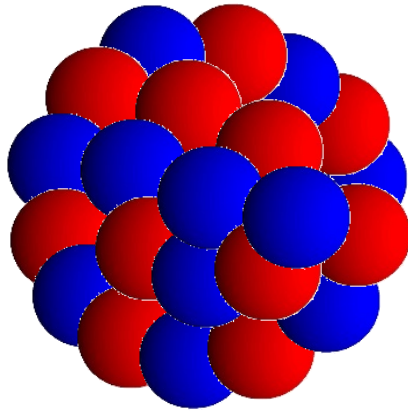


# はじめに：核子多体問題について



原子核 = 陽子と中性子の多体系

多体のハミルトニアン

$$H = \sum_i T_i + \underbrace{\sum_{i < j} v_{ij}}_{\text{2体力}} + \underbrace{\sum_{i < j < k} v_{ijk}}_{\text{3体力}}$$

このハミルトニアンを核子間のパウリ原理を考慮して  
どのように(近似的に)解くのか？

# 2体核力について

np 散乱の位相のずれ  
の実験データ

(散乱断面積や偏極  
分解能をフィットしたもの)

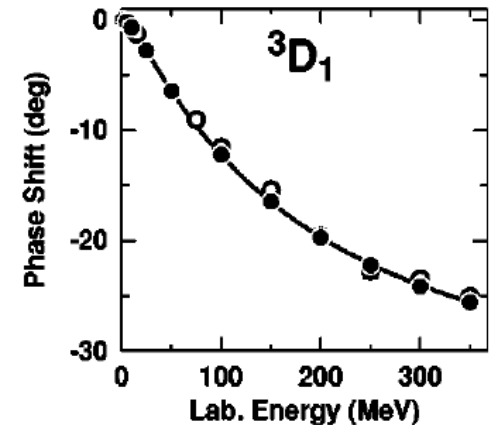
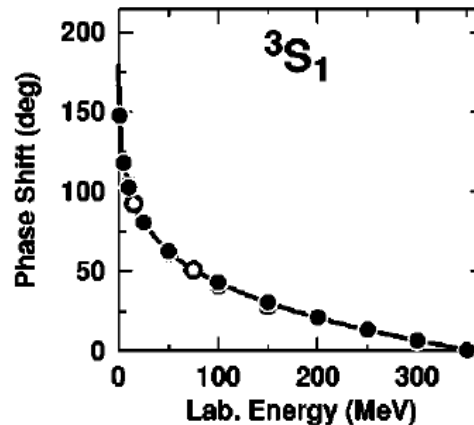
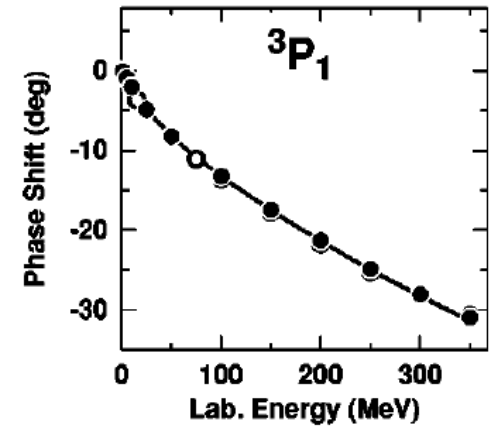
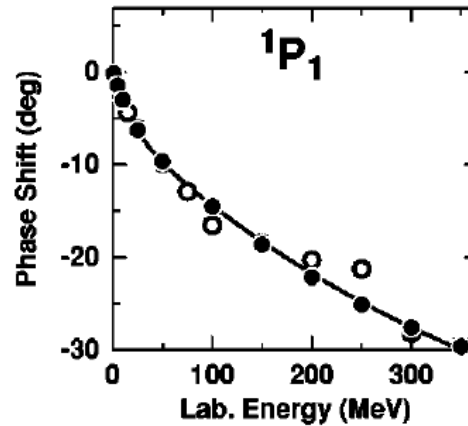
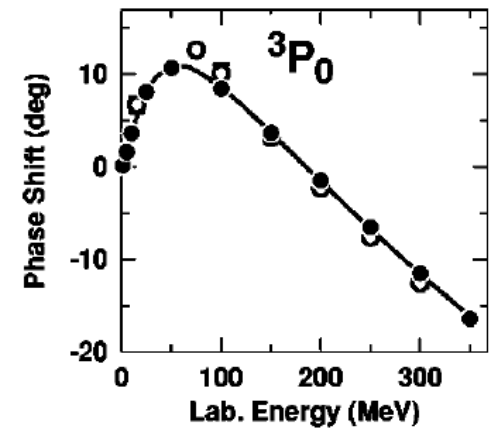
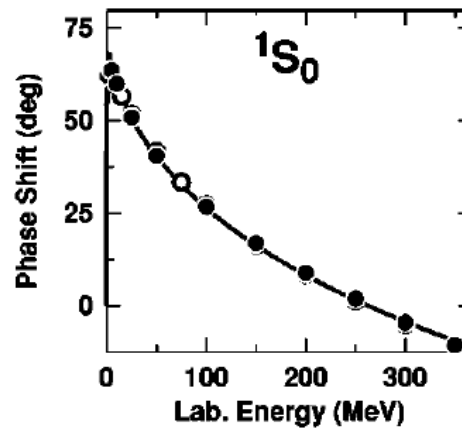
R. Machleidt,  
PRC63, 024001('01)

ノーテーション

$$2S+1L_J$$

$S \backslash T$	0	1
0	${}^1O$	${}^1E$
1	${}^3E$	${}^3O$

強いスピン・アイソスピン  
依存性



## (参考) スピン1/2 の粒子とスピン0の粒子の散乱

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |g(\theta)|^2 + |h(\theta)|^2$$

$$g(\theta) = \frac{i}{2k} \sum_l [(2l+1) - (l+1)S_l^+ - lS_l^-] P_l(\cos\theta)$$

