

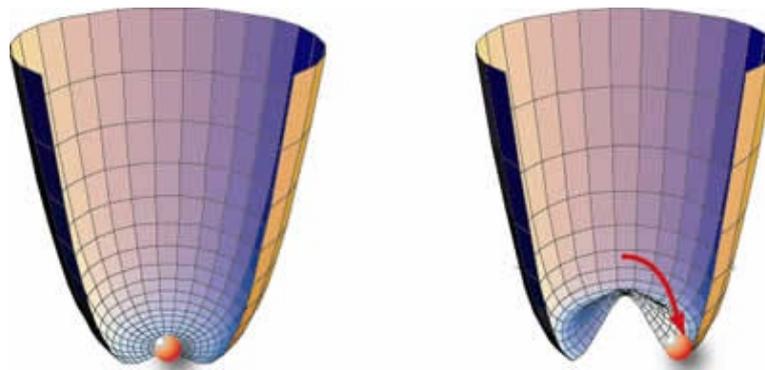
Mean-field approximation and deformation

平均場近似 = 2体場 → 1体場に近似

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^A -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} v(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) \\ &= \sum_{i=1}^A \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + V_{\text{MF}}(\mathbf{r}_i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} v(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) - \sum_i V_{\text{MF}}(\mathbf{r}_i) \end{aligned}$$

→ Ψ_{MF} : ハミルトニアン H が持っている対称性を持たなくてもいい

“対称性の自発的破れ”



Ψ_{MF} : ハミルトニアン H が持っている対称性を持たなくてもいい

典型的な例

➤ 並進対称性: 原子核の平均場近似 (DFT) では常に破れる

$$H = - \sum_{i=1}^A \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j}^A v(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \rightarrow \sum_{i=1}^A \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + \underline{V_{MF}(\mathbf{r}_i)} \right)$$

Ψ_{MF} : ハミルトニアン H が持っている対称性を持たなくてもいい

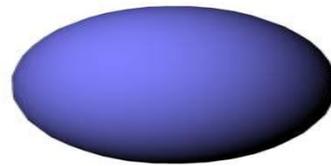
典型的な例

➤ 並進対称性: 原子核の平均場近似 (DFT) では常に破れる

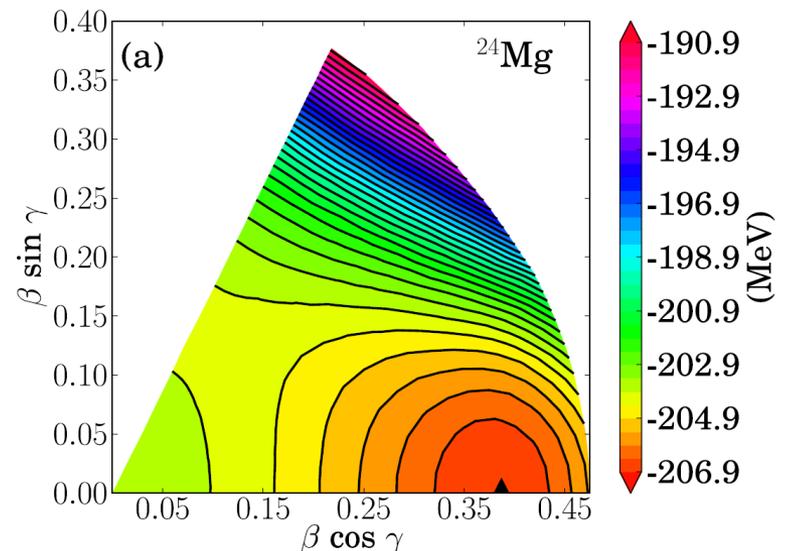
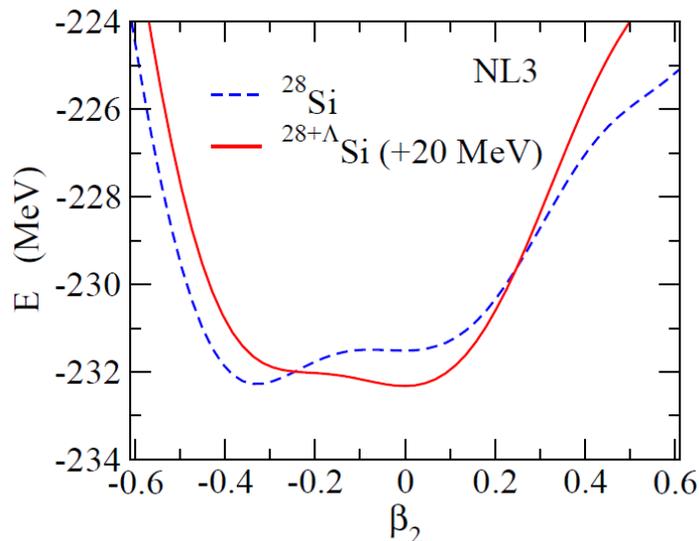
$$H = - \sum_{i=1}^A \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} v(r_i - r_j) \rightarrow \sum_{i=1}^A \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + \underline{V_{MF}(r_i)} \right)$$

➤ 回転対称性

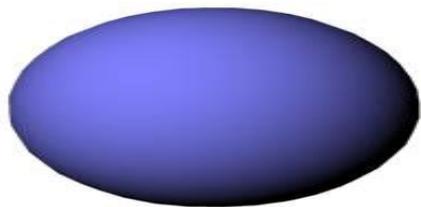
変形した基底状態



$\rightarrow V(r, \theta)$



One-particle motion in a deformed potential



$$\rightarrow V(r, \theta)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r, \theta) - E \right] \psi(\mathbf{r}) = 0$$

(note) $V(r, \theta) \rightarrow$ 回転対称性を持っていない
 \rightarrow 角運動量がいい量子数ではない

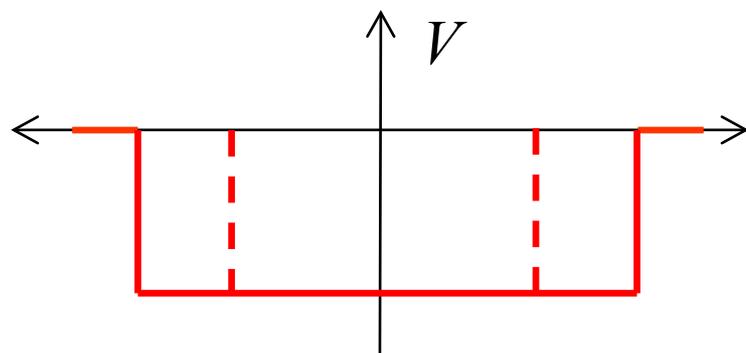
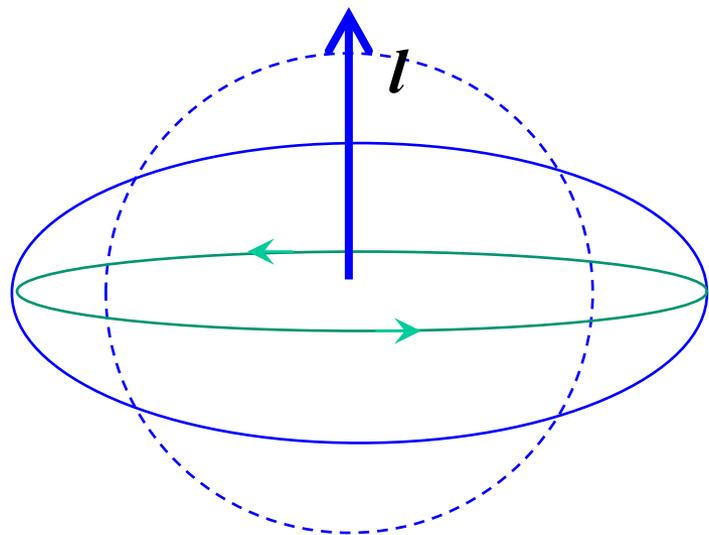
$$\psi_{nlm}(\mathbf{r}) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \rightarrow \psi_{nK}(\mathbf{r}) = \sum_l R_{nl}(r) Y_{lK}(\hat{\mathbf{r}})$$

