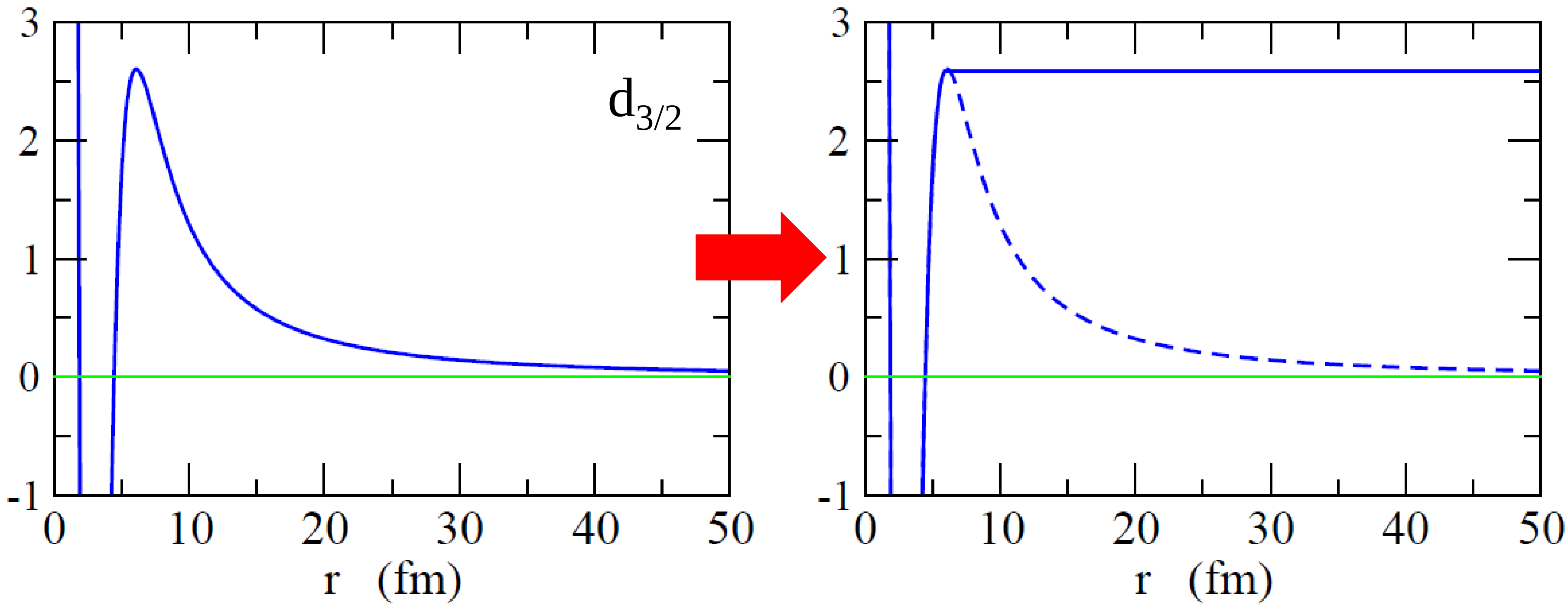
準束縛状態とは?



実際のポテンシャル

束縛状態は $E < 0$ の領域のみ

準束縛状態とは?



実際のポテンシャル

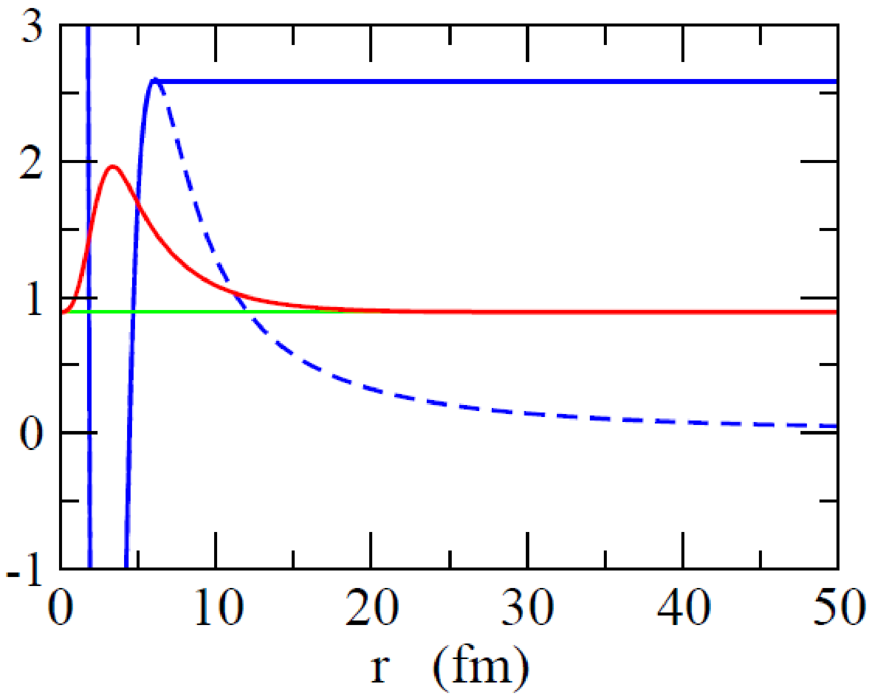
束縛状態は $E < 0$ の領域のみ

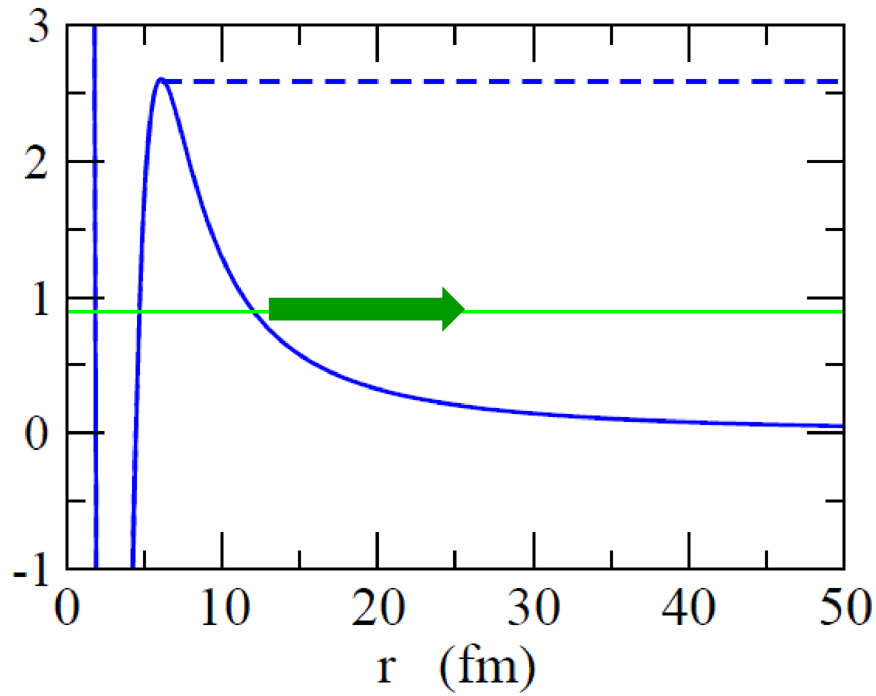
このようにポテンシャルを
変更すると

$\longrightarrow$ $E > 0$ でも束縛状態が
できる

＝ 準束縛(準安定)状態

準束縛状態とは?



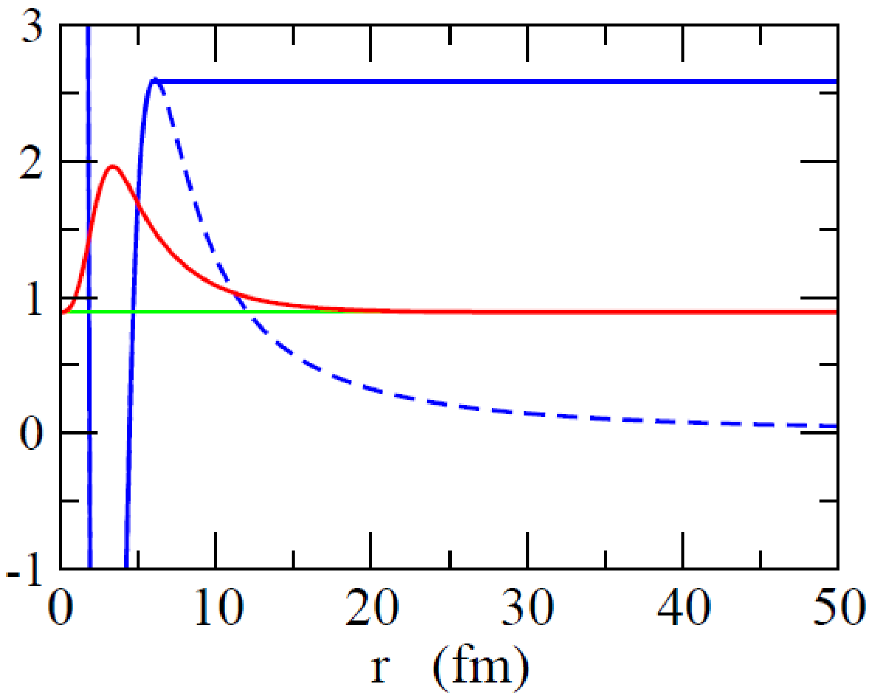


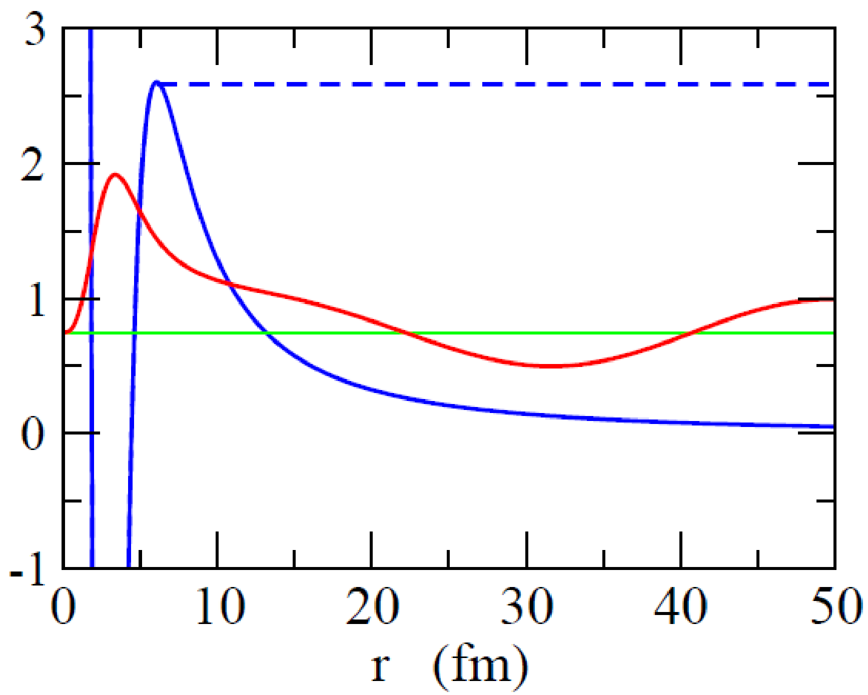
束縛状態 ＝ 無限の寿命

実際には有限の寿命で
障壁をトンネルし崩壊

「準束縛（準安定）状態」

準束縛状態とは?



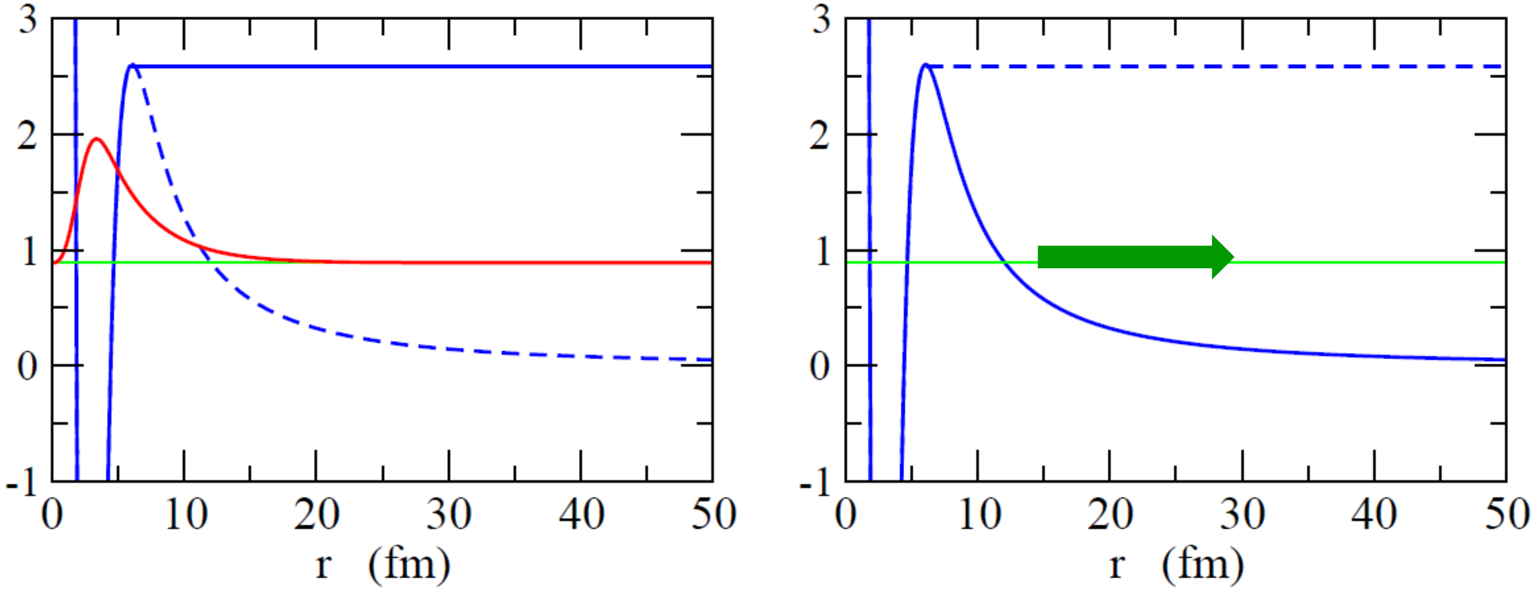


束縛状態 ＝ 無限の寿命

実際には有限の寿命で
障壁をトンネルし崩壊

「準束縛（準安定）状態」

ガモフ状態



トンネル効果で波動関数が
沁み出し、外向きの波として崩壊

$$
\boxed{
\begin{array}{lll}
u(r) & \sim \; r^{l+1} & (r \to 0) \\
 & \to \; \mathcal{N}\, e^{i(kr - l\pi/2)} & (r \to \infty)
\end{array}
}
$$

