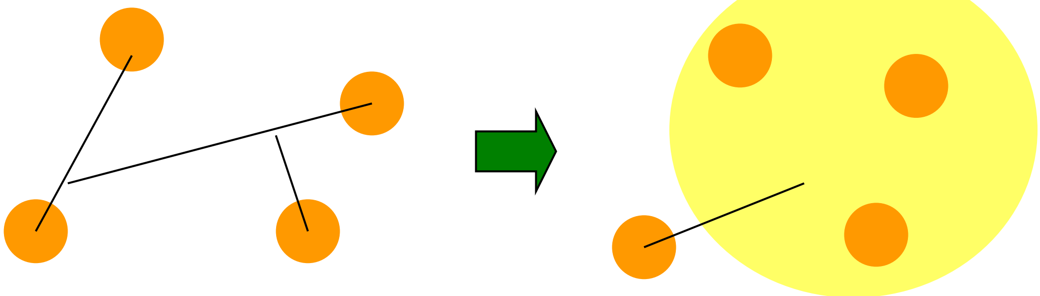
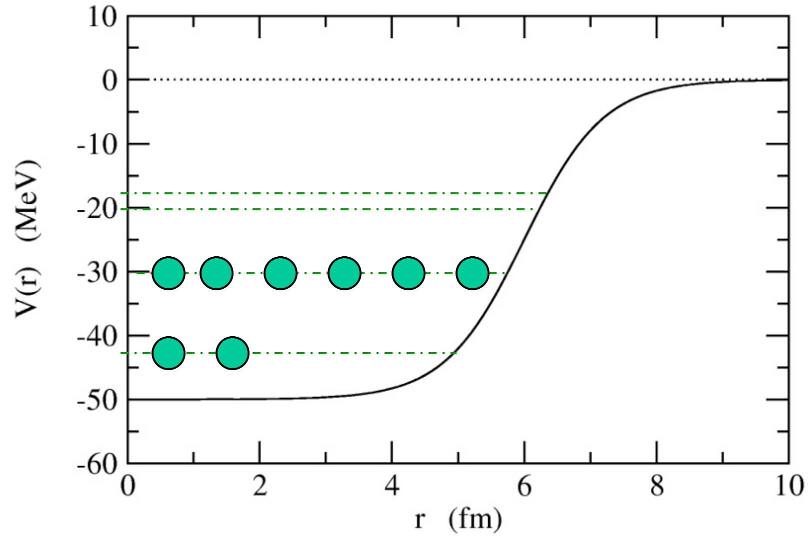
Pairing Correlation（対相関）

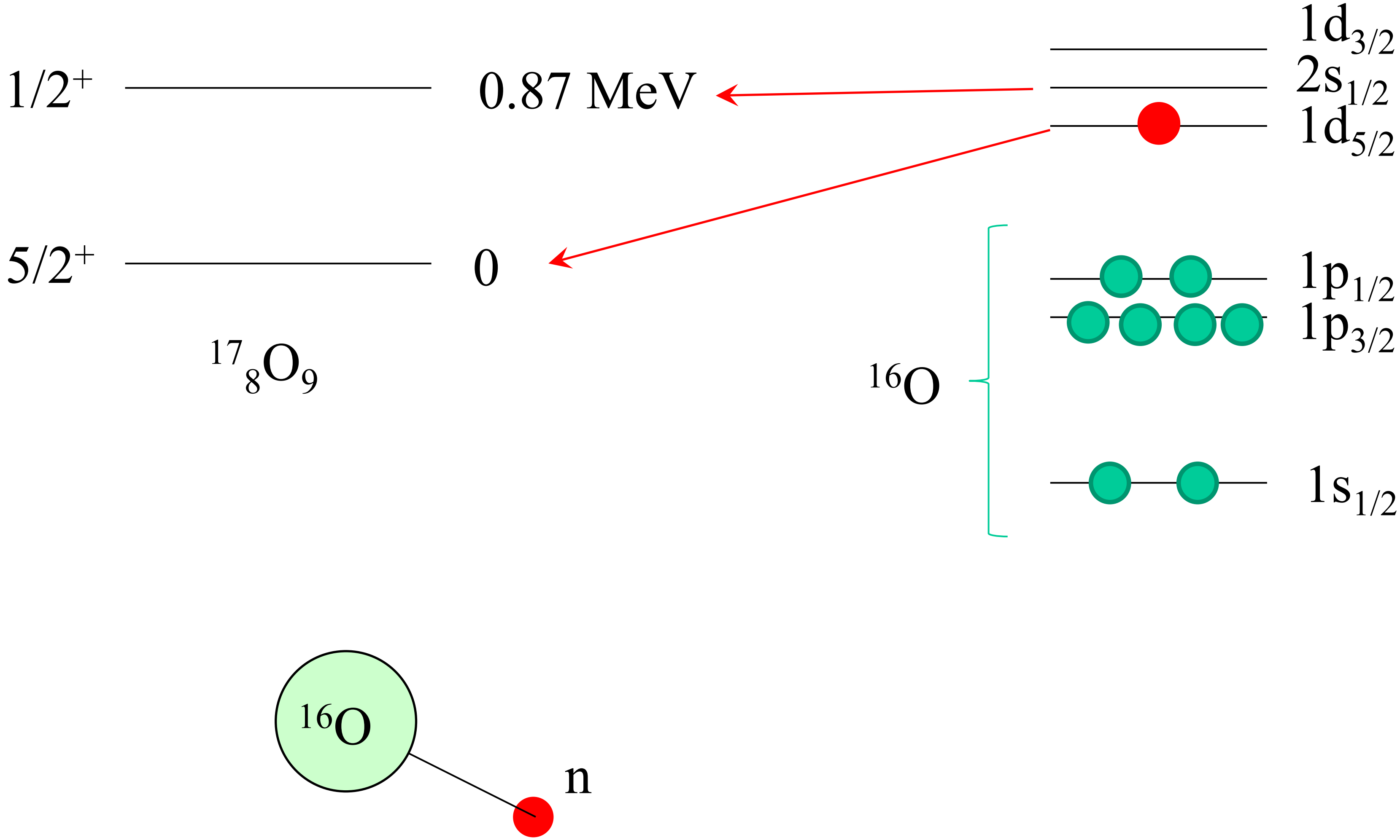
平均場近似





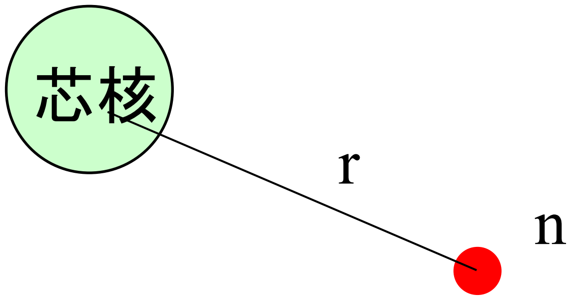
ポテンシャルの中での → 核子間の相互作用:
独立粒子描像
核子の感じるポテンシャル
としてのみ

魔法数の説明

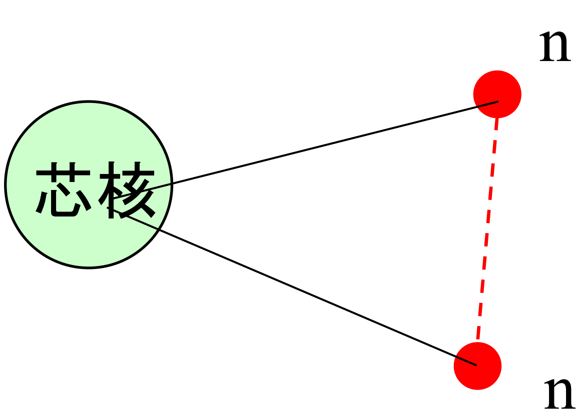


$1/2^+$
0.87 MeV
$5/2^+$
0
$^{17}_{8}O_9$
$1d_{3/2}$
$2s_{1/2}$
$1d_{5/2}$
$1p_{1/2}$
$1p_{3/2}$
^{16}O
$1s_{1/2}$
^{16}O
n

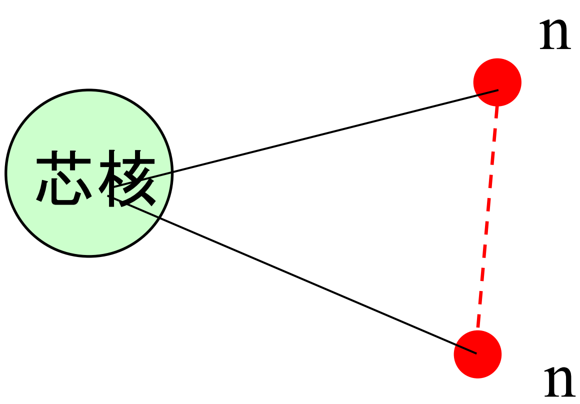
対相関



芯核のまわりに中性子が2個あるとどうなる?