* 軸対称変形であれば l_z は保存

$$E_{nl} \rightarrow E_{nK}$$

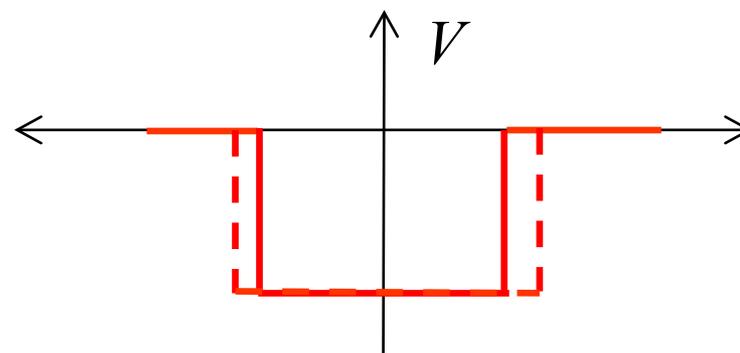
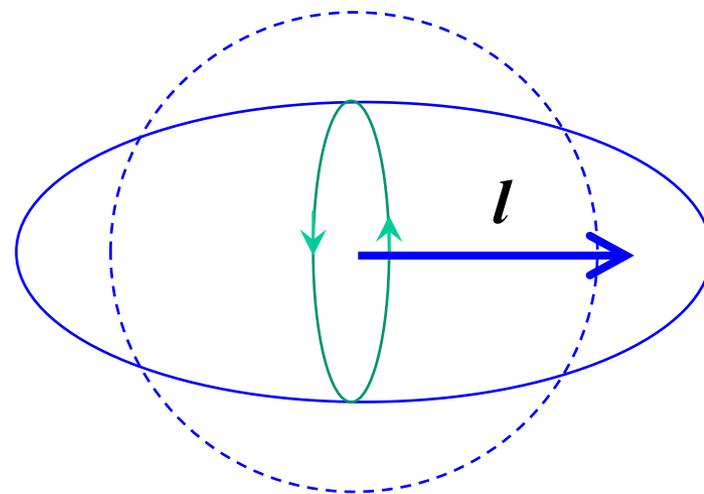
One-particle motion in a deformed potential

