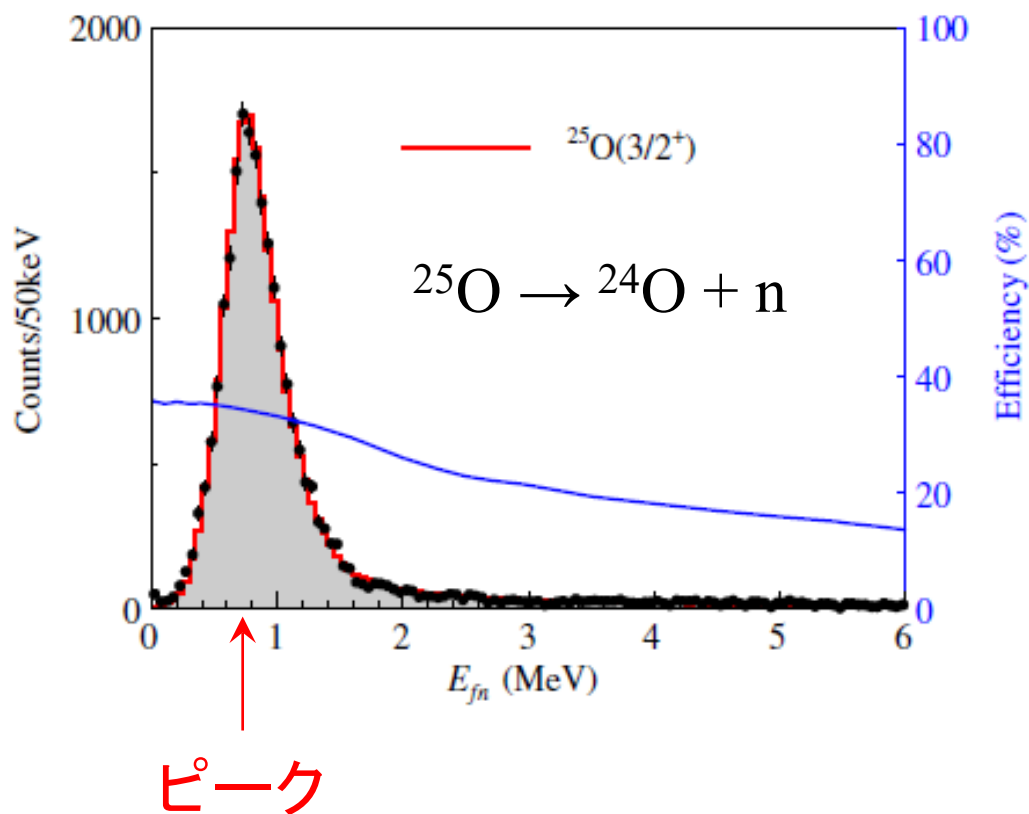


非束縛核の物理

| | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 22O | 23O | 24O | 25O | 26O |
|-----|-----|-----|-----|-----|

$^{26}_9\text{F}_{17}$ から1つ陽子を抜いて $^{25}_8\text{O}_{17}$ を生成 → 1中性子を放出して崩壊



$1d_{3/2}$

$2s_{1/2}$

$1d_{5/2}$

$1p_{1/2}$

$1p_{3/2}$

$1s_{1/2}$

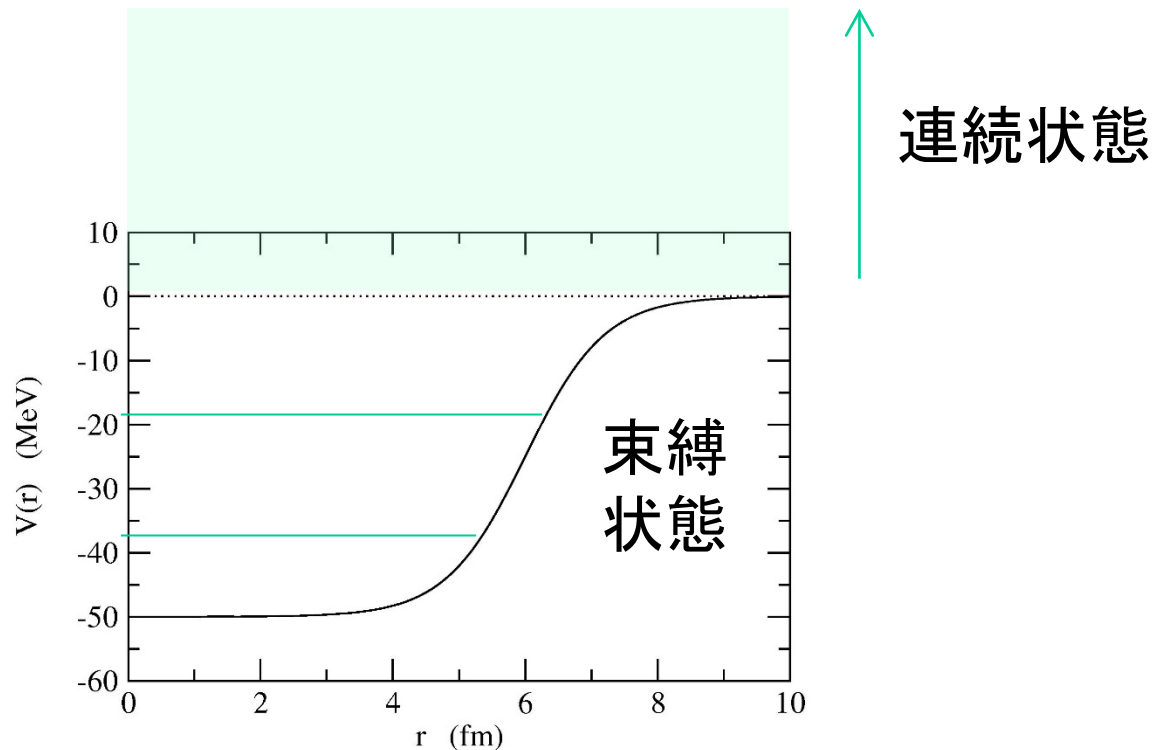
中性子
1粒子状態

Y. Kondo et al., PRL116 ('16) 102503

$1d_{3/2}$ の「準束縛」状態と解釈することができる

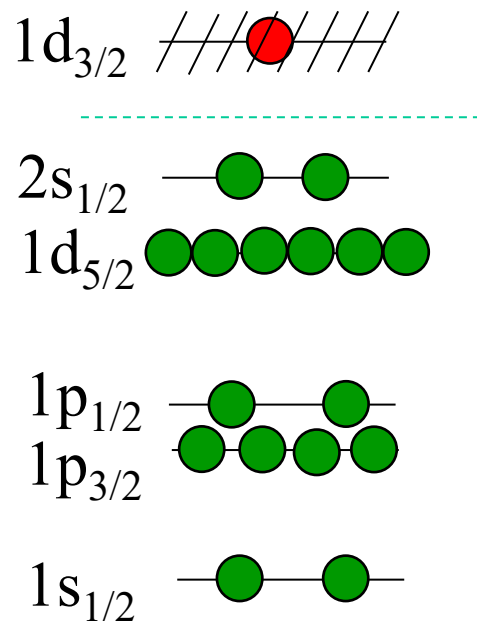
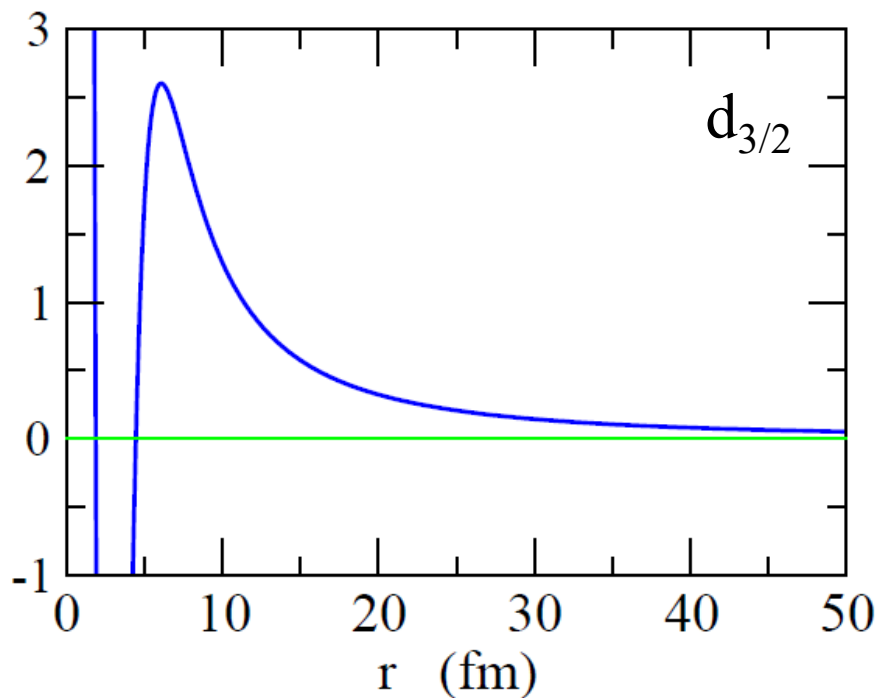
準束縛状態＝共鳴状態

量子力学の完全系: $1 = \sum_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n| + \int dE |\psi_E\rangle\langle\psi_E|$



ポテンシャルに山(障壁)があると、連続状態だけど束縛状態のように振る舞う状態がある＝共鳴状態

準束縛状態＝共鳴状態



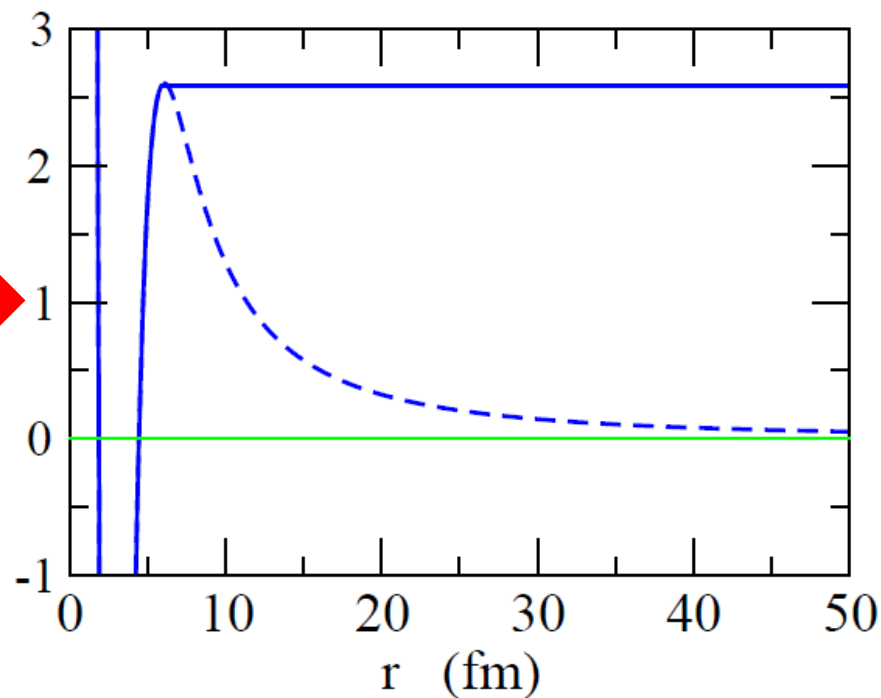
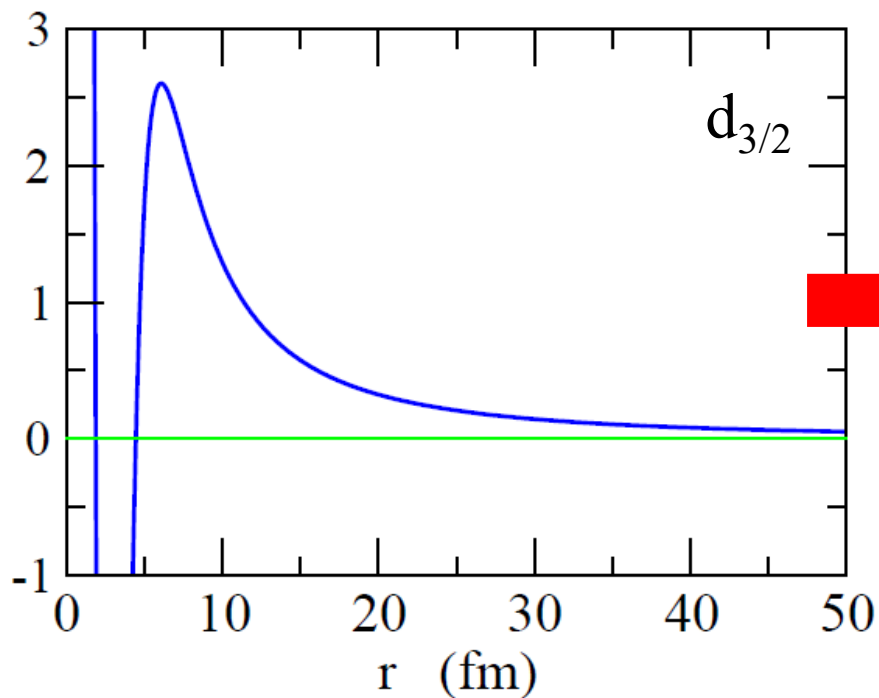
$d_{3/2}$ 状態の実際のポテンシャル
 = 核力 + 遠心力ポテンシャル

中性子
 1粒子状態

束縛状態は $E < 0$ の領域のみ

$$1 = \sum_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n| + \int dE |\psi_E\rangle\langle\psi_E|$$

準束縛状態＝共鳴状態



実際のポテンシャル

束縛状態は $E < 0$ の領域のみ

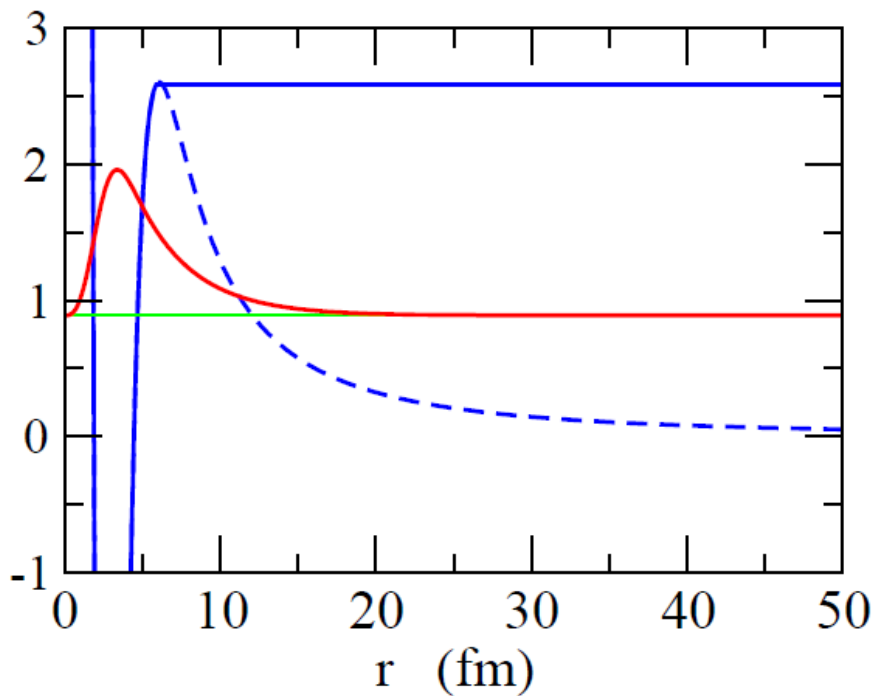
このようにポテンシャルを
変更すると

→ $E > 0$ でも束縛状態が
できる

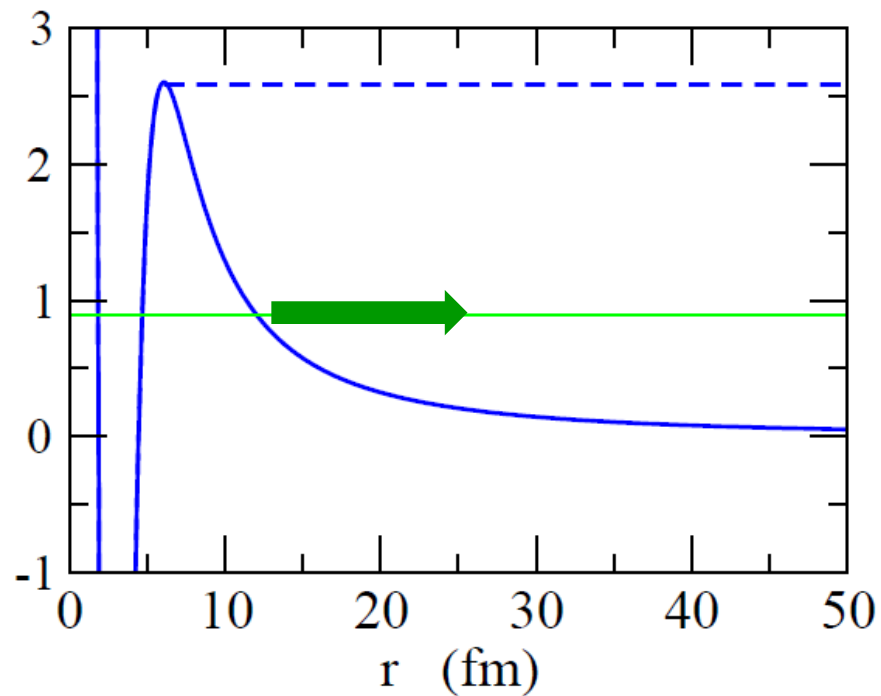
$$1 = \sum_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n| + \int dE |\psi_E\rangle\langle\psi_E|$$