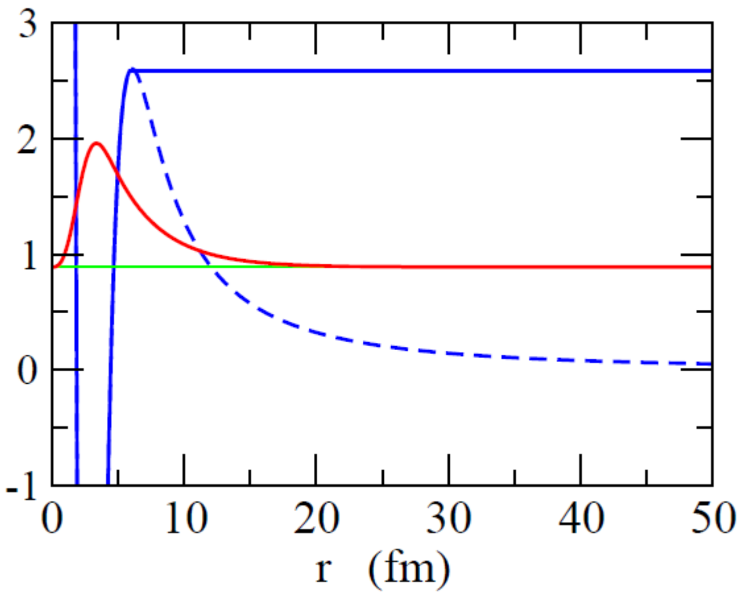
⇨ エネルギーを複素数にしなければならない：

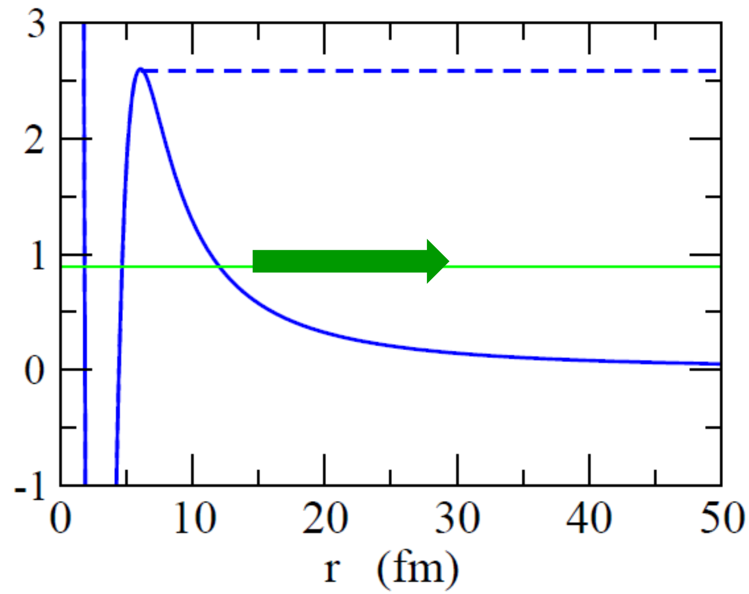
共鳴幅

$$E \to E_R - i\frac{\Gamma}{2}$$

共鳴エネルギー

ガモフ状態





トンネル効果で波動関数が
沁み出し、外向きの波として崩壊

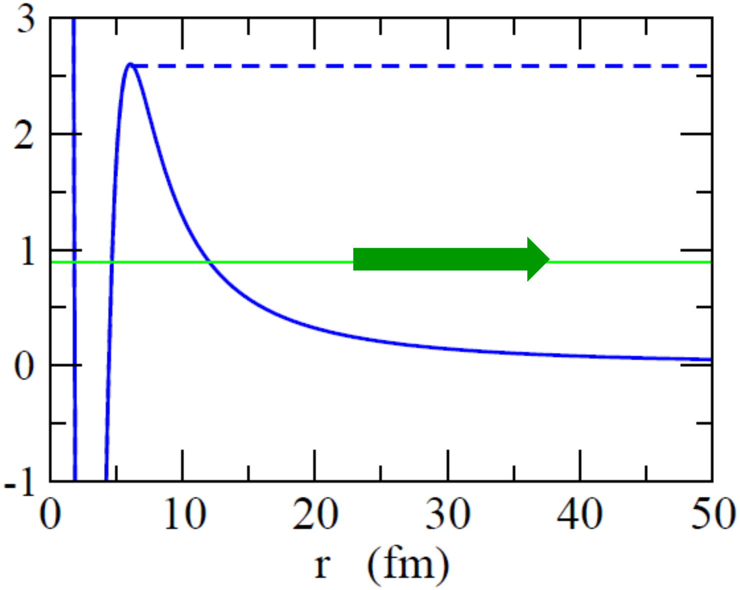
$$E \rightarrow E_R - i\frac{\Gamma}{2}$$

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{sur}}(t) &\equiv |\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle|^2 \\ &= |\langle\psi(0)|e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle|^2 \\ &= |\langle\psi(0)|e^{-i(E_R - i\Gamma/2)t/\hbar}|\psi(0)\rangle|^2 \\ &= e^{-\Gamma t/\hbar} \end{aligned}$$

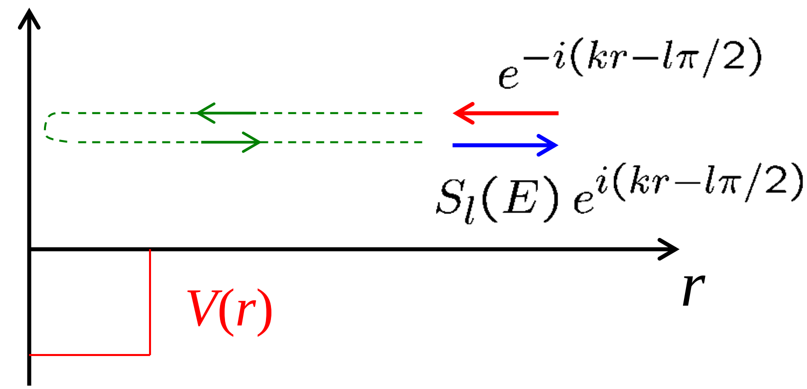
$\longrightarrow$ $\boxed{\hbar/\Gamma\ \text{が準安定状態の寿命}}$

ガモフ状態と散乱状態の関係

ガモフ状態



散乱状態



外向波境界条件

$$u_l(r) \to \mathcal{N}\, e^{i(kr-l\pi/2)}$$

$$E \to E_R - i\frac{\Gamma}{2}$$

散乱の境界条件

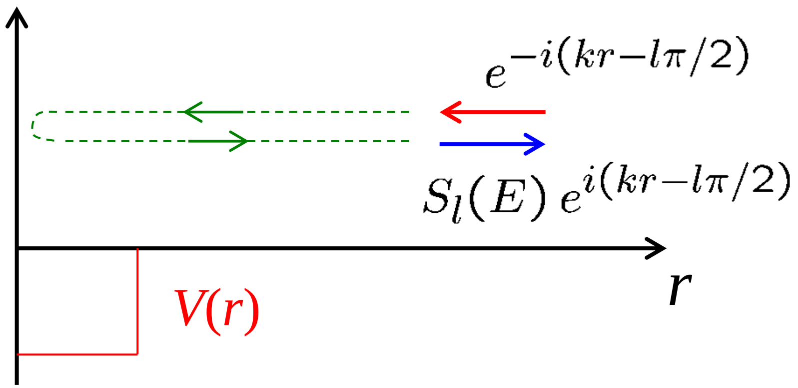
$$u_l(r) \;\to\; \mathcal{N}\left(e^{-i(kr-l\pi/2)} - S_l(E)\, e^{i(kr-l\pi/2)}\right)$$

$$S_l(E) = e^{2i\delta_l(E)}$$

E : real

ガモフ状態と散乱状態の関係

散乱状態



散乱の境界条件

$$u_l(r) \;\to\; \mathcal{N}\left(e^{-i(kr-l\pi/2)} - S_l(E)\,e^{i(kr-l\pi/2)}\right)$$

$$S_l(E) = e^{2i\delta_l(E)}$$

E : real

もし、$S_l(E)$ が発散するような E があれば、

$$u_l(r) \sim \widetilde{\mathcal{N}}\,e^{i(kr-l\pi/2)}$$ （外向波）

ただし、エネルギー E を複素平面へ解析接続しなければならない:

$$E \to E_R - i\frac{\Gamma}{2}$$

➡ ガモフ状態 $\longleftrightarrow$ S 行列の極（ポール）

Breit-Wigner の公式

S-行列が $\epsilon = E_R - i\dfrac{\Gamma}{2}$ で極を持つとすると、

$$\boxed{S(E) = e^{2i\delta_0(E)} \cdot \frac{E-\epsilon^*}{E-\epsilon}} \longleftarrow |S(E)| = 1$$

$\delta_0(E)$ は E のゆるやかな関数 (background phase shift)

このとき、

$$\begin{aligned} S(E) &= e^{2i\delta_0(E)} \cdot \frac{E-E_R-i\Gamma/2}{E-E_R+i\Gamma/2} \\ &= e^{2i\delta_0(E)} \left(1 - \frac{i\Gamma}{E-E_R+i\Gamma/2}\right) \end{aligned}$$

Breit-Wigner の公式

S-行列が $\epsilon = E_R - i\frac{\Gamma}{2}$ で極を持つとすると、

$$\boxed{S(E) = e^{2i\delta_0(E)} \cdot \frac{E-\epsilon^*}{E-\epsilon}} \longleftarrow |S(E)| = 1$$

$\delta_0(E)$ は E のゆるやかな関数 (background phase shift)

$$E - \epsilon^* = c\, e^{i\delta_r(E)}$$ とすると、

$$S(E) = e^{2i\delta_0(E)} \cdot \frac{c\, e^{i\delta_r(E)}}{c\, e^{-i\delta_r(E)}} = e^{2i\delta_0(E)} e^{2i\delta_r(E)}$$

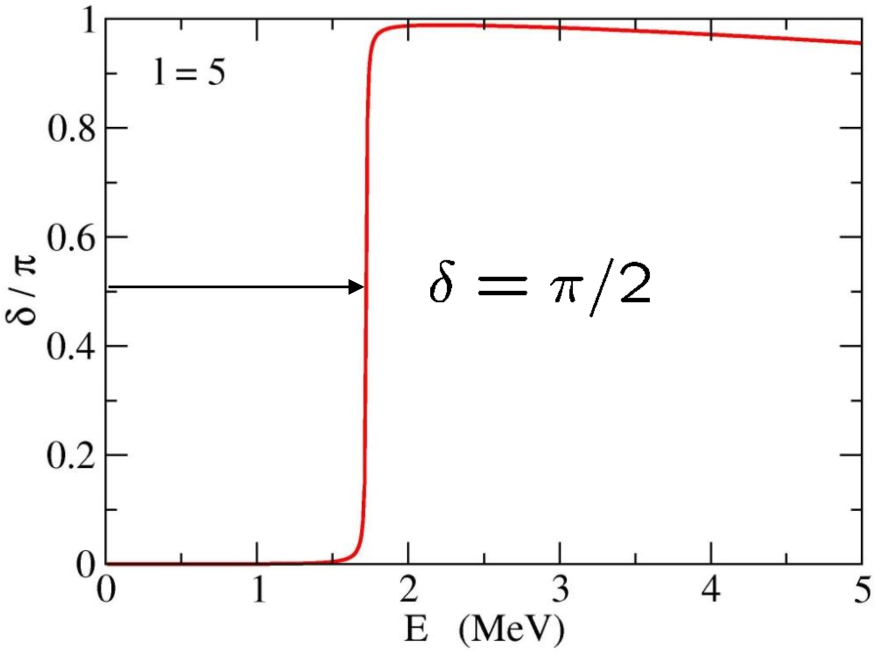
$$E - \epsilon^* = E - E_R - i\Gamma/2 = c\, e^{i\delta_r} = c(\cos\delta_r + i\sin\delta_r)$$

$$\longrightarrow \quad \tan\delta_r = \frac{\sin\delta_r}{\cos\delta_r} = \frac{-\Gamma/2}{E - E_R}$$

$$\boxed{\delta(E) = \delta_r(E) + \delta_0(E) = \tan^{-1}\left(\frac{\Gamma}{2(E_R - E)}\right) + \delta_0(E)}$$