長軸に沿った運動



$E \rightarrow$ 小

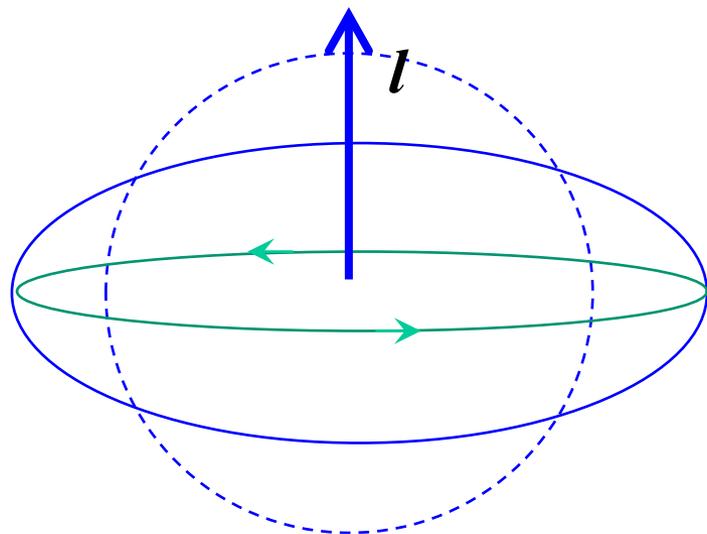
短軸に沿った運動



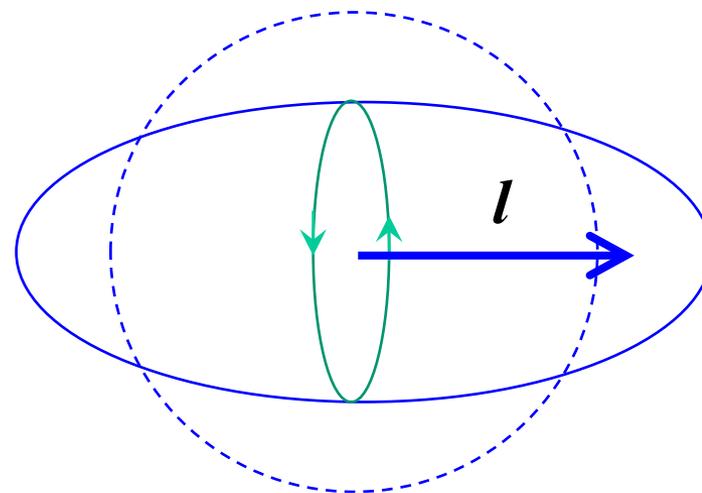
$E \rightarrow$ 大

One-particle motion in a deformed potential

長軸に沿った運動

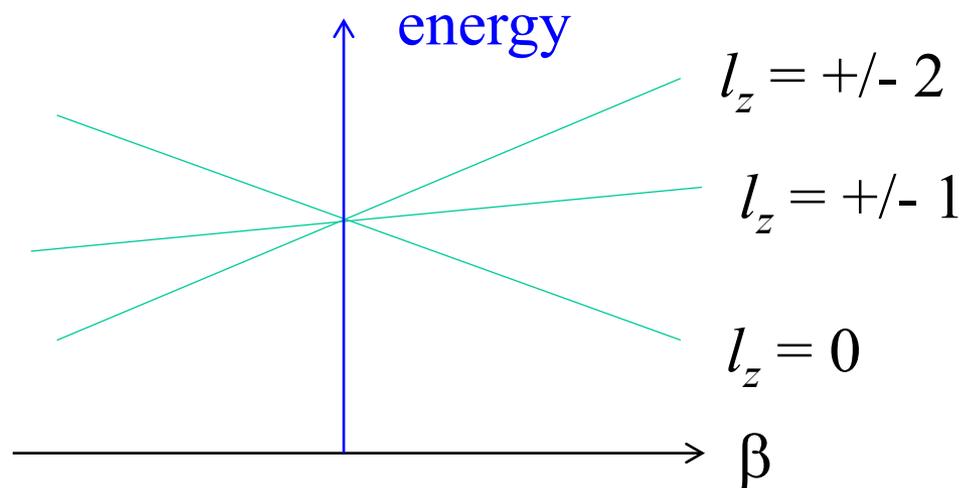


短軸に沿った運動

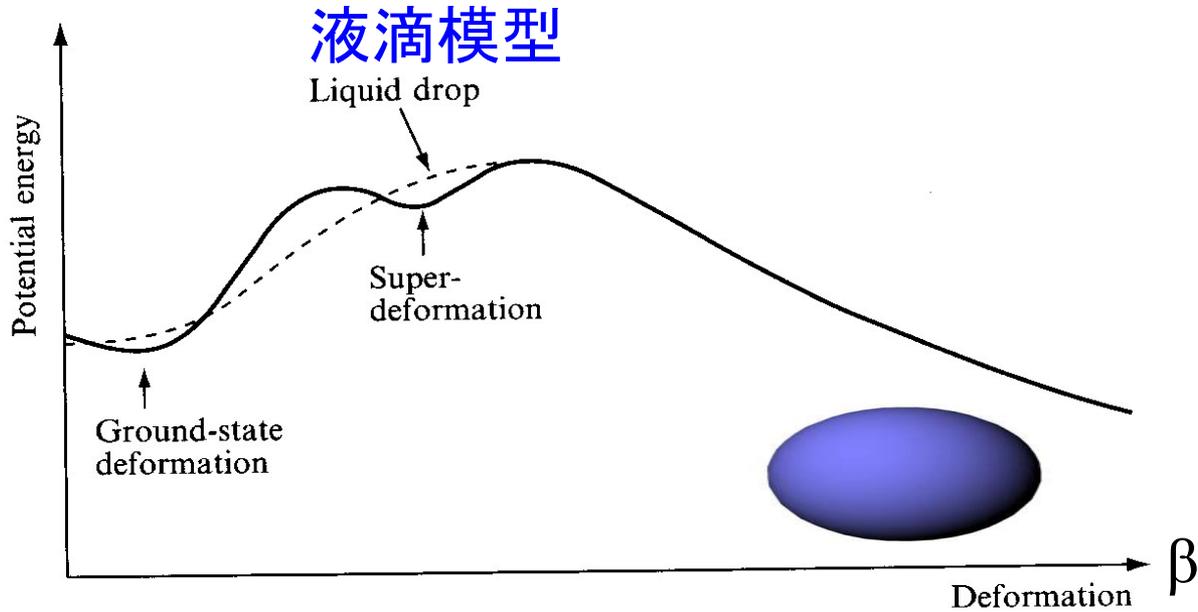


→ z軸

軌道が
スプリット

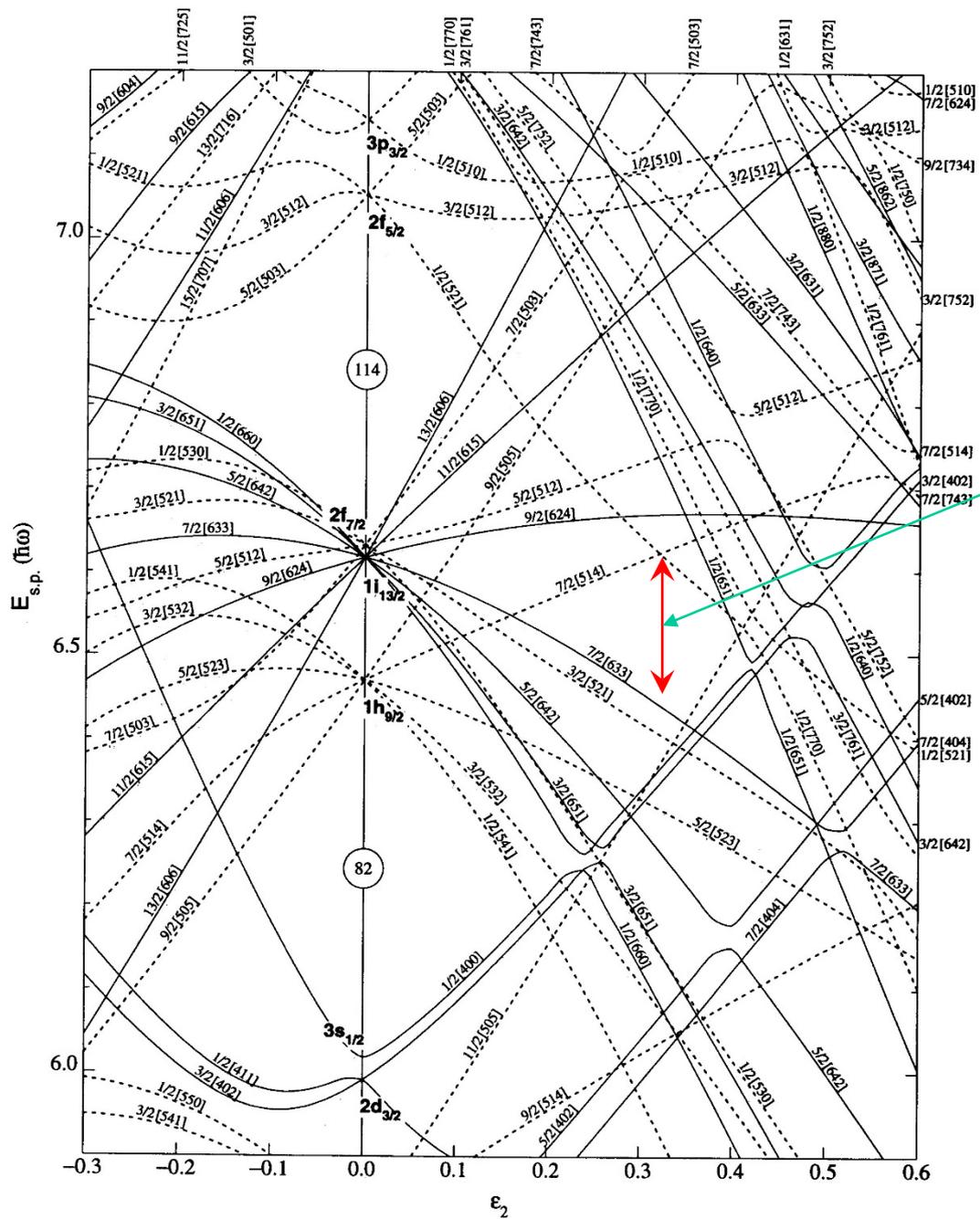


原子核の変形と殻効果



$$E(\beta) = E_{LDM}(\beta) + E_{\text{shell}}(\beta)$$

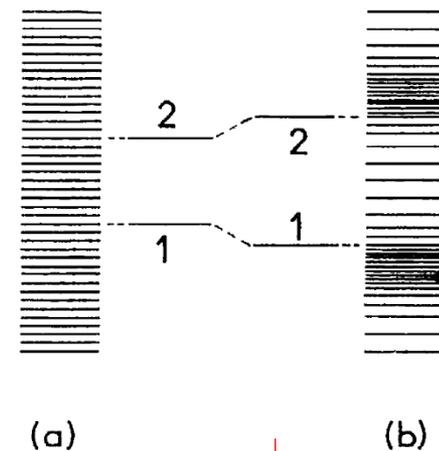
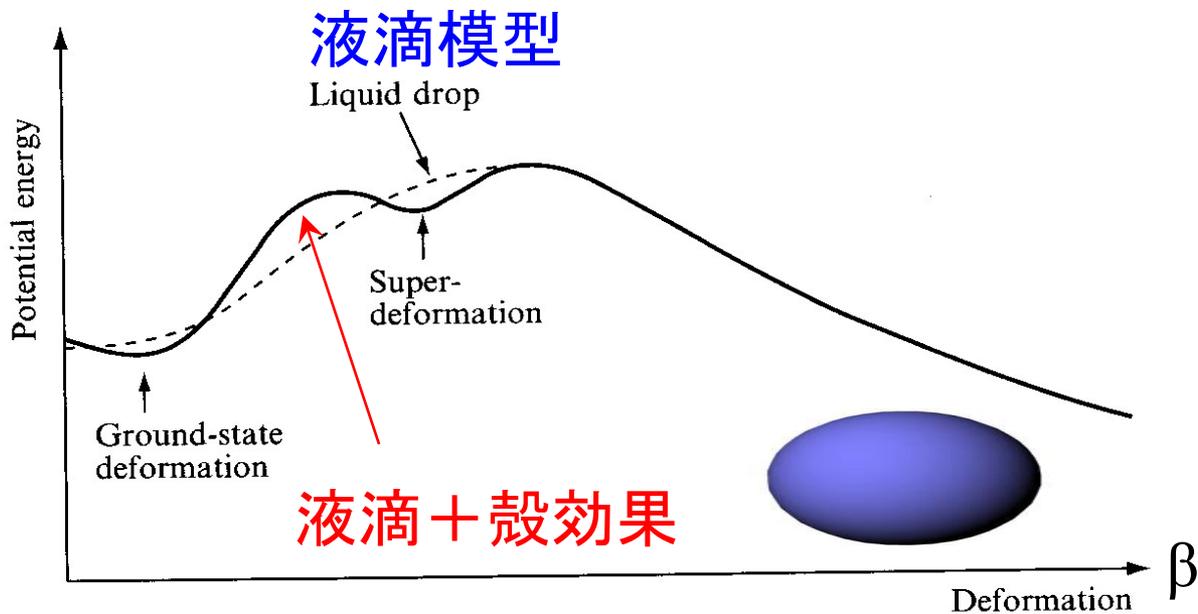
液滴模型→常に球形が基底状態



変形することにより
ギャップが開く

Nilsson diagram

Figure 13. Nilsson diagram for protons, $Z \geq 82$ ($\epsilon_4 = \epsilon_2^2/6$).