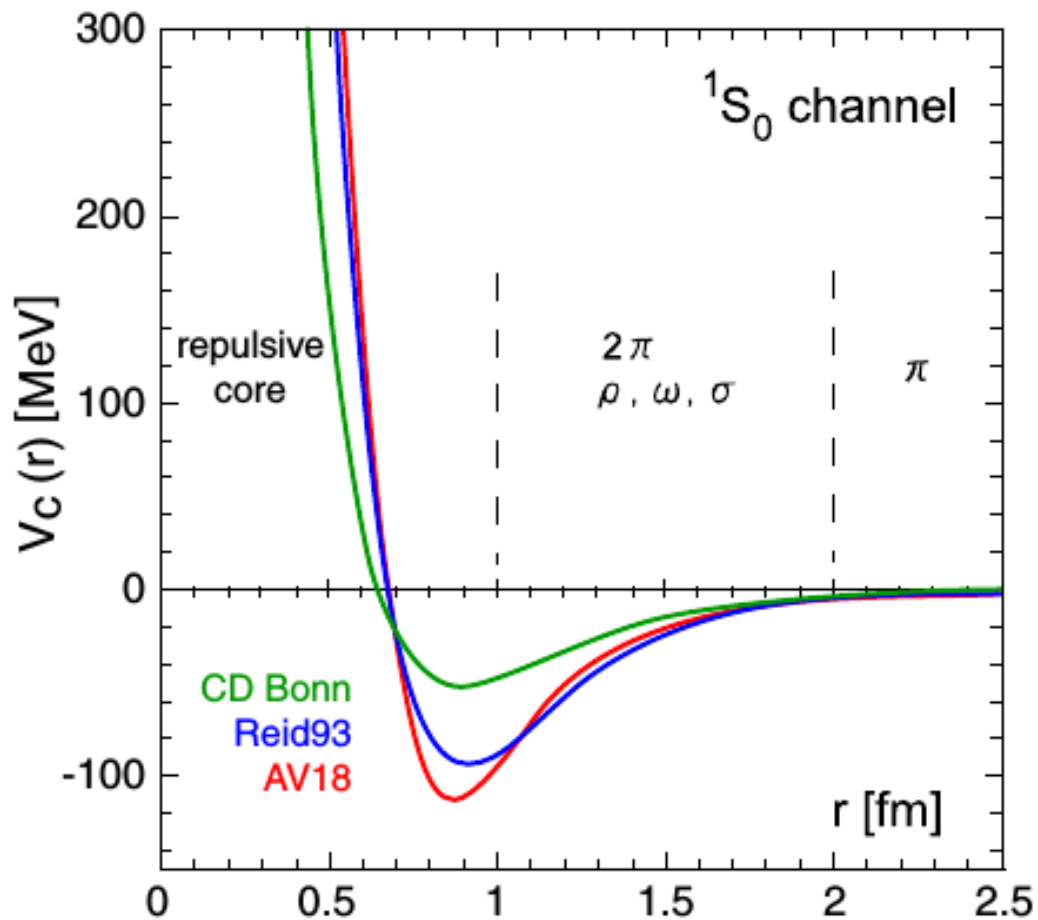
$$h(\theta) = \frac{i}{2k} \sum_l (S_l^- - S_l^+) P_l^1(\cos\theta)$$

$$S_l^\pm = S_{j=l\pm 1/2, l}$$

G.R. Satchler, "Direct nuclear reactions", Eq. (A.10)

## 偏極分解能

$$A(\theta) = \frac{\sigma(\theta, 0) - \sigma(\theta, \pi)}{\sigma(\theta, 0) + \sigma(\theta, \pi)} = \frac{2\text{Im}(g(\theta)h^*(\theta))}{|g(\theta)|^2 + |h(\theta)|^2} \quad (\text{A.11})$$



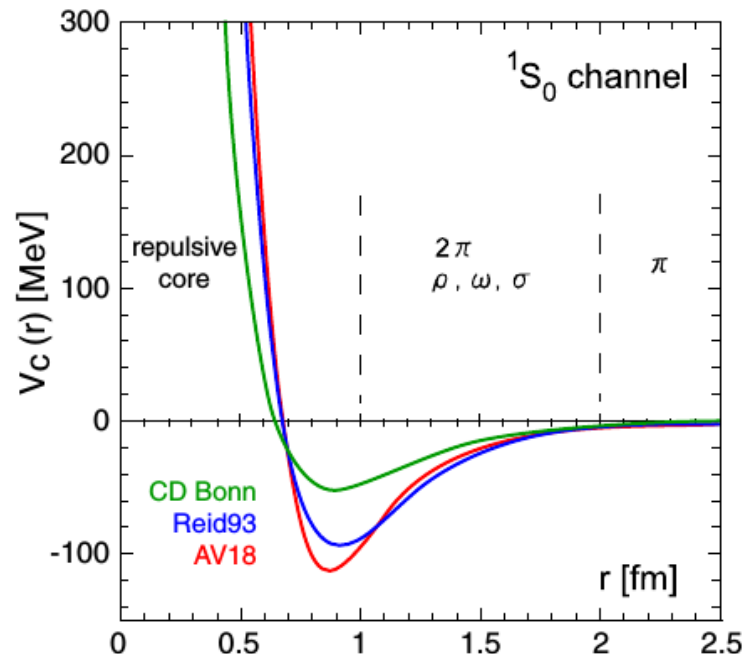
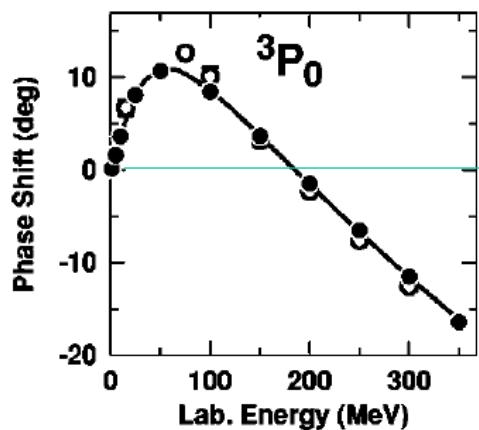
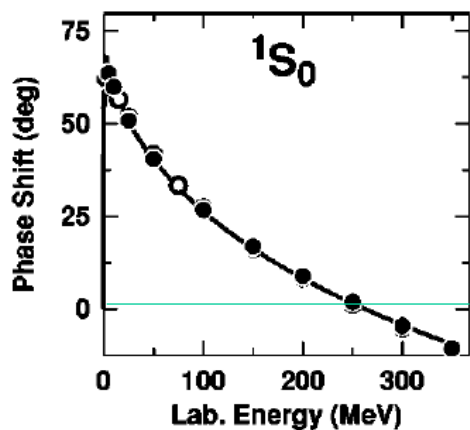
N. Ishii, S. Aoki, and T. Hatsuda,  
PRL99, 022001 (2007)

強いスピン・アイソスピン依存性:

$$V_C(r) = V_0(r) + V_\sigma(r)\sigma_1 \cdot \sigma_2 + V_\tau(r)\tau_1 \cdot \tau_2 \\ + V_{\sigma\tau}(r)(\sigma_1 \cdot \sigma_2)(\tau_1 \cdot \tau_2)$$