Breit-Wigner の公式

幅が狭ければ、位相のずれが π/2 を切る時に共鳴



Breit-Wigner formula:

$$\delta(E) = \tan^{-1}\frac{\Gamma}{2(E_R - E)} + \delta_0(E)$$

$$\Rightarrow \quad \delta(E_R) \sim \pi/2$$

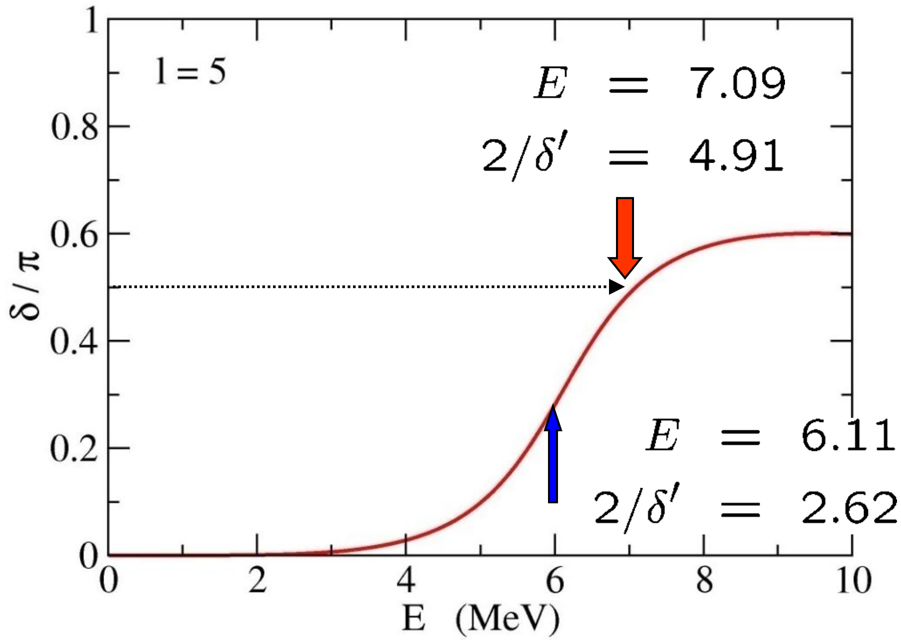
$$\Gamma = \frac{2}{\delta'(E_R)}$$

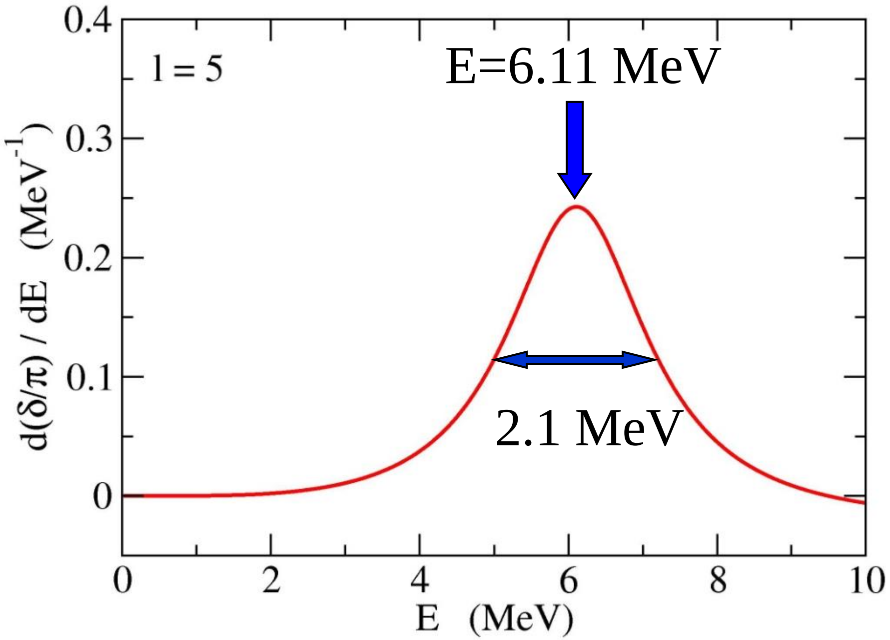
V_0 = -50 MeV
R_0 = 1.27 * $200^{1/3}$ fm
a = 0.67 fm
μ = 200 m_N / 201

(note) ただし、幅が広いと π/2 とは限らない

$$\delta(E) = \tan^{-1}\frac{\Gamma}{2(E_R - E)} + \delta_0(E)$$

background phase shift





Gamow state: $E = 6.01$ MeV

$\Gamma = 2.22$ MeV

レポート問題7(〆切:12月4日(土))

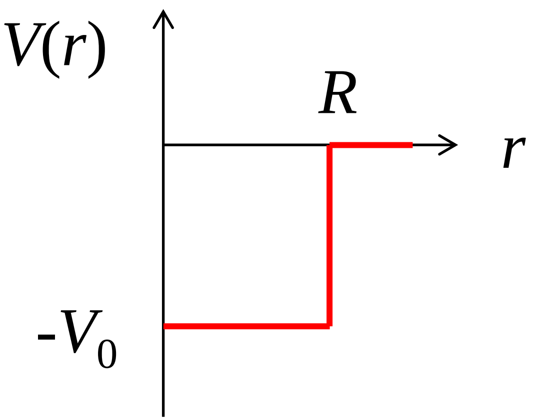
$$\delta_l(E) \sim \delta_r(E) = \tan^{-1}\left(\frac{\Gamma}{2(E_R - E)}\right)$$

で与えられるとき、この角運動量に対する全散乱断面積

$$\sigma_l(E) = \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\sin^2\delta_l(E)$$

を求めよ。

レポート問題8（〆切：12月4日（土））



左の図のような井戸型ポテンシャルを考える。このとき、角運動量 l に対する動径波動関数は球ベッセル関数、球ハンケル関数を用いて以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
R_l(r) &= j_l(\tilde{k}r) \qquad\qquad (r < R) \\
&= A(h_l^{(-)}(kr) - S_l h_l^{(+)}(kr)) \qquad (r \geq R)
\end{aligned}
$$

$$k = \sqrt{2mE/\hbar^2}, \quad \tilde{k} = \sqrt{2m(E+V_0)/\hbar^2}$$

r=R における波動関数の接続条件により S 行列が解析的に求まる:

$$S_l(E) = \frac{L_l(E) - \tilde{S}_l(E) + iP_l(E)}{L_l(E) - \tilde{S}_l(E) - iP_l(E)} e^{2i\phi_l}$$

ここで、 $F_l(r) \equiv kr\, j_l(kr), \quad G_l(r) \equiv -kr\, n_l(kr), \quad R_l(r) = \frac{u_l(r)}{r}$

$$F_l'(r) \equiv R\frac{dF_l}{dr}, \qquad G_l'(r) \equiv R\frac{dG_l}{dr}$$

$$L_l \equiv R\left(\frac{d}{dr}u_l(r)\right)_{r=R}\frac{1}{u_l(R)} \qquad P_l = \frac{kR}{G_l(R)^2 + F_l(R)^2}$$

$$\tilde{S}_l = \frac{G_l(R)G_l'(R) + F_l(R)F_l'(R)}{G_l(R)^2 + F_l(R)^2} \qquad e^{2i\phi_l} = \frac{G_l(R) - iF_l(R)}{G_l(R) + iF_l(R)}$$

である。

レポート問題8（〆切：12月4日（土））　＊続き

$$S_l(E) = \frac{L_l(E) - \tilde{S}_l(E) + iP_l(E)}{L_l(E) - \tilde{S}_l(E) - iP_l(E)} e^{2i\phi_l}$$

あるエネルギー E_r で　$L_l(E_r) - \tilde{S}_l(E_r) = 0$　になったとする。

このとき、

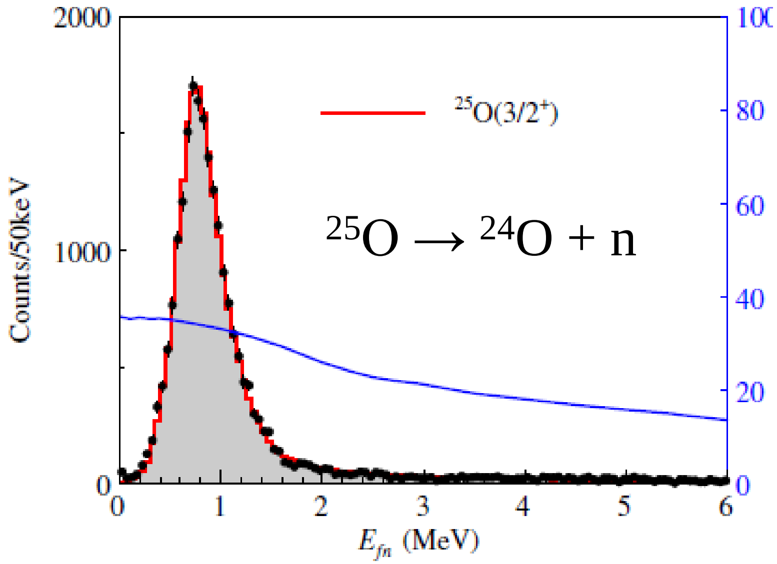
$$L_l(E) - \tilde{S}_l(E) \;\sim\; L_l(E_r) - \tilde{S}_l(E_r) - \frac{1}{\gamma_l^2}(E - E_r) = -\frac{1}{\gamma_l^2}(E - E_r)$$

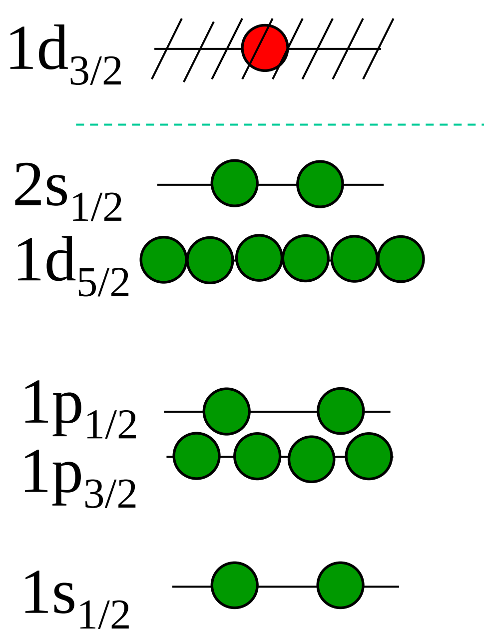
と展開し、$P_l(E) \sim P_l(E_r)$ と置くことによって S-行列に対する Breit-Wigner の式

$$S_l(E) = \left(1 - \frac{i\Gamma_l}{E - E_r + i\frac{\Gamma_l}{2}}\right) e^{2i\phi_l}$$

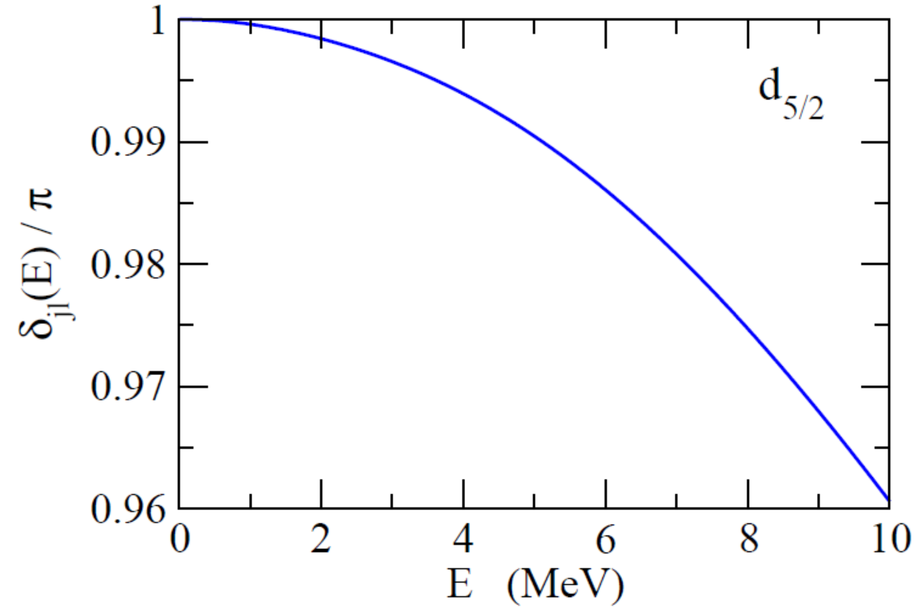
を導け。また、共鳴幅 Γ_l が γ_l と $P_l(E_r)$ を用いてどのように表されるか述べよ。

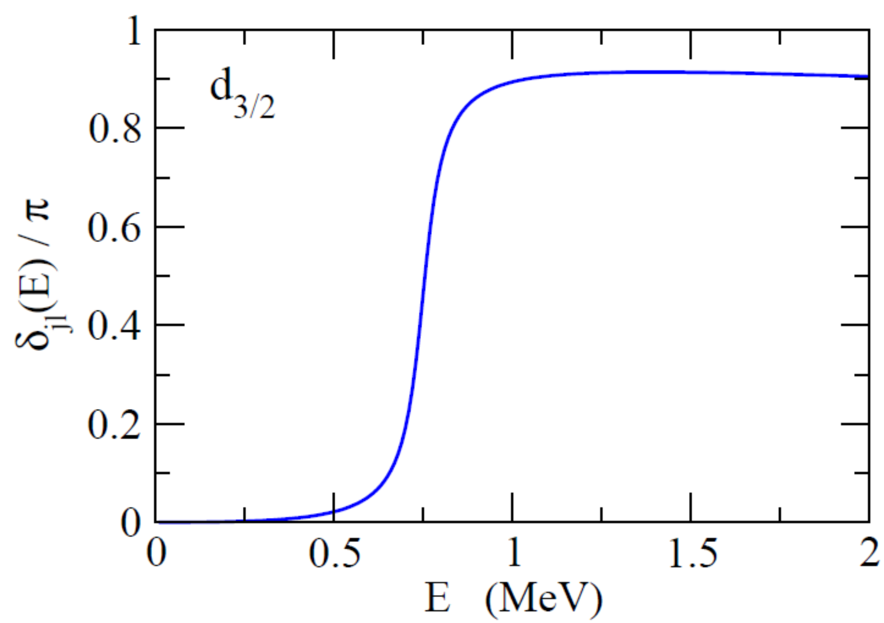
共鳴があると位相のずれはどう振る舞う?