準位にギャップ
が開くと原子核が
安定になる

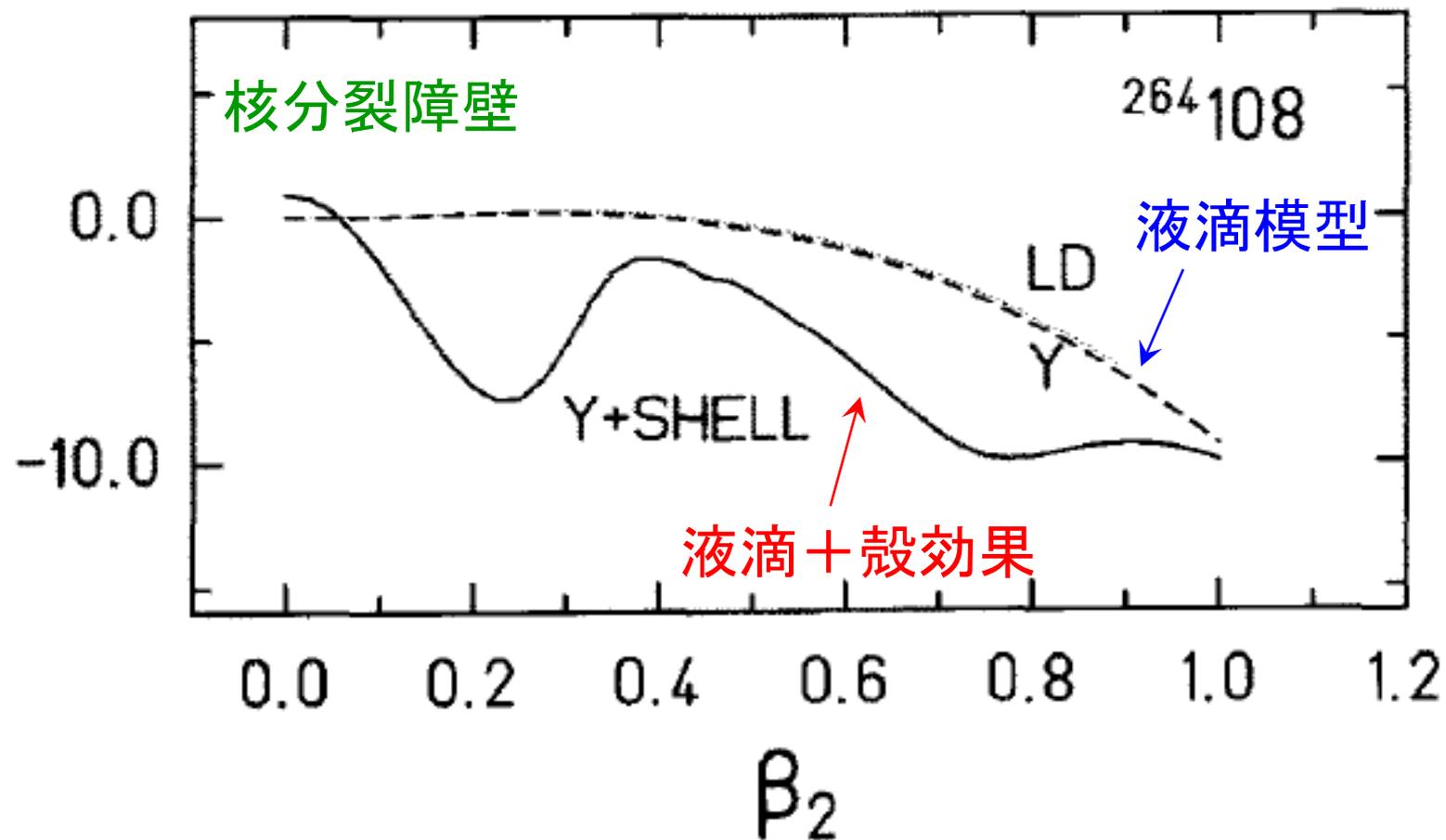
$$E(\beta) = E_{LDM}(\beta) + E_{shell}(\beta)$$

原子核が変形

→ 核子が感じるポテンシャルも変形

→ 変形度によって異なる量子力学的補正(殻効果)

殻構造の帰結：超重核の安定化



殻効果により核分裂障壁が高くなり原子核が安定化する

レポート問題5

3次元非等方調和振動子

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2 + \frac{1}{2}m\omega_{\perp}^2(x^2 + y^2)$$

$$\omega_x = \omega_y \equiv \omega_{\perp} = \omega_0 \left(1 + \frac{\epsilon}{3}\right)$$
$$\omega_z = \omega_0 \left(1 - \frac{2}{3}\epsilon\right)$$

を考える。 ϵ を0から1まで変化させるとき、 $\epsilon = 0$ の時の基底状態、第一励起状態、第二励起状態のエネルギーはどのように変化するか図示せよ。

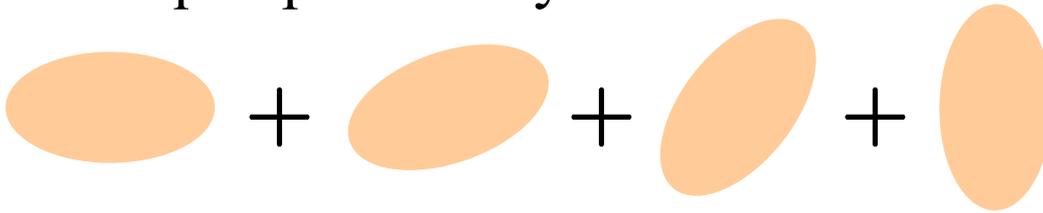
Angular Momentum Projection

- ✓ 変形→角運動量が混ざる(角運動量の固有状態になっていない)
- ✓ 観測される状態→角運動量の固有状態

→角運動量射影

0^+ : no preference of direction (spherical)

→ Mixing of all orientations with an equal probability



$$|\Psi_{0^+}\rangle = \int d\Omega |\Psi_{\Omega}\rangle$$

other states:

$$|\Psi_{IM}\rangle = \int d\Omega Y_{IM}(\Omega) |\Psi_{\Omega}\rangle$$

(for $K=0$)

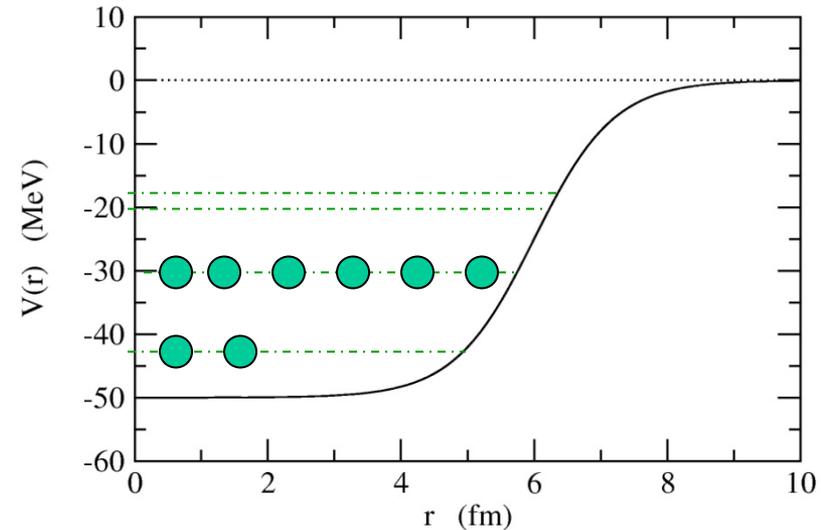
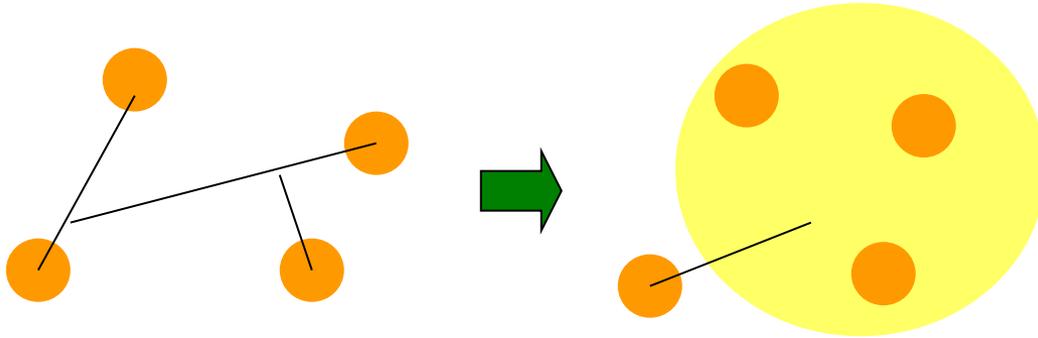
Pairing Correlation (対相関)

残留相互作用の果たす役割

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^A -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} v(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) \\ &= \sum_{i=1}^A \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + V_{\text{MF}}(\mathbf{r}_i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} v(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) - \sum_i V_{\text{MF}}(\mathbf{r}_i) \end{aligned}$$

Pairing Correlation (対相関)