+テンソル力、スピン軌道力、など

# 核力の斥力芯



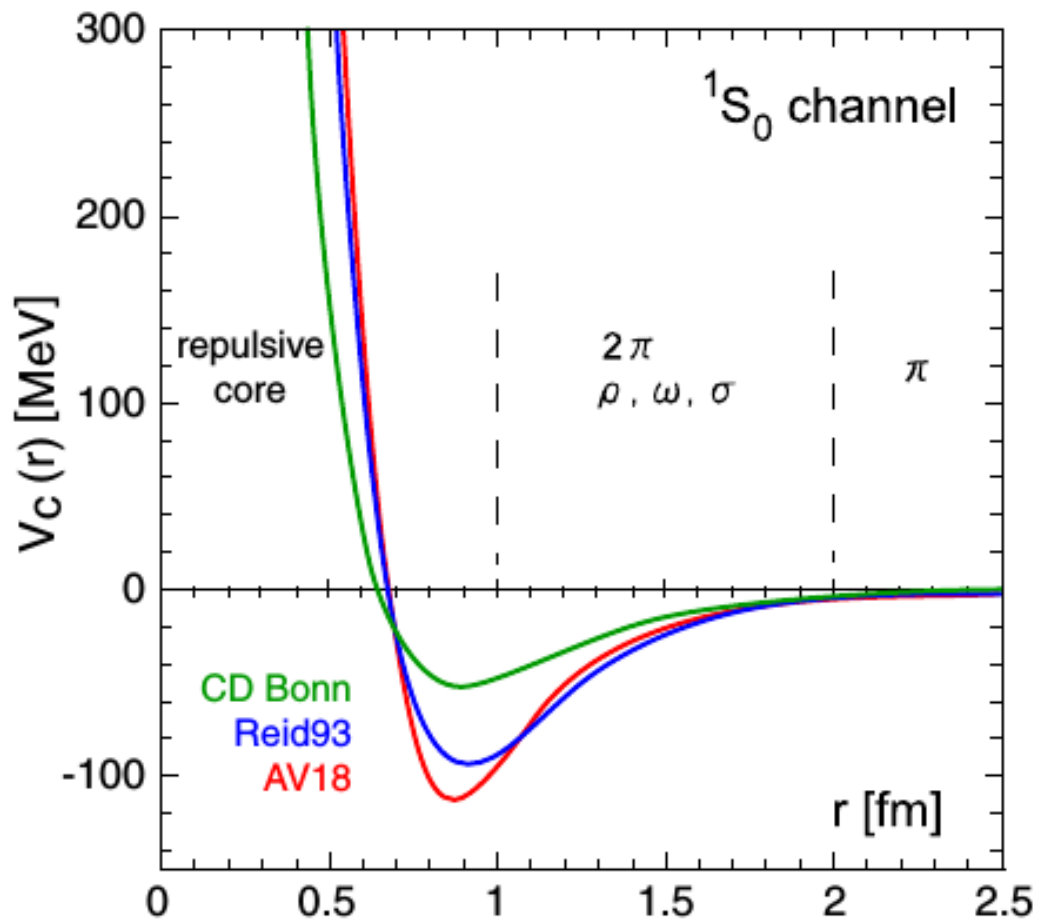
位相のずれ：  
正（低エネルギー）→負（高エネルギー）

$$\delta_l \sim -\frac{2mk}{\hbar^2} \int_0^\infty r^2 dr V(r) j_l(kr)^2$$

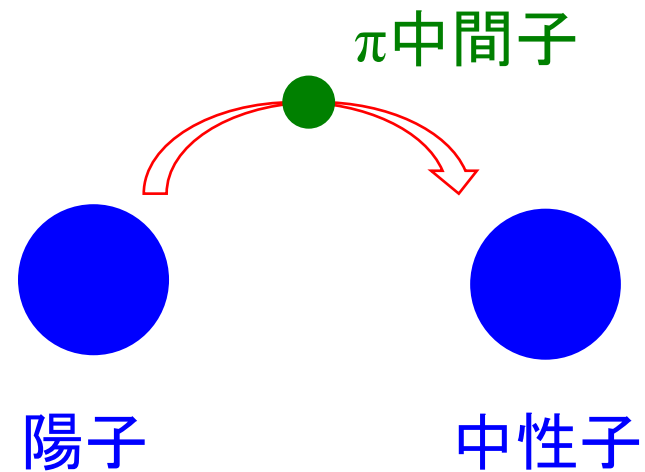
斥力芯→原子核の飽和性

## 斥力芯の起源

- クォーク間のパウリ原理
- グルーオン交換力 (color magnetic interaction)



湯川秀樹



## One-pion exchange potential (OPEP)

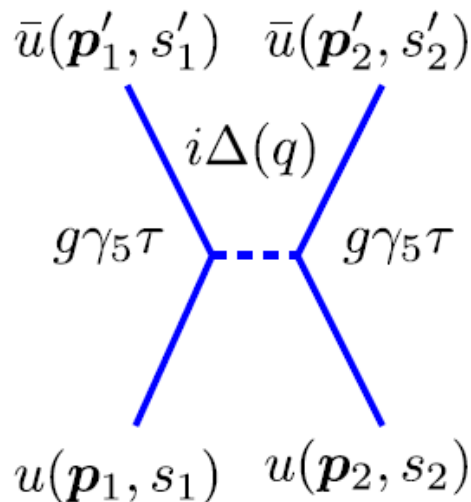
パイ中間子: アイソベクトル ( $\pi^0, \pi^+, \pi^-$ )、擬スカラー(負パリティ)

$$\rightarrow \mathcal{L}_{\pi NN} = -g\bar{N}i\gamma_5\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}N$$

これを基にポテンシャルを求めると、

$$V(\boldsymbol{r}) = -\frac{g^2}{4\pi}(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2)(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{\nabla})\frac{e^{-\mu r}}{r}$$

$$\mu = m_\pi c/\hbar$$



\*詳細は、

A. Obertelli and H. Sagawa,  
“Modern Nuclear Physics”  
(Springer)

などを参照のこと

## One-pion exchange potential (OPEP)

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= -\frac{g^2}{4\pi}(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2)(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \nabla)(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \nabla)\frac{e^{-\mu r}}{r} \\ &= \frac{g^2}{4\pi}(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) \left[ ((\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) + S_{12}Y_T(\mu r)) \frac{\mu^2 e^{-\mu r}}{3} \frac{1}{r} \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\pi}{3}(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)\delta(\mathbf{r}) \right] \end{aligned}$$

$$S_{12} = \frac{3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^2} - (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)$$

$$Y_T(\mu r) = \left( 1 + \frac{3}{\mu r} + \frac{3}{\mu^2 r^2} \right)$$



# テンソル力

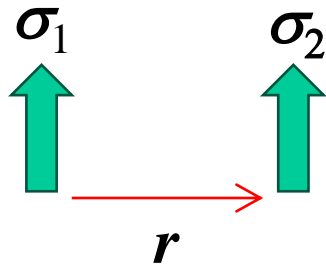
$$S_{12} = \frac{3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{r})}{r^2} - (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)$$

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{s}_2 = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}_1 + \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}_2 \quad \text{を用いると}$$

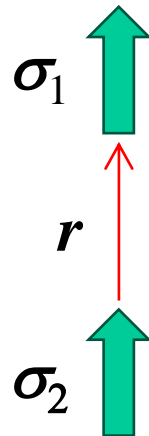
$$S_{12} = \frac{2}{\hbar^2} \left[ \frac{3(\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{r})^2}{r^2} - (\boldsymbol{S})^2 \right] \quad \text{と書き直すことができる。}$$