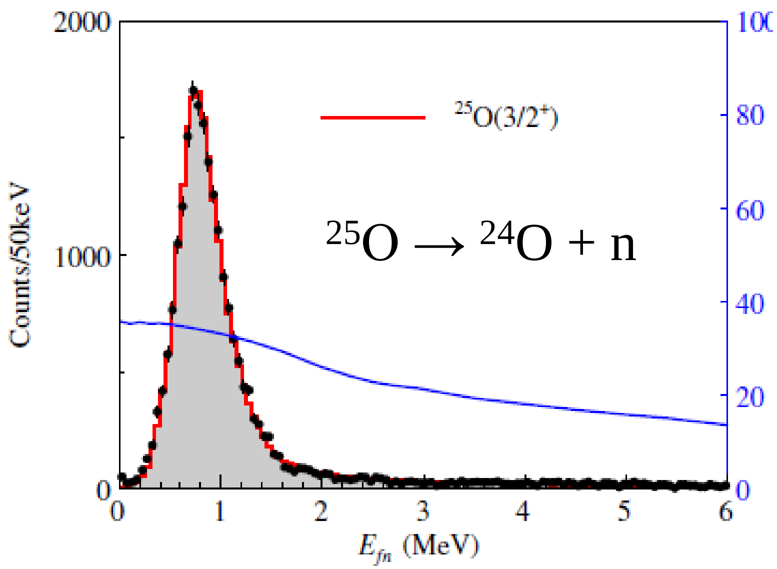


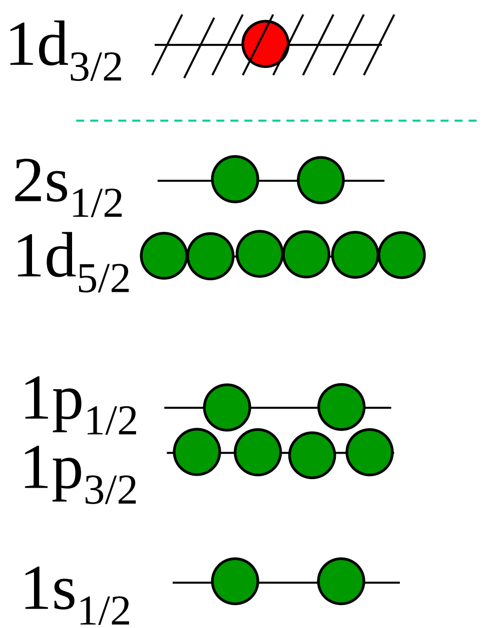
WS ポテンシャルによる n-^{24}O 散乱



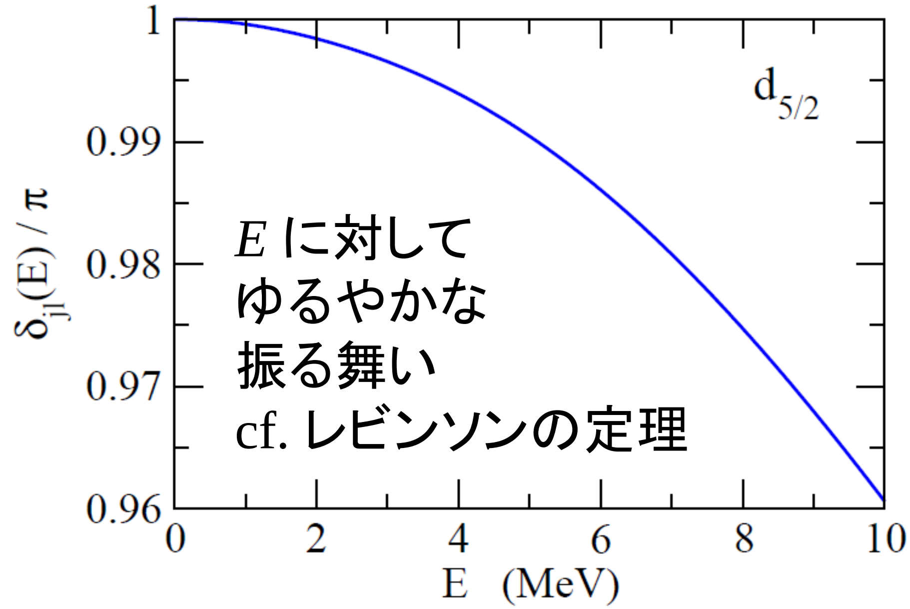


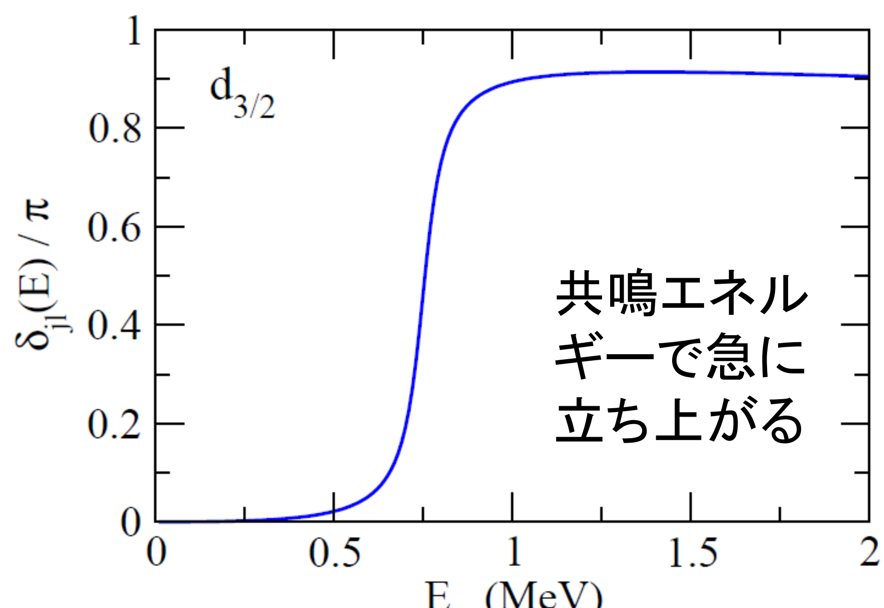
共鳴があると位相のずれはどう振る舞う?



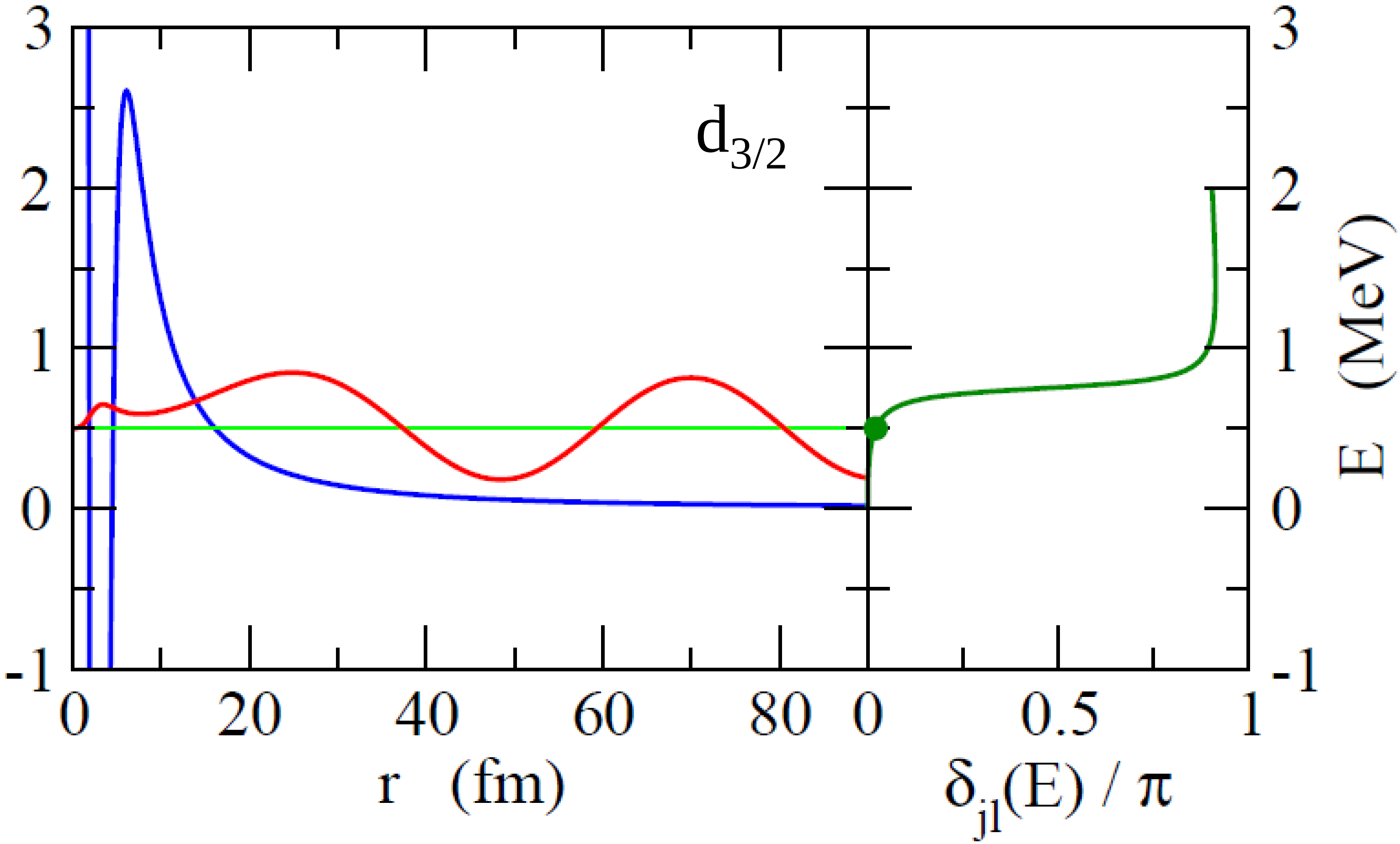


WS ポテンシャルによる n-^{24}O 散乱



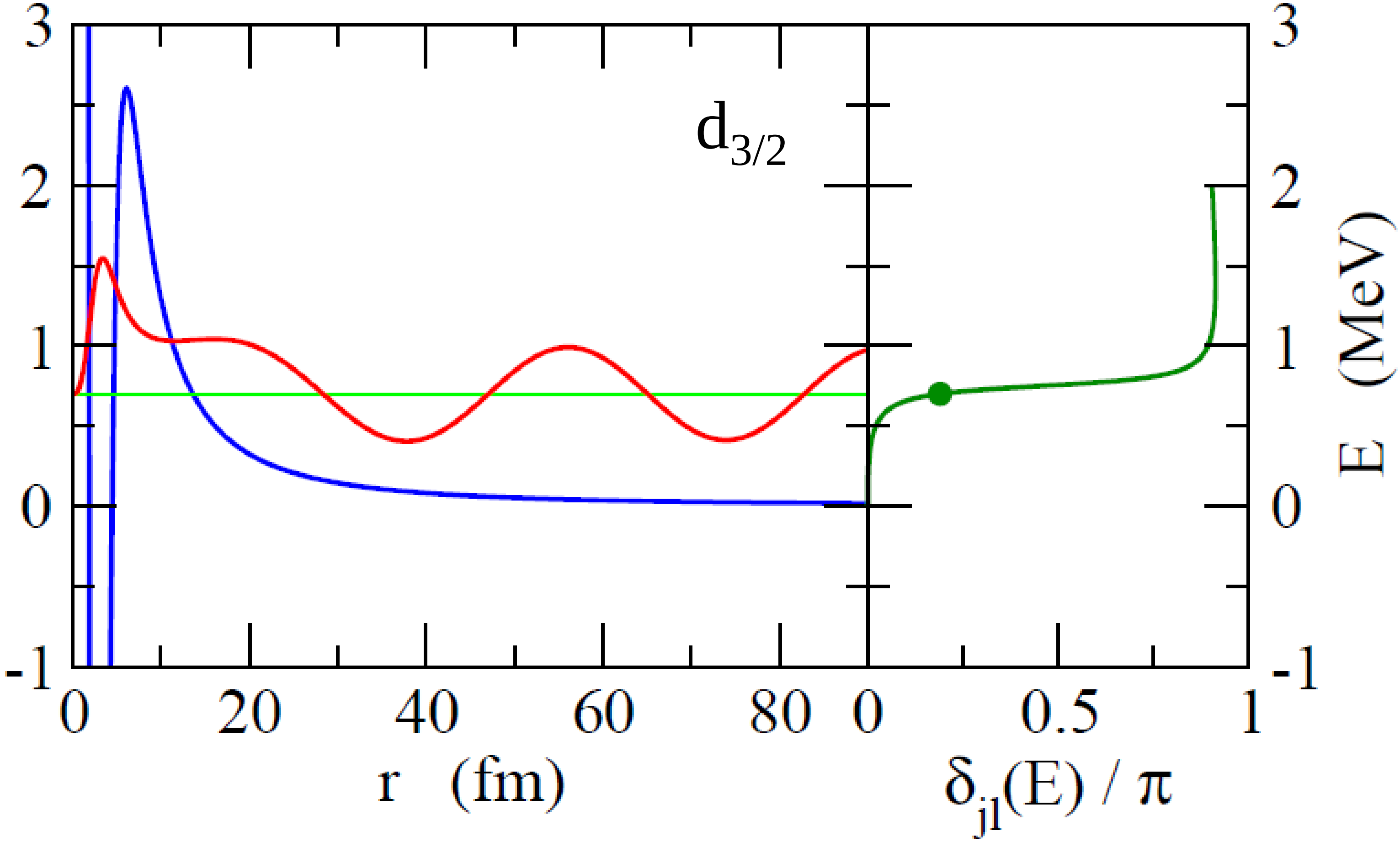


それでは波動関数は?