＝ 準束縛(準安定)状態

準束縛状態 = 共鳴状態



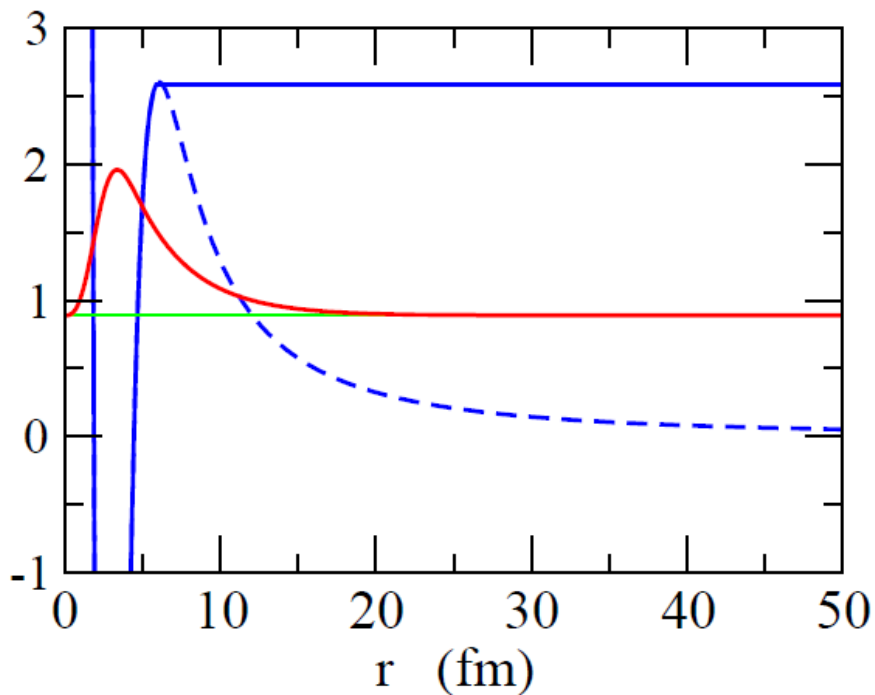
束縛状態 = 無限の寿命



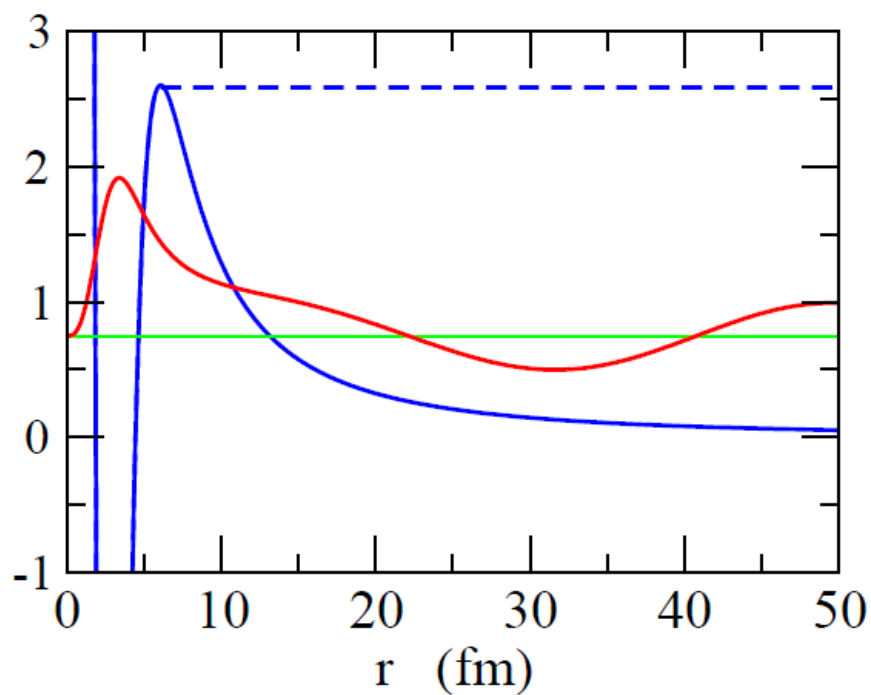
実際には有限の寿命で
障壁をトンネルし崩壊

「準束縛(準安定)状態」

準束縛状態 = 共鳴状態



束縛状態 = 無限の寿命

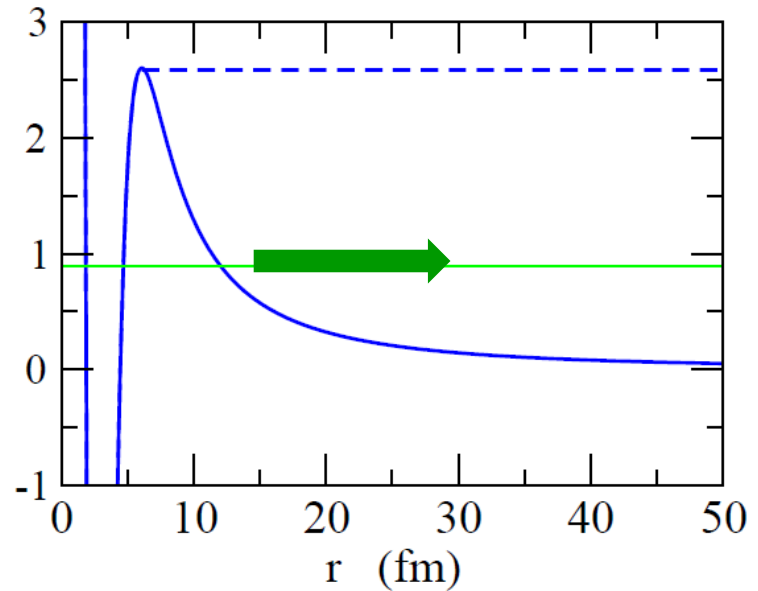
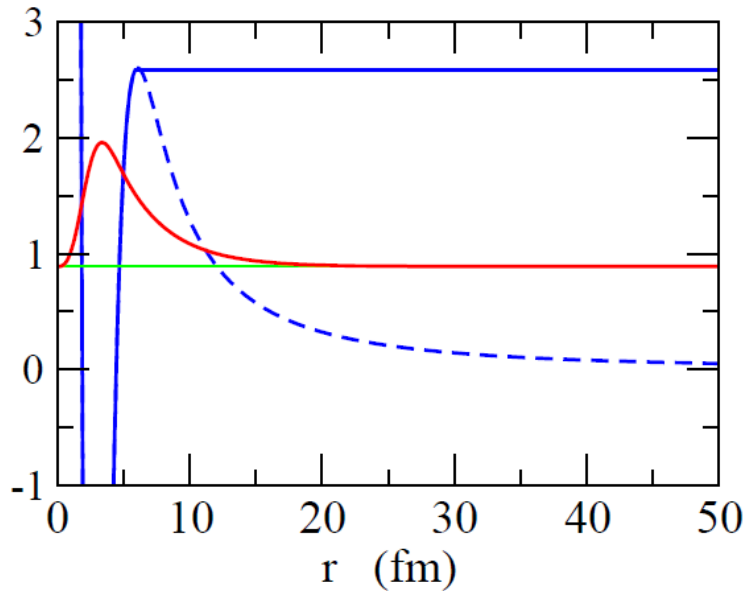


実際には有限の寿命で
障壁をトンネルし崩壊

「準束縛(準安定)状態」

ガモフ状態

cf. ガモフの α 崩壊の理論



トンネル効果で波動関数が
 沁み出し、**外向きの波として崩壊**

$$\begin{aligned}
 u(r) &\sim r^{l+1} && (r \rightarrow 0) \\
 &\rightarrow \mathcal{N} e^{i(kr - l\pi/2)} && (r \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

共鳴幅



$$E \rightarrow E_R - i \frac{\Gamma}{2}$$

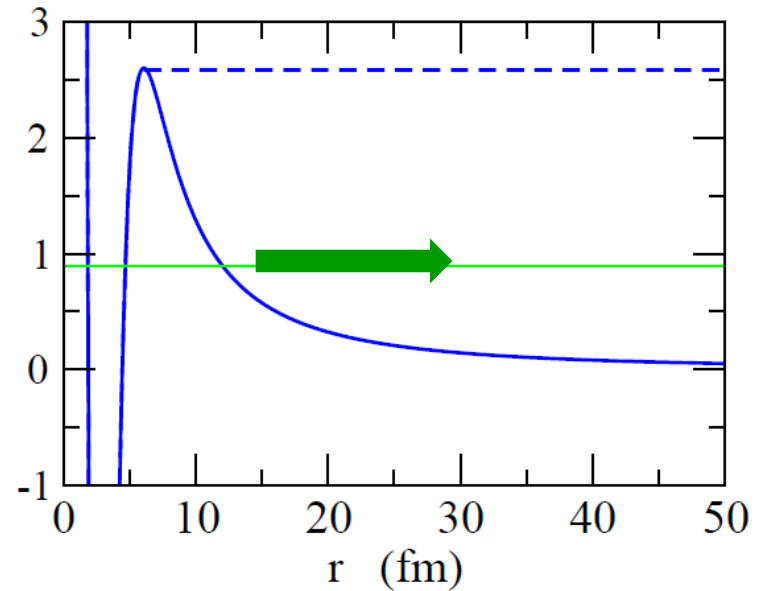
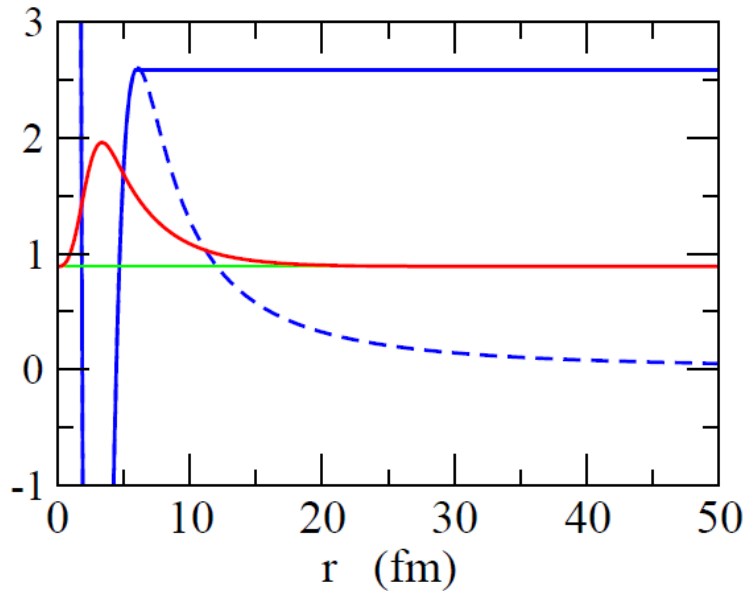


共鳴エネルギー

⇒ エネルギーを複素数にしなければならない:

ガモフ状態

cf. ガモフの α 崩壊の理論



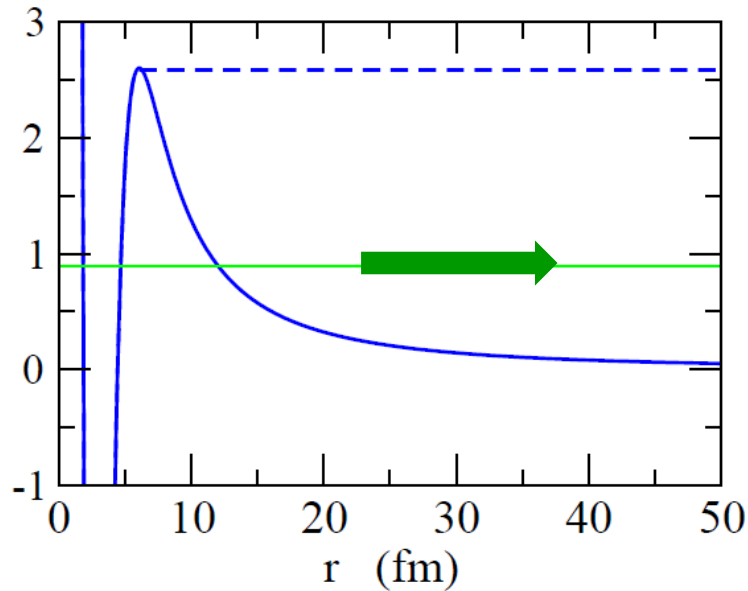
トンネル効果で波動関数が
 沁み出し、**外向きの波として崩壊**

$$E \rightarrow E_R - i\frac{\Gamma}{2}$$

$$\begin{aligned}
 P_{\text{sur}}(t) &\equiv |\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|^2 \\
 &= |\langle \psi(0) | e^{-iHt/\hbar} | \psi(0) \rangle|^2 \\
 &= |\langle \psi(0) | e^{-i(E_R - i\Gamma/2)t/\hbar} | \psi(0) \rangle|^2 \\
 &= e^{-\Gamma t/\hbar} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\hbar/\Gamma \text{ が準安定状態の寿命}}
 \end{aligned}$$

ガモフ状態と散乱状態の関係

ガモフ状態

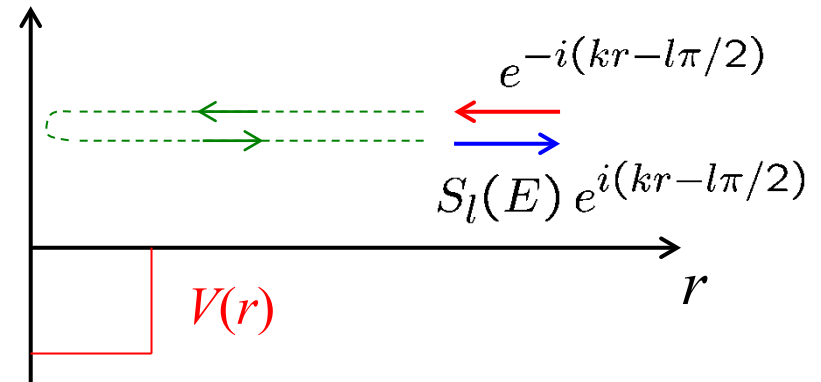


外向波境界条件

$$u_l(r) \rightarrow \mathcal{N} e^{i(kr - l\pi/2)}$$

$$E \rightarrow E_R - i\frac{\Gamma}{2}$$

散乱状態



散乱の境界条件

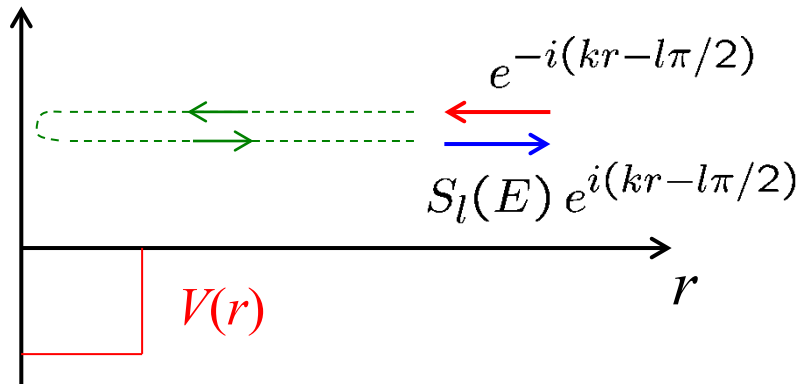
$$u_l(r) \rightarrow \mathcal{N} \left(e^{-i(kr - l\pi/2)} - S_l(E) e^{i(kr - l\pi/2)} \right)$$

$$S_l(E) = e^{2i\delta_l(E)}$$

E : real

ガモフ状態と散乱状態の関係

散乱状態



散乱の境界条件

$$u_l(r) \rightarrow \mathcal{N} \left(e^{-i(kr-l\pi/2)} - S_l(E) e^{i(kr-l\pi/2)} \right)$$

$$S_l(E) = e^{2i\delta_l(E)}$$

E : real

もし、 $S_l(E)$ が発散するような E があれば、

$$u_l(r) \sim \tilde{\mathcal{N}} e^{i(kr-l\pi/2)} \quad (\text{外向波})$$

ただし、エネルギー E を複素平面へ解析接続しなければならない:

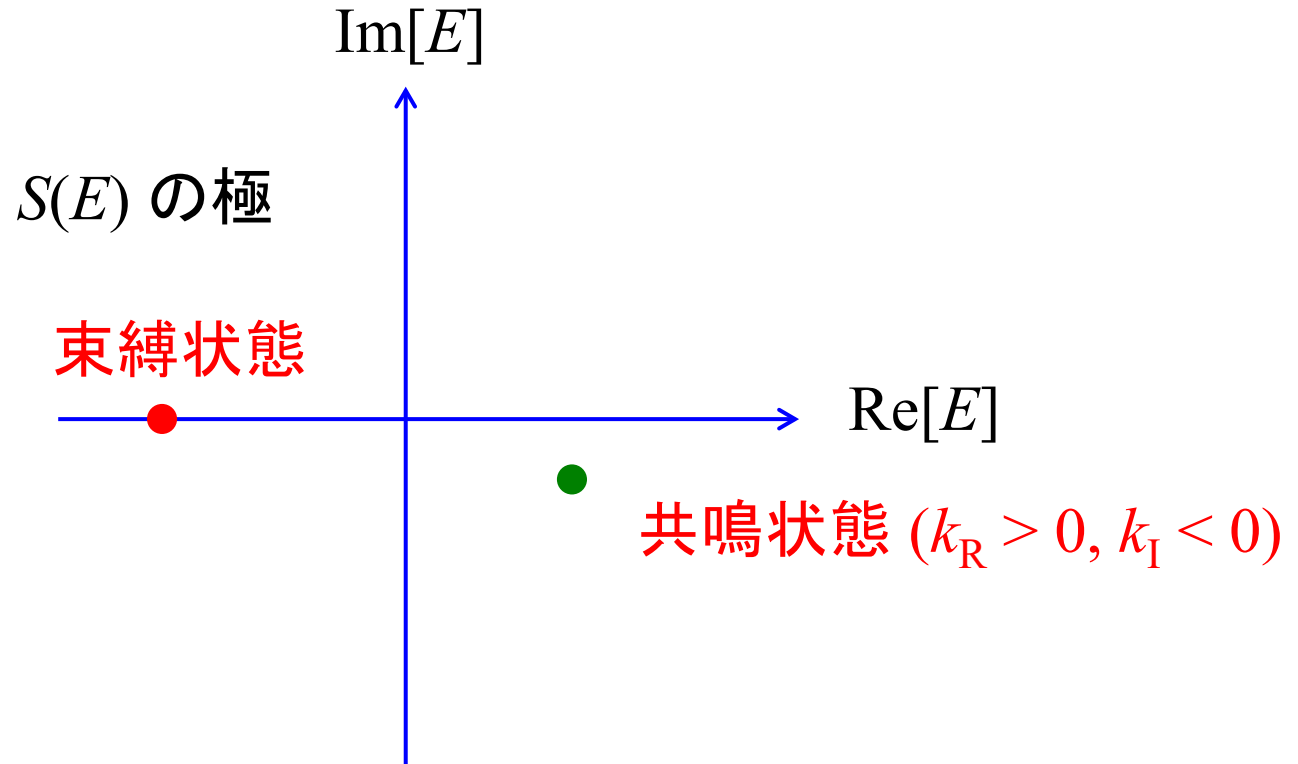
$$E \rightarrow E_R - i\frac{\Gamma}{2}$$

➡ ガモフ状態 **↔** S 行列の極 (ポール)

散乱問題: 正の実数エネルギー (これが物理的な観測量)



複素エネルギー (または複素運動量) 平面で実軸の近くの
S 行列の極



Breit-Wigner の公式

S-行列が $\epsilon = E_R - i\frac{\Gamma}{2}$ で極を持つとすると、

$$S(E) = e^{2i\delta_0(E)} \cdot \frac{E - \epsilon^*}{E - \epsilon} \quad \leftarrow |S(E)| = 1$$

$\delta_0(E)$ は E のゆるやかな関数 (background phase shift)

このとき、

$$\begin{aligned} S(E) &= e^{2i\delta_0(E)} \cdot \frac{E - E_R - i\Gamma/2}{E - E_R + i\Gamma/2} \\ &= e^{2i\delta_0(E)} \left(1 - \frac{i\Gamma}{E - E_R + i\Gamma/2} \right) \end{aligned}$$

Breit-Wigner の公式

S-行列が $\epsilon = E_R - i\frac{\Gamma}{2}$ で極を持つとすると、

$$S(E) = e^{2i\delta_0(E)} \cdot \frac{E - \epsilon^*}{E - \epsilon} \quad \leftarrow |S(E)| = 1$$

$\delta_0(E)$ は E のゆるやかな関数 (background phase shift)

$E - \epsilon^* = c e^{i\delta_r(E)}$ とすると、

$$S(E) = e^{2i\delta_0(E)} \cdot \frac{c e^{i\delta_r(E)}}{c e^{-i\delta_r(E)}} = e^{2i\delta_0(E)} e^{2i\delta_r(E)}$$

$$E - \epsilon^* = E - E_R - i\Gamma/2 = c e^{i\delta_r} = c(\cos \delta_r + i \sin \delta_r)$$

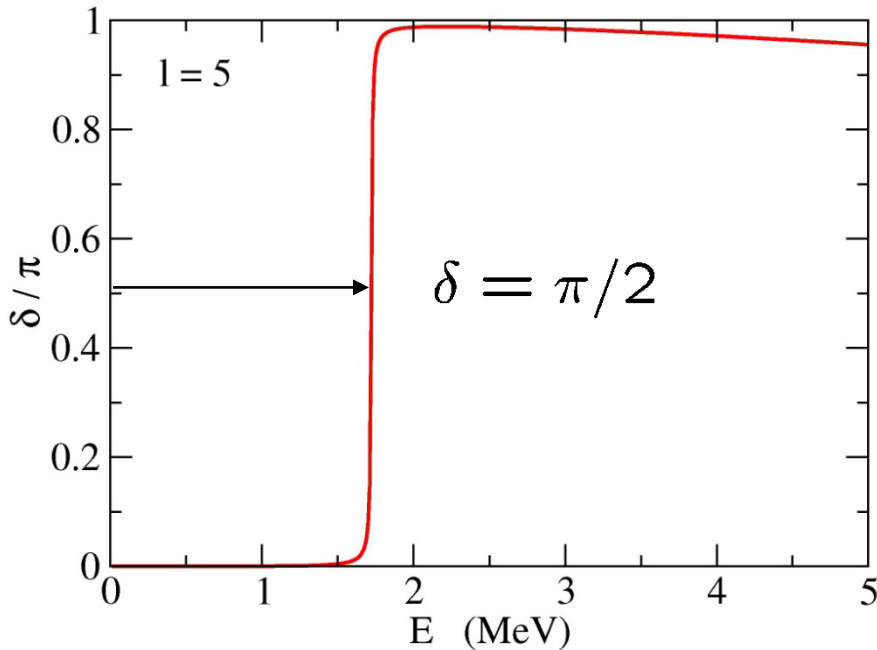
$$\rightarrow \tan \delta_r = \frac{\sin \delta_r}{\cos \delta_r} = \frac{-\Gamma/2}{E - E_R}$$



$$\delta(E) = \delta_r(E) + \delta_0(E) = \tan^{-1} \left(\frac{\Gamma}{2(E_R - E)} \right) + \delta_0(E)$$

Breit-Wigner の公式

幅が狭ければ、位相のずれが $\pi/2$ を切る時に共鳴



Breit-Wigner formula:

$$\delta(E) = \tan^{-1} \frac{\Gamma}{2(E_R - E)} + \delta_0(E)$$

$$\Rightarrow \delta(E_R) \sim \pi/2$$

$$\Gamma = \frac{2}{\delta'(E_R)}$$

$$V_0 = -50 \text{ MeV}$$

$$R_0 = 1.27 * 200^{1/3} \text{ fm}$$

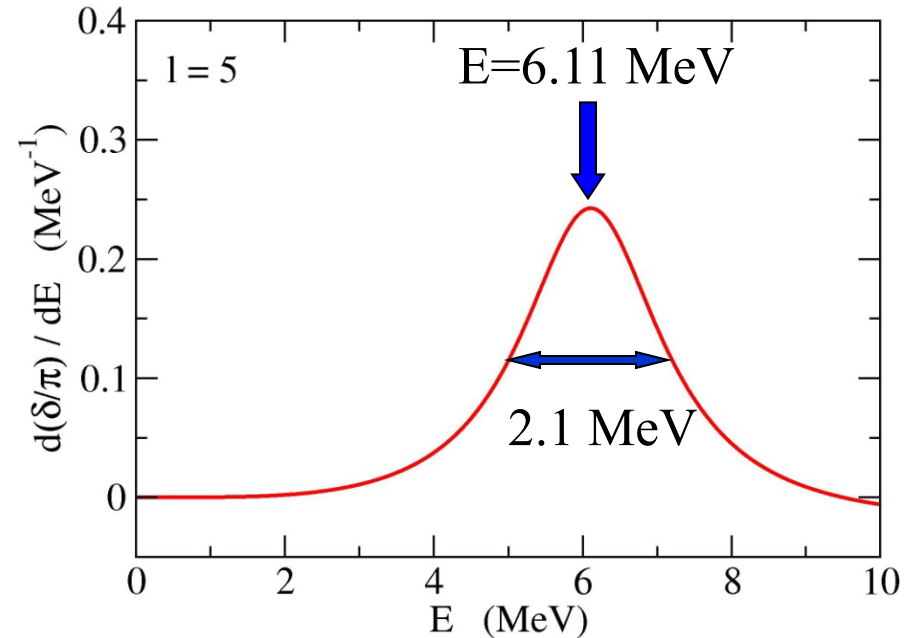
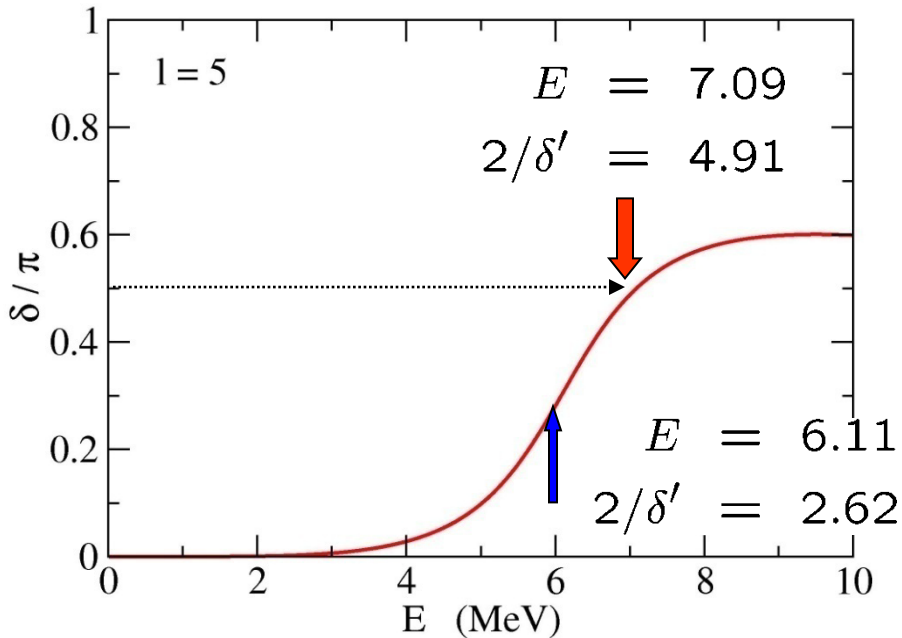
$$a = 0.67 \text{ fm}$$

$$\mu = 200 m_N / 201$$

(note) ただし、幅が広いと $\pi/2$ とは限らない

$$\delta(E) = \tan^{-1} \frac{\Gamma}{2(E_R - E)} + \delta_0(E)$$

background phase shift



Gamow state: $E = 6.01$ MeV
 $\Gamma = 2.22$ MeV

レポート問題7(×切:12月3日(土))

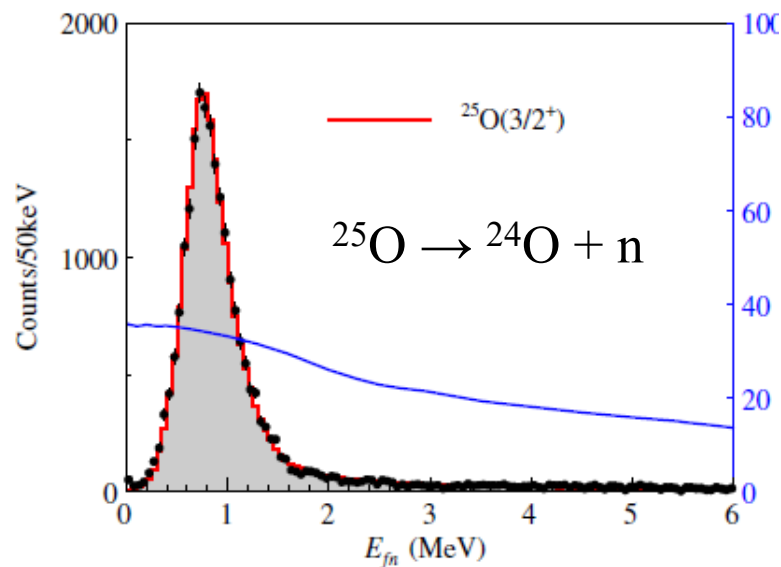
$$\delta_l(E) \sim \delta_r(E) = \tan^{-1} \left(\frac{\Gamma}{2(E_R - E)} \right)$$

で与えられるとき、この角運動量に対する全散乱断面積

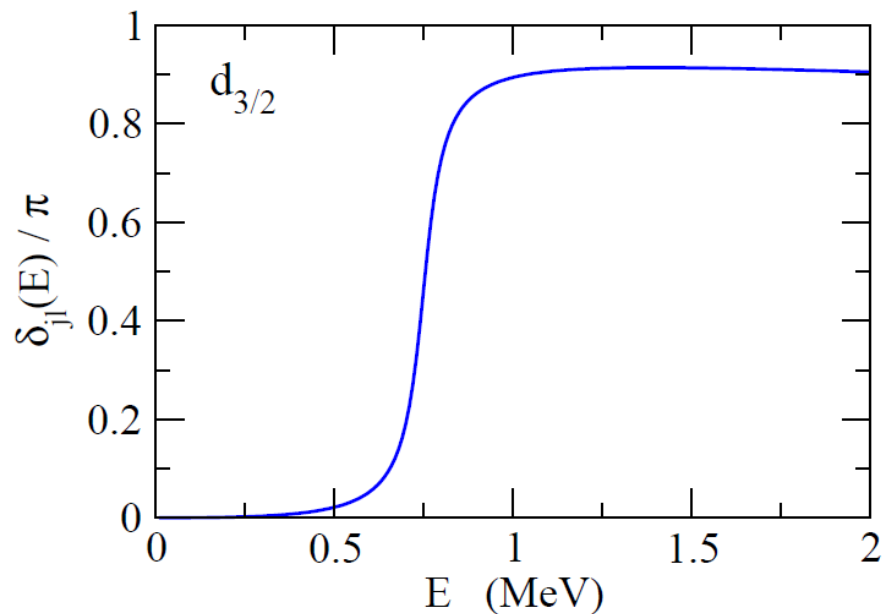
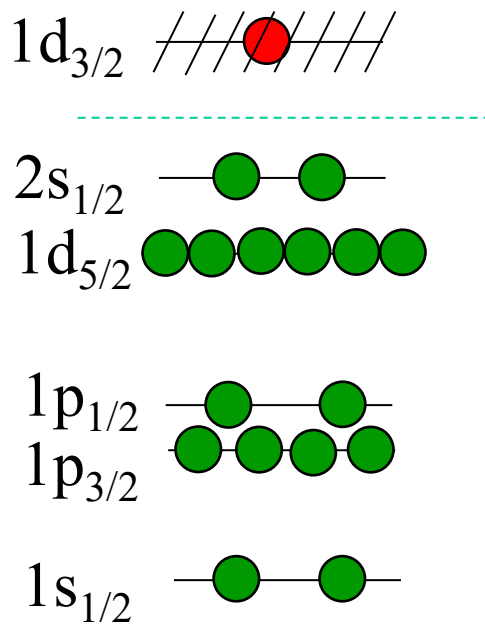
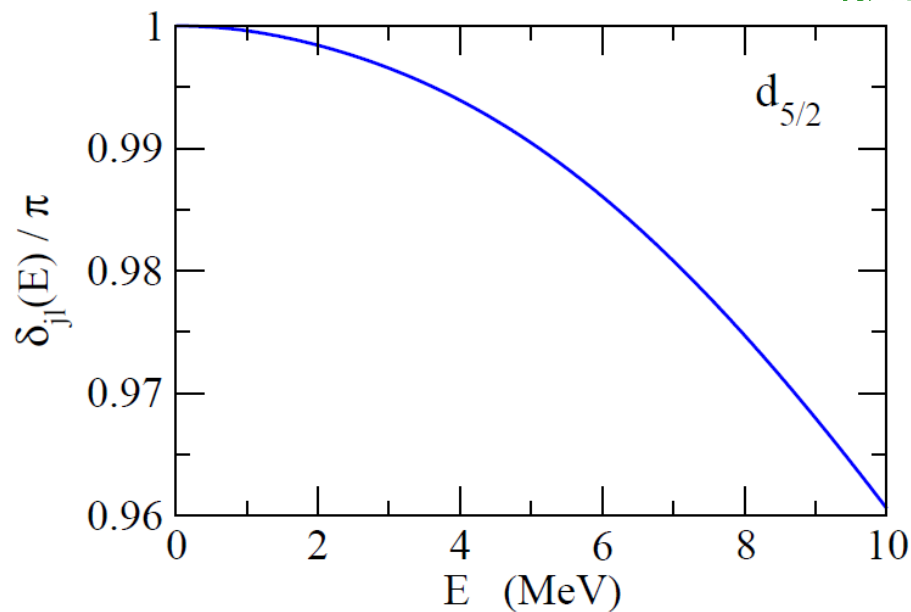
$$\sigma_l(E) = \frac{4\pi}{k^2} (2l + 1) \sin^2 \delta_l(E)$$