→  $S=0$  ではゼロになる

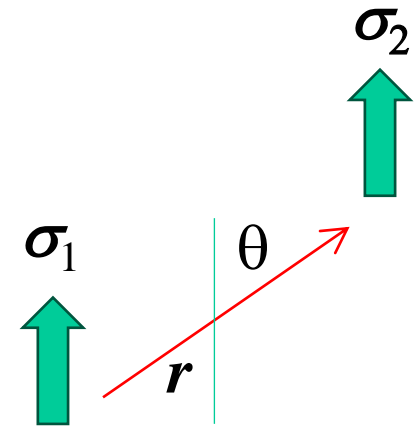
古典的には:



$$S_{12} = -1$$



$$S_{12} = 2$$



$$S_{12} = 3\cos^2\theta - 1 \sim Y_{20}(\theta)$$

## レポート問題1: PandAから提出、提出×切 7/26(金) 23:59

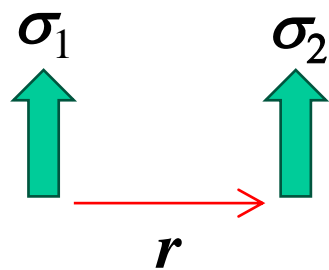
以下を証明せよ。

$$S_{12} = \frac{3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{r})}{r^2} - (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)$$

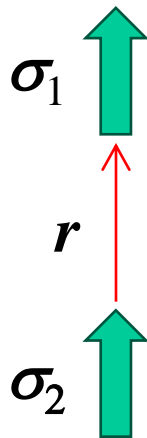
$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{s}_2 = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}_1 + \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}_2 \quad \text{を用いると}$$

$$S_{12} = \frac{2}{\hbar^2} \left[ \frac{3(\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{r})^2}{r^2} - (\boldsymbol{S})^2 \right] \quad \text{と書き直すことができる。}$$

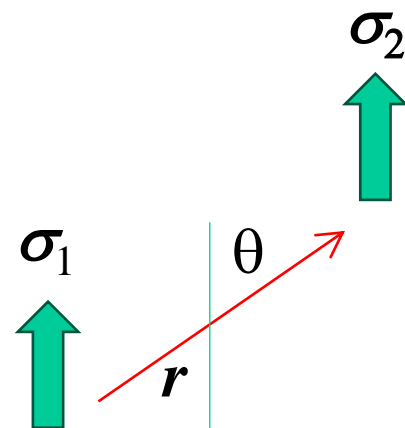
古典的には:



$$S_{12} = -1$$



$$S_{12} = 2$$



$$S_{12} = 3\cos^2\theta - 1 \sim Y_{20}(\theta)$$

量子的には:

$$S_{12} = \frac{3(\sigma_1 \cdot r)(\sigma_2 \cdot r)}{r^2} - (\sigma_1 \cdot \sigma_2)$$

$$= 3[[\hat{r}\hat{r}]^{(2)}[\sigma_1\sigma_2]^{(2)}]^{(00)}$$

$$[\hat{r}\hat{r}]^{(2M)} = \sum_{m,m'} \langle 1m1m'|2M \rangle \hat{r}_m \hat{r}_{m'} \quad \text{など}$$

## テンソルについて

座標系の回転に対し、

$$T_{\lambda\mu} \rightarrow \sum_{\mu'} T_{\lambda\mu'} D_{\mu'\mu}^{\lambda}(\Omega)$$

と変換するもの(球面調和関数  $Y_{\lambda\mu}$  と同じ変換)。

ベクトル  $(a_x, a_y, a_z)$  はランク1( $\lambda=1$ )のテンソル:

$$\begin{aligned} a_{\pm 1} &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x \pm ia_y) \\ a_0 &= a_z \end{aligned}$$

cf.

$$\begin{aligned} rY_{1\pm 1} &\propto \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(x \pm iy) \\ rY_{10} &\propto z \end{aligned}$$

# テンソルの合成

$$V_{LM} = [T_{\lambda_1} \times U_{\lambda_2}]^{(LM)} = \sum_{\mu_1, \mu_2} \langle \lambda_1 \mu_1 \lambda_2 \mu_2 | LM \rangle T_{\lambda_1 \mu_1} U_{\lambda_2 \mu_2}$$

$$T_{\lambda_1 \mu_1} U_{\lambda_2 \mu_2} = \sum_{L, M} \langle \lambda_1 \mu_1 \lambda_2 \mu_2 | LM \rangle V_{LM}$$

## テンソルのスカラー積

$$T_{\lambda} \cdot U_{\lambda} = \sum_{\mu} (-1)^{\mu} T_{\lambda \mu} U_{\lambda, -\mu}$$

$$\begin{aligned} a_{\pm 1} &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x \pm i a_y) \\ a_0 &= a_z \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} &-a_1 b_{-1} - a_{-1} b_1 + a_0 b_0 \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \end{aligned}$$

(note)

$$\begin{aligned} [T_{\lambda} \times U_{\lambda}]^{(00)} &= \sum_{\mu_1, \mu_2} \langle \lambda \mu_1 \lambda \mu_2 | 00 \rangle T_{\lambda \mu_1} U_{\lambda \mu_2} = \sum_{\mu} \frac{(-1)^{\lambda - \mu}}{\sqrt{2\lambda + 1}} T_{\lambda \mu} U_{\lambda, -\mu} \\ &= \frac{(-1)^{\lambda}}{\sqrt{2\lambda + 1}} T_{\lambda} \cdot U_{\lambda} \end{aligned}$$

$$S_{12} = \frac{3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{r})}{r^2} - (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)$$

$$= 3[[\hat{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{r}}]^{(2)}[\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2]^{(2)}]^{(00)}$$

$$[\hat{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{r}}]^{(2M)} = \sum_{m,m'} \langle 1m1m'|2M \rangle \hat{\boldsymbol{r}}_m \hat{\boldsymbol{r}}_{m'} \quad \text{など}$$

## テンソル力

$$S_{12} = \frac{3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{r})}{r^2} - (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)$$