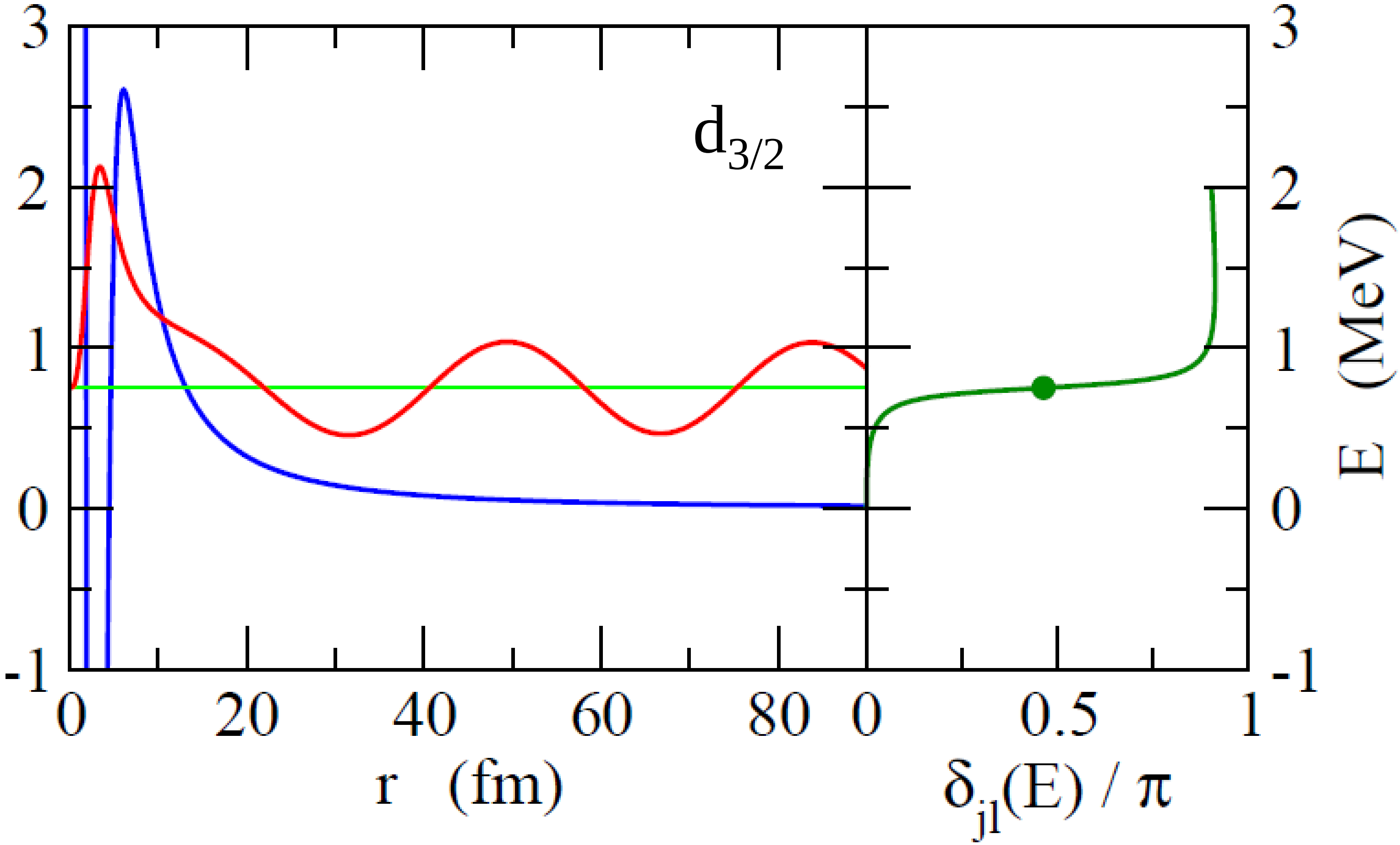
$$rR_{jl}(r) \to \sqrt{\frac{2m}{\pi k\hbar^2}}\,\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{jl}(E)\right); \qquad \int d\boldsymbol{r}\,\psi_E(\boldsymbol{r})\psi^*_{E'}(\boldsymbol{r}) = \delta(E-E')$$

それでは波動関数は?



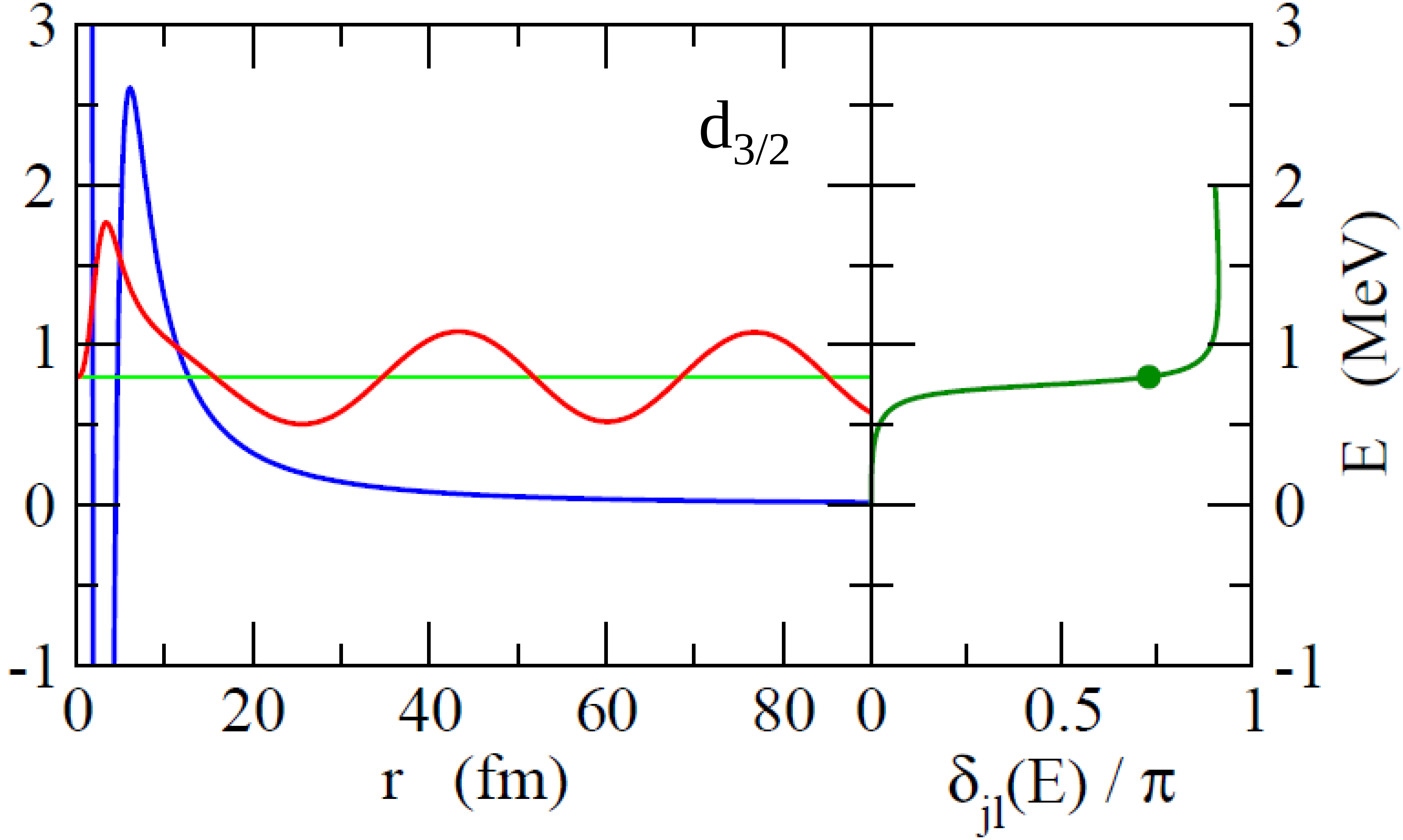
$$rR_{jl}(r) \to \sqrt{\frac{2m}{\pi k \hbar^2}} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{jl}(E)\right); \qquad \int d\boldsymbol{r} \psi_E(\boldsymbol{r}) \psi^*_{E'}(\boldsymbol{r}) = \delta(E - E')$$

それでは波動関数は?



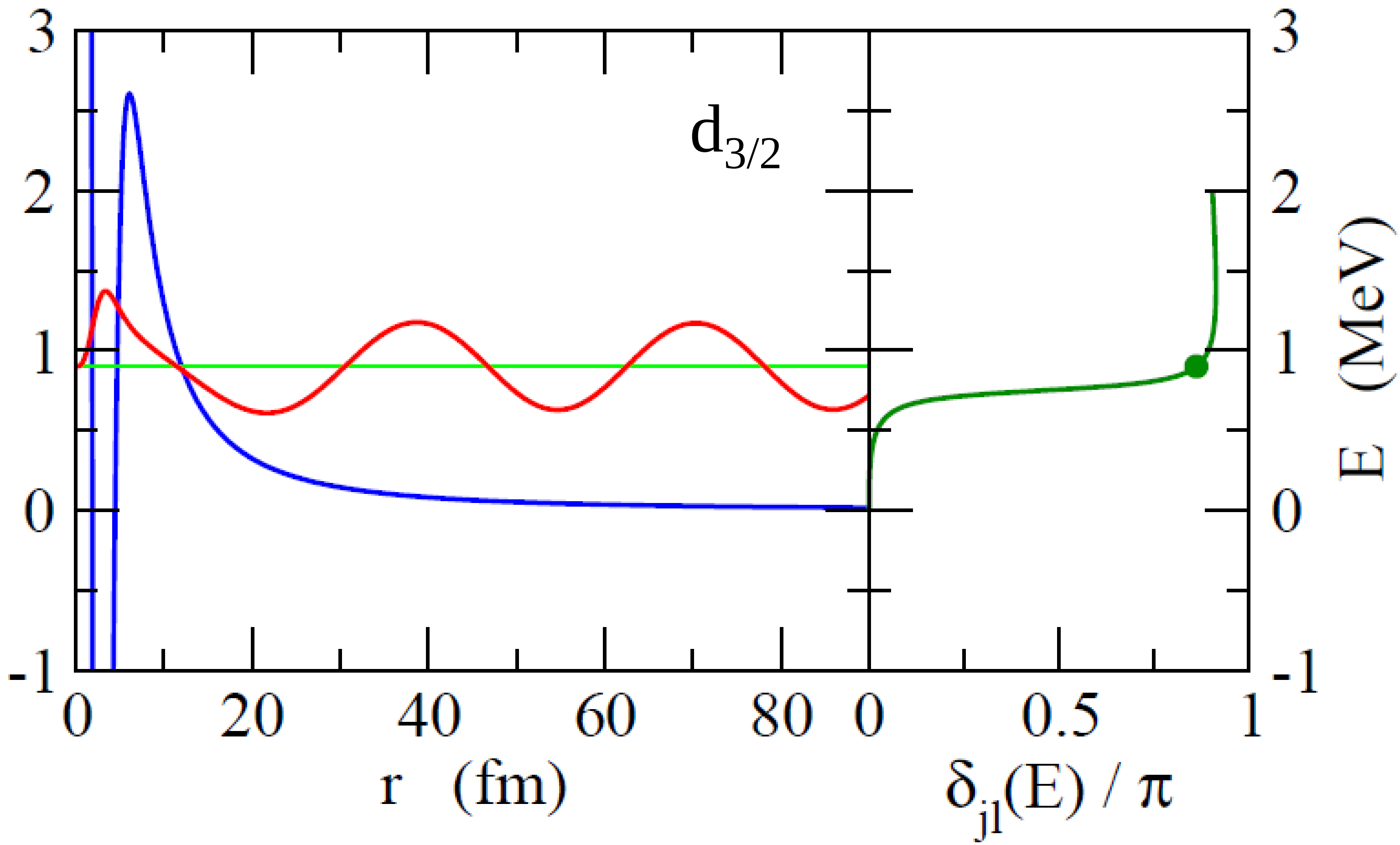
$$rR_{jl}(r) \to \sqrt{\frac{2m}{\pi k\hbar^2}}\,\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{jl}(E)\right); \qquad \int d\boldsymbol{r}\,\psi_E(\boldsymbol{r})\psi^*_{E'}(\boldsymbol{r}) = \delta(E-E')$$

それでは波動関数は?