を求めよ。また、その概略を図示せよ。

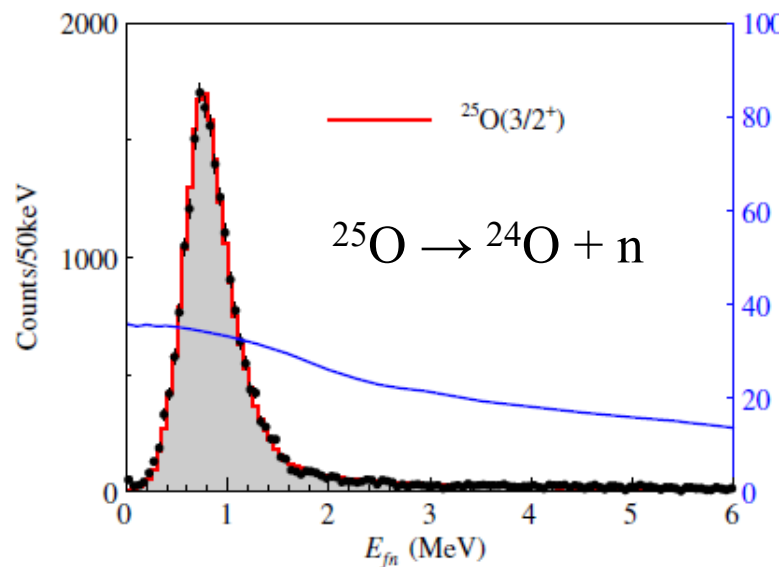
共鳴があると位相のずれはどう振る舞う?



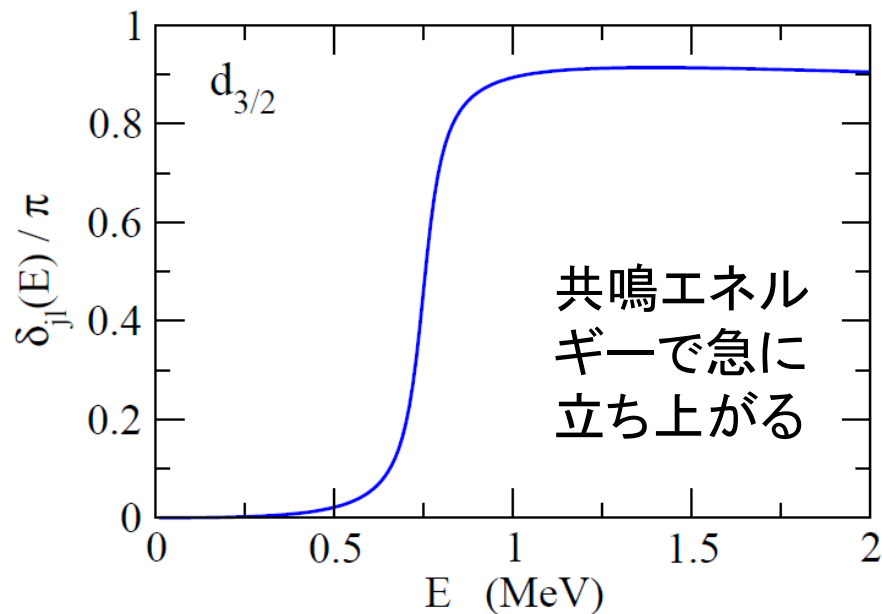
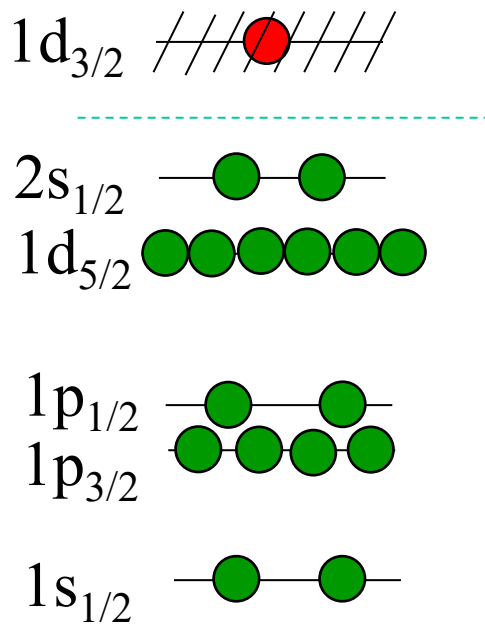
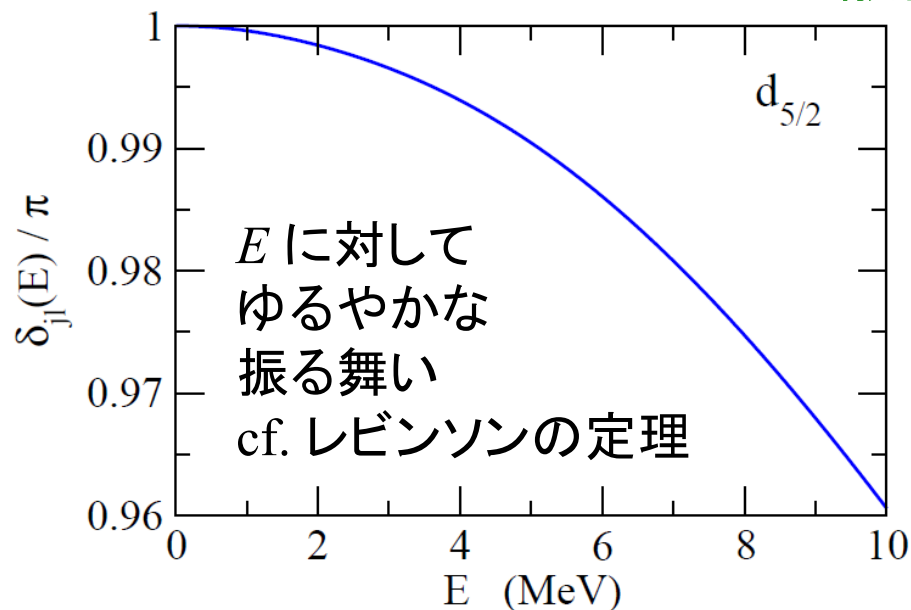
WS ポテンシャルによる n- ^{24}O 散乱



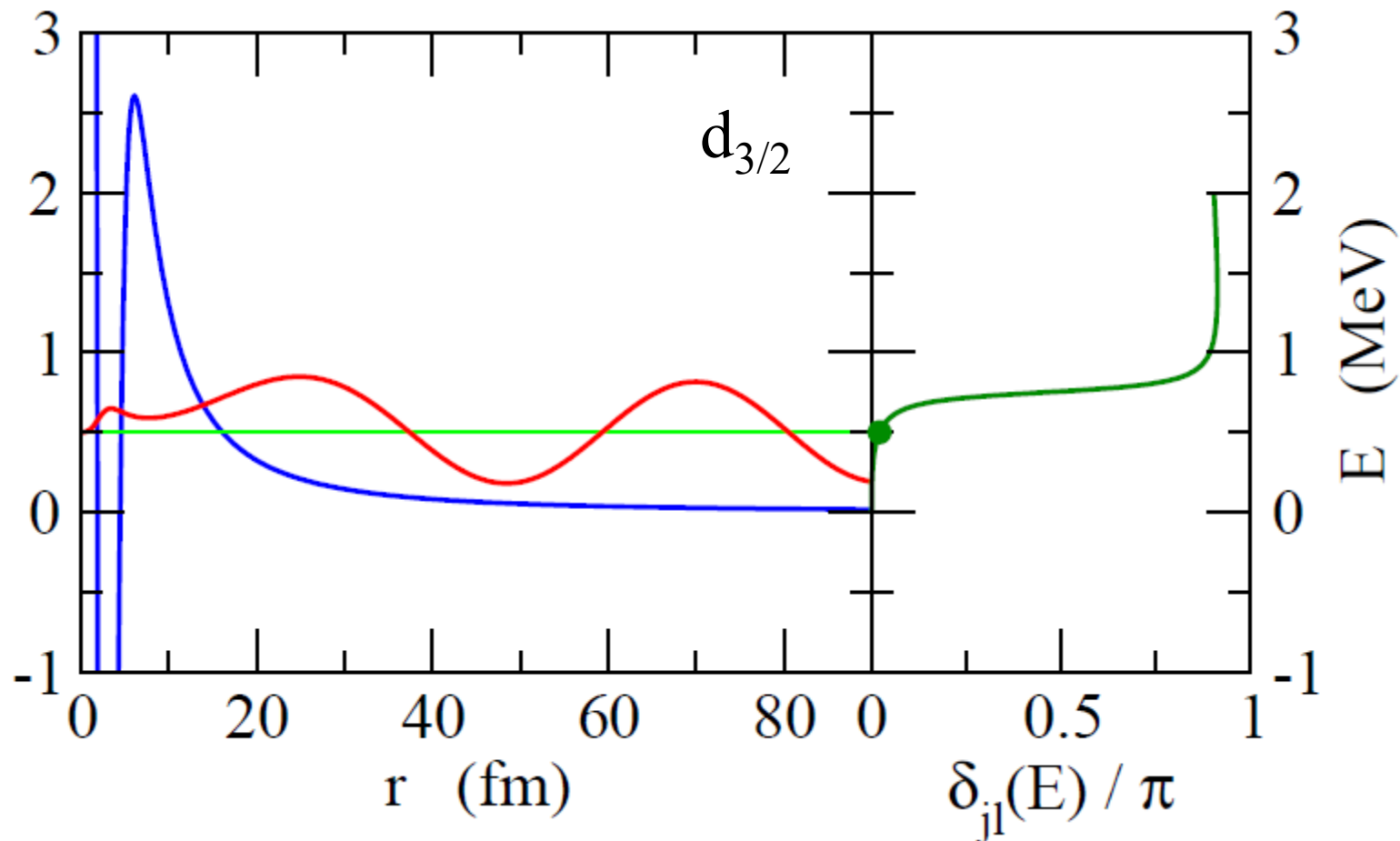
共鳴があると位相のずれはどう振る舞う?



WS ポテンシャルによる n - ^{24}O 散乱

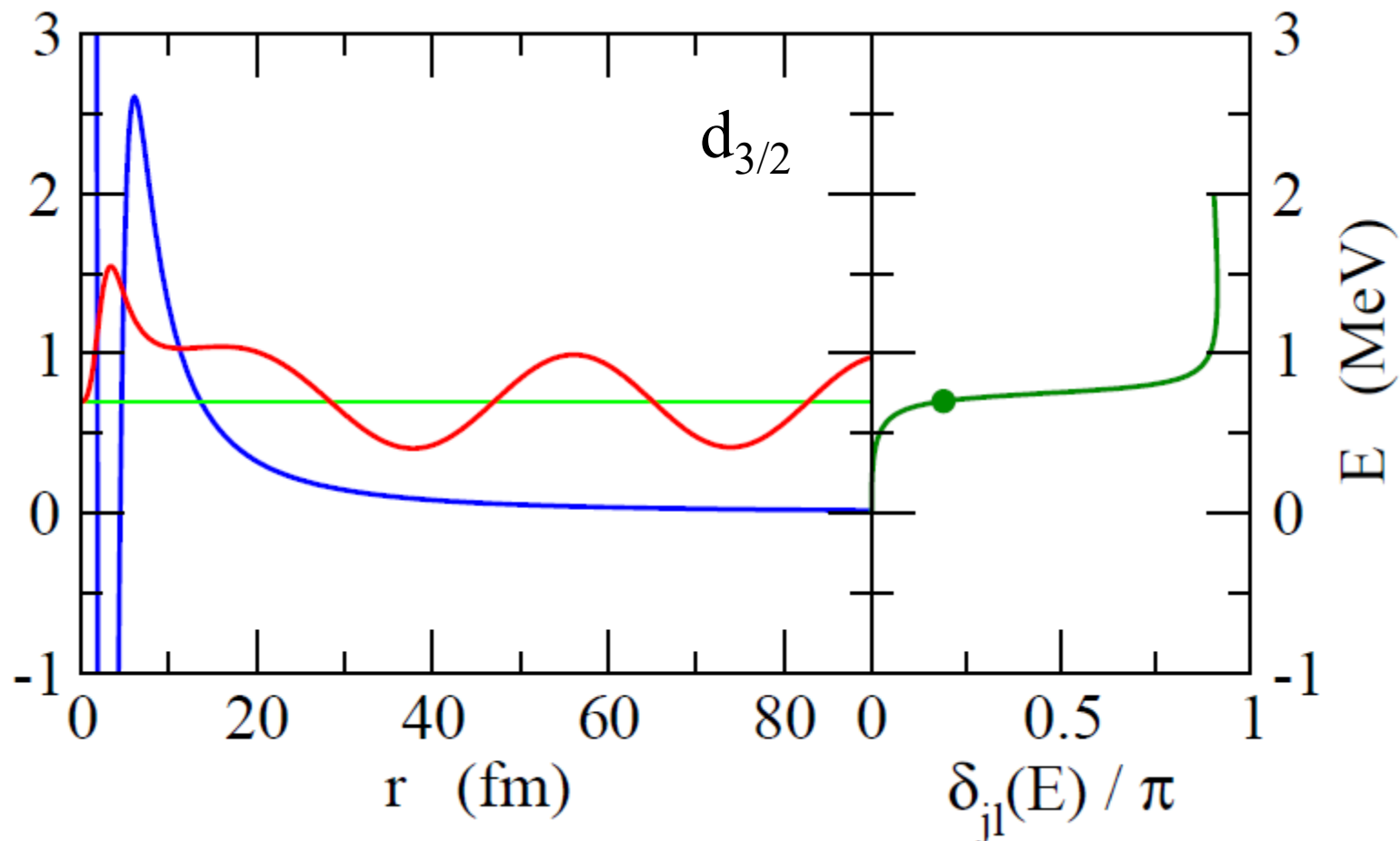


それでは波動関数は?