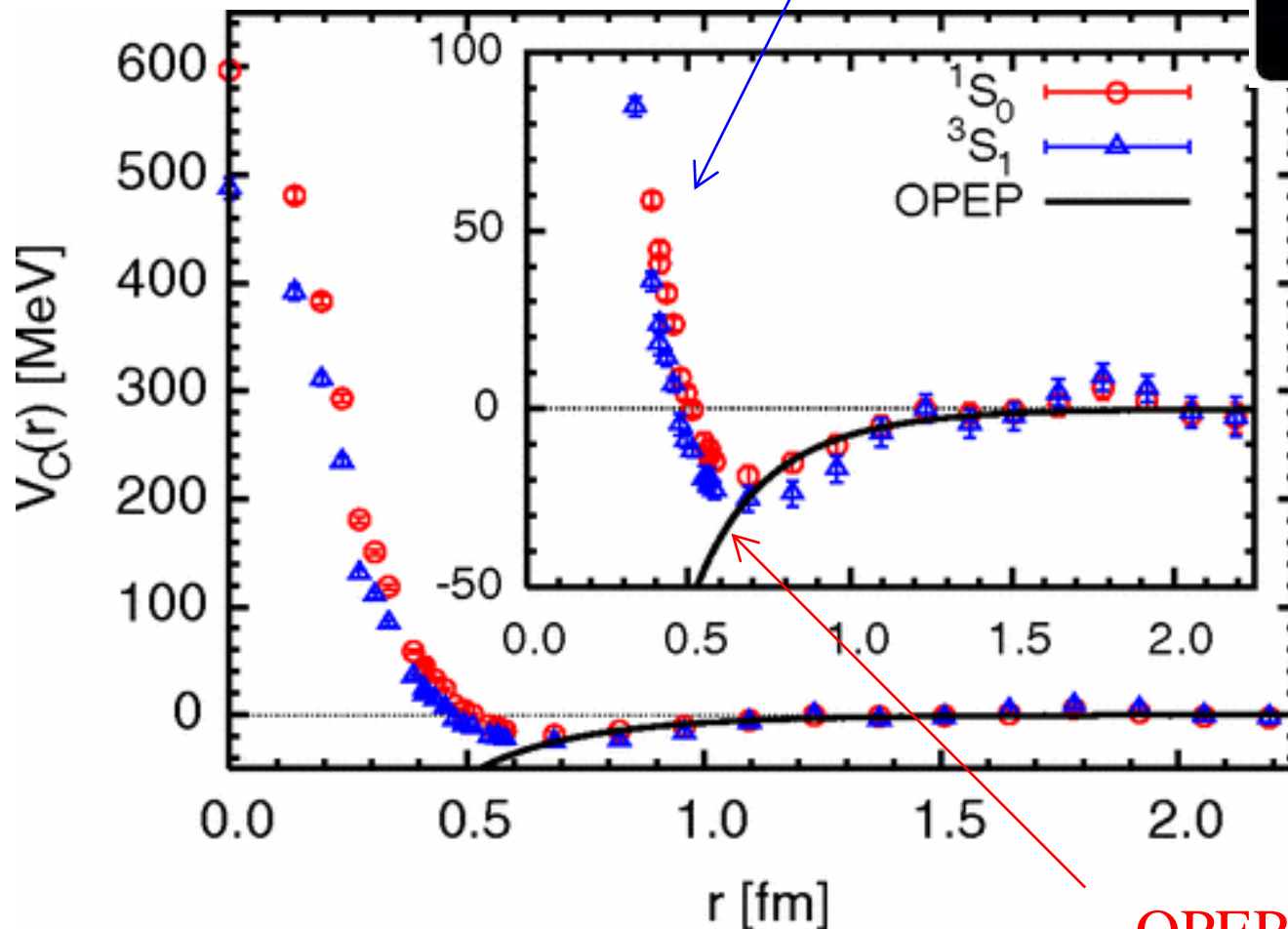
→  $S=0$  ではゼロになる

- ・重陽子 ( $S=1$ ) が束縛し、 $nn$  ( $S=0$ ) が束縛しない理由
- ・重陽子のD波成分(四重極モーメント)の説明(4%程度のD波成分)