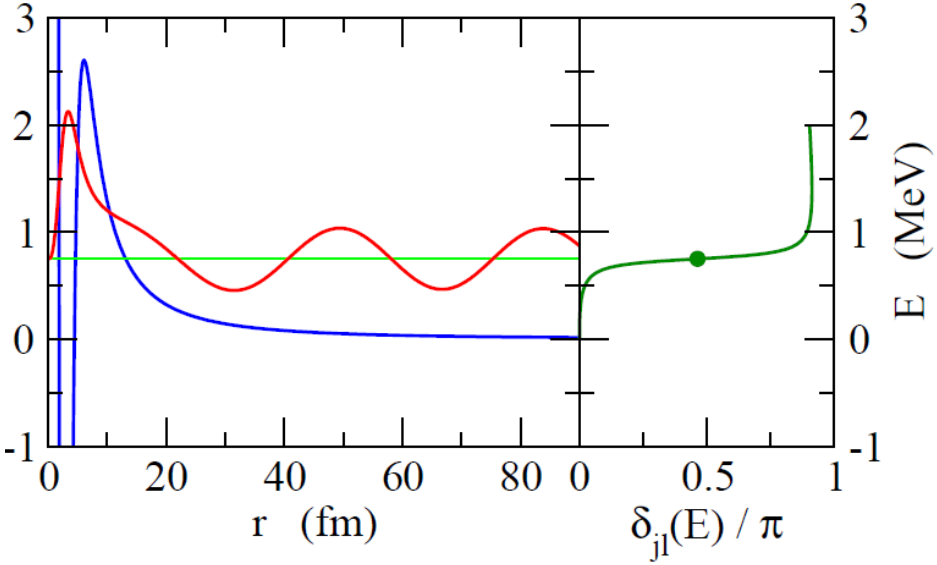
$$rR_{jl}(r) \to \sqrt{\frac{2m}{\pi k\hbar^2}}\,\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{jl}(E)\right); \qquad \int d\boldsymbol{r}\,\psi_E(\boldsymbol{r})\psi^*_{E'}(\boldsymbol{r}) = \delta(E - E')$$

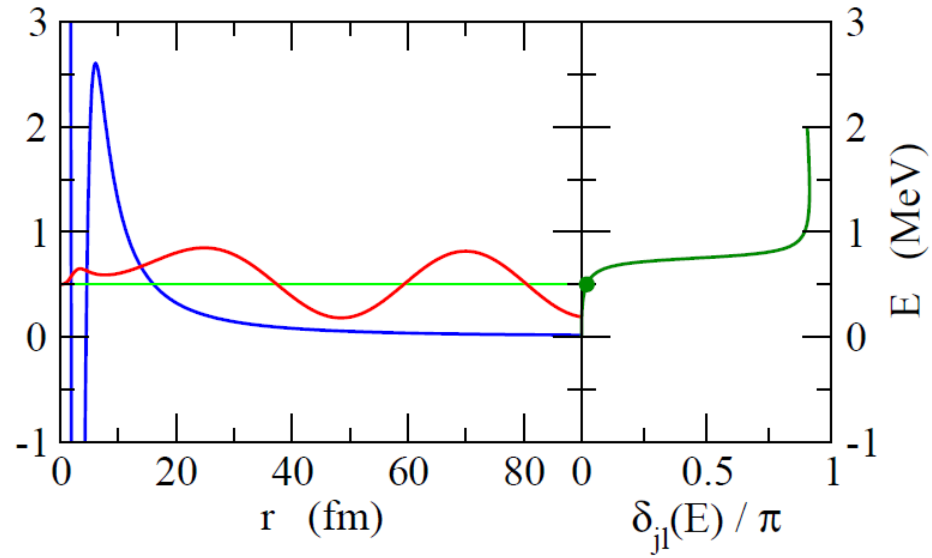
それでは波動関数は?



$$rR_{jl}(r) \to \sqrt{\frac{2m}{\pi k\hbar^2}}\,\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{jl}(E)\right); \qquad \int d\boldsymbol{r}\psi_E(\boldsymbol{r})\psi^*_{E'}(\boldsymbol{r}) = \delta(E-E')$$

それでは波動関数は?

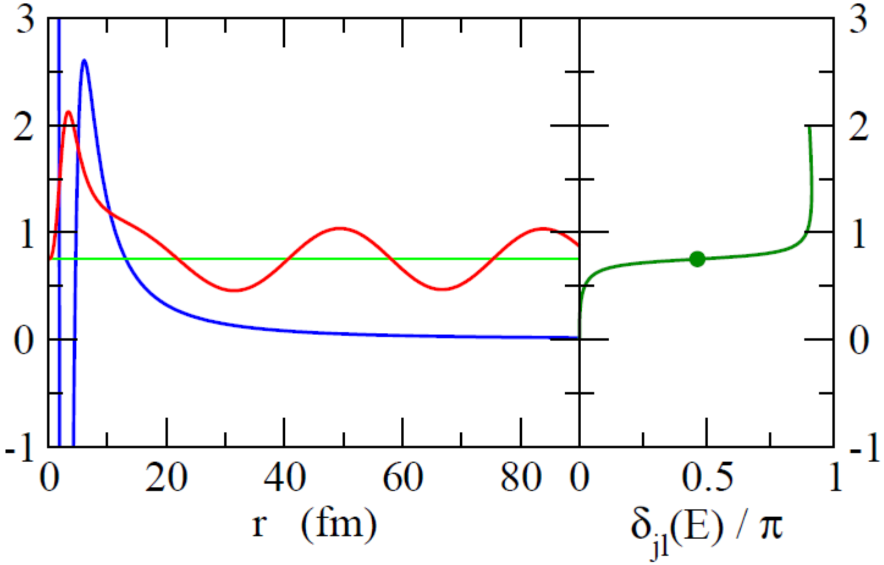


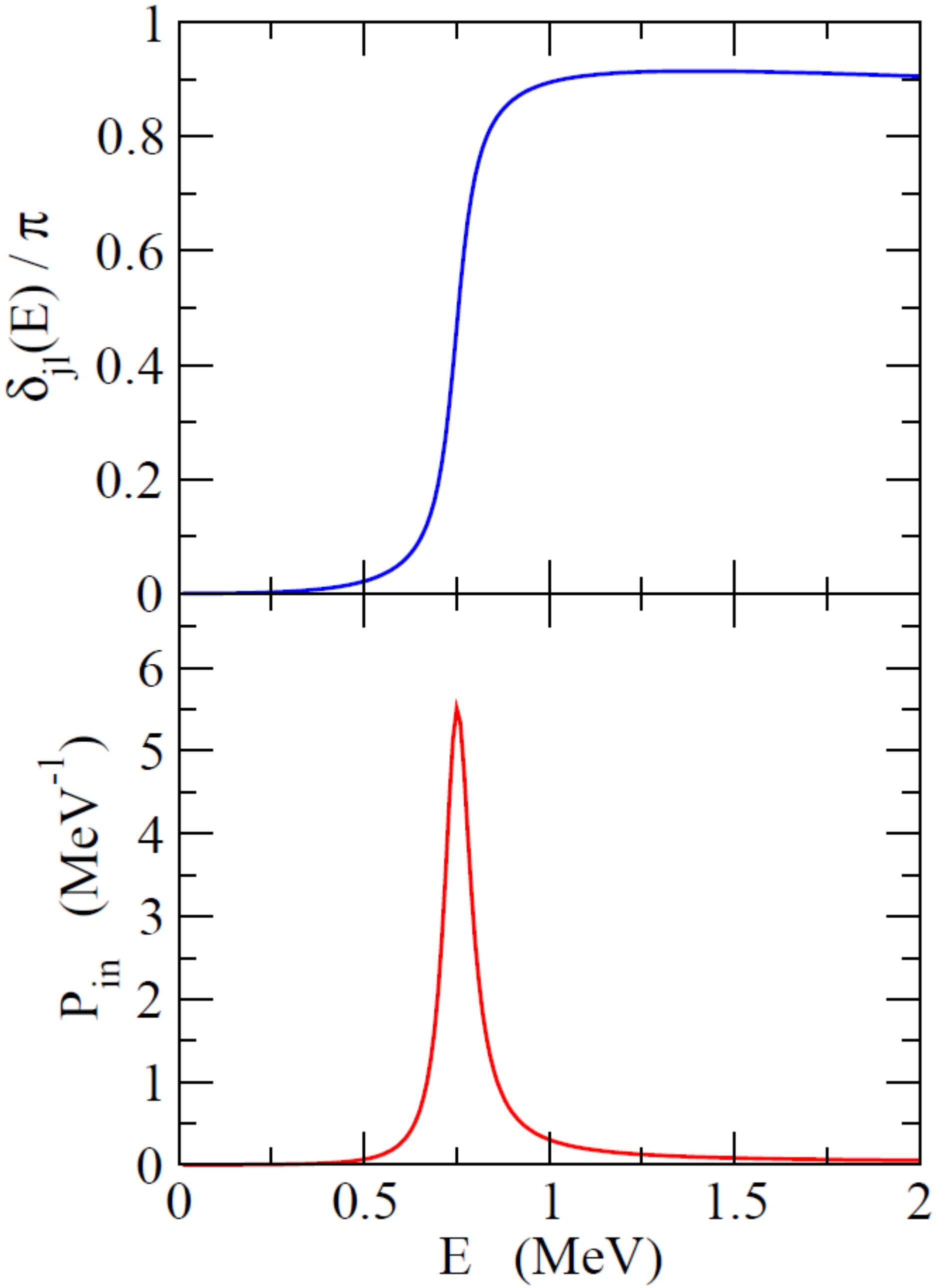


on-resonance:
波動関数は障壁の内側で
大きな振幅

off-resonance:
障壁の内側では振幅が
小さい

それでは波動関数は?