平均場近似

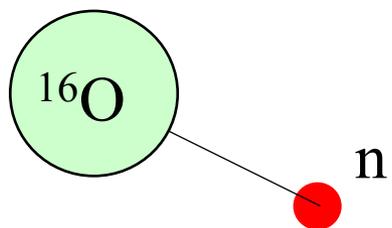
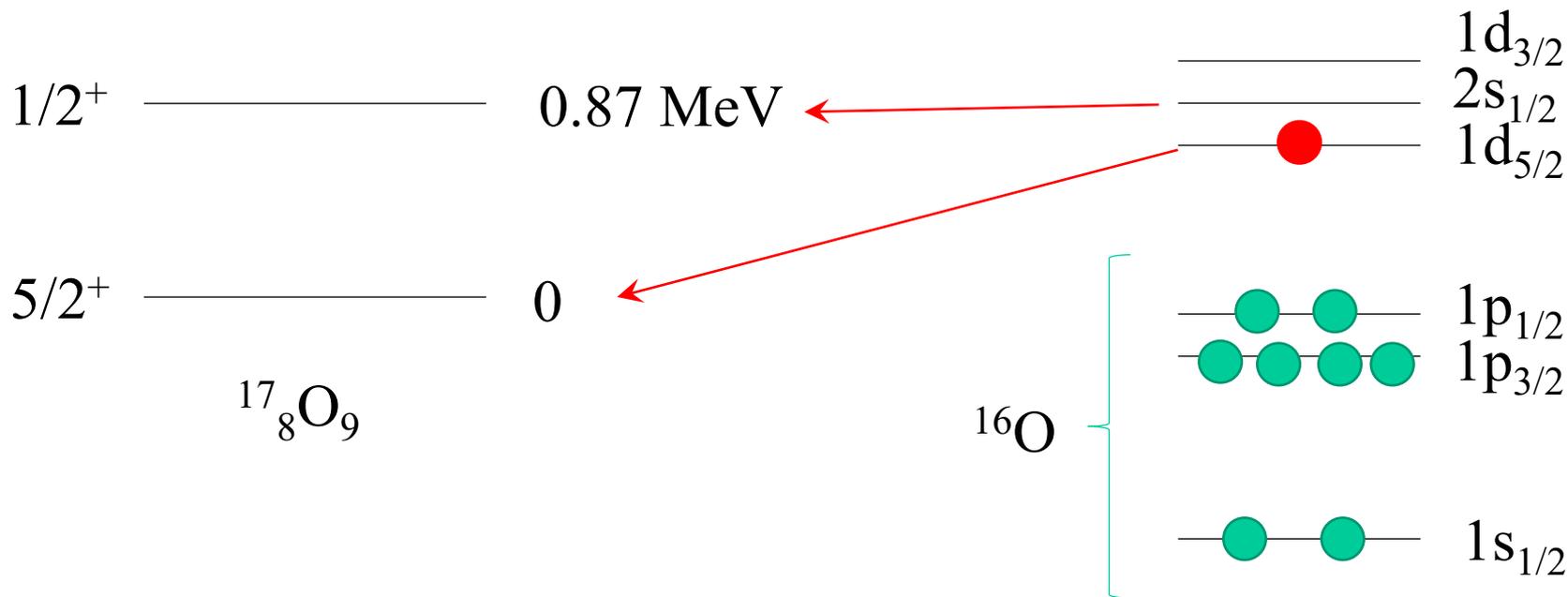


ポテンシャルの中での
独立粒子描像

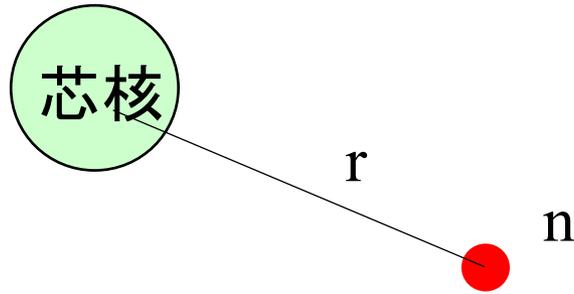
核子間の相互作用:
核子の感じるポテンシャル
としてののみ



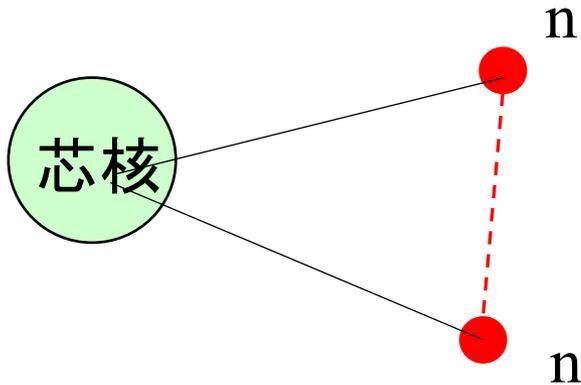
魔法数の説明



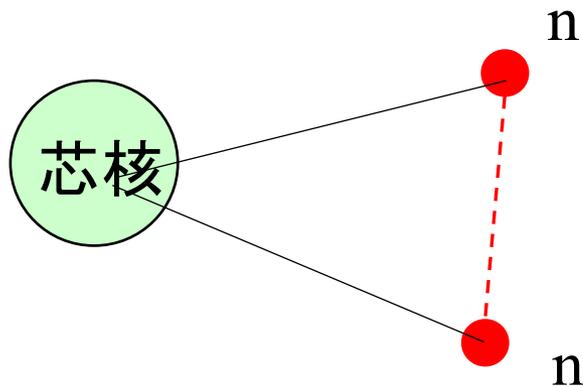
対相関



芯核のまわりに中性子が2個あるとどうなる？

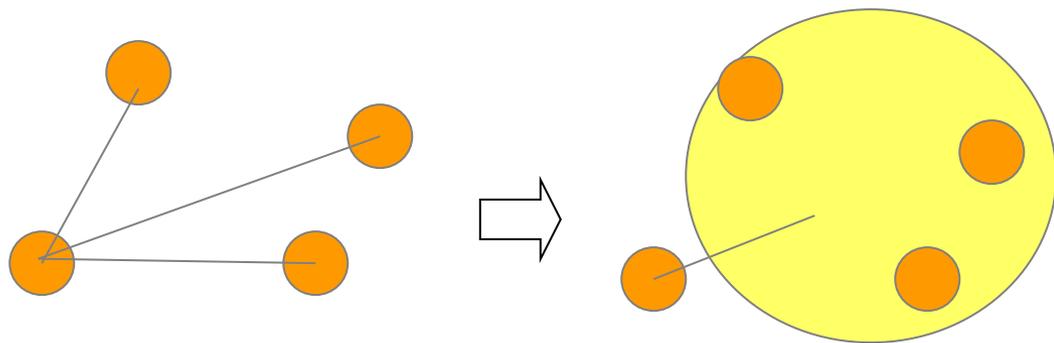


2中性子間に働く相互作用の影響は？



2中性子間に働く相互作用の影響は?

平均場理論

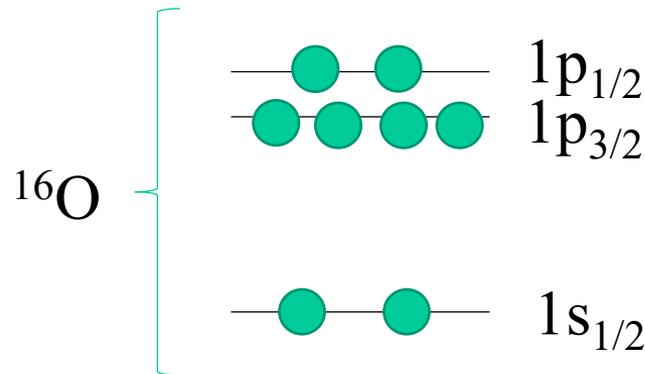
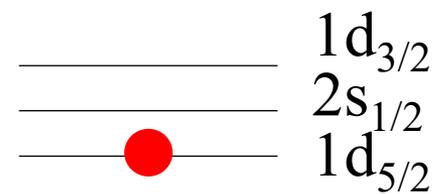


他の核子との相互作用を平均的に取り扱う

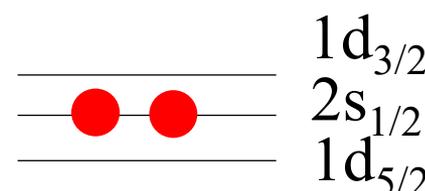
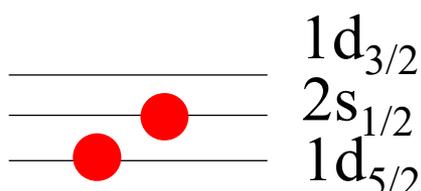
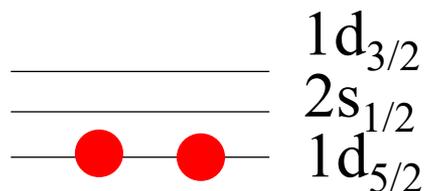
単純な平均場近似 → 2中性子が独立に運動
(2中性子間の相互作用は平均ポテンシャル
にのみ反映される)