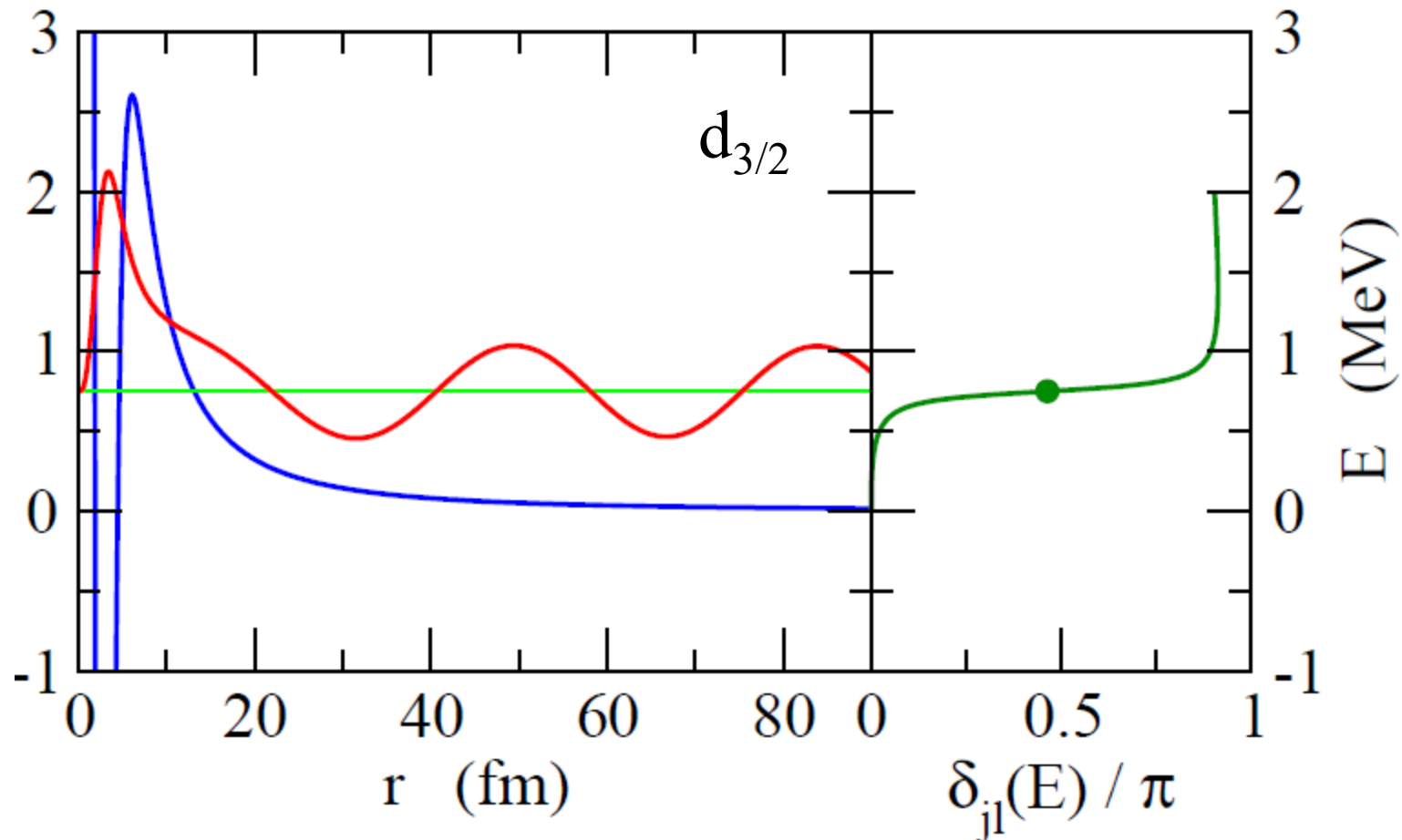
$$rR_{j_l}(r) \rightarrow \sqrt{\frac{2m}{\pi k \hbar^2}} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{j_l}(E)\right); \quad \int dr \psi_E(r) \psi_{E'}^*(r) = \delta(E - E')$$

それでは波動関数は?



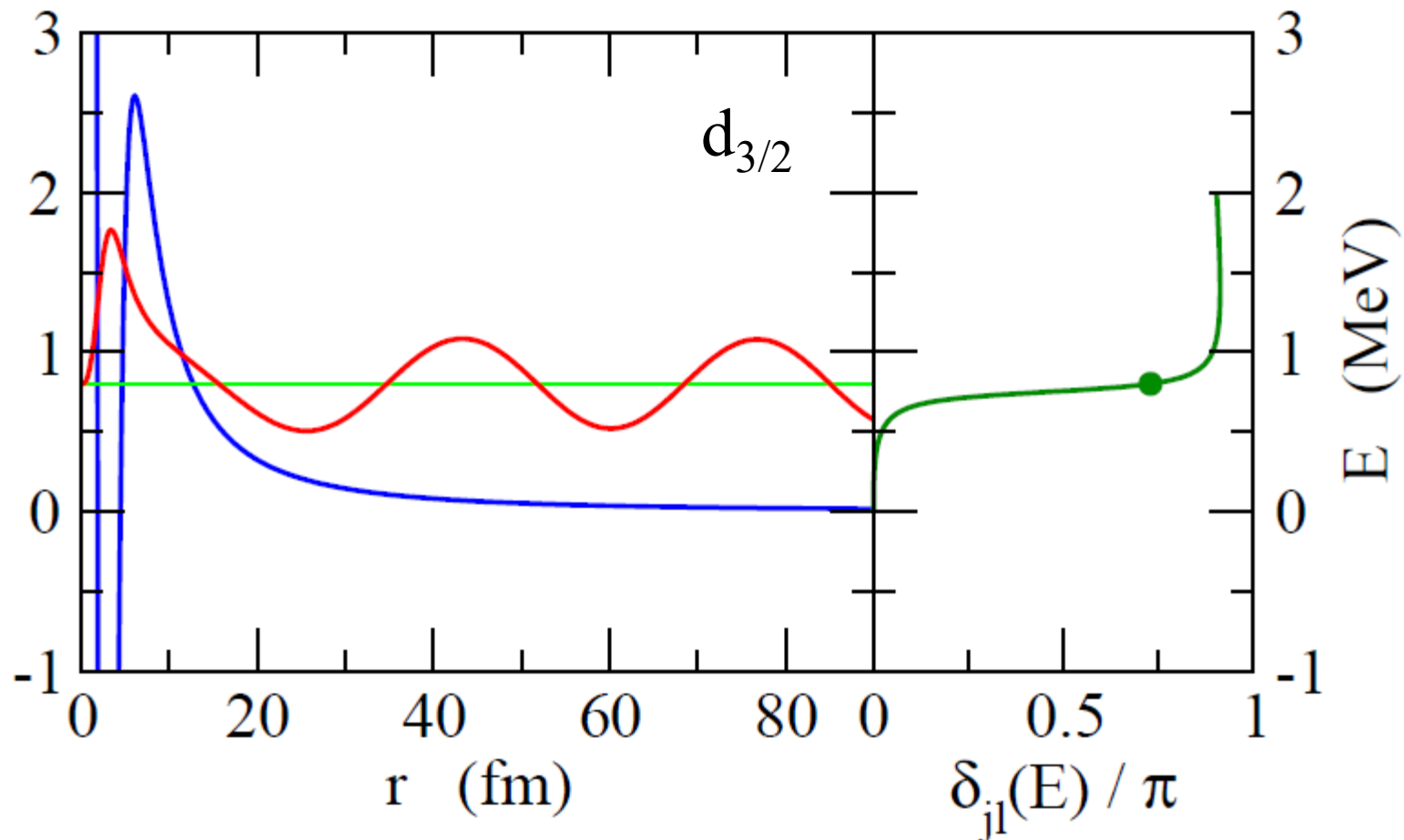
$$rR_{j,l}(r) \rightarrow \sqrt{\frac{2m}{\pi k \hbar^2}} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{j,l}(E)\right); \quad \int dr \psi_E(r) \psi_{E'}^*(r) = \delta(E - E')$$

それでは波動関数は?



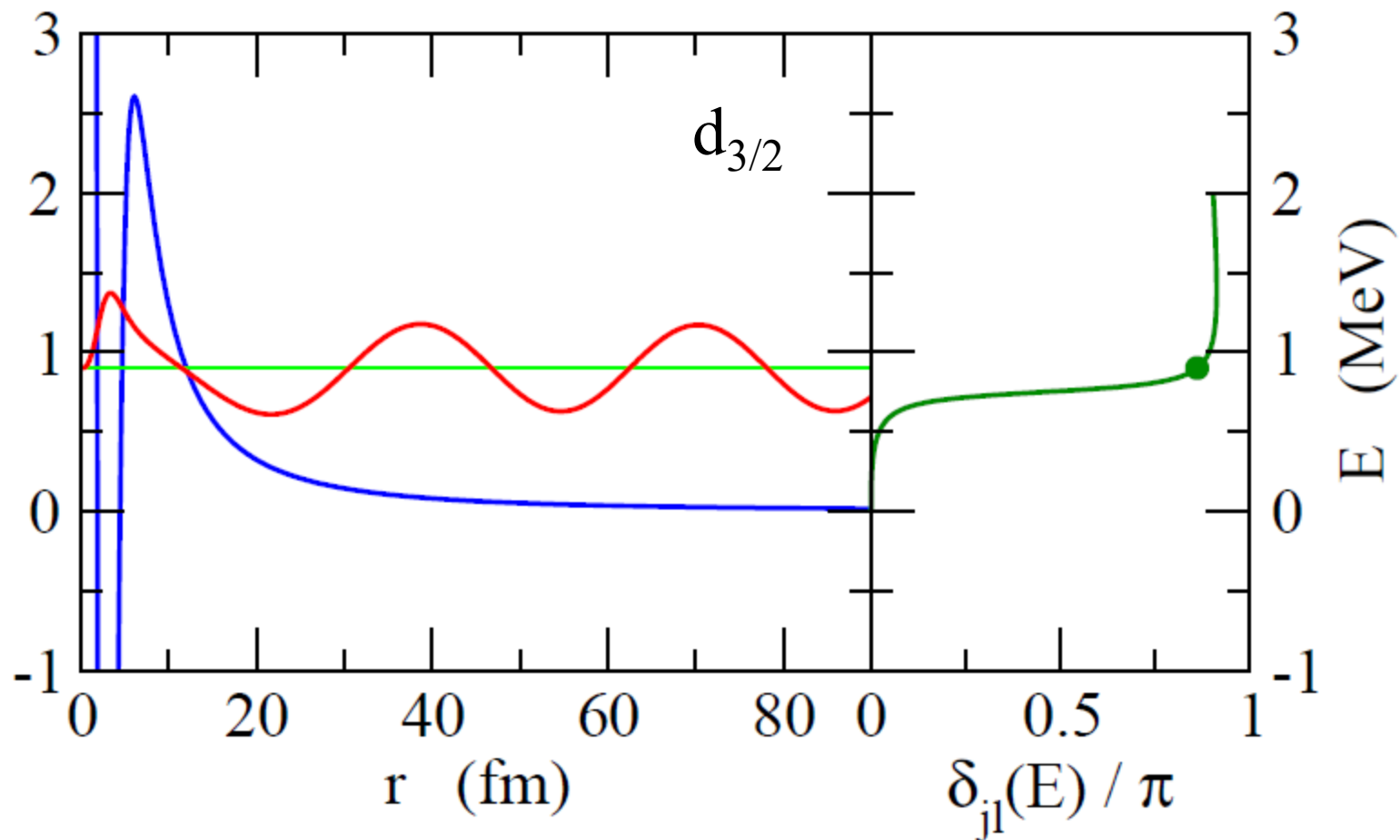
$$rR_{jl}(r) \rightarrow \sqrt{\frac{2m}{\pi k \hbar^2}} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{jl}(E)\right); \quad \int dr \psi_E(r) \psi_{E'}^*(r) = \delta(E - E')$$

それでは波動関数は?



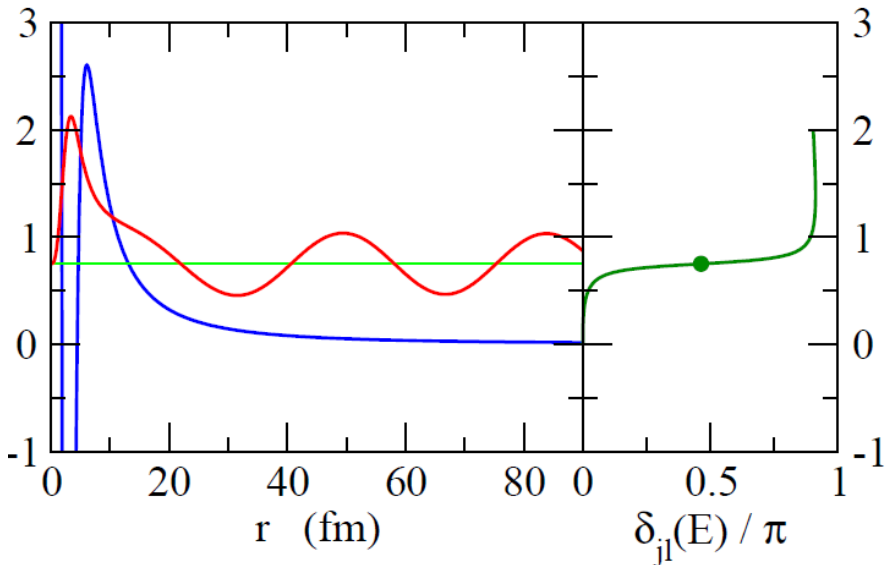
$$rR_{jl}(r) \rightarrow \sqrt{\frac{2m}{\pi k \hbar^2}} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{jl}(E)\right); \quad \int dr \psi_E(r) \psi_{E'}^*(r) = \delta(E - E')$$

それでは波動関数は?



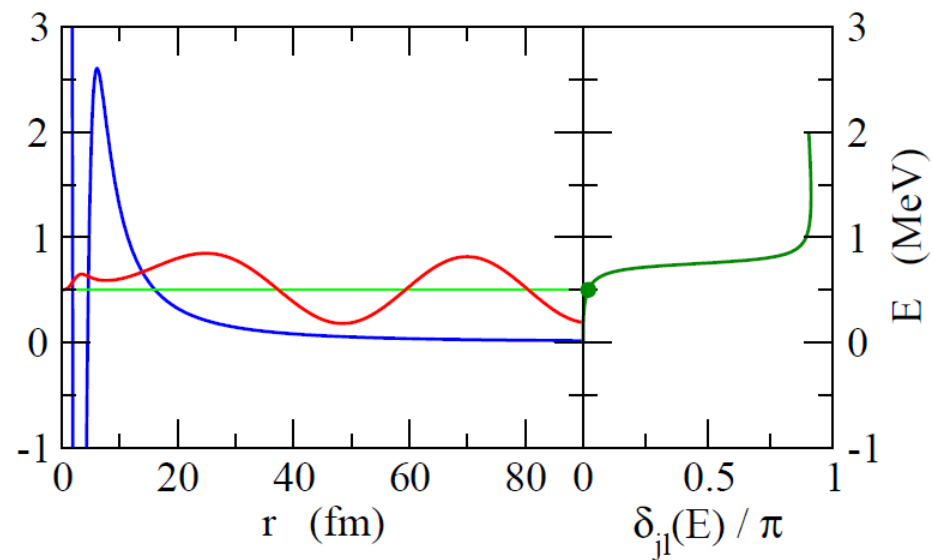
$$rR_{j_l}(r) \rightarrow \sqrt{\frac{2m}{\pi k \hbar^2}} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{j_l}(E)\right); \quad \int dr \psi_E(r) \psi_{E'}^*(r) = \delta(E - E')$$

それでは波動関数は?



on-resonance:

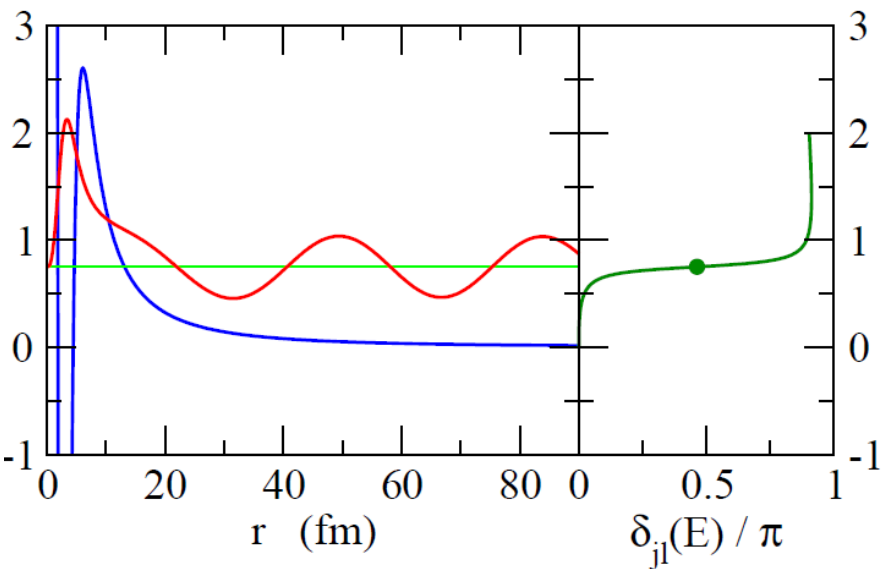
波動関数は障壁の内側で
大きな振幅



off-resonance:

障壁の内側では振幅が
小さい

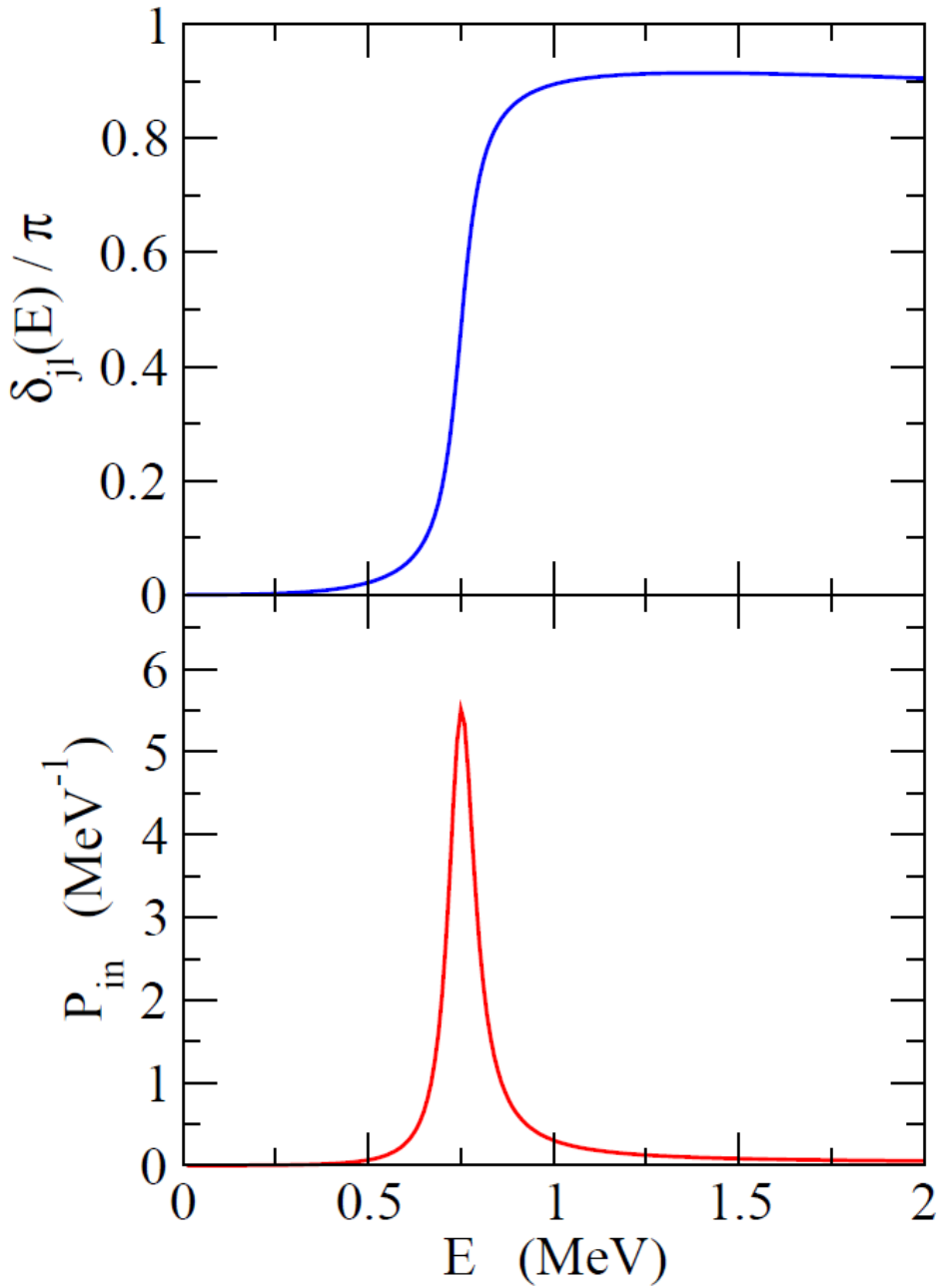
それでは波動関数は?



on-resonance:
波動関数は障壁の内側で
大きな振幅

障壁内部の存在確率

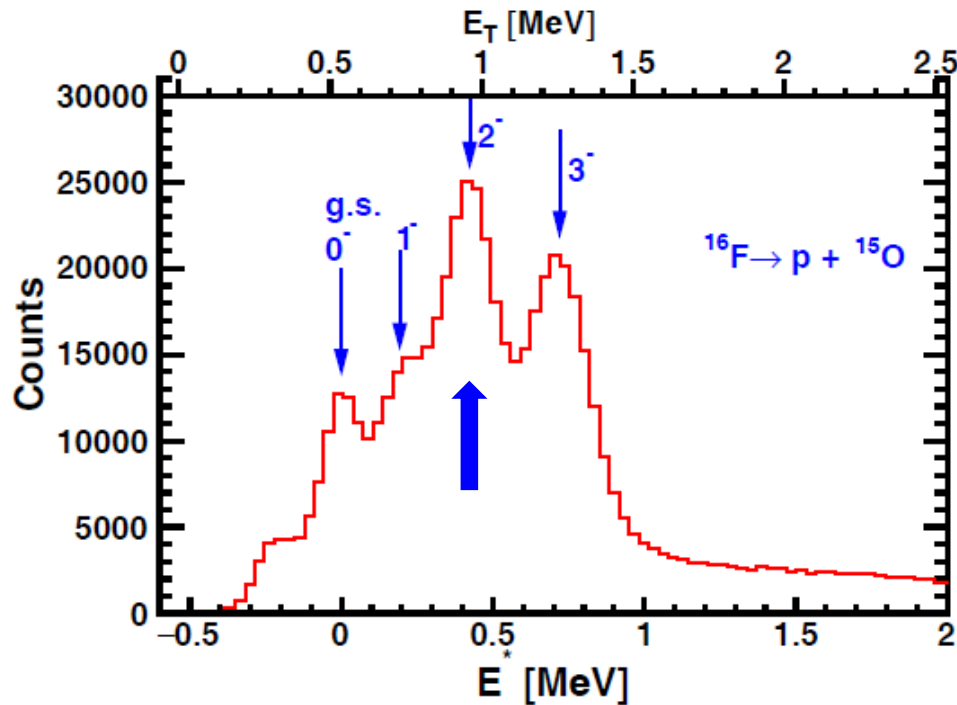
$$P_{in} \equiv \int_0^{r_b} r^2 dr |R_{jl}(r)|^2$$



共鳴状態と弾性散乱(共鳴散乱)

陽子非束縛核 $^{16}_9\text{F}_7$

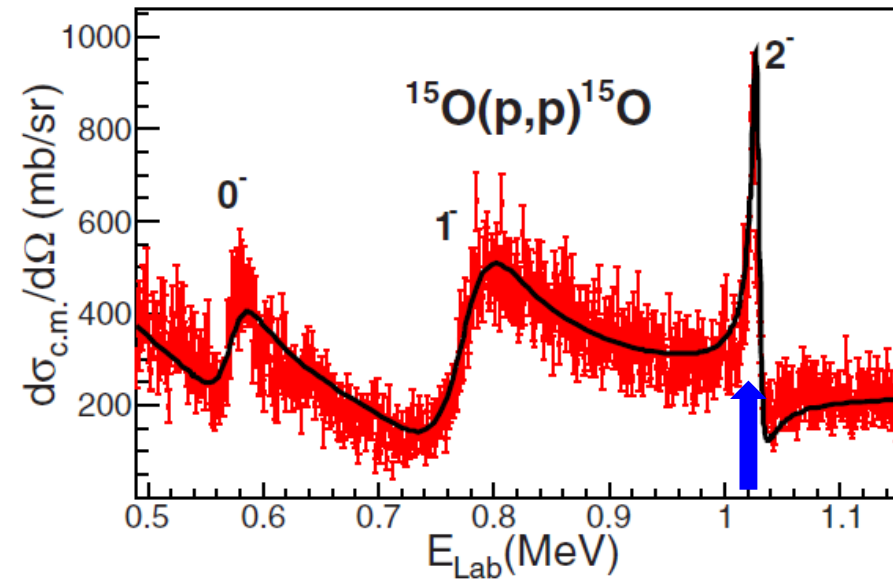
$^{17}_{10}\text{Ne}$ から1つ陽子を抜いて
 $^{16}_9\text{F}$ を生成 → 崩壊スペクトル



R.J. Charity,
Eur. Phys. J. Plus 131 ('16) 63

まず実際の現象から

$^{15}\text{O} + \text{p}$ 弾性散乱の断面積



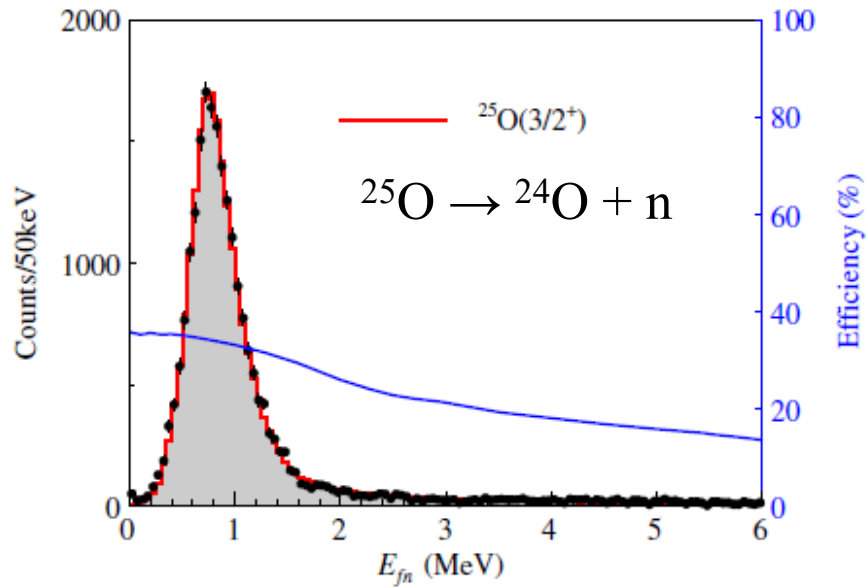
$\theta_{\text{cm}} = 180$ deg.

I. Stefan et al., PRC90('14) 014307

共鳴エネルギーで弾性散乱の断面積が増大(共鳴散乱)

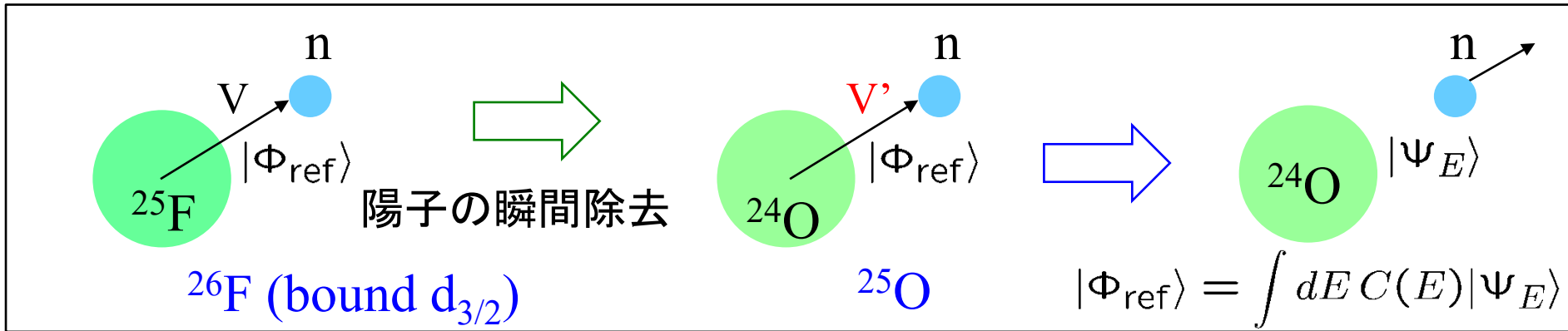
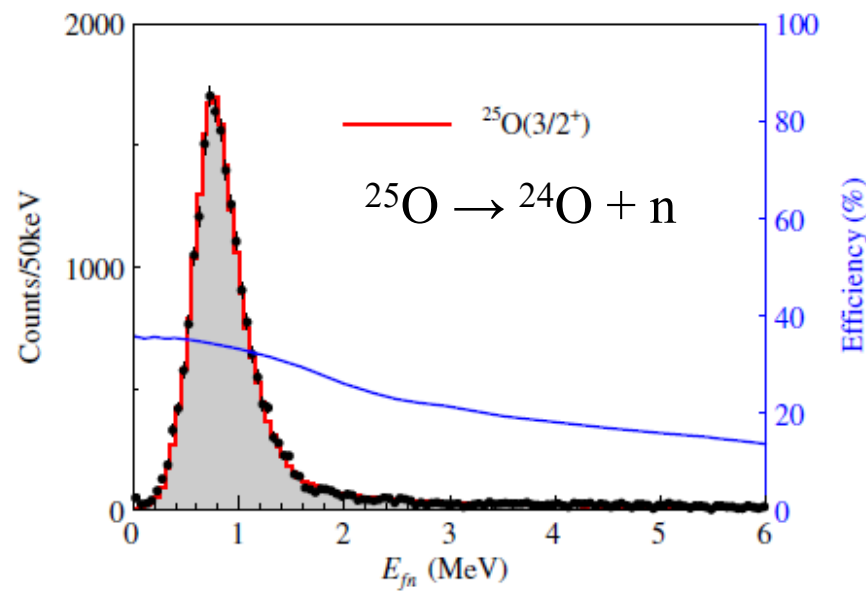
不変質量スペクトルの解析

$^{26}_9\text{F}_{17}$ から1つ陽子を抜いて $^{25}_8\text{O}_{17}$ を生成 → 1中性子を放出して崩壊



不変質量スペクトルの解析

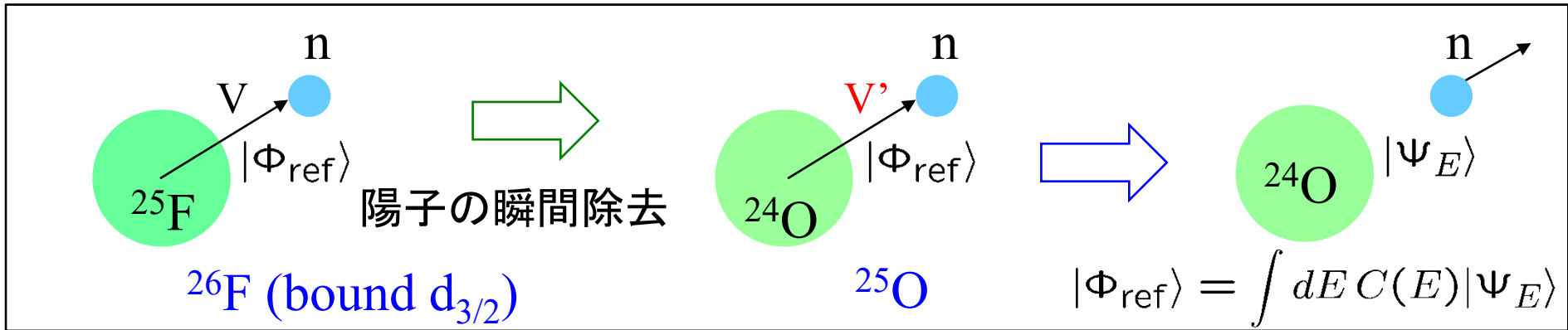
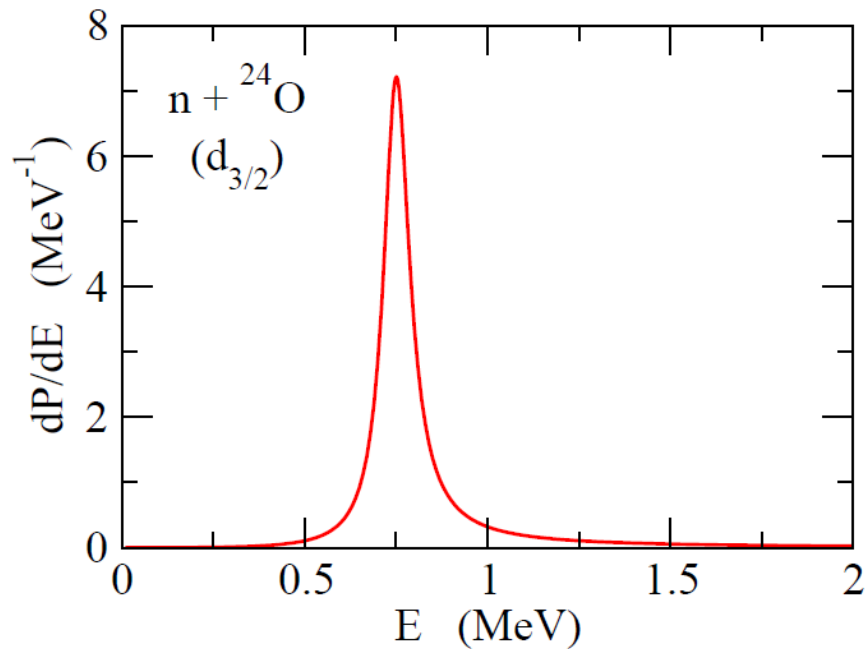
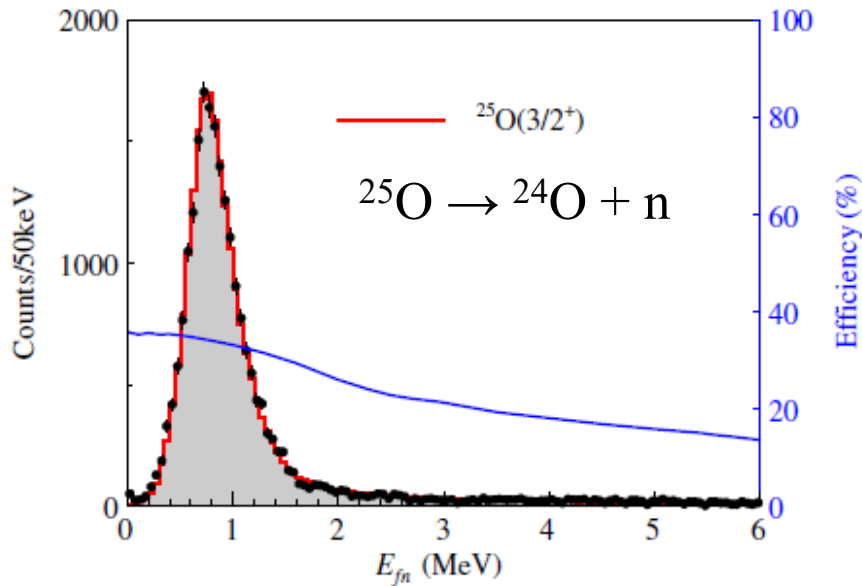
$^{26}_9\text{F}_{17}$ から1つ陽子を抜いて $^{25}_8\text{O}_{17}$ を生成 → 1中性子を放出して崩壊