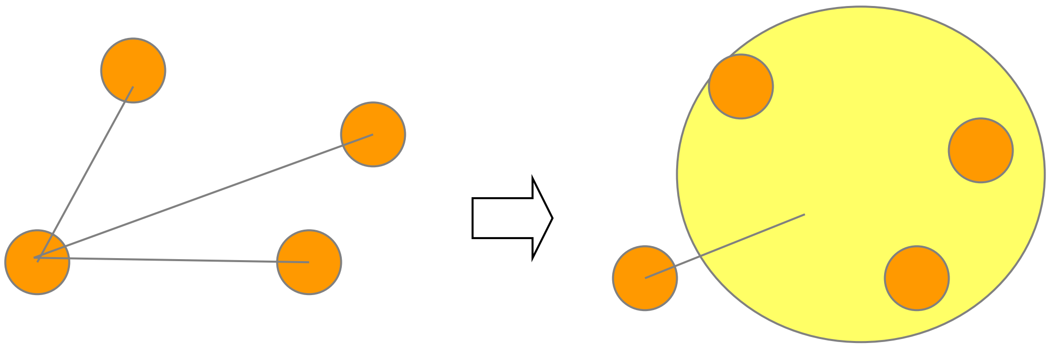


2中性子間に働く相互作用の影響は?



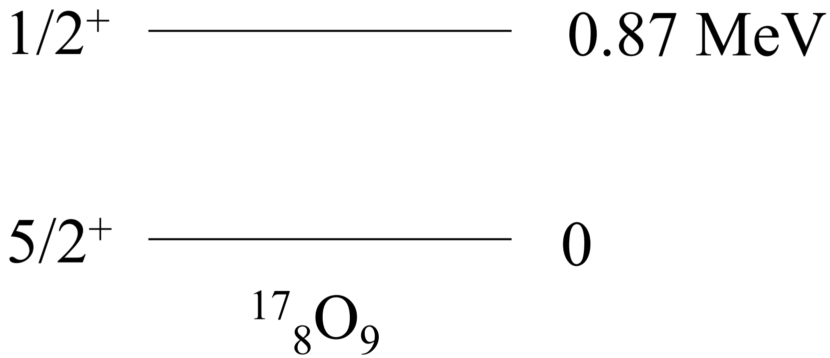
2中性子間に働く相互作用の影響は?

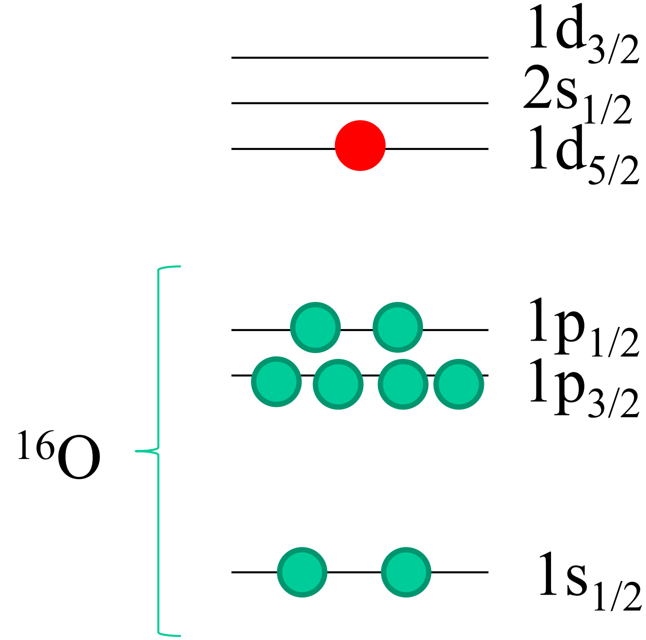
平均場理論



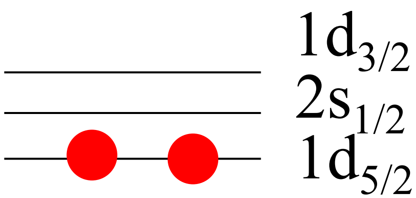
他の核子との相互作用を平均的に取り扱う

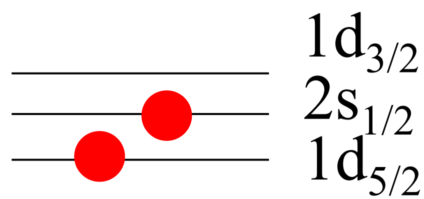
単純な平均場近似　→ 2中性子が独立に運動
(2中性子間の相互作用は平均ポテンシャルにのみ反映される)

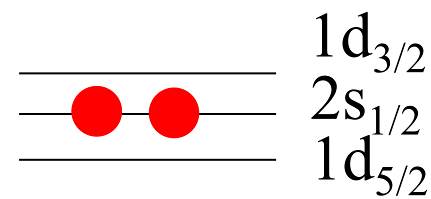




^{18}O の状態を予想すると。。。







$E = 0$

$I^\pi = d_{5/2} \times d_{5/2} = 0^+, 2^+, 4^+$

$E = 0.87$ MeV

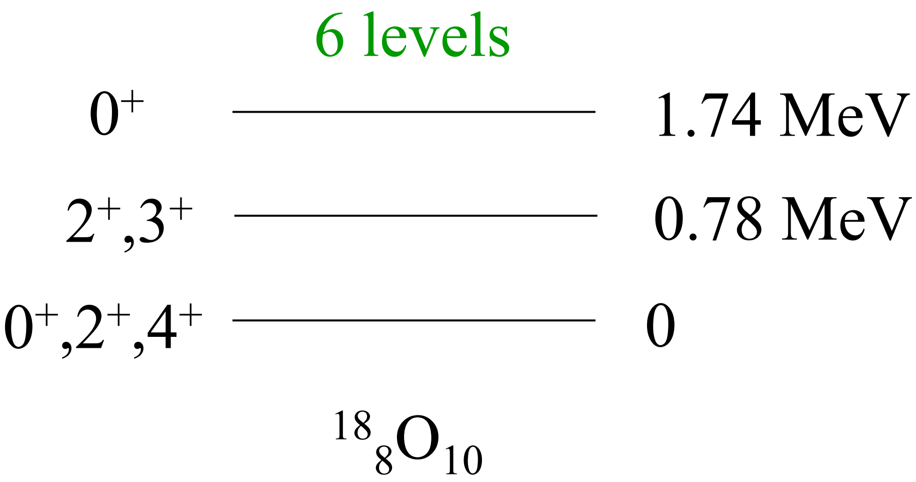
$I^\pi = d_{5/2} \times s_{1/2} = 2^+, 3^+$

$E = 0.87 \times 2 = 1.74$ MeV

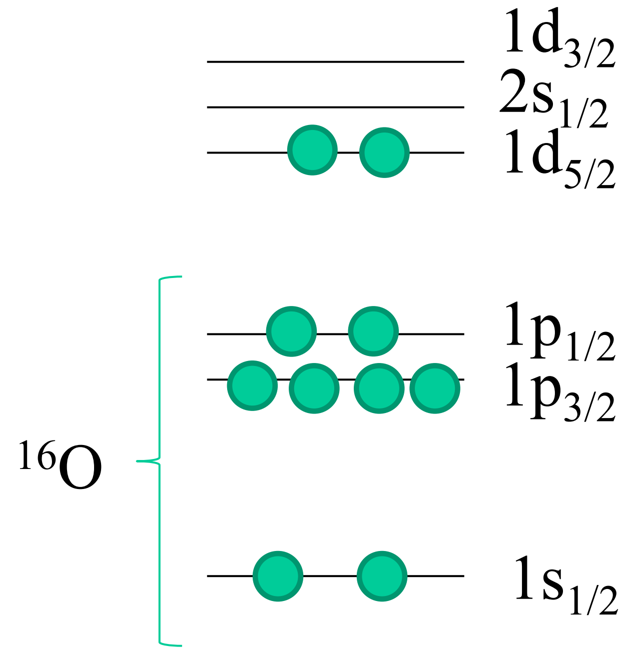
$I^\pi = s_{1/2} \times s_{1/2} = 0^+$

2 MeV 以下に少なくとも6本の状態（？）

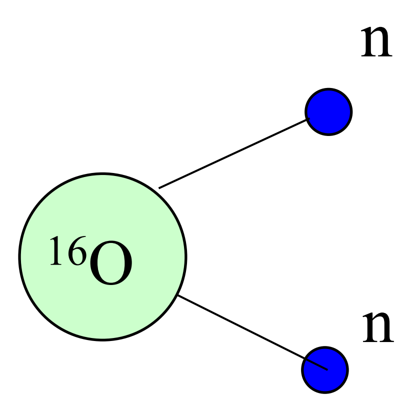
単純な平均場近似:



6 levels
0^+
1.74 MeV
$2^+, 3^+$
0.78 MeV
$0^+, 2^+, 4^+$
0
${}^{18}_{8}O_{10}$



$1d_{3/2}$
$2s_{1/2}$
$1d_{5/2}$
$1p_{1/2}$
$1p_{3/2}$
${}^{16}O$
$1s_{1/2}$



n
${}^{16}O$
n

単純な平均場近似:

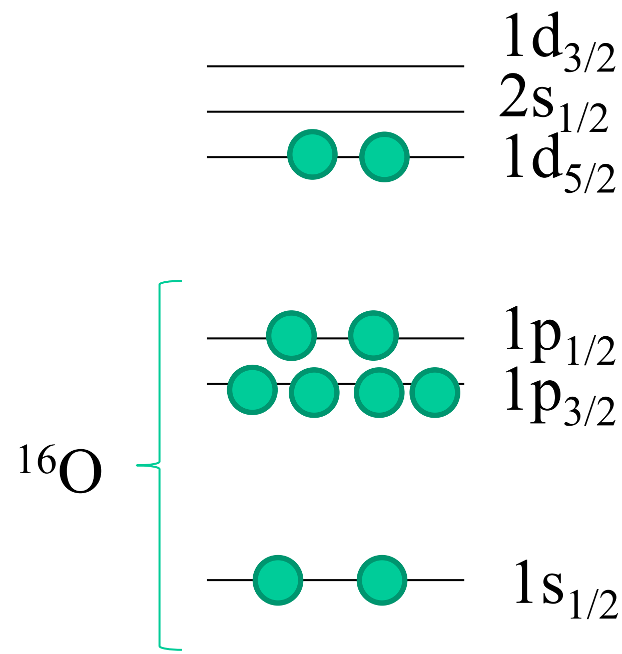
6 levels

0^+ —— 1.74 MeV

$2^+,3^+$ —— 0.78 MeV

$0^+,2^+,4^+$ —— 0

${}^{18}_{8}O_{10}$

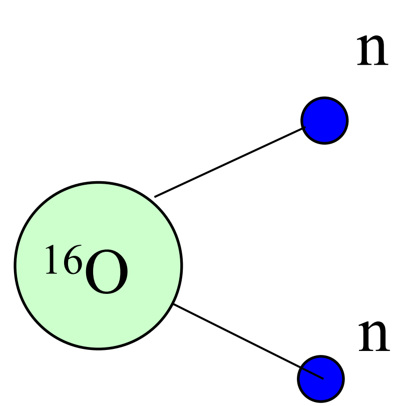


実際には:

2^+ —— 1.98 MeV

0^+ —— 0

${}^{18}_{8}O_{10}$



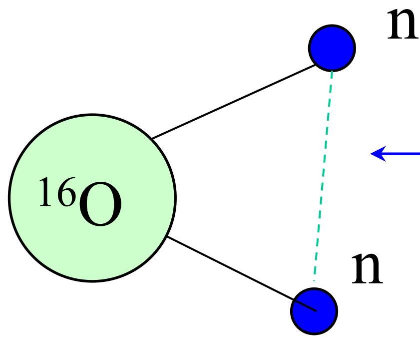
たったの2本!

$$H=\sum_i T_i+\sum_{i<j} v_{ij} \to H=\sum_i (T_i+V_i)+\underbrace{\cancel{\sum_{i<j} v_{ij}-\sum_i V_i}}_{\text{平均からのずれ（残留相互作用）}}$$

残留相互作用は完全に無視してもよいのか?

答え:no

開殻原子核では重要な役割を果たすことが知られている(ペアリング)



(note) 摂動論がいい条件

$$H = H_0 + \Delta V$$

$$H_0|\phi_n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)}|\phi_n^{(0)}\rangle$$

$$\rightarrow |\phi_n\rangle = |\phi_n^{(0)}\rangle + \sum_{m\neq n} \frac{\langle\phi_m^{(0)}|\Delta V|\phi_n^{(0)}\rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}|\phi_m^{(0)}\rangle$$

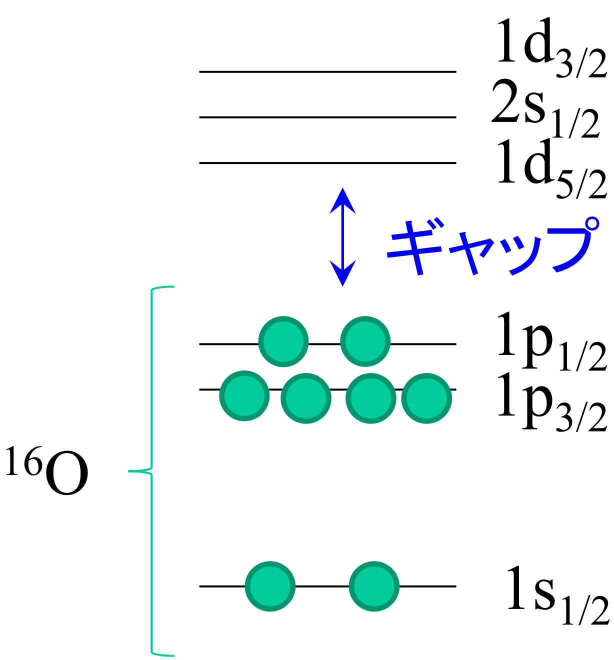
$$\Rightarrow \boxed{|\langle\phi_m^{(0)}|\Delta V|\phi_n^{(0)}\rangle| \ll |E_n^{(0)} - E_m^{(0)}|}$$

なら ΔV を無視できる

$$H = H_0 + \Delta V$$

$$\Rightarrow \boxed{|\langle \phi_m^{(0)} | \Delta V | \phi_n^{(0)} \rangle| \ll |E_n^{(0)} - E_m^{(0)}| \quad \text{なら} \, \Delta V \, \text{を無視できる}}$$

$$H = \sum_i T_i + \sum_{i<j} v_{ij} \rightarrow H = \sum_i (T_i + V_i) + \underbrace{\sum_{i<j} v_{ij} - \sum_i V_i}_{\text{平均からのずれ（残留相互作用）}}$$



閉殻核:
ギャップのためにΔEが大きい
→ 残留相互作用を無視できる

開殻核: ΔEが小さい
→ 残留相互作用を無視できない

対相関（ペアリング）

$$H=\sum_{i=1}^{A}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}_i^2+V_{\mathrm{HF}}(i)\right)+\underline{\underline{\frac{1}{2}\sum_{i,j}^{A}v(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}_j)-\sum_i V_{\mathrm{HF}}(i)}}$$

簡単のために、残留相互作用としてデルタ関数を仮定してみる（超短距離力）

$$v_{\mathrm{res}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\qquad\sim-g\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

<u>摂動論で残留相互作用の効果を見積もってみる:</u>

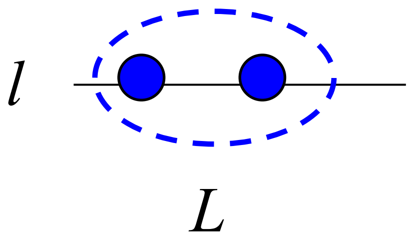
対相関(ペアリング)

$$H=\sum_{i=1}^{A}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_i^2+V_{\rm HF}(i)\right)+\frac{1}{2}\sum_{i,j}^{A}v(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}_j)-\sum_i V_{\rm HF}(i)$$

簡単のために、残留相互作用としてデルタ関数を仮定してみる
(超短距離力)

$$v_{\rm res}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\qquad\sim -g\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

摂動論で残留相互作用の効果を見積もってみる:

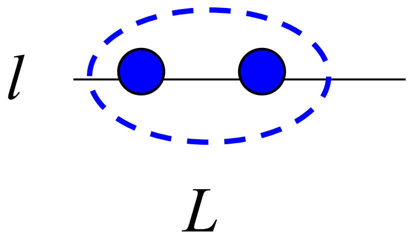


非摂動な波動関数:
角運動量 l の状態に中性子2個、それが
全角運動量 L を組んでいる

$$\boxed{|(ll)LM\rangle=\sum_{m,m'}\langle lmlm'|LM\rangle\psi_{lm}(\boldsymbol{r})\psi_{lm'}(\boldsymbol{r}')}$$

対相関（ペアリング）

$$v_{\rm res}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \quad \sim -g\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$



$$\boxed{|(ll)LM\rangle = \sum_{m,m'}\langle lmlm'|LM\rangle\psi_{lm}(\boldsymbol{r})\psi_{lm'}(\boldsymbol{r}')}$$

$$\Downarrow$$

残留相互作用によるエネルギー変化：

$$\begin{aligned}\Delta E_L &= \langle (ll)LM|v_{\rm res}|(ll)LM\rangle \\ &= -g\,I_r^{(l)}\frac{(2l+1)^2}{4\pi}\begin{pmatrix} l & l & L \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^2\end{aligned}$$

$$I_r^{(l)} = \int_0^\infty r^2dr\,(R_l(r))^4$$

$$\Delta E_L = -g\, I_r^{(l)} \frac{(2l+1)^2}{4\pi} \begin{pmatrix} l & l & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \equiv -g\, I_r^{(l)} \frac{A(ll;L)}{4\pi}$$

$A(ll;L)$	$L=0$	$L=2$	$L=4$	$L=6$	$L=8$
$l=2$	5.00	1.43	1.43	---	---
$l=3$	7.00	1.87	1.27	1.63	---
$l=4$	9.00	2.34	1.46	1.26	1.81

$$\Delta E_L = -g\, I_r^{(l)} \frac{(2l+1)^2}{4\pi} \begin{pmatrix} l & l & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \equiv -g\, I_r^{(l)} \frac{A(ll;L)}{4\pi}$$

$A(ll;L)$	$L=0$	$L=2$	$L=4$	$L=6$	$L=8$
$l=2$	5.00	1.43	1.43	---	---
$l=3$	7.00	1.87	1.27	1.63	---
$l=4$	9.00	2.34	1.46	1.26	1.81

$$\Delta E_L = -g\, I_r^{(l)} \frac{(2l+1)^2}{4\pi} \begin{pmatrix} l & l & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \equiv -g\, I_r^{(l)} \frac{A(ll;L)}{4\pi}$$