$1/2^+$ ————— 0.87 MeV

$5/2^+$ ————— 0
 $^{17}_8\text{O}_9$



^{18}O の状態を予想すると。。。



$E = 0$

$I^\pi = d_{5/2} \times d_{5/2}$
 $= 0^+, 2^+, 4^+$

$E = 0.87 \text{ MeV}$

$I^\pi = d_{5/2} \times s_{1/2}$
 $= 2^+, 3^+$

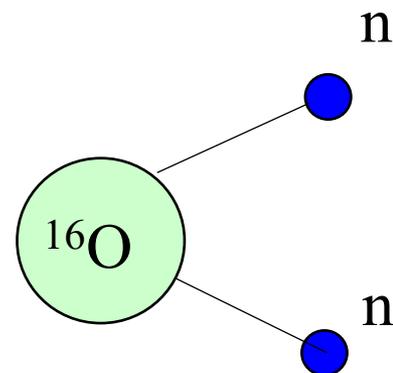
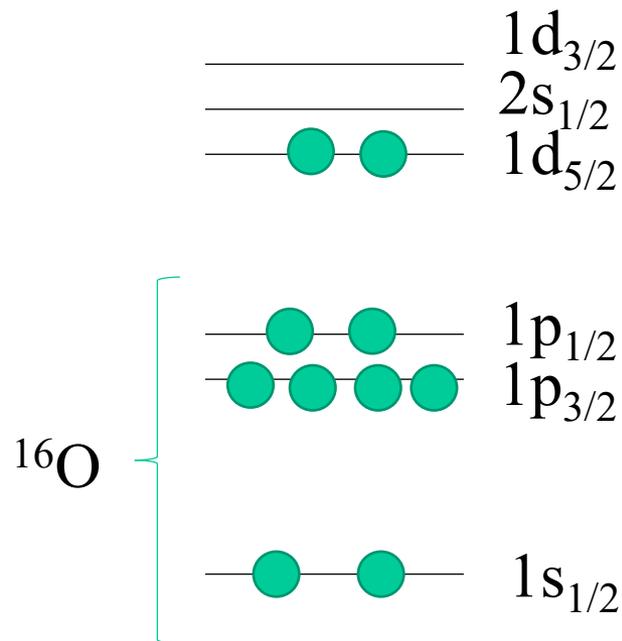
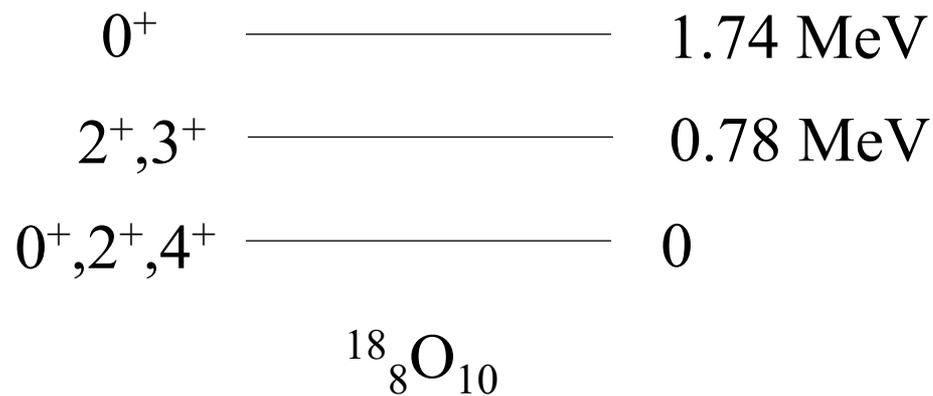
$E = 0.87 \times 2 = 1.74 \text{ MeV}$

$I^\pi = s_{1/2} \times s_{1/2} = 0^+$

2 MeV 以下に少なくとも6本の状態(?)

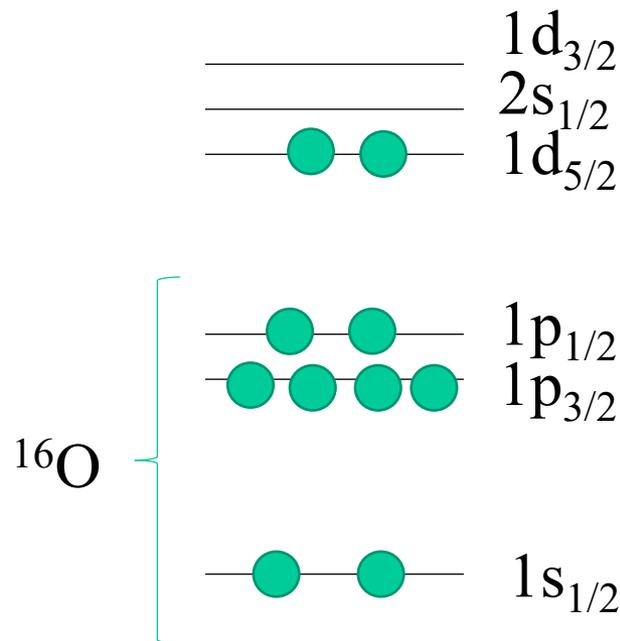
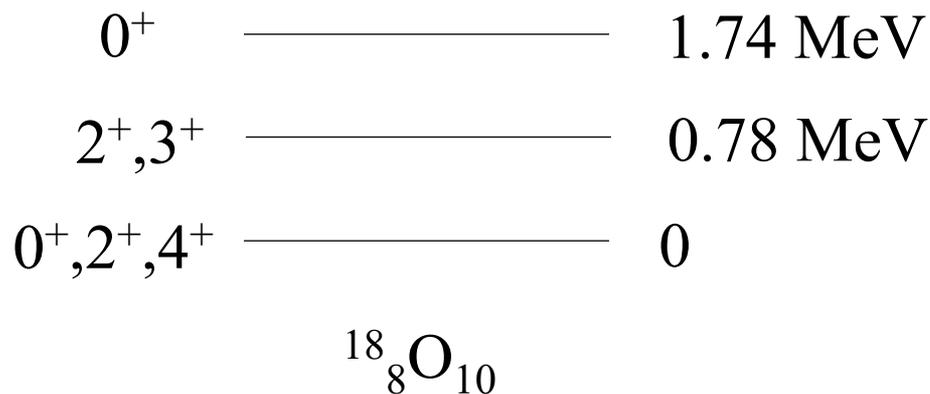
単純な平均場近似:

6 levels

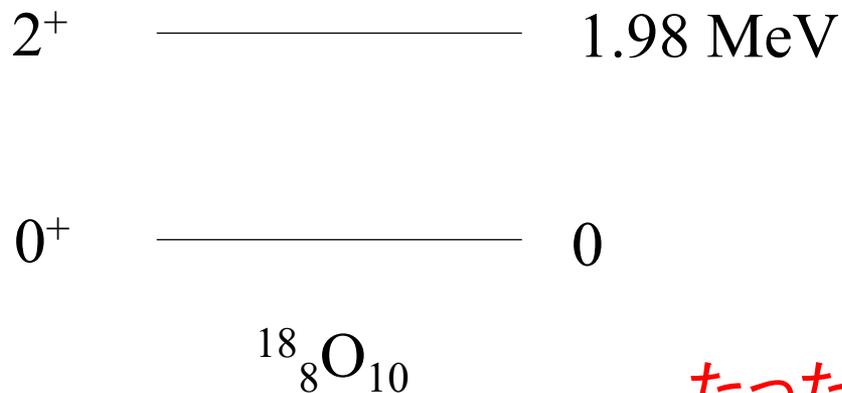


単純な平均場近似:

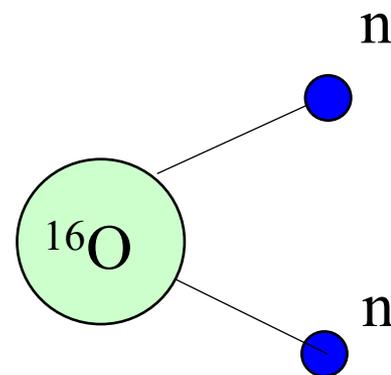
6 levels



実際には:



たったの2本!



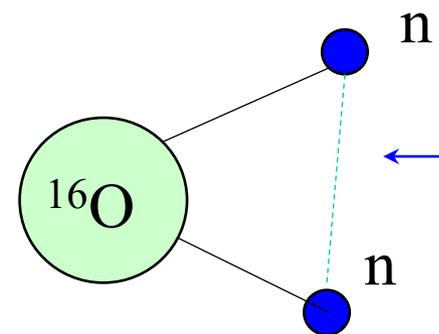
$$H = \sum_i T_i + \sum_{i < j} v_{ij} \rightarrow H = \sum_i (T_i + V_i) + \underbrace{\sum_{i < j} v_{ij} - \sum_i V_i}_{\text{平均からのずれ (残留相互作用)}}$$

平均からのずれ
(残留相互作用)

残留相互作用は完全に無視してもよいのか?