on-resonance:
波動関数は障壁の内側で
大きな振幅

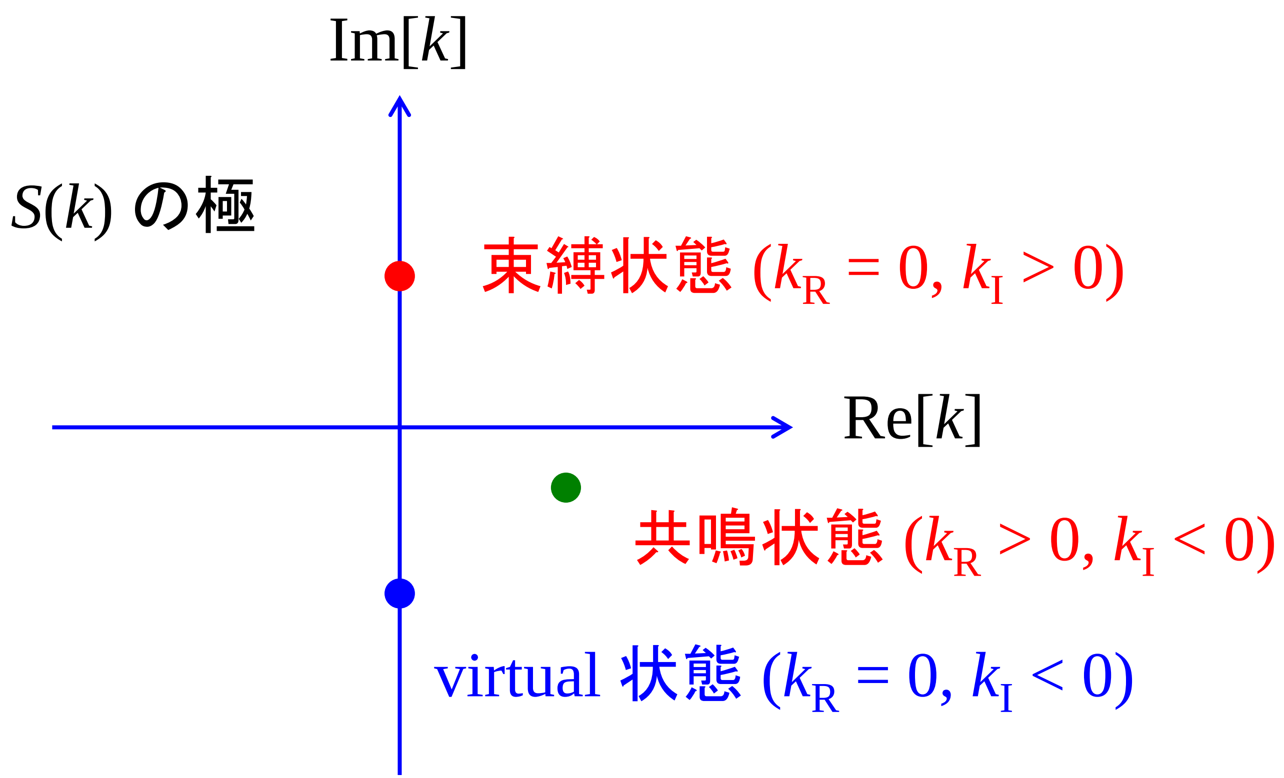
障壁内部の存在確率

$$P_{\mathrm{in}} \equiv \int_0^{r_b} r^2 dr\, |R_{jl}(r)|^2$$

散乱問題:正の実数エネルギー（これが物理的な観測量）

影響

複素エネルギー（または複素運動量）平面で実軸の近くの S 行列の極

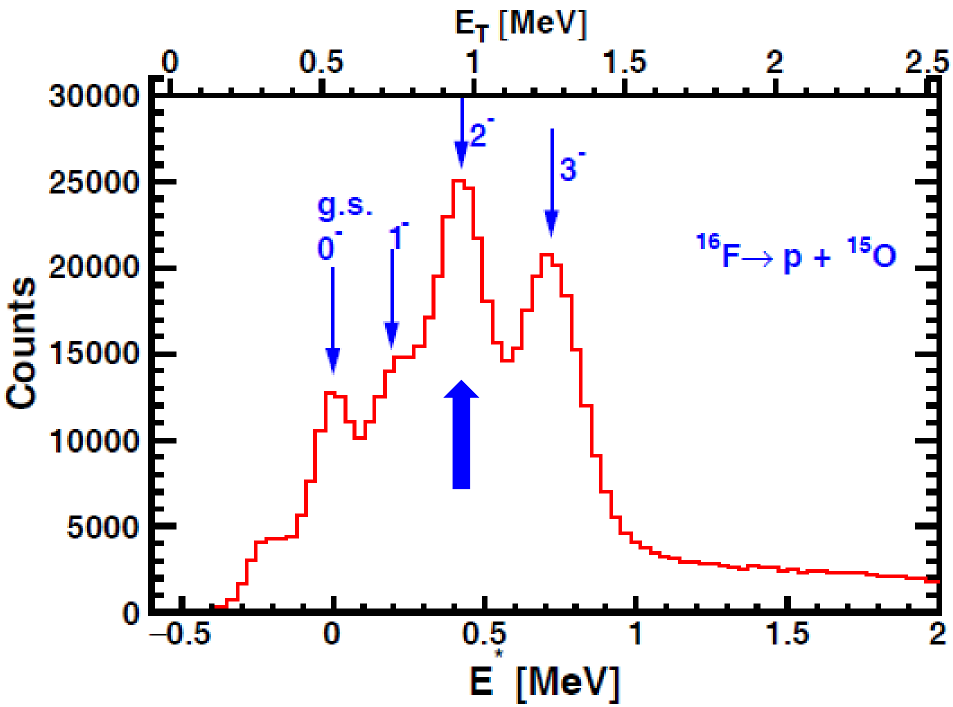


共鳴状態と弾性散乱（共鳴散乱）

まず実際の現象から

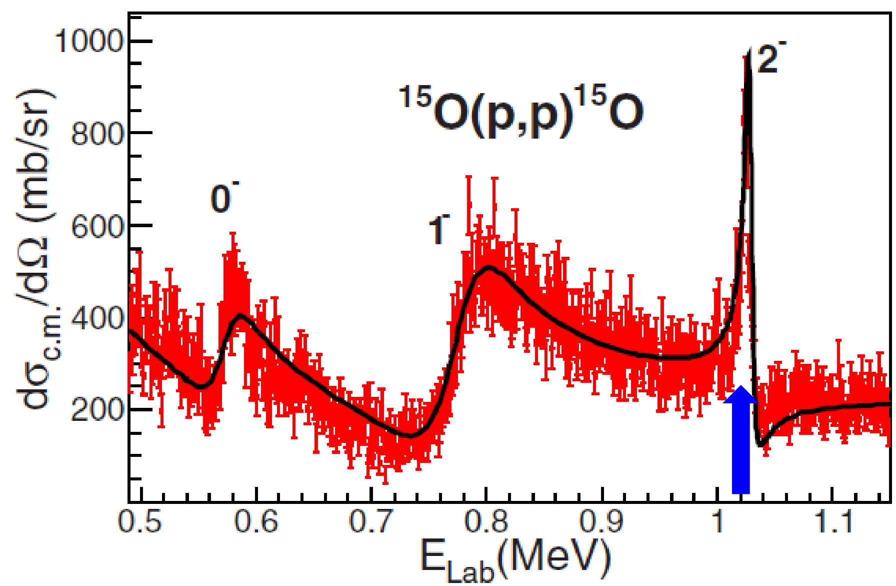
陽子非束縛核 $^{16}_{9}F_{7}$

$^{17}_{10}Ne$から1つ陽子を抜いて
$^{16}_{9}F$ を生成 → 崩壊スペクトル



R.J. Charity,
Eur. Phys. J. Plus 131 (‘16) 63

$^{15}O + p$ 弾性散乱の断面積



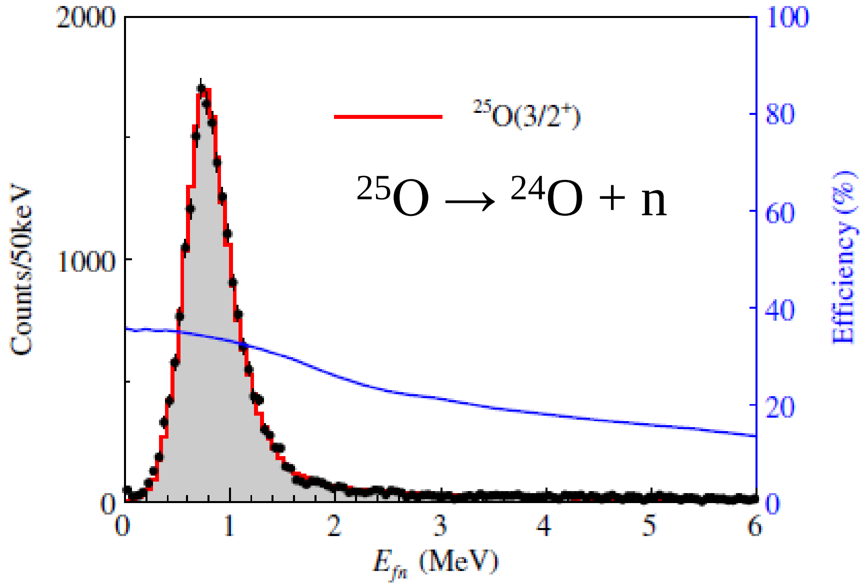
$\theta_{cm} = 180$ deg.

I. Stefan et al., PRC90(‘14) 014307

共鳴エネルギーで弾性散乱の断面積が増大（共鳴散乱）

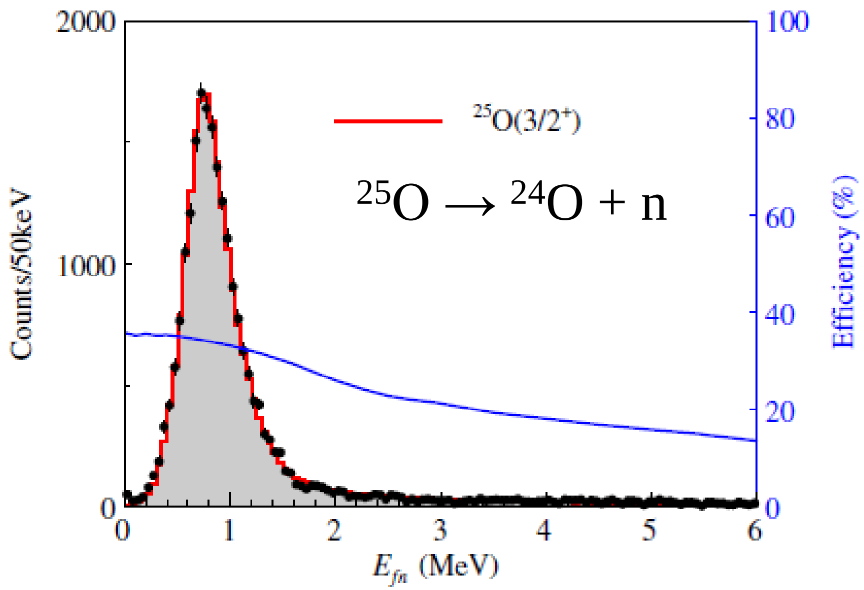
不変質量スペクトルの解析

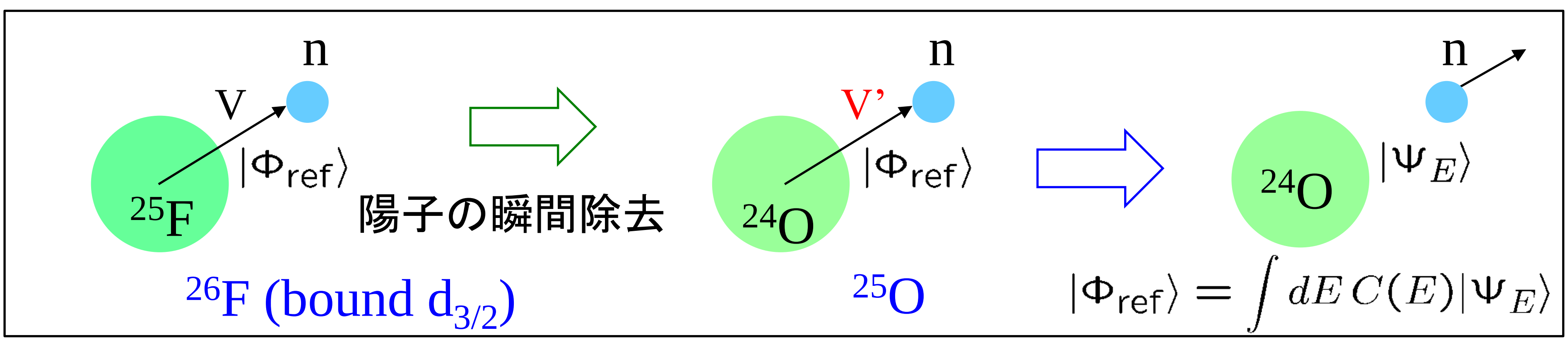
${}^{26}_{9}F_{17}$から1つ陽子を抜いて ${}^{25}_{8}O_{17}$ を生成 → 1中性子を放出して崩壊



不変質量スペクトルの解析

${}^{26}_{9}F_{17}$から1つ陽子を抜いて ${}^{25}_{8}O_{17}$ を
生成 → 1中性子を放出して崩壊

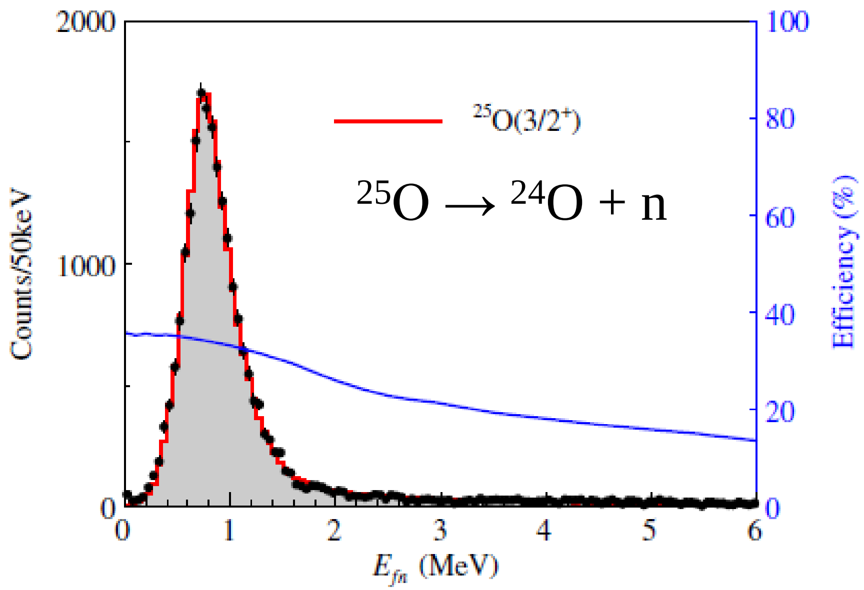


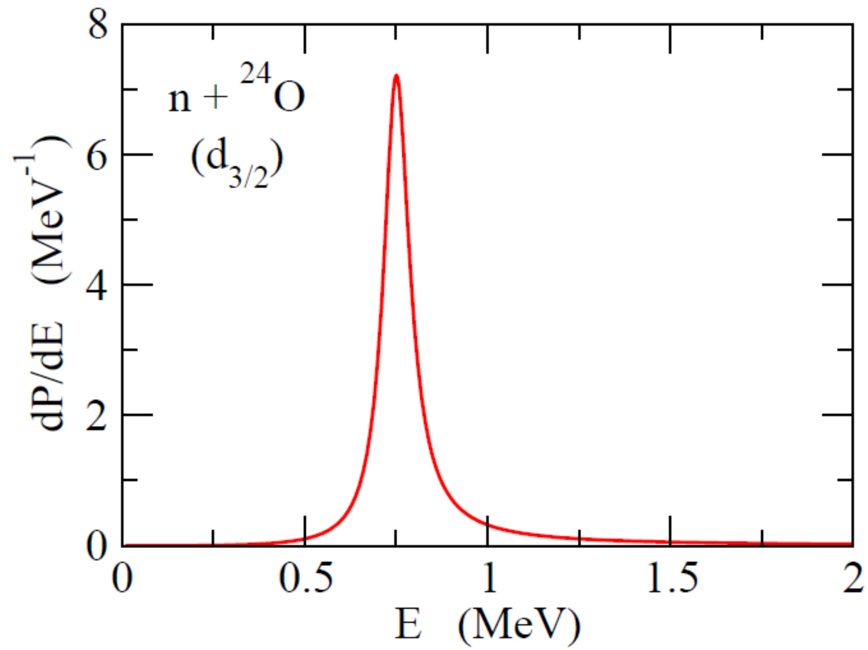


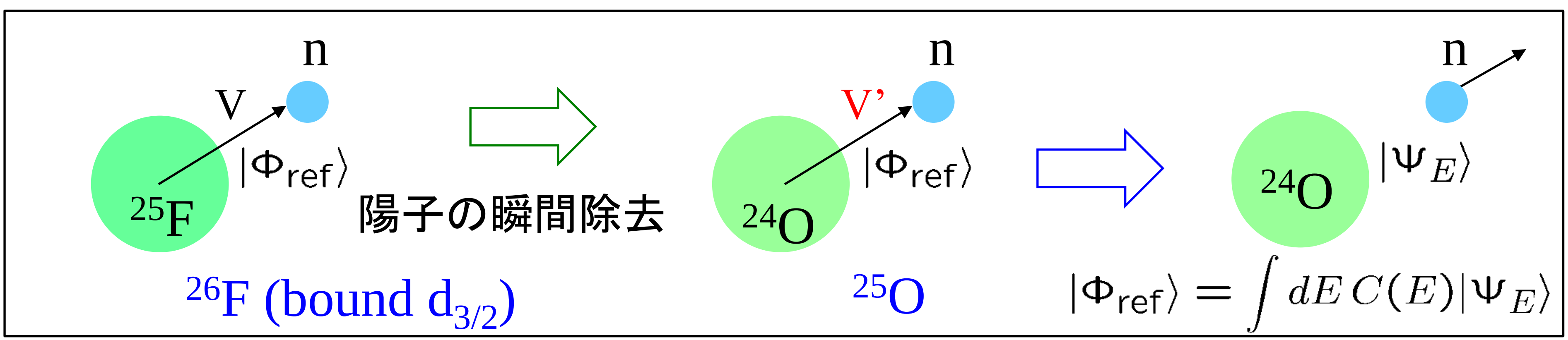
不変質量スペクトルの解析

$^{26}_{9}F_{17}$から1つ陽子を抜いて $^{25}_{8}O_{17}$ を生成 → 1中性子を放出して崩壊

$$\frac{dP}{dE} = |\langle \Phi_{\rm ref} | \Psi_E \rangle|^2$$







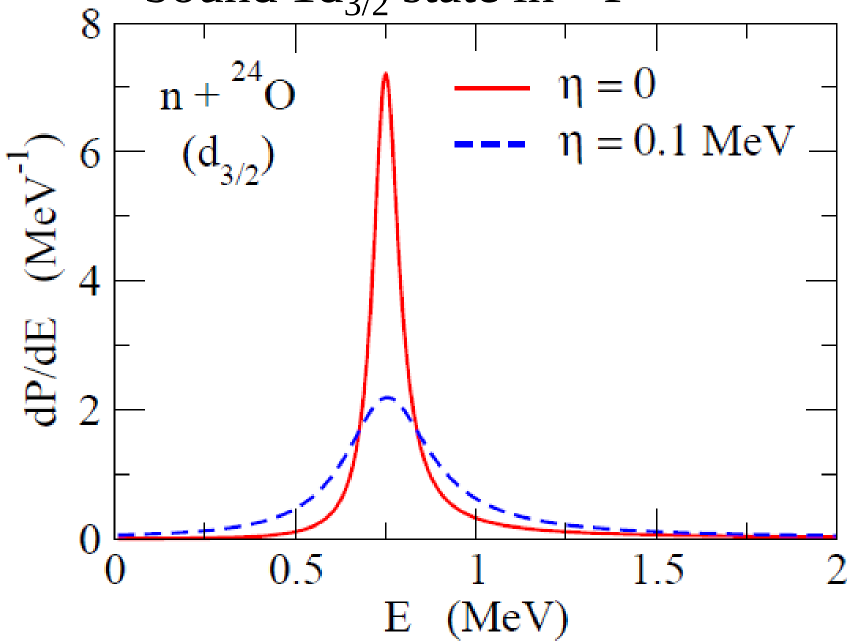
不変質量スペクトルの解析

$$\frac{dP}{dE} = |\langle\Phi_{\rm ref}|\Psi_E\rangle|^2 = \int dE' \, |\langle\Phi_{\rm ref}|\Psi_{E'}\rangle|^2 \delta(E-E')$$

$$\to \frac{1}{\pi} Im \int dE' \, \underbrace{|\langle\Phi_{\rm ref}|\Psi_{E'}\rangle|^2 \frac{1}{E'-E-i\eta}}$$