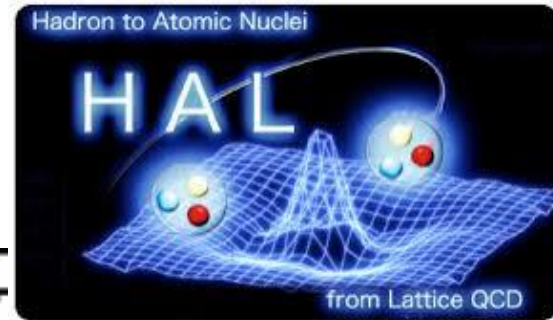


# 格子QCDによる核力

斥力芯

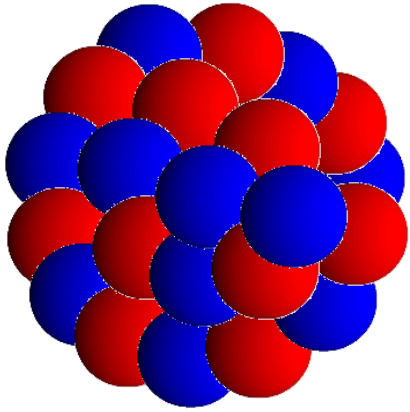


OPEP





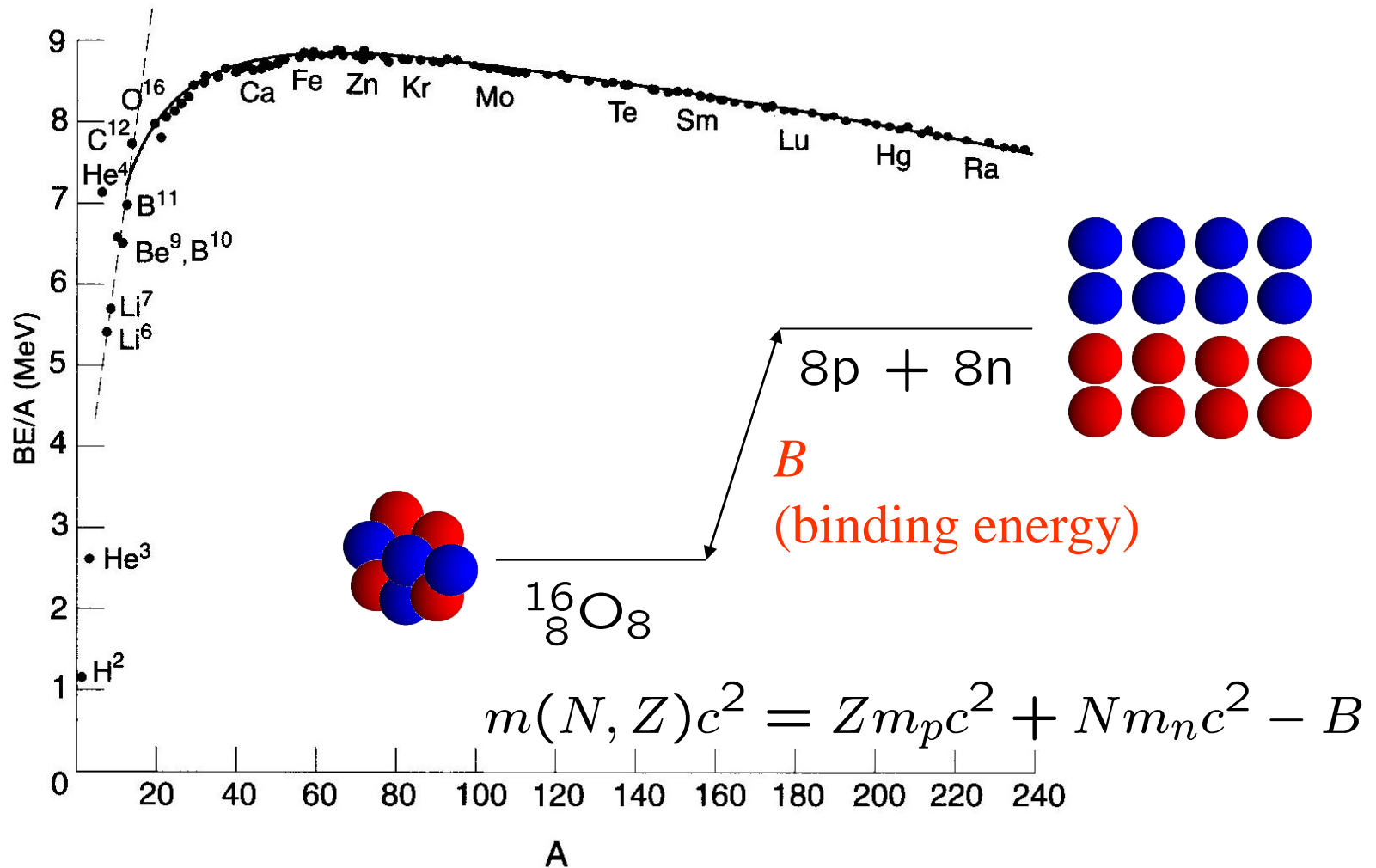
# はじめに：原子核の基本的な性質

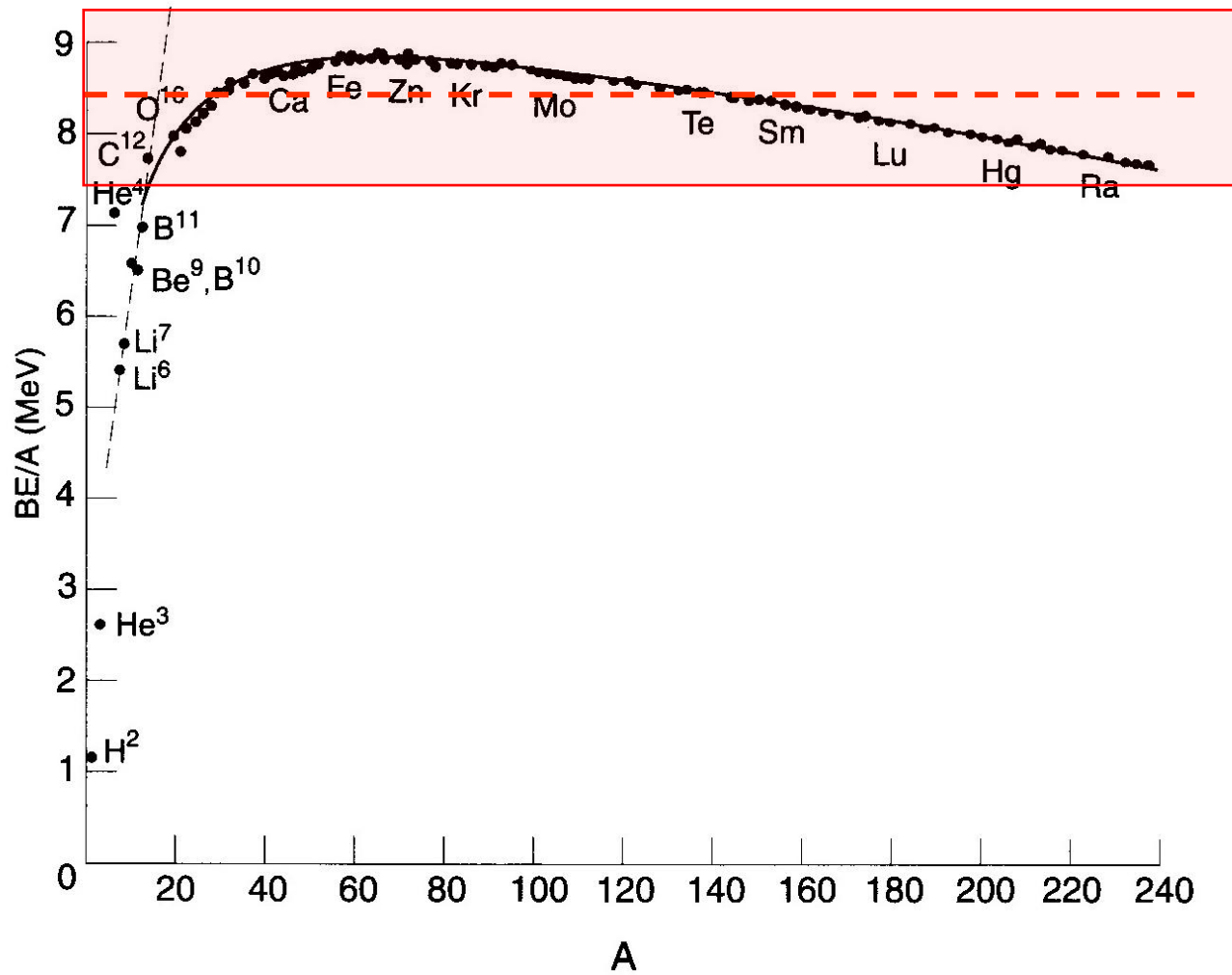


$$H = \sum_i T_i + \underbrace{\sum_{i < j} v_{ij}}_{\text{2体力}} + \underbrace{\sum_{i < j < k} v_{ijk}}_{\text{3体力}}$$