答え: no

開殻原子核では重要な役割を果たす
ことが知られている(ペアリング)



(note) 摂動論がよい条件

$$H = H_0 + \Delta V$$

$$H_0 |\phi_n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)} |\phi_n^{(0)}\rangle$$

$$\rightarrow |\phi_n\rangle = |\phi_n^{(0)}\rangle + \sum_{m \neq n} \frac{\langle \phi_m^{(0)} | \Delta V | \phi_n^{(0)} \rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} |\phi_m^{(0)}\rangle$$



$$|\langle \phi_m^{(0)} | \Delta V | \phi_n^{(0)} \rangle| \ll |E_n^{(0)} - E_m^{(0)}|$$

なら ΔV を無視できる

$$H = H_0 + \Delta V$$

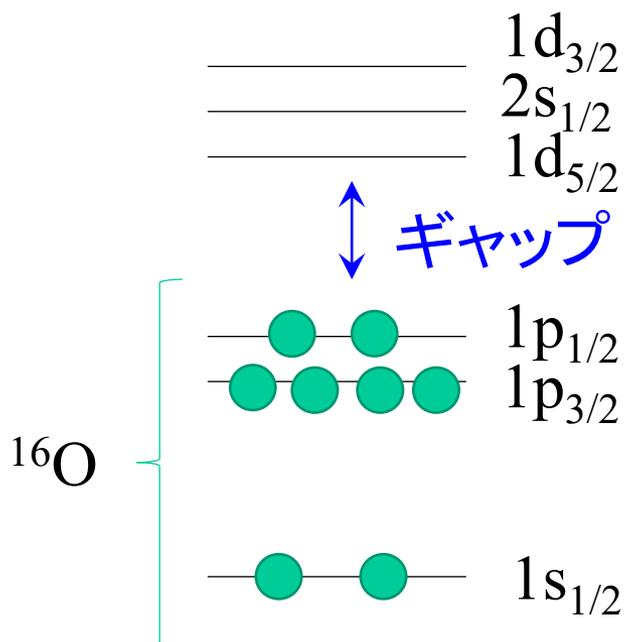


$$|\langle \phi_m^{(0)} | \Delta V | \phi_n^{(0)} \rangle| \ll |E_n^{(0)} - E_m^{(0)}|$$

なら ΔV を無視できる

$$H = \sum_i T_i + \sum_{i < j} v_{ij} \rightarrow H = \sum_i (T_i + V_i) + \underbrace{\sum_{i < j} v_{ij} - \sum_i V_i}_{\text{平均からのずれ (残留相互作用)}}$$

平均からのずれ
(残留相互作用)



閉殻核:

ギャップのために ΔE が大きい
→ 残留相互作用を無視できる

開殻核: ΔE が小さい

→ 残留相互作用を無視できない

対相関(ペアリング)

$$H = \sum_{i=1}^A \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + V_{\text{HF}}(i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j}^A v(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) - \sum_i V_{\text{HF}}(i)$$

簡単のために、残留相互作用としてデルタ関数を仮定してみる
(超短距離力)

$$v_{\text{res}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sim -g \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

摂動論で残留相互作用の効果を見積もってみる:

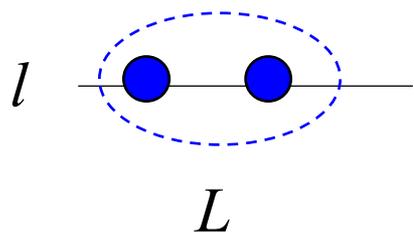
対相関(ペアリング)

$$H = \sum_{i=1}^A \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + V_{\text{HF}}(i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} v(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) - \sum_i V_{\text{HF}}(i)$$

簡単のために、残留相互作用としてデルタ関数を仮定してみる
(超短距離力)

$$v_{\text{res}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sim -g \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

摂動論で残留相互作用の効果を見積もってみる:



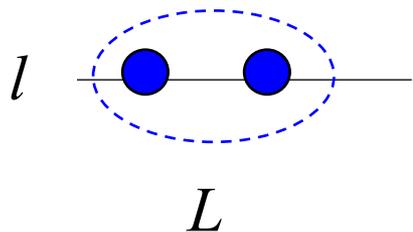
非摂動な波動関数:

角運動量 l の状態に中性子2個、それが
全角運動量 L を組んでいる

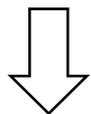
$$|(ll)LM\rangle = \sum_{m,m'} \langle lmlm' | LM \rangle \psi_{lm}(\mathbf{r}) \psi_{lm'}(\mathbf{r}')$$

対相関(ペアリング)

$$v_{\text{res}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sim -g \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$



$$|(ll)LM\rangle = \sum_{m,m'} \langle lmlm'|LM\rangle \psi_{lm}(\mathbf{r}) \psi_{lm'}(\mathbf{r}')$$



残留相互作用によるエネルギー変化:

$$\begin{aligned} \Delta E_L &= \langle (ll)LM | v_{\text{res}} | (ll)LM \rangle \\ &= -g I_r^{(l)} \frac{(2l+1)^2}{4\pi} \begin{pmatrix} l & l & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \end{aligned}$$

$$I_r^{(l)} = \int_0^\infty r^2 dr (R_l(r))^4$$

$$\Delta E_L = -g I_r^{(l)} \frac{(2l+1)^2}{4\pi} \begin{pmatrix} l & l & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \equiv -g I_r^{(l)} \frac{A(l; L)}{4\pi}$$

$A(l; L)$	$L=0$	$L=2$	$L=4$	$L=6$	$L=8$
$l=2$	5.00	1.43	1.43	---	---
$l=3$	7.00	1.87	1.27	1.63	---
$l=4$	9.00	2.34	1.46	1.26	1.81

$$\Delta E_L = -g I_r^{(l)} \frac{(2l+1)^2}{4\pi} \begin{pmatrix} l & l & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \equiv -g I_r^{(l)} \frac{A(l; L)}{4\pi}$$

$A(l; L)$	$L=0$	$L=2$	$L=4$	$L=6$	$L=8$
$l=2$	5.00	1.43	1.43	---	---
$l=3$	7.00	1.87	1.27	1.63	---
$l=4$	9.00	2.34	1.46	1.26	1.81

$$\Delta E_L = -g I_r^{(l)} \frac{(2l+1)^2}{4\pi} \begin{pmatrix} l & l & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \equiv -g I_r^{(l)} \frac{A(l; L)}{4\pi}$$

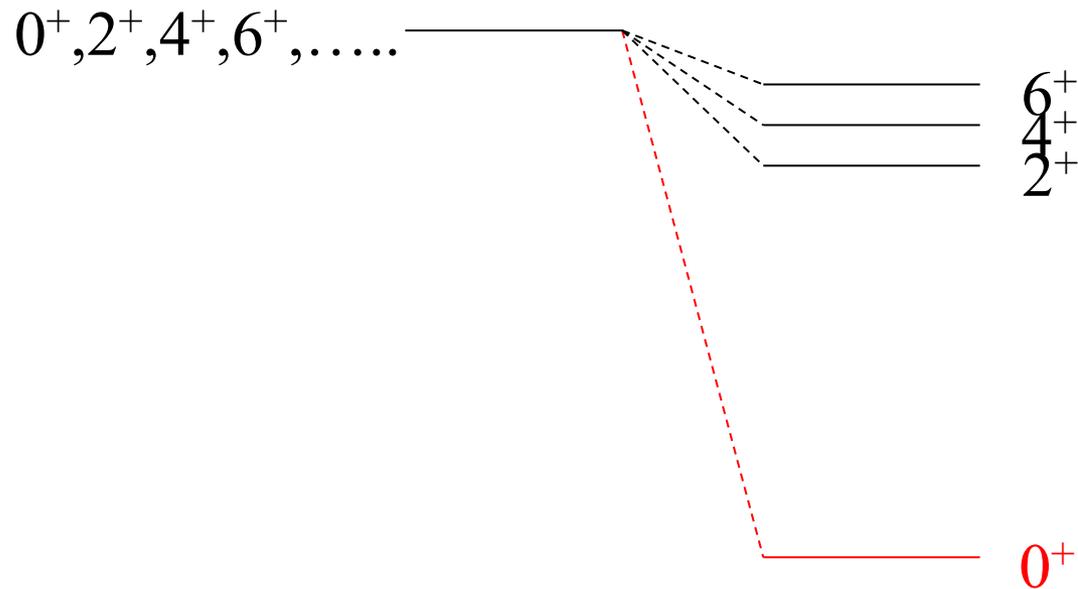
$A(l; L)$	$L=0$	$L=2$	$L=4$	$L=6$	$L=8$
$l=2$	5.00	1.43	1.43	---	---
$l=3$	7.00	1.87	1.27	1.63	---
$l=4$	9.00	2.34	1.46	1.26	1.81

$0^+, 2^+, 4^+, 6^+, \dots$ —————

残留相互
作用なし

$$\Delta E_L = -g I_r^{(l)} \frac{(2l+1)^2}{4\pi} \begin{pmatrix} l & l & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \equiv -g I_r^{(l)} \frac{A(l; L)}{4\pi}$$