不変質量スペクトルの解析

$^{26}_9\text{F}_{17}$ から1つ陽子を抜いて $^{25}_8\text{O}_{17}$ を生成 → 1中性子を放出して崩壊

$$\frac{dP}{dE} = |\langle \Phi_{\text{ref}} | \Psi_E \rangle|^2$$

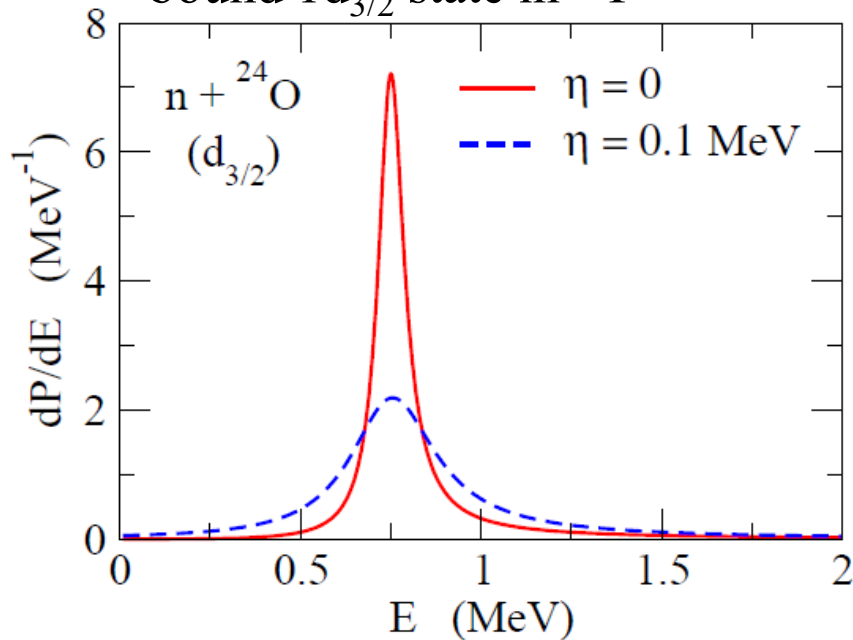


不変質量スペクトルの解析

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dE} &= |\langle \Phi_{\text{ref}} | \Psi_E \rangle|^2 = \int dE' |\langle \Phi_{\text{ref}} | \Psi_{E'} \rangle|^2 \delta(E - E') \\ &\rightarrow \frac{1}{\pi} \text{Im} \int dE' |\langle \Phi_{\text{ref}} | \Psi_{E'} \rangle|^2 \underbrace{\frac{1}{E' - E - i\eta}}\end{aligned}$$

Reference state:

bound $1d_{3/2}$ state in ^{26}F

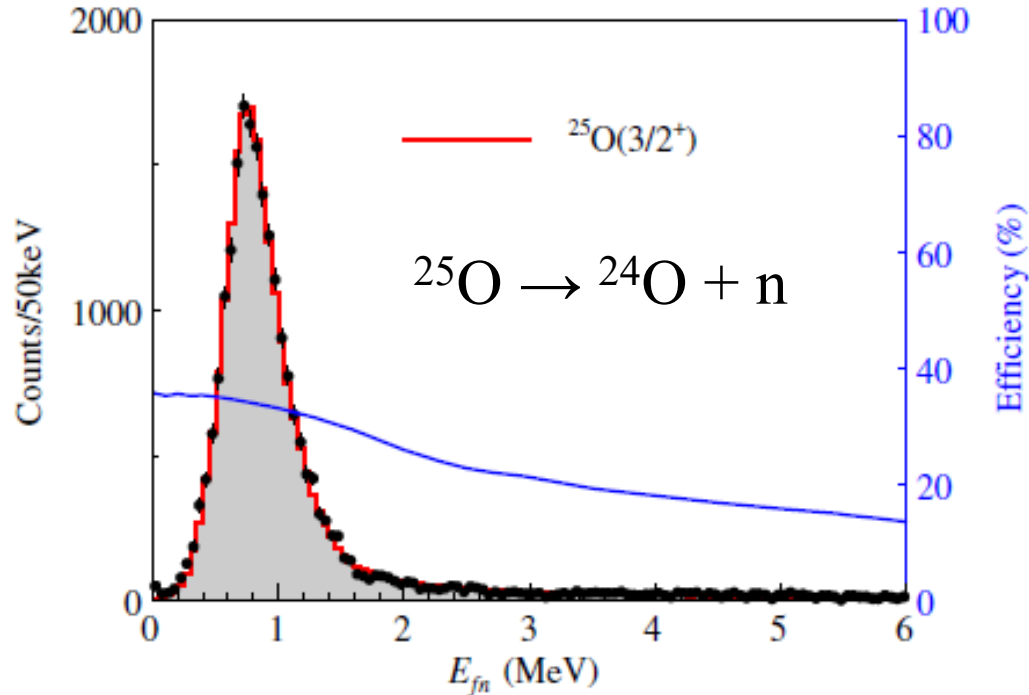


$$= 1 / (H - E - i\eta) = G(E)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{x - i\eta} = P \frac{1}{x} + i\pi\delta(x)$$

有限の η でも計算できる
(数値計算上便利)

レポート問題8(×切:12月3日(土))



Y. Kondo et al., PRL116 ('16) 102503

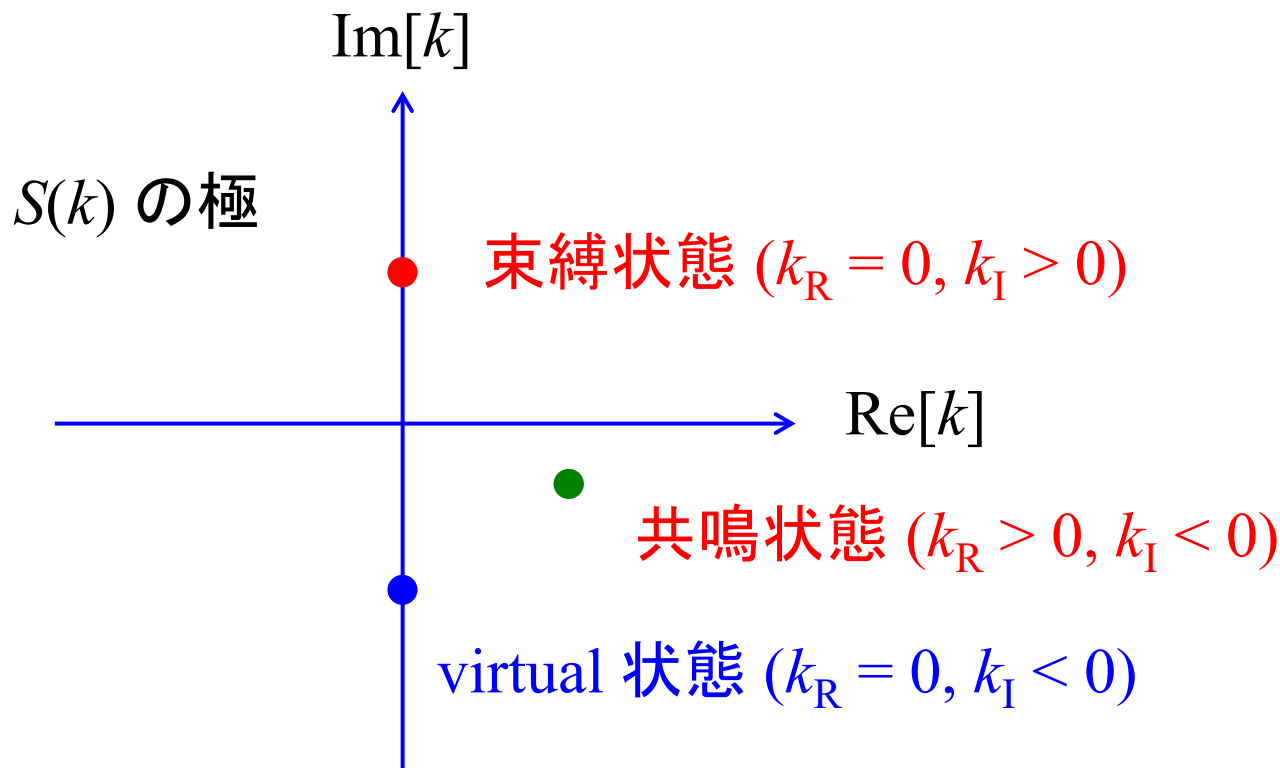
この実験データは共鳴エネルギー $E_R = 749(10)$ keV, 共鳴幅 $\Gamma = 88(6)$ keV に相当する。この共鳴幅から、この状態の寿命を求めよ。

virtual state について

散乱問題: 正の実数エネルギー (これが物理的な観測量)



複素エネルギー (または複素運動量) 平面で実軸の近くの
S 行列の極



virtual state について

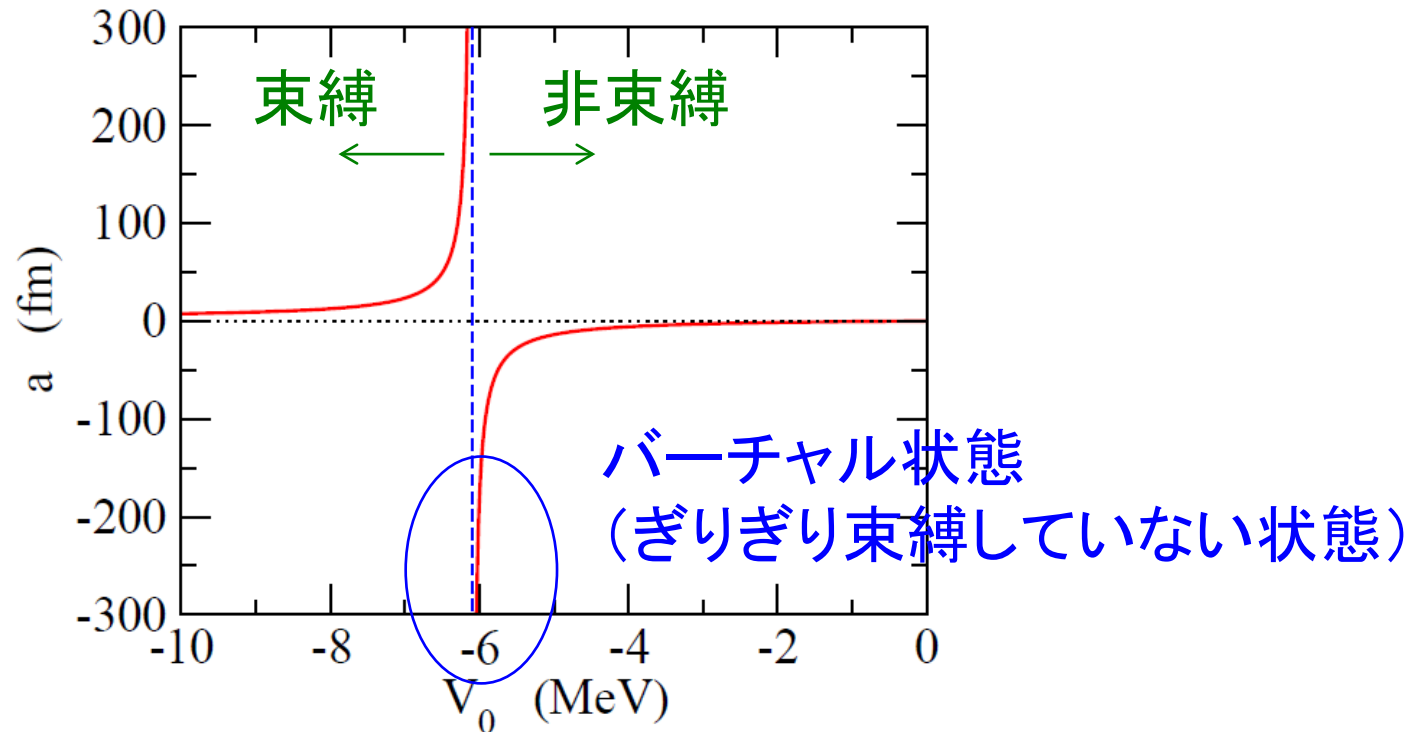
極低エネルギーでの散乱を考える(従って s-wave のみ)

effective range expansion:

$$k \cot \delta(k) \sim -\frac{1}{a} + \frac{1}{2}r_e k^2 + \dots$$

virtual state について

散乱長は $E = 0$ の束縛状態を作るときに正で発散



Woods-Saxon ポテンシャルで
ポテンシャルの深さを変える

$$(R = 2.736 \text{ fm}, a_0 = 0.67 \text{ fm})$$

散乱長の物理的意味

半径 R の井戸型ポテンシャル:

$$a = R \left(1 - \frac{\tan \kappa R}{\kappa R} \right)$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}$$

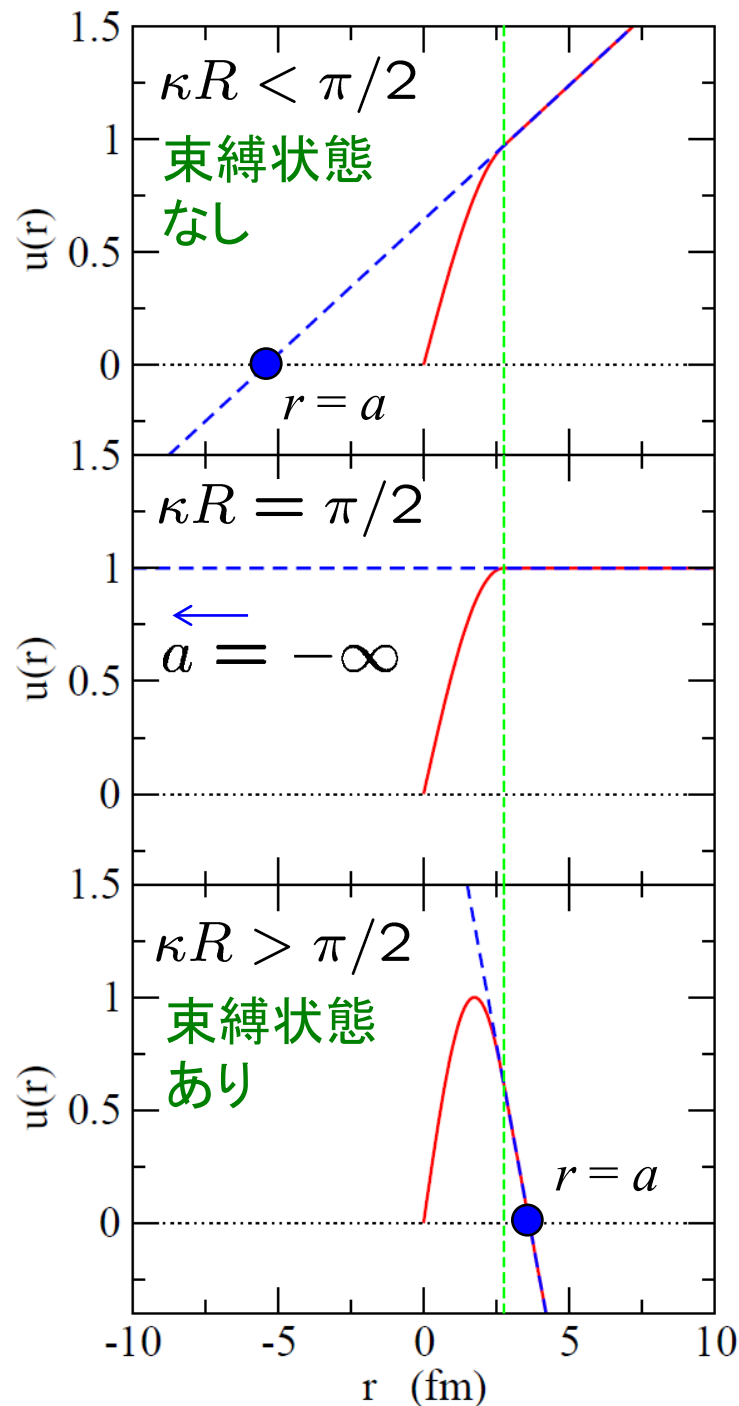
$$u(r) = A \sin(\kappa r) \quad (r < R)$$