原子核 = 陽子と中性子の多体系

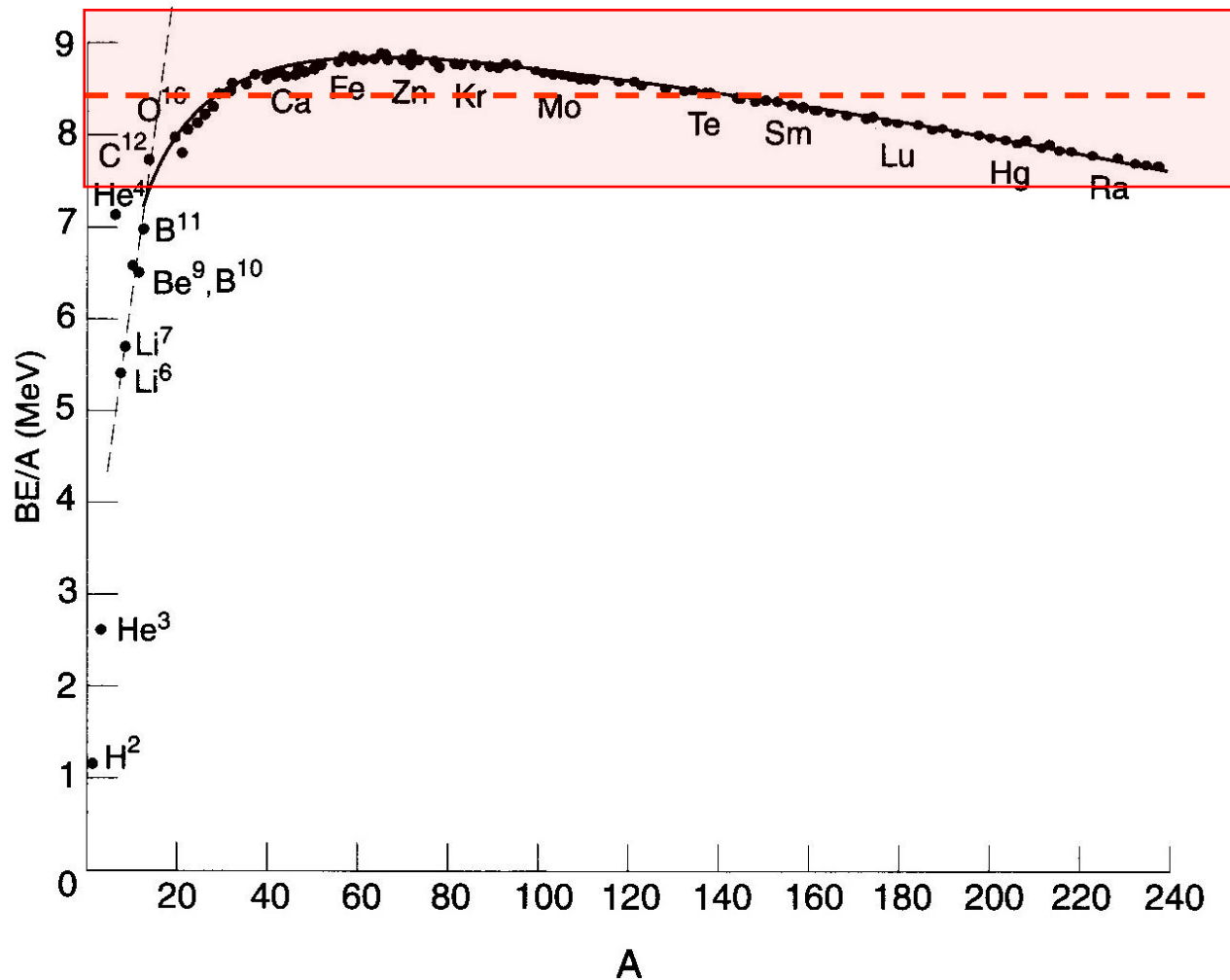
# 原子核の質量





1.  $B(N,Z)/A \sim 8.5$  MeV ( $A > 12$ )

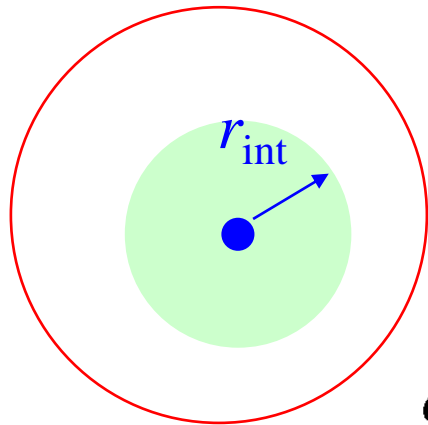
(ほぼ一定)



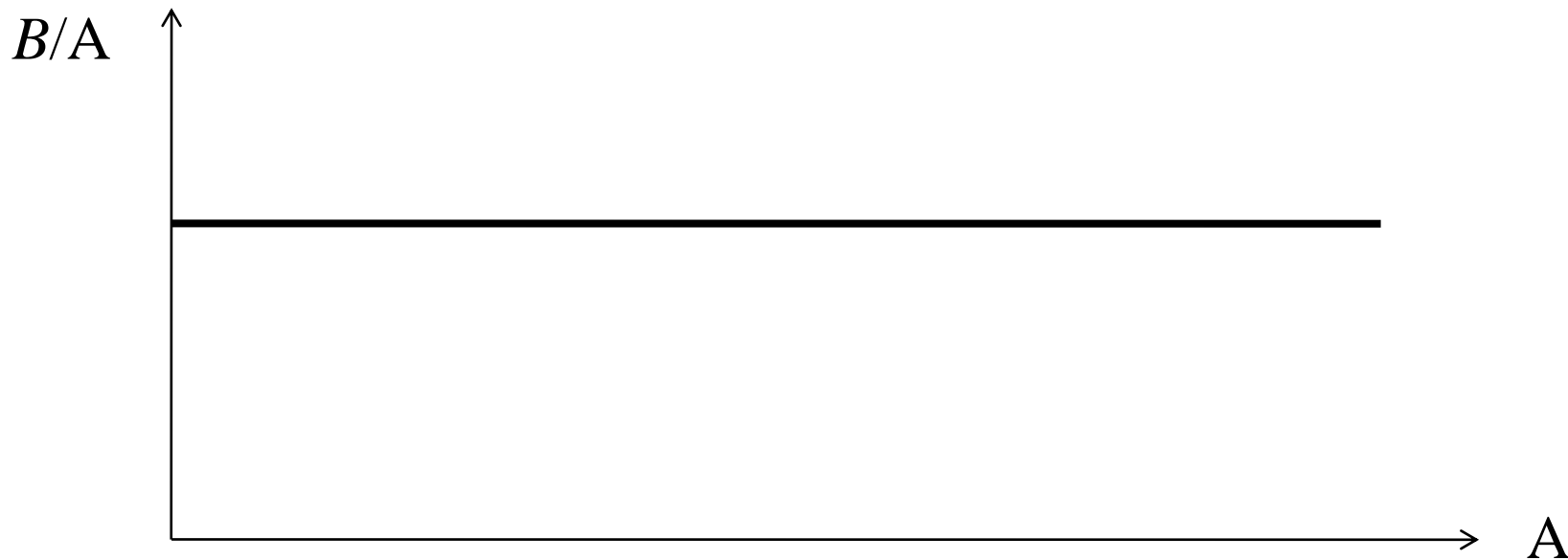
1.  $B(N,Z)/A \sim 8.5 \text{ MeV} (A > 12) \iff$  短距離力(核子間相互作用)  
 (ほぼ一定)