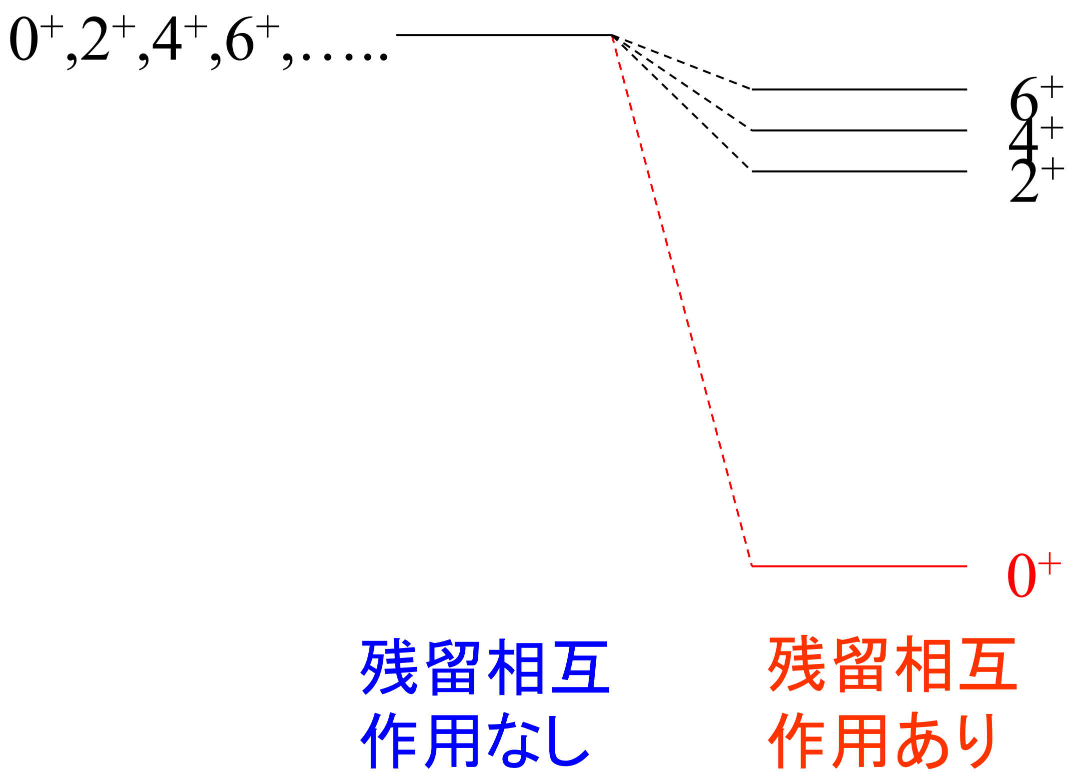
$A(ll;L)$	L=0	L=2	L=4	L=6	L=8
$l=2$	5.00	1.43	1.43	---	---
$l=3$	7.00	1.87	1.27	1.63	---
$l=4$	9.00	2.34	1.46	1.26	1.81

$0^+, 2^+, 4^+, 6^+, \ldots\ldots$

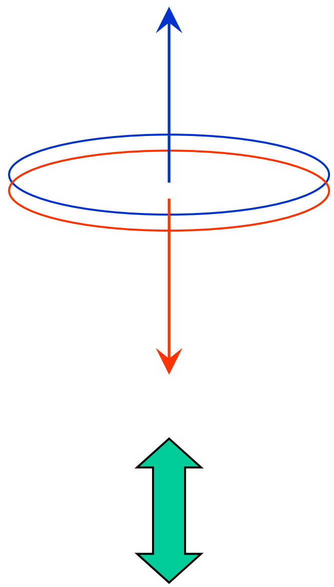
残留相互
作用なし

$$\Delta E_L = -g\, I_r^{(l)} \frac{(2l+1)^2}{4\pi} \begin{pmatrix} l & l & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \equiv -g\, I_r^{(l)} \frac{A(ll;L)}{4\pi}$$

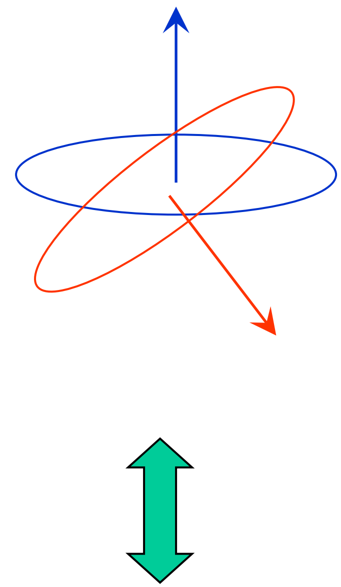
$A(ll;L)$	L=0	L=2	L=4	L=6	L=8
$l = 2$	5.00	1.43	1.43	---	---
$l = 3$	7.00	1.87	1.27	1.63	---
$l = 4$	9.00	2.34	1.46	1.26	1.81



簡単な解釈:



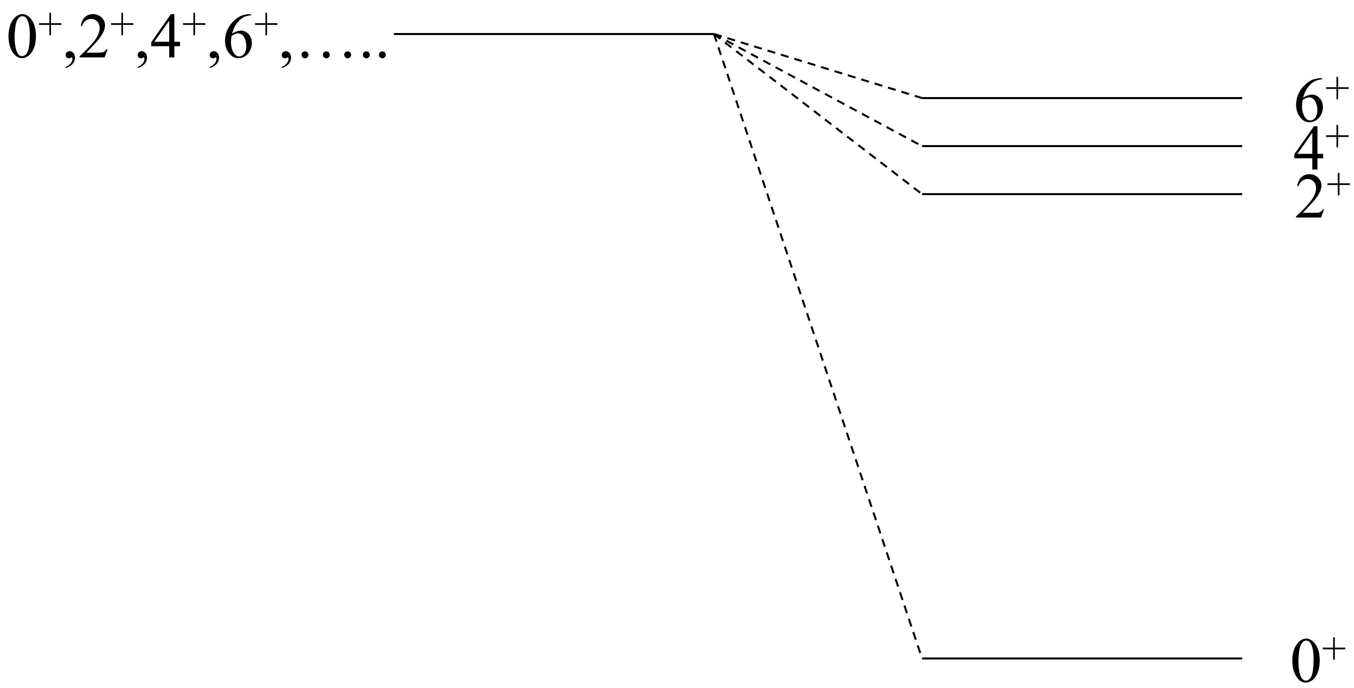
L=0 対



$L \neq 0$ 対

$\boxed{L=0 \text{ 対に対して空間的重なりが最大（エネルギー的に得）}}$

“対相関”



残留相互作用なし

残留相互作用あり

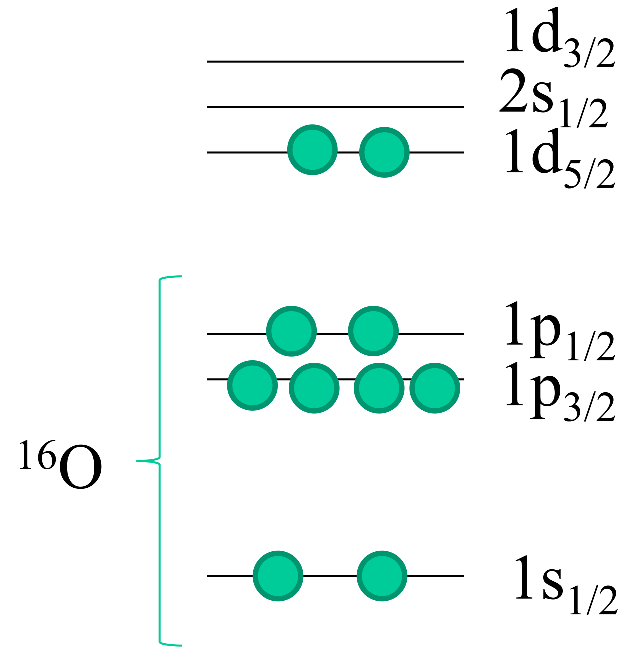
原子核の基底状態のスピン

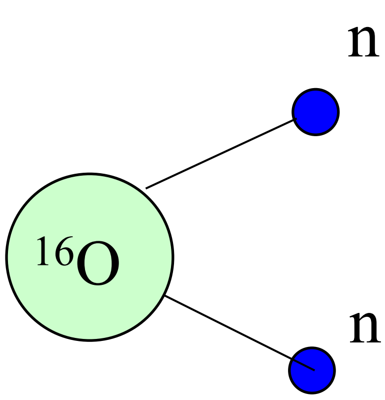
- 偶々核:例外なしに 0^+
- 奇核: 最外殻核子の角運動量と一致

単純な平均場近似:

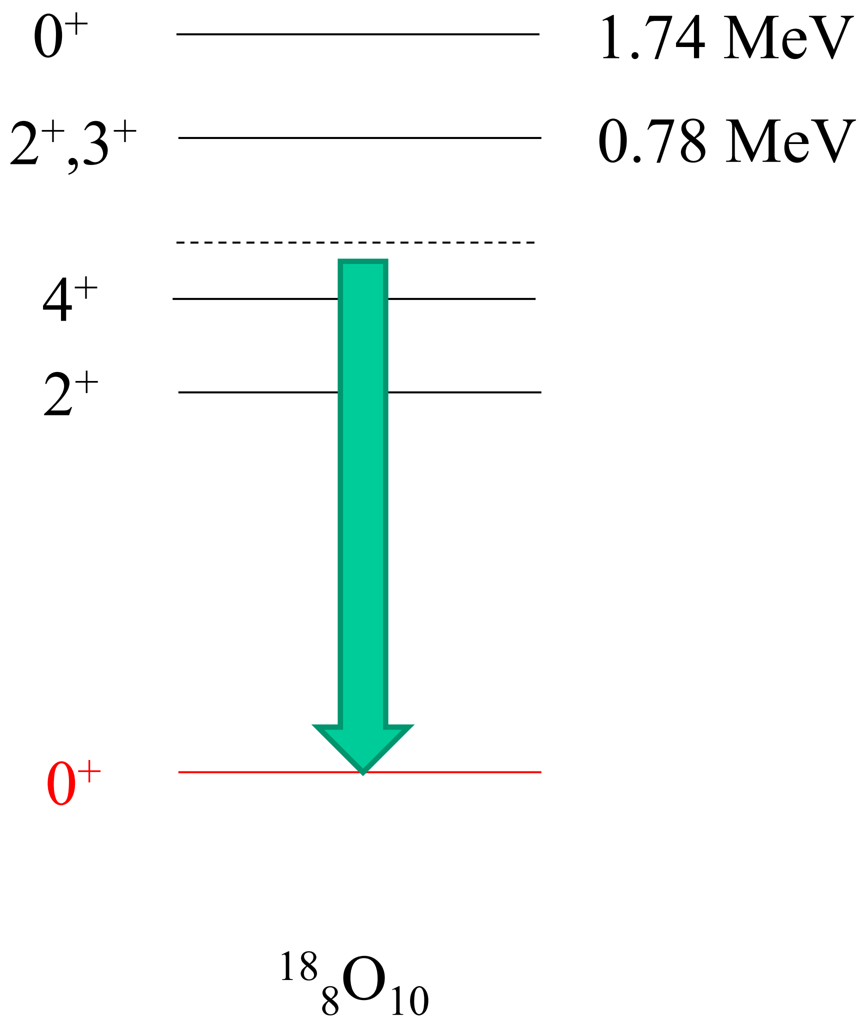
0^+		1.74 MeV
$2^+, 3^+$		0.78 MeV
$0^+, 2^+, 4^+$		0

$^{18}_{8}O_{10}$

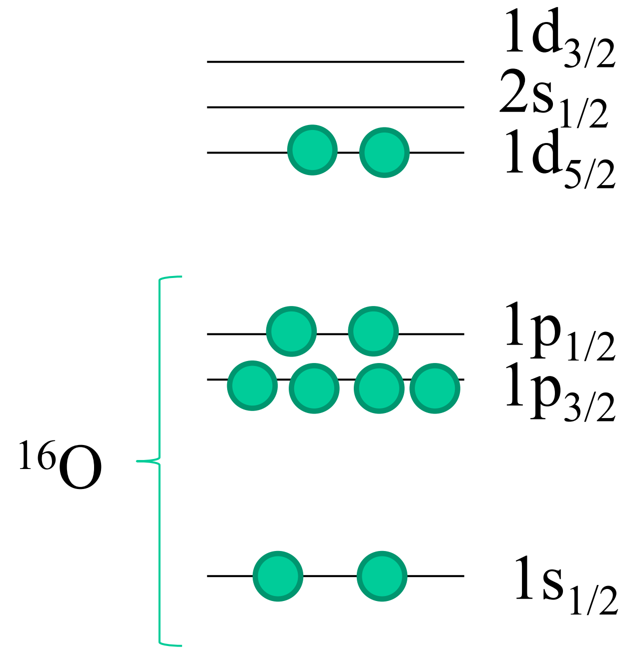




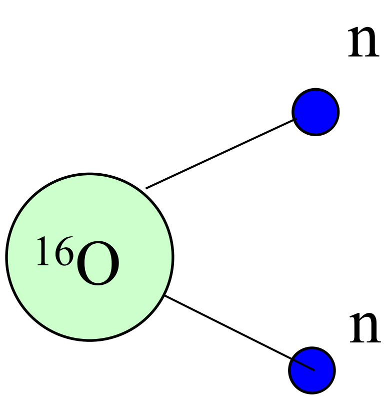
単純な平均場近似:



0+
1.74 MeV
2+,3+
0.78 MeV
4+
2+
0+
18 8 O 10



1d3/2
2s1/2
1d5/2
1p1/2
1p3/2
16O
1s1/2

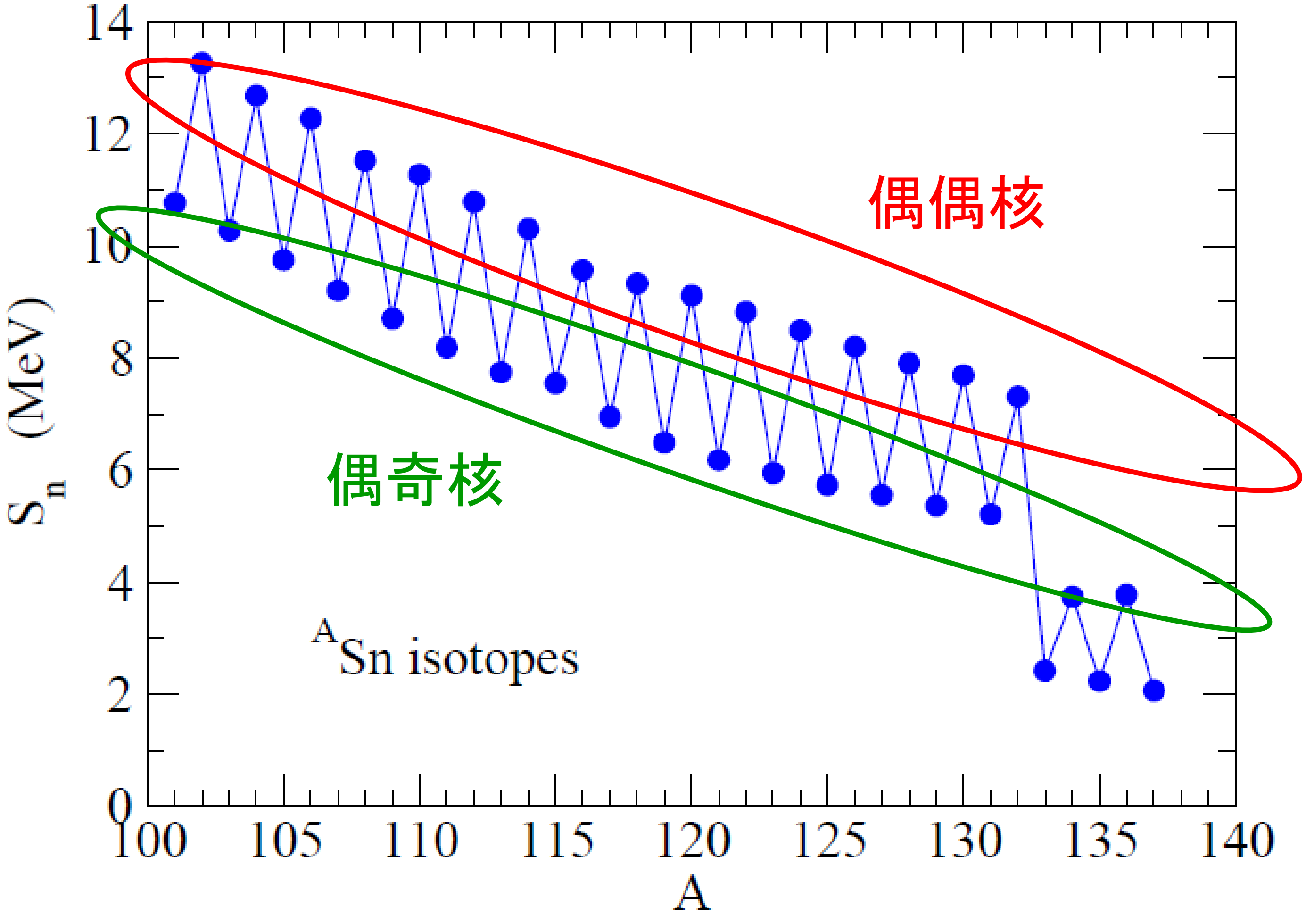


n
16O
n

対相関エネルギー

偶数個の中性子から1つ中性子を取る方が奇数個から取るより大きなエネルギーが必要:対相関

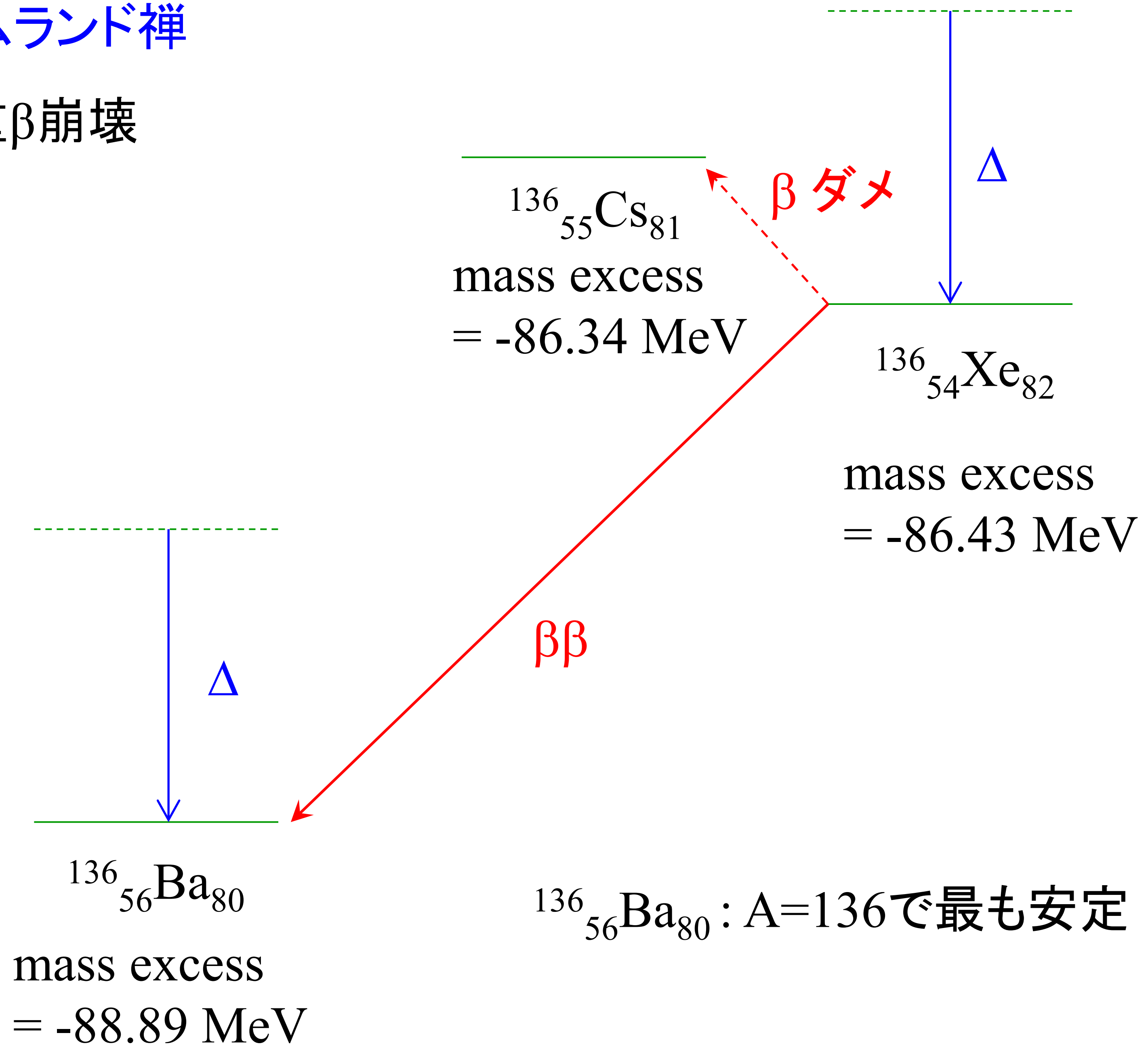
even-odd staggering



1n separation energy: $S_n\,(A,Z) = B(A,Z) - B(A\text{-}1,Z)$

(参考)カムランド禅

^{136}Xeの2重β崩壊



$^{136}_{56}Ba_{80}$: A=136で最も安定

(参考)中性子誘起核分裂

$$n + {}^{235}U \rightarrow {}^{236}U^* \rightarrow \text{fission}$$

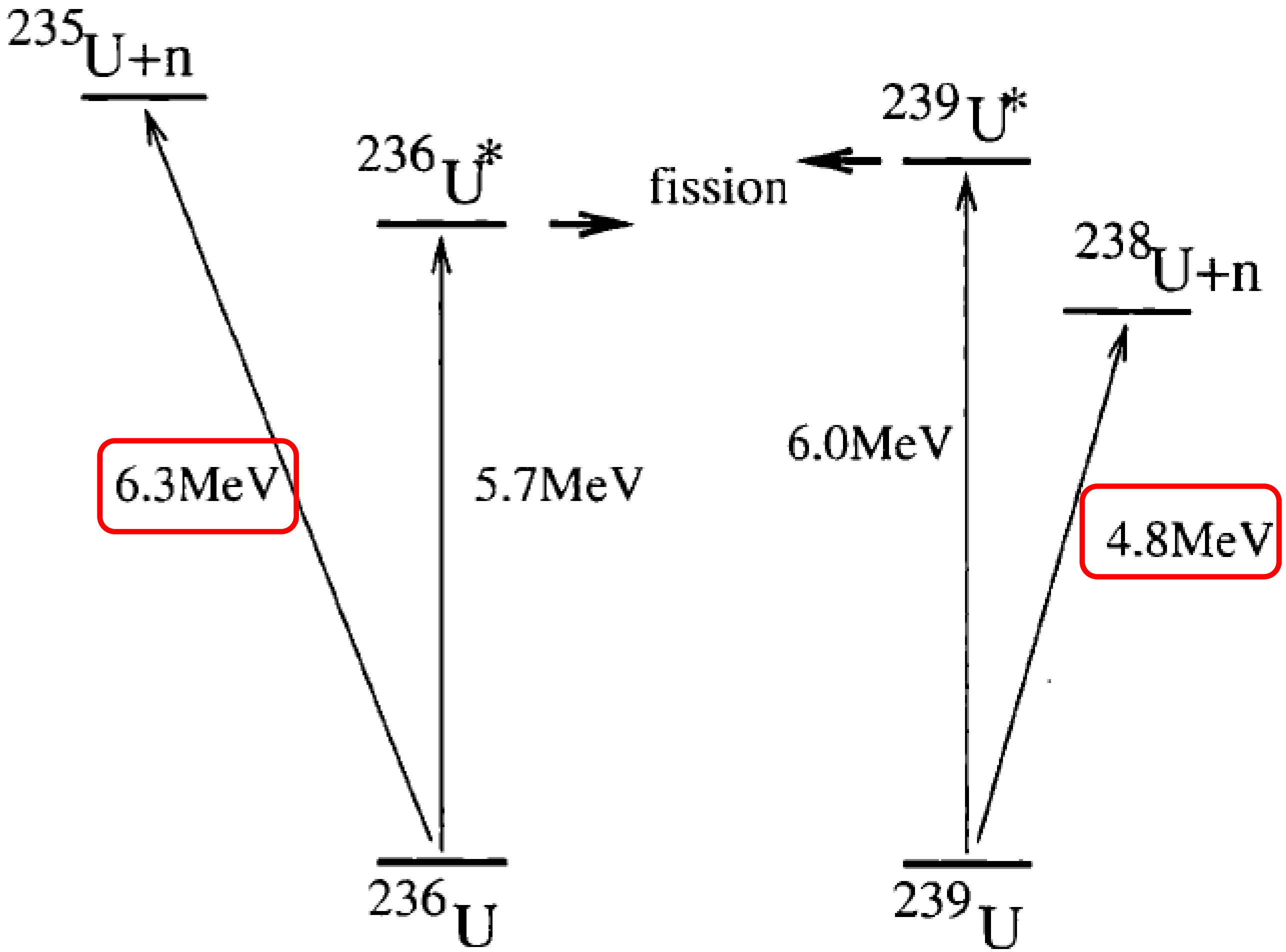
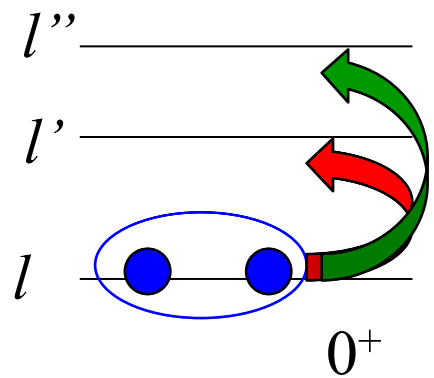
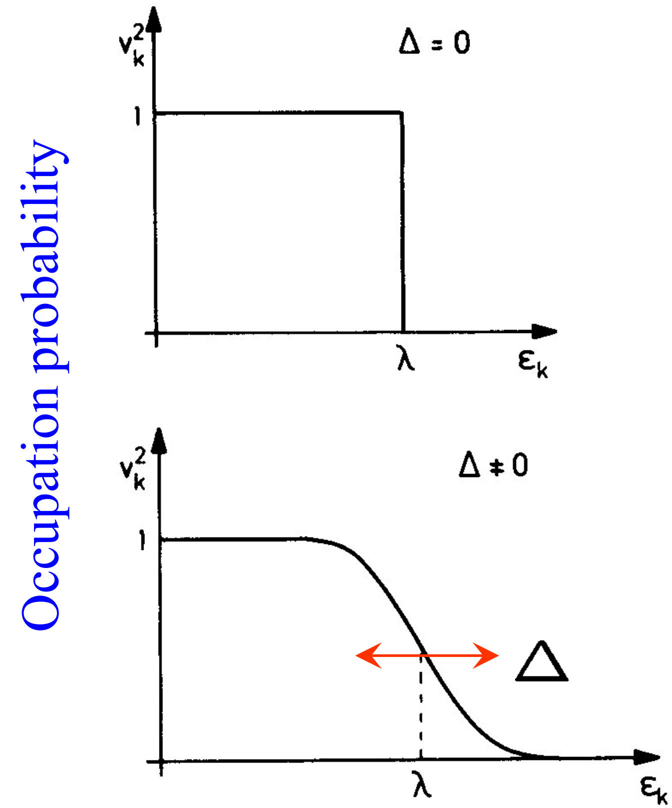


Fig. 6.6. Levels of the systems $A = 236$ and $A = 239$ involved in the fission of ^{236}U and ^{239}U. The addition of a motionless (or thermal) neutron to ^{235}U can lead to the fission of ^{236}U. On the other hand, fission of ^{239}U requires the addition of a neutron of kinetic energy $T_n = 6.0 - 4.8 = 1.2$ MeV.