↪

$$f(r) \equiv u(R) + u'(R)(r - R)$$

は $r = a$ で $f(a) = 0$ 。

すなわち、散乱長は $r = R$ で波動関数を一次近似したときに、その直線が x 軸を切る点。



virtual state について

極低エネルギーでの散乱を考える(従って s-wave のみ)

effective range expansion: $k \cot \delta(k) \sim -\frac{1}{a} + \frac{1}{2}r_e k^2 + \dots$

このとき、

$$\begin{aligned} S(k) &= \frac{e^{i\delta}}{e^{-i\delta}} = \frac{\cos \delta + i \sin \delta}{\cos \delta - i \sin \delta} \\ &= \frac{\cot \delta + i}{\cot \delta - i} \\ &\sim \frac{-1/a + ik}{-1/a - ik} \end{aligned}$$

極は $k = i \frac{1}{a}$

$a < 0$ なら virtual 状態、 $a > 0$ なら(浅い)束縛状態

virtual state について

極低エネルギーでの散乱を考える(従って s-wave のみ)

effective range expansion: $k \cot \delta(k) \sim -\frac{1}{a} + \frac{1}{2}r_e k^2 + \dots$

このとき、

$$S(k) \sim \frac{-1/a + ik}{-1/a - ik}$$

極は $k = i \frac{1}{a}$

極が実軸に近い $\longrightarrow |a|$ が大

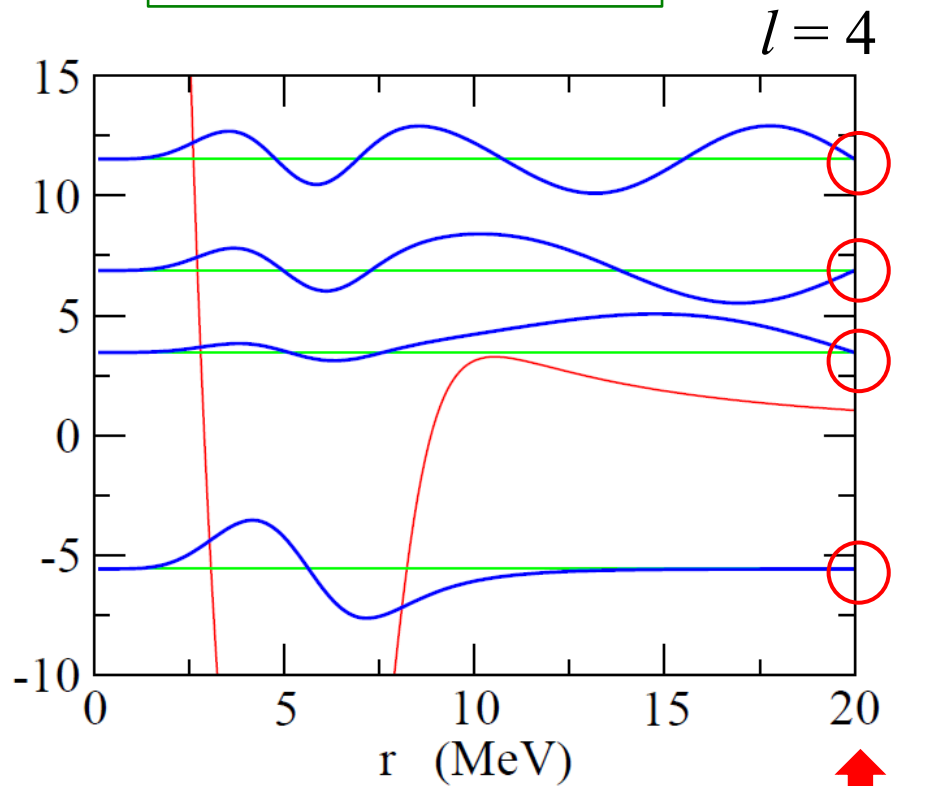
このとき、弾性散乱の全断面積:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta = \frac{4\pi}{(k \cot \delta)^2 + k^2} \sim 4\pi a^2 \quad : \text{large}$$

stabilization method

box 境界条件 = 散乱状態の離散化

$$u_{jl}(R_{\text{box}}) = 0$$



$$V_0 = -50 \text{ MeV}$$

$$R_0 = 1.27 * 200^{1/3} \text{ fm}$$

$$a = 0.67 \text{ fm}$$

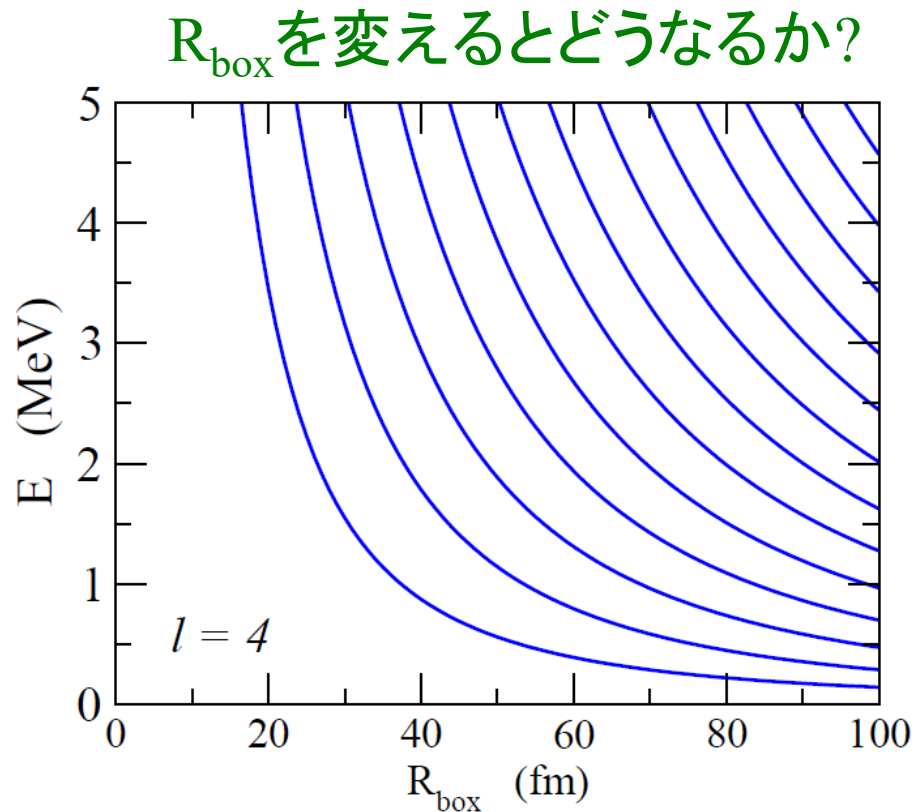
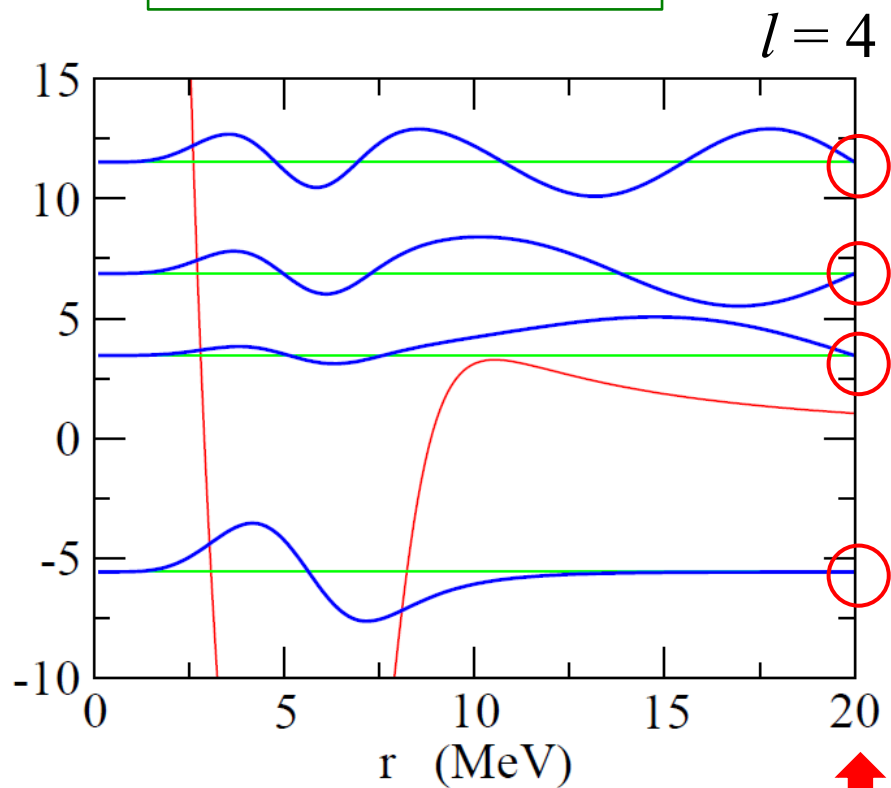
$$\mu = 200 m_N / 201$$

R_{box}

stabilization method

box 境界条件 = 散乱状態の離散化

$$u_{jl}(R_{\text{box}}) = 0$$

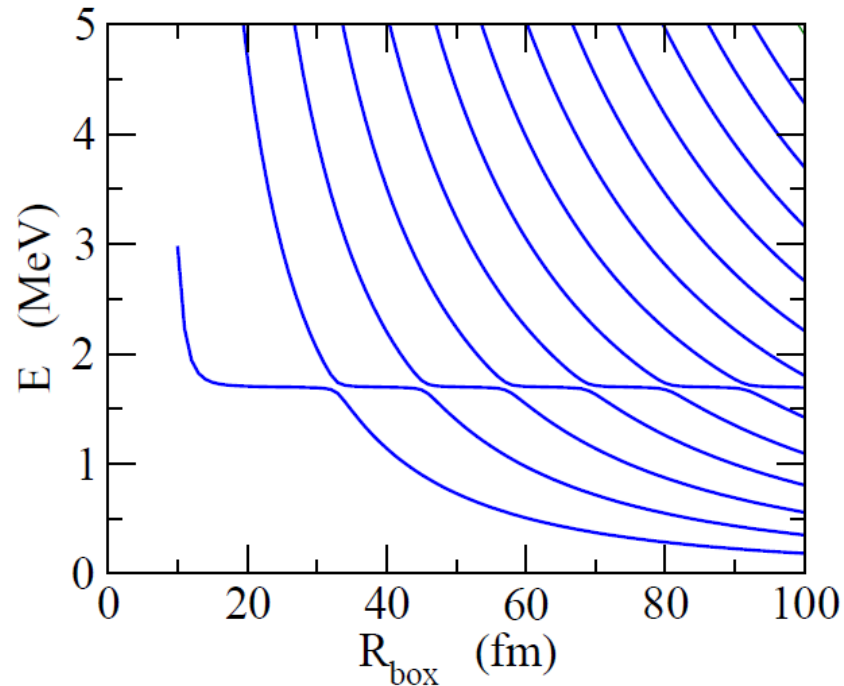
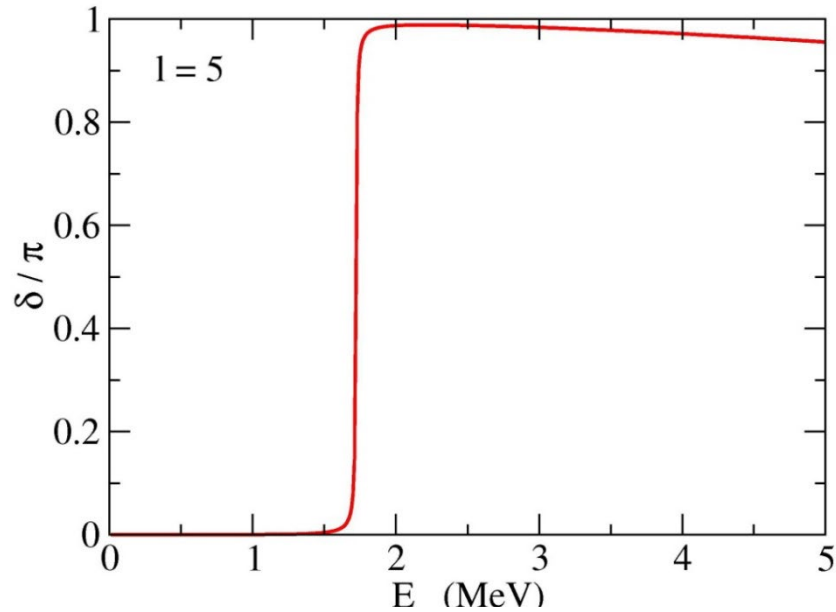


$V_0 = -50$ MeV
 $R_0 = 1.27 * 200^{1/3}$ fm
 $a = 0.67$ fm
 $\mu = 200 m_N / 201$

\uparrow
 R_{box}

- ✓ R_{box} の関数として単調に減少
- ✓ R_{box} が大きい方が dk が小

共鳴がある場合



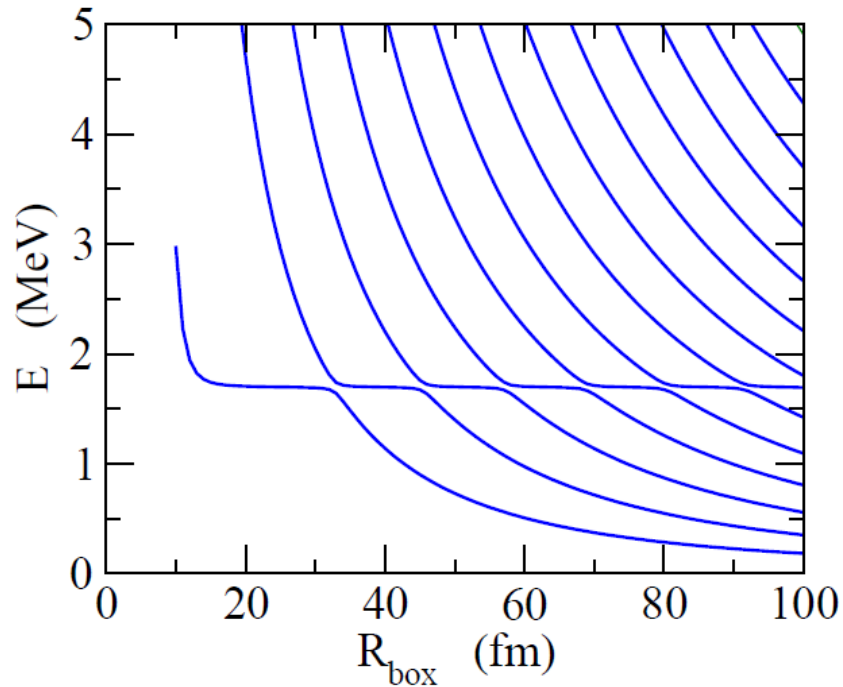
共鳴のエネルギーで離散化されたエネルギーが安定化

“stabilization method”

A.U. Hazi and H.S. Taylor,
PRA 1 ('70) 1109

L^2 基底で共鳴エネルギーと
共鳴幅を計算する

共鳴がある場合



共鳴のエネルギーで離散化されたエネルギーが安定化

“stabilization method”

A.U. Hazi and H.S. Taylor,
PRA 1 ('70) 1109

L^2 基底で共鳴エネルギーと
共鳴幅を計算する

$$\left(\frac{\partial E}{\partial R}\right)_{E=E_R} = -\frac{2E_R}{R + \frac{2}{\Gamma} \frac{k_R \hbar^2}{m}}$$

← Breit-Wigner

$$\Rightarrow \Gamma = \frac{2k_R \hbar^2}{m} \cdot \frac{1}{-R - 2E_R \left[\left(\frac{\partial E}{\partial R}\right)_{E=E_R} \right]^{-1}}$$

C.H. Maier, L.S. Cederbaum, and W. Domcke, J. of Phys. B13 ('80) L119
L. Zhang et al., PRC77 ('08) 014312