$= 1 \,/\, (H - E - i\eta) = G(E)$

Reference state:
bound $1d_{3/2}$ state in ^{26}F



$$\lim_{\eta\to 0} \frac{1}{x - i\eta} = P\frac{1}{x} + i\pi\delta(x)$$

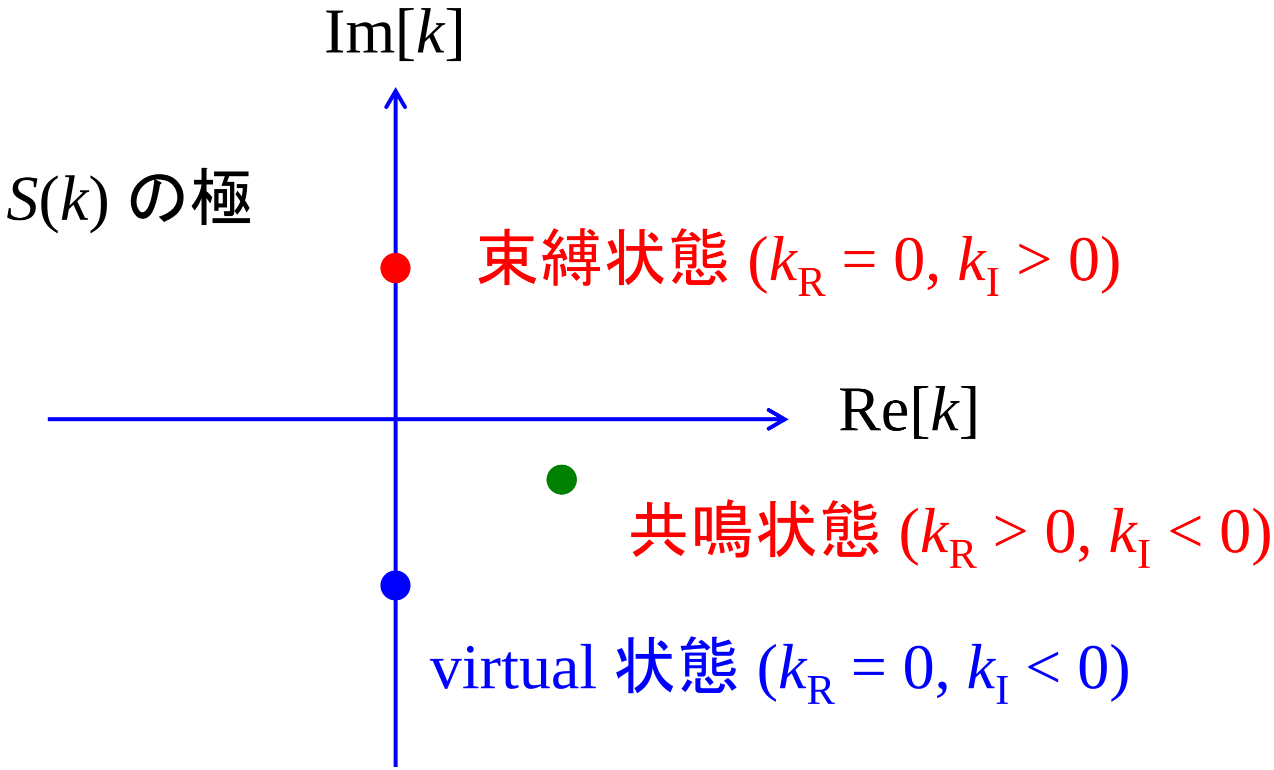
有限の η でも計算できる
（数値計算上便利）

virtual state について

散乱問題：正の実数エネルギー（これが物理的な観測量）

影響

複素エネルギー（または複素運動量）平面で実軸の近くの S 行列の極



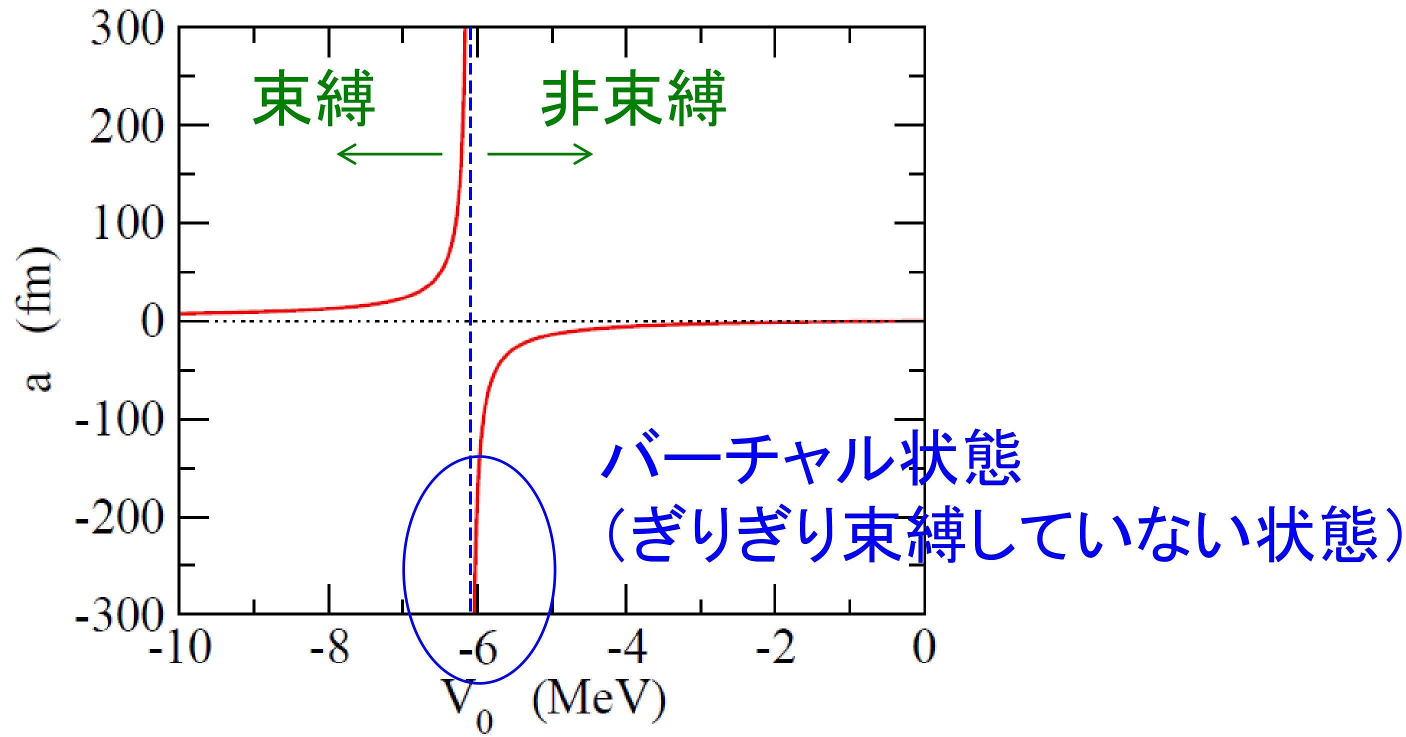
virtual state について

極低エネルギーでの散乱を考える（従って s-wave のみ）

effective range expansion: $$\boxed{k \cot \delta(k) \sim -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_e k^2 + \cdots}$$

virtual state について

散乱長は $E = 0$ の束縛状態を作るときに正で発散



Woods-Saxon ポテンシャルで
ポテンシャルの深さを変える

(R = 2.736 fm, a_0 = 0.67 fm)

散乱長の物理的意味

半径 R の井戸型ポテンシャル：

$$a = R\left(1 - \frac{\tan \kappa R}{\kappa R}\right)$$

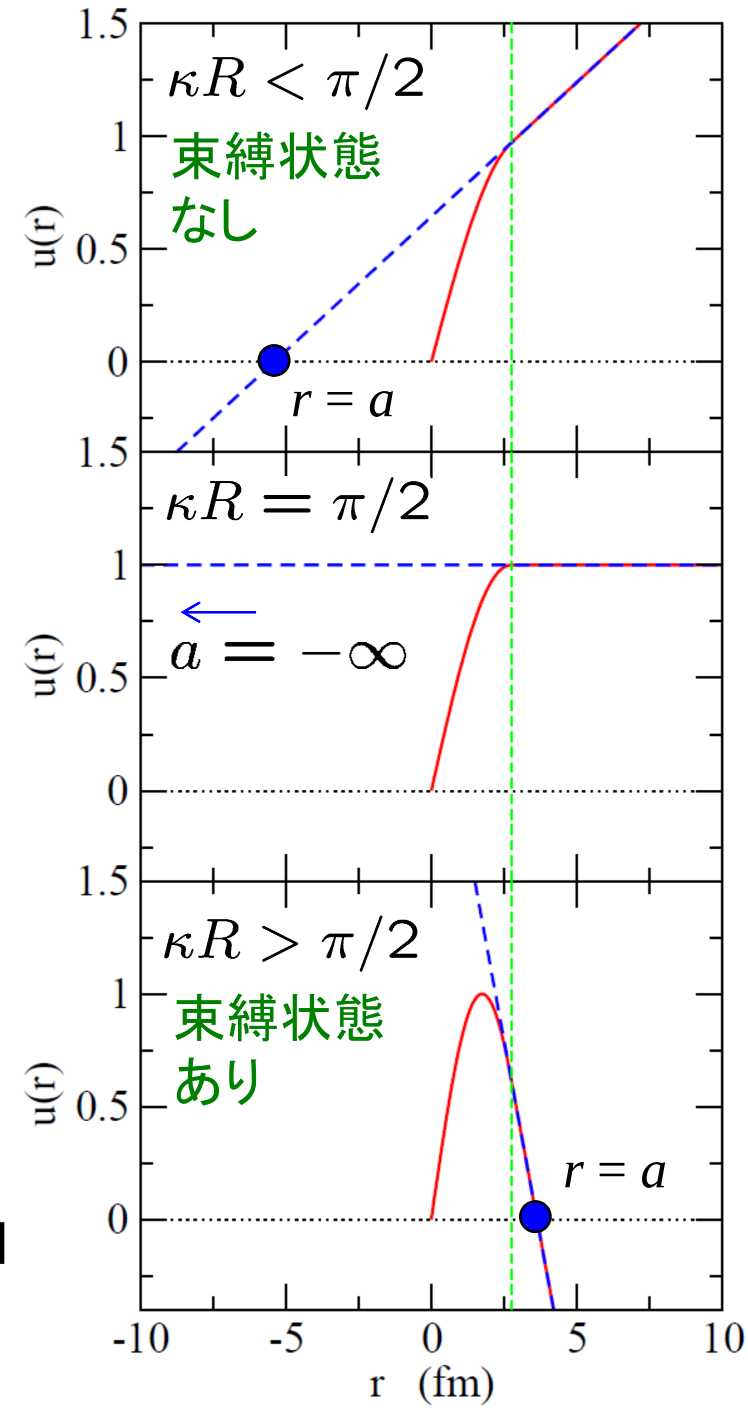
$$\kappa = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}$$

$$u(r) = A\sin(\kappa r) \quad (r < R)$$

$$f(r) \equiv u(R) + u'(R)(r - R)$$

は $r = a$ で $f(a)=0$。

すなわち、散乱長は $r = R$ で波動関数を一次近似したときに、その直線が x 軸を切る点。



virtual state について

極低エネルギーでの散乱を考える（従って s-wave のみ）

effective range expansion:

$$k \cot\delta(k) \sim -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_e k^2 + \cdots$$

このとき、

$$\begin{aligned} S(k) &= \frac{e^{i\delta}}{e^{-i\delta}} = \frac{\cos\delta + i\sin\delta}{\cos\delta - i\sin\delta} \\ &= \frac{\cot\delta + i}{\cot\delta - i} \\ &\sim \frac{-1/a + ik}{-1/a - ik} \end{aligned}$$

極は $k = i\dfrac{1}{a}$

$a < 0$ なら virtual 状態、$a > 0$ なら（浅い）束縛状態

virtual state について

極低エネルギーでの散乱を考える(従って s-wave のみ)

effective range expansion:

$$\boxed{k\cot\delta(k) \sim -\frac{1}{a} + \frac{1}{2}r_e k^2 + \cdots}$$

このとき、

$$\boxed{S(k) \sim \frac{-1/a + ik}{-1/a - ik}}$$

極は $k = i\,\dfrac{1}{a}$

極が実軸に近い $\longrightarrow$ $|a|$ が大

このとき、弾性散乱の全断面積:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta = \frac{4\pi}{(k\cot\delta)^2 + k^2} \sim 4\pi a^2$$

: large