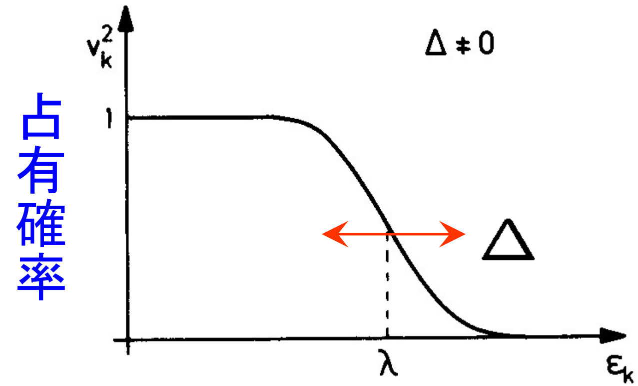
波動関数:



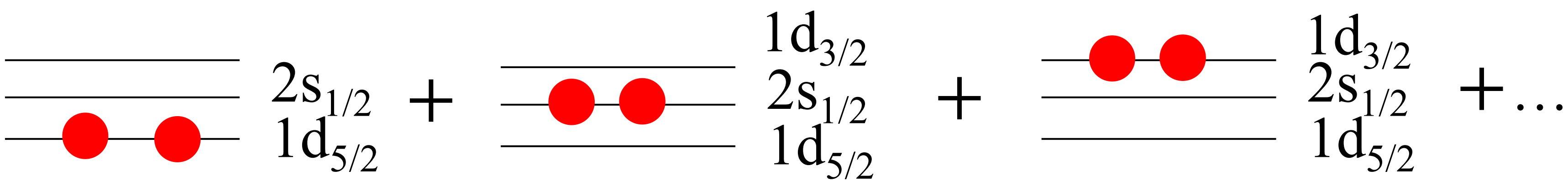


$$|\Psi_{0+}\rangle = |(ll)L=0\rangle + \sum_{l'} \frac{\langle (l'l')L=0|v_{\rm res}|(ll)L=0\rangle}{2\epsilon_l - 2\epsilon_{l'}} |(l'l')L=0\rangle + \cdots$$

波動関数:



$$|\Psi_{g.s.}\rangle =$$



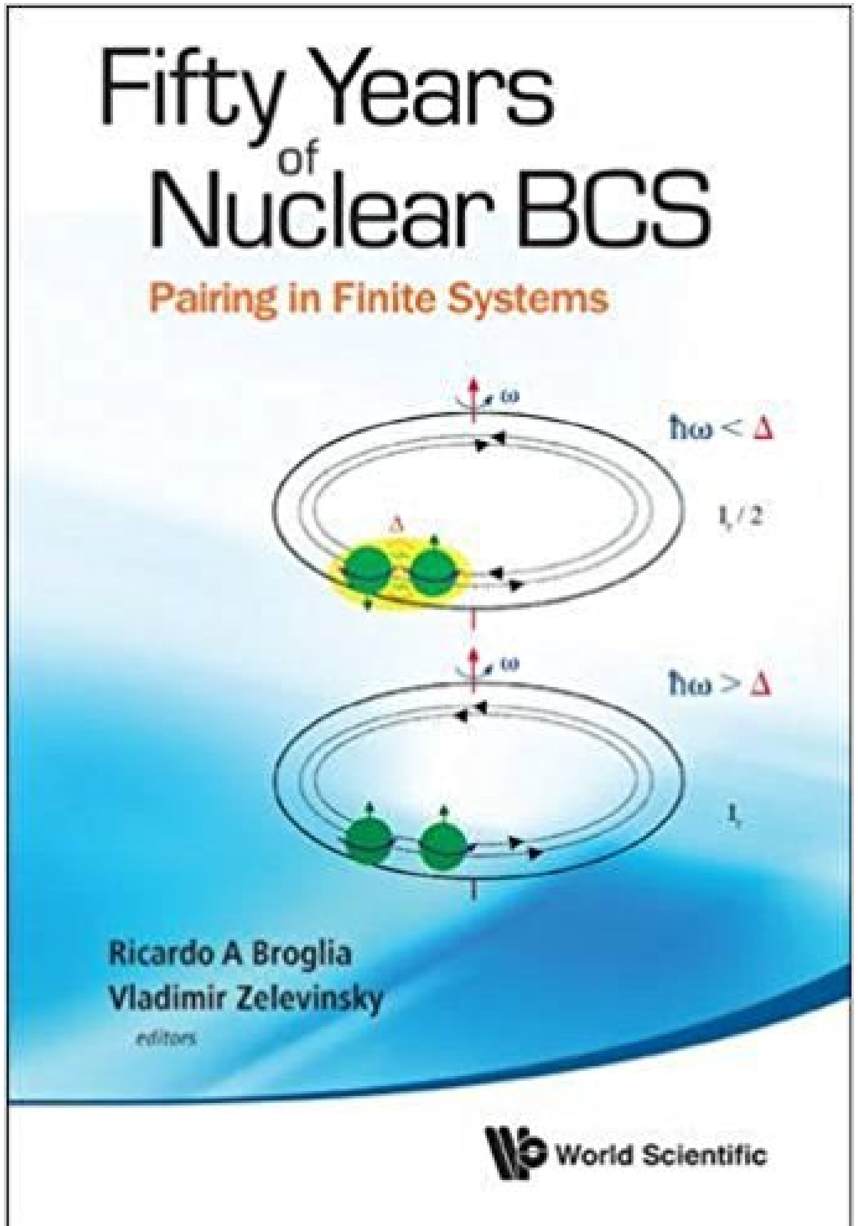
いろいろな配位を混ぜることによって対相関エネルギーを稼ぐ

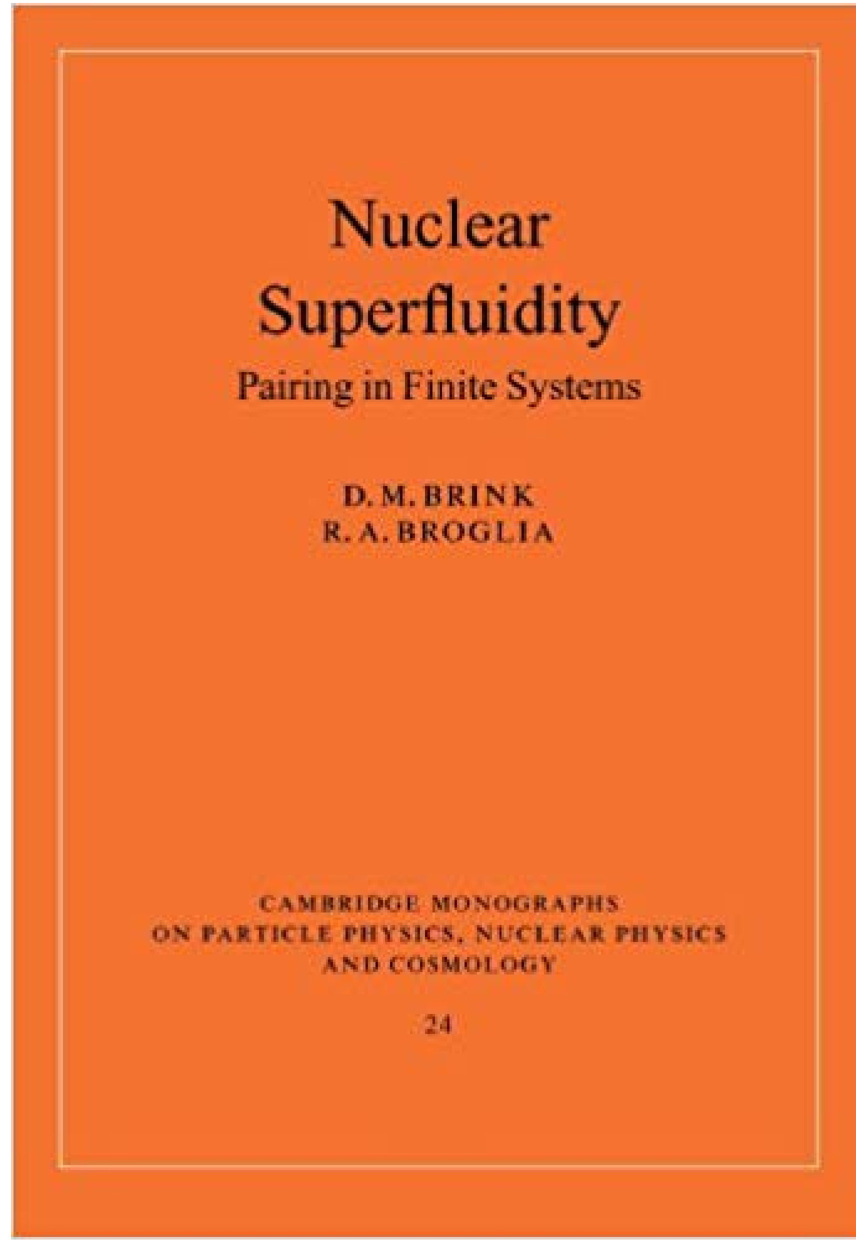
→ 各軌道は部分的にのみ占有されることになる

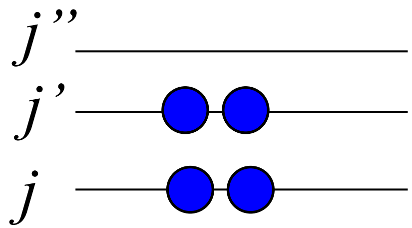
占有確率はエネルギーを最小化するように決定

cf. BCS 理論

超流動状態

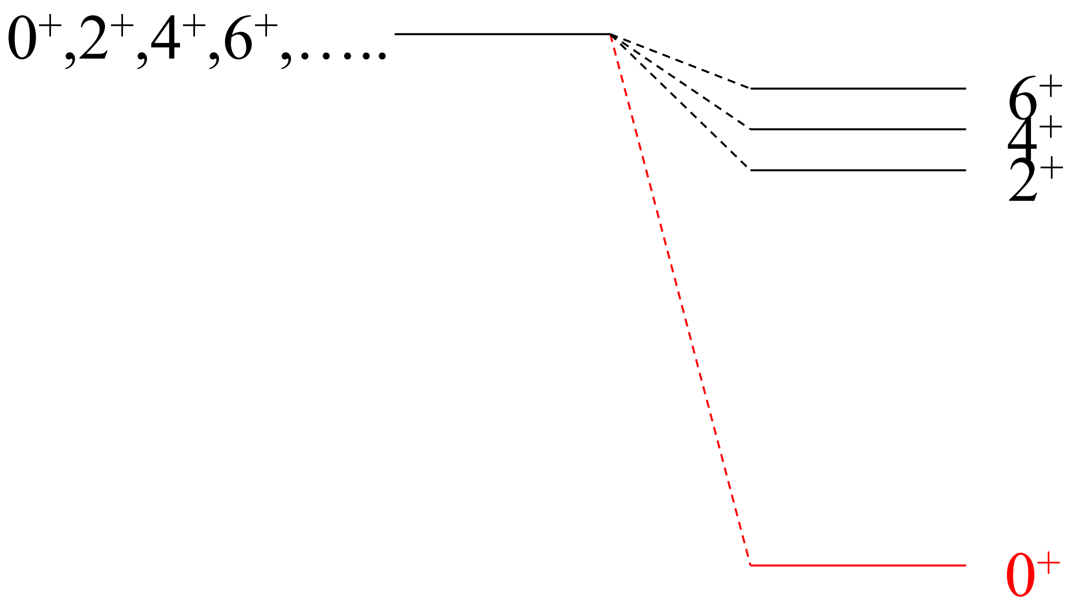

Fifty Years
of
Nuclear BCS
Pairing in Finite Systems
ħω < Δ
ħω > Δ
Ricardo A Broglia
Vladimir Zelevinsky
editors
World Scientific


Nuclear
Superfluidity
Pairing in Finite Systems
D. M. BRINK
R. A. BROGLIA
CAMBRIDGE MONOGRAPHS
ON PARTICLE PHYSICS, NUCLEAR PHYSICS
AND COSMOLOGY
24



複数個のレベルに
複数個のペアがある問題

$$v_{\rm res}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \quad \sim -g\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$



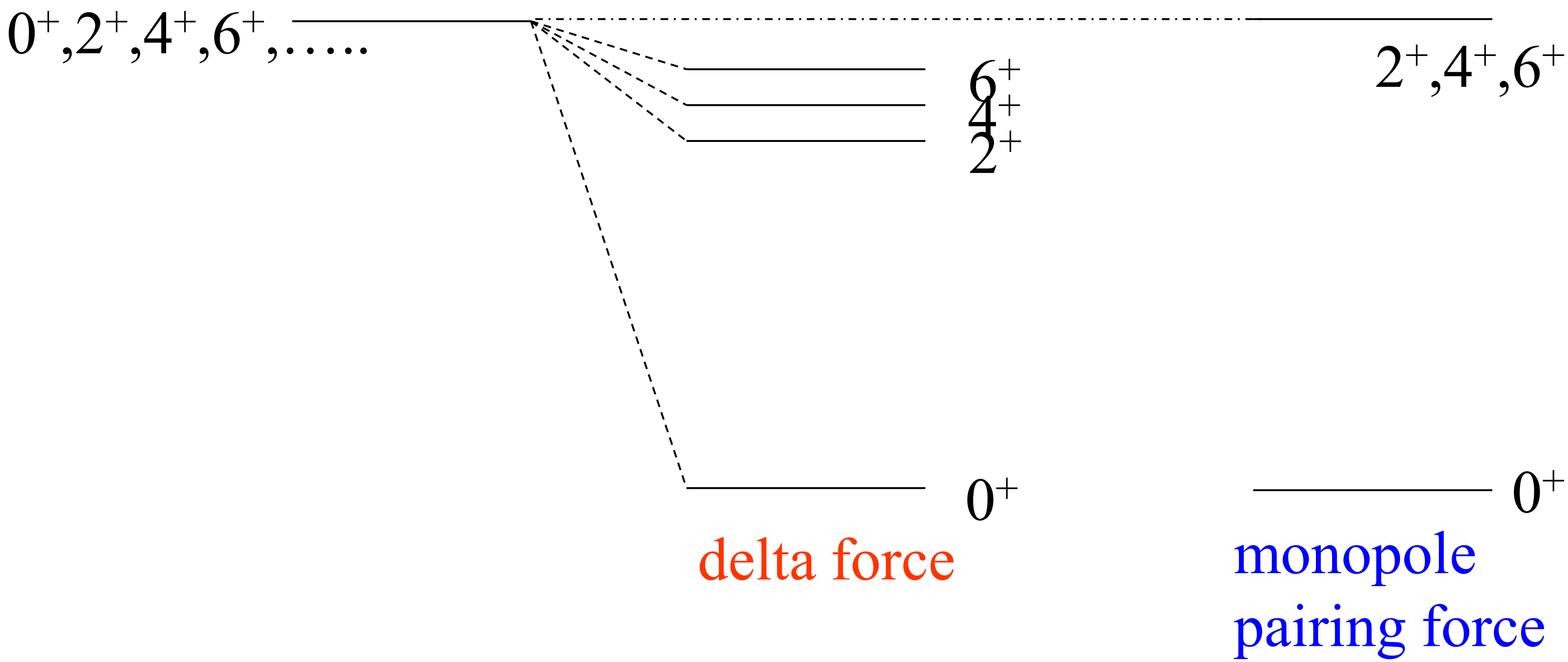
デルタ関数のままでもいいが、説明を簡単にするために
もう少し簡単にした相互作用を導入する。

Simplified pairing interaction

$$V = -G\,P^\dagger P; \qquad P^\dagger = \sum_{\nu>0} a^\dagger_\nu a^\dagger_{\bar{\nu}}$$

$\bar{\nu}$: the time reversed state of ν

e.g., $|\nu\rangle = |njlm\rangle, \quad |\bar{\nu}\rangle = |njl-m\rangle$

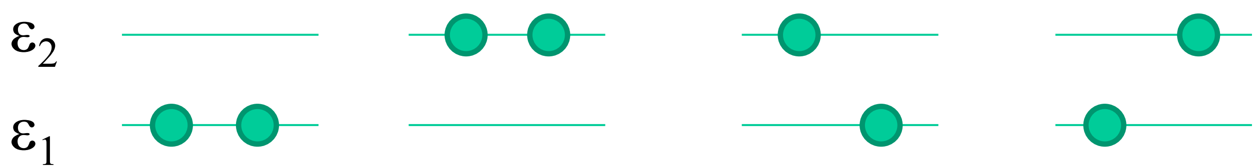


Simplified pairing interaction

$$\boxed{V = -G\,P^\dagger P; \qquad P^\dagger = \sum_{\nu>0} a^\dagger_\nu a^\dagger_{\bar{\nu}}}$$

$\bar{\nu}$: the time reversed state of ν

$$H = \sum_k \epsilon_k (a^\dagger_k a_k + a^\dagger_{\bar{k}} a_{\bar{k}}) - G \left(\sum_{k>0} a^\dagger_k a^\dagger_{\bar{k}} \right) \left(\sum_{k>0} a_{\bar{k}} a_k \right)$$



$$H = \begin{pmatrix} 2\epsilon_1 - G & -G & 0 & 0 \\ -G & 2\epsilon_2 - G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_1 + \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_1 + \epsilon_2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \Psi_{\text{g.s.}} = C_1 \Psi_1 + C_2 \Psi_2$$