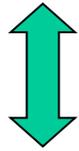
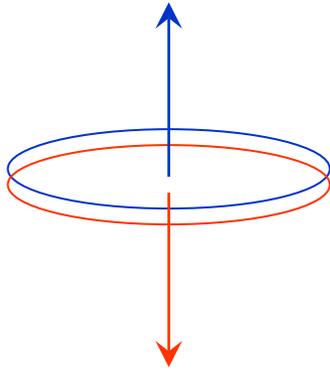
$A(l; L)$	$L=0$	$L=2$	$L=4$	$L=6$	$L=8$
$l=2$	5.00	1.43	1.43	---	---
$l=3$	7.00	1.87	1.27	1.63	---
$l=4$	9.00	2.34	1.46	1.26	1.81



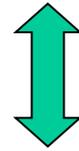
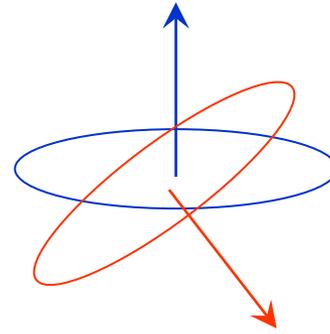
残留相互
作用なし

残留相互
作用あり

簡単な解釈:



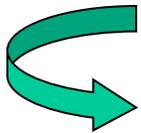
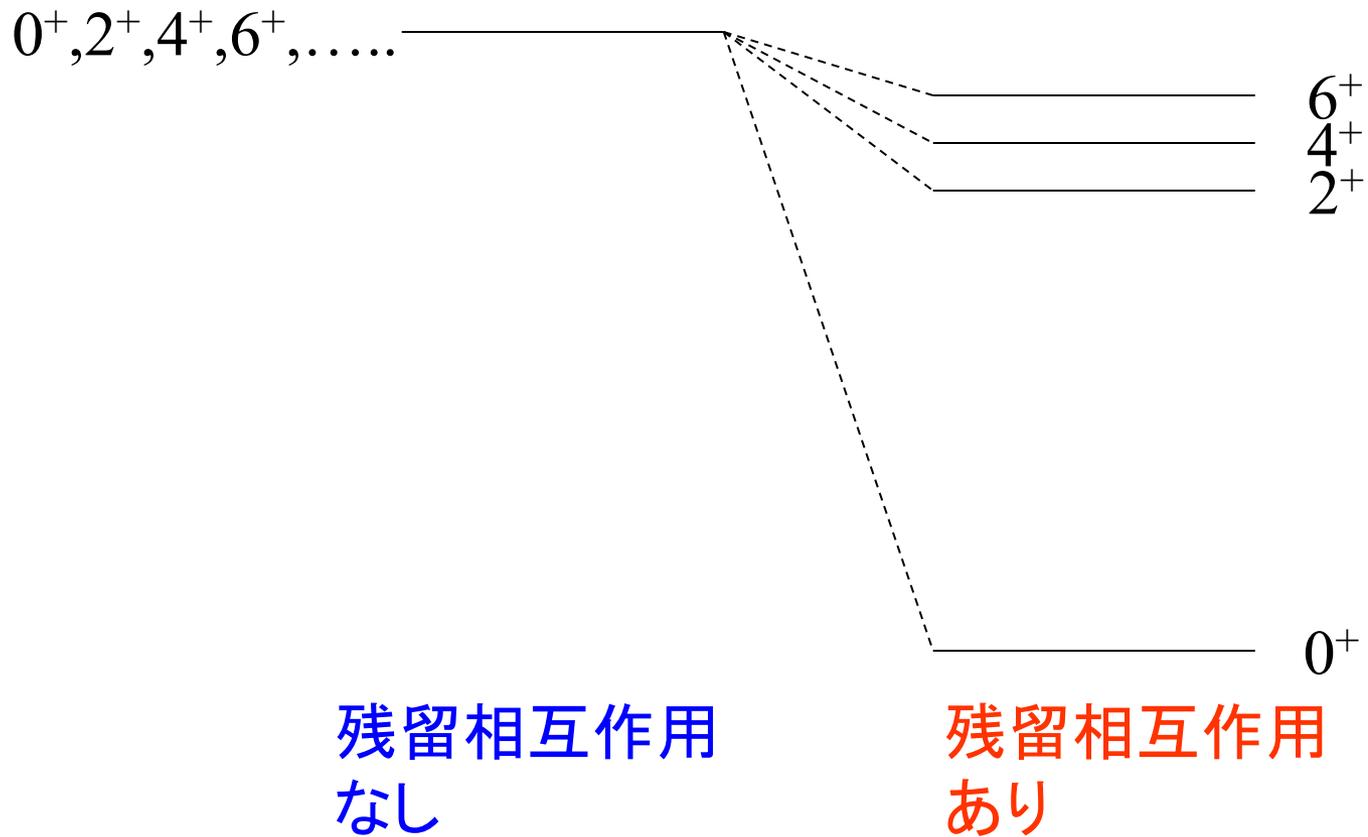
$L=0$ 対



$L \neq 0$ 対

$L=0$ 対に対して空間的重なりが最大(エネルギー的に得)

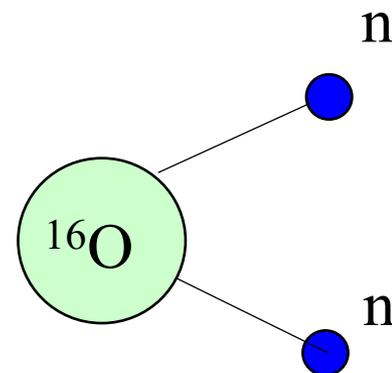
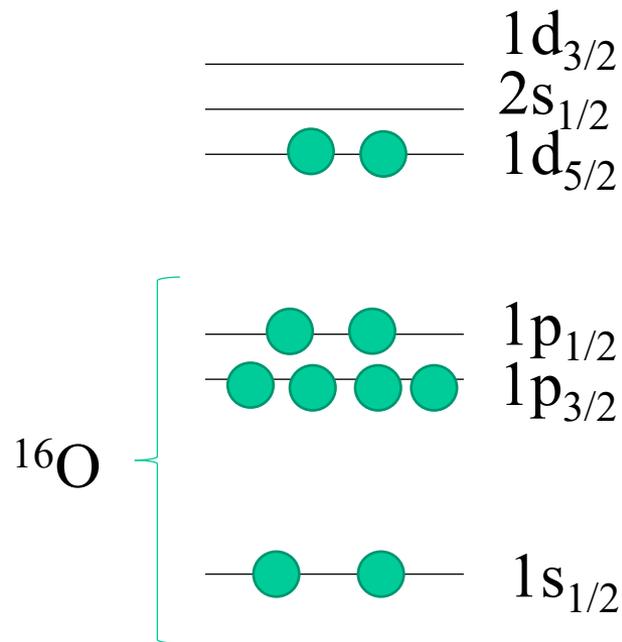
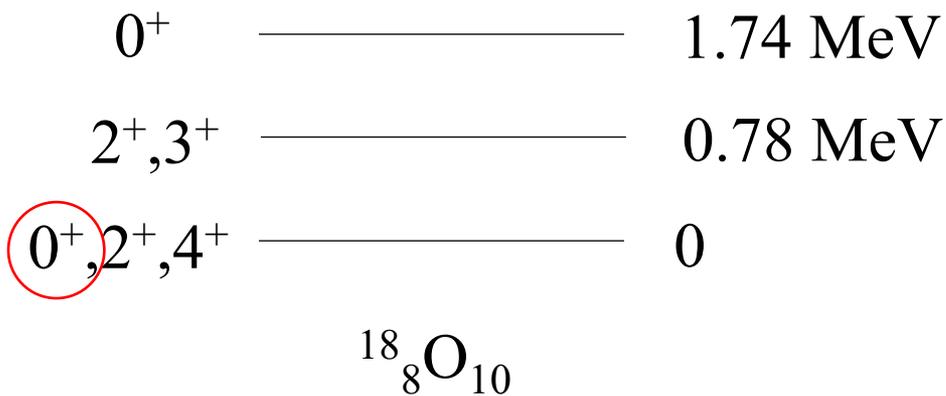
“対相関”



原子核の基底状態のスピンの

- 偶々核: 例外なしに 0^+
- 奇核: 最外殻核子の角運動量と一致

単純な平均場近似:



単純な平均場近似:

0^+ ————— 1.74 MeV

$2^+, 3^+$ ————— 0.78 MeV

4^+

2^+

0^+