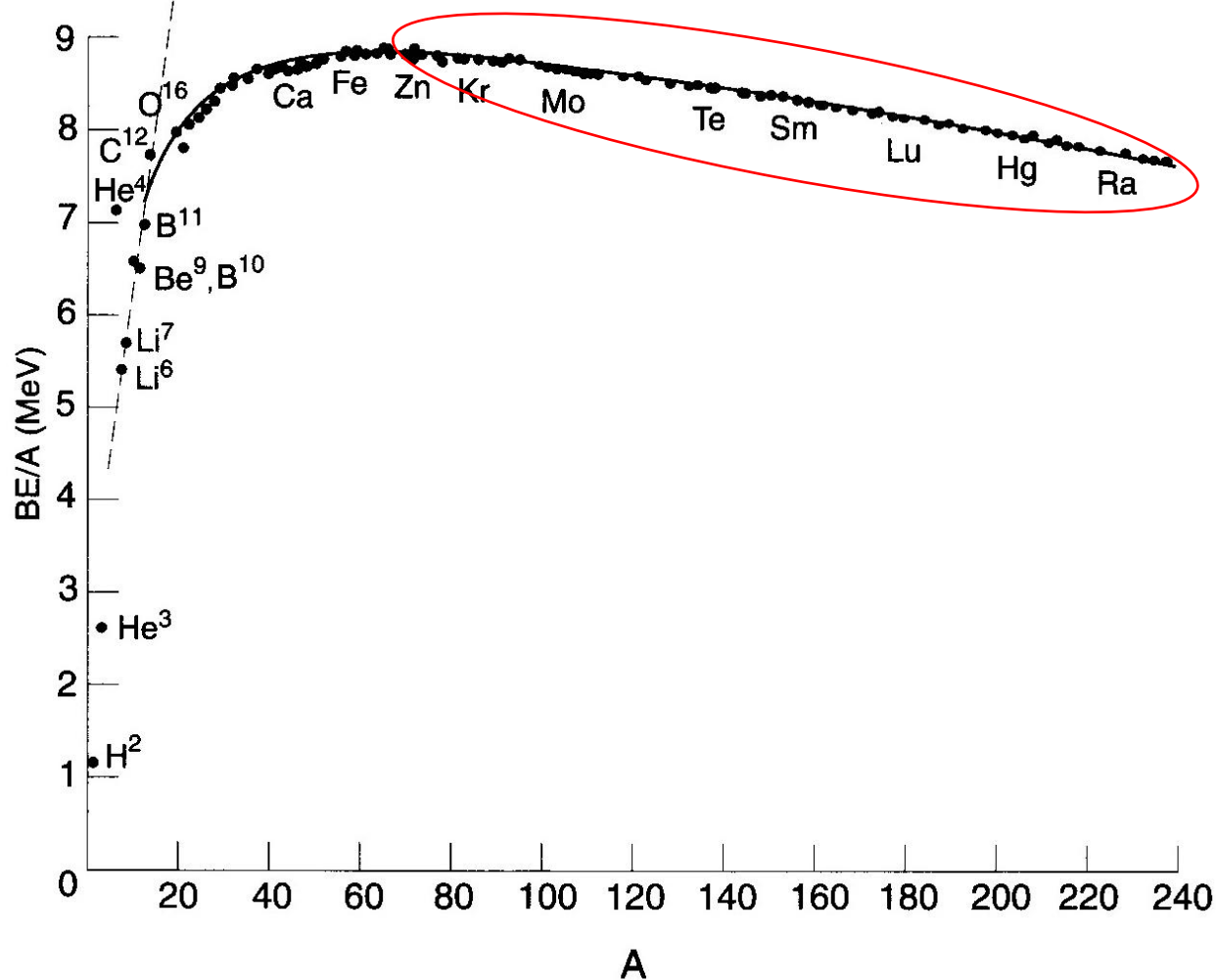
もし、それぞれの核子が近くの $\alpha$ 個の粒子とだけ相互作用するとしたら:

$$B \sim \alpha A/2 \longrightarrow B/A \sim \alpha/2 \text{ (const.)}$$



$$\alpha = \frac{4\pi}{3} r_{\text{int}}^3 \cdot \rho$$

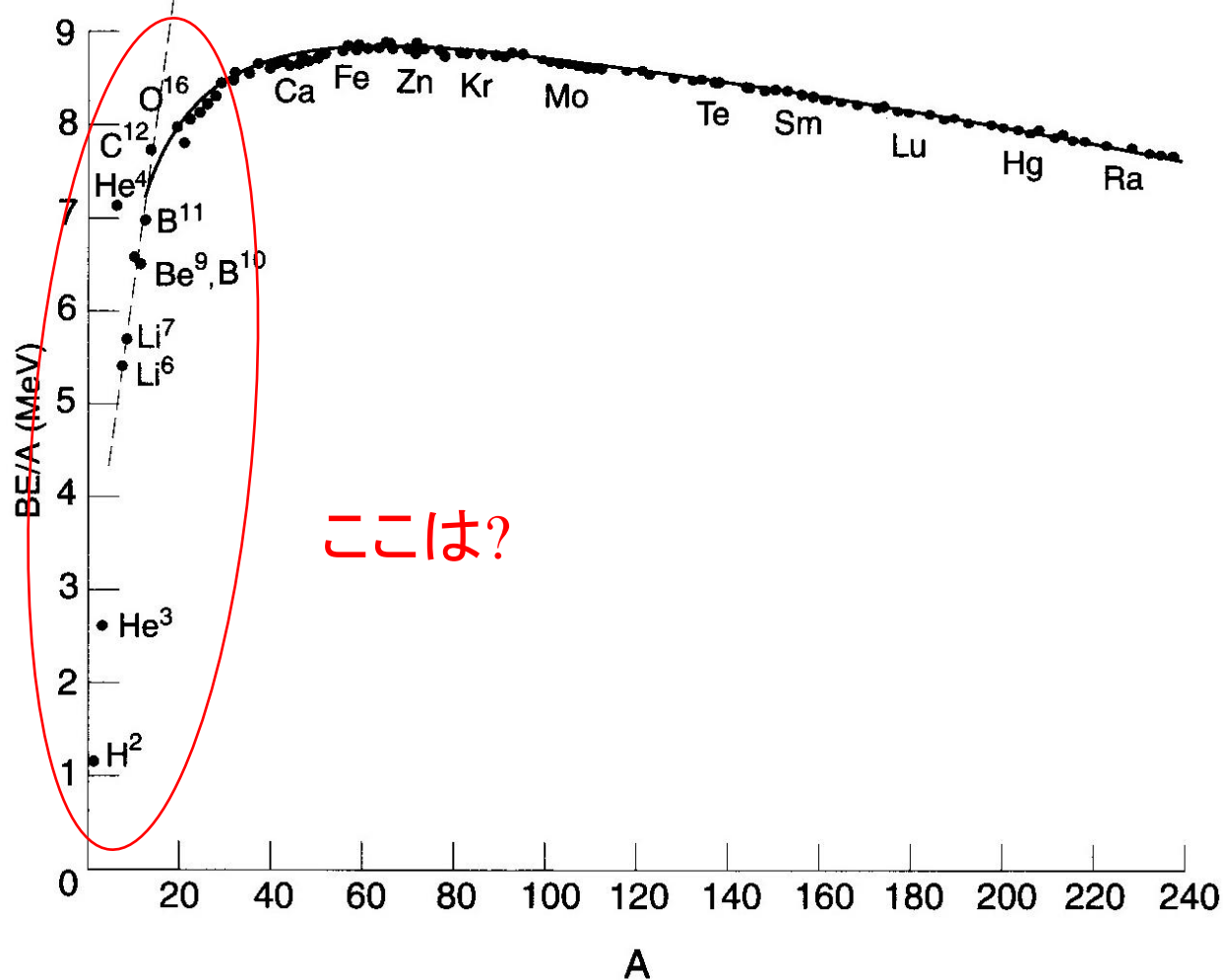




1.  $B(N,Z)/A \sim 8.5 \text{ MeV} (A > 12) \iff$  短距離力(核子間相互作用)

2. 重い原子核に対してはクーロン力の影響

←  $B/A$  が  $A$  に比例して減少  
(長距離力(クーロン力)がはたらいっている証拠)



1.  $B(N,Z)/A \sim 8.5 \text{ MeV} (A > 12) \iff$  短距離力(核子間相互作用)
2. 重い原子核に対してはクーロン力の影響
  - ←  $B/A$  が  $A$  に比例して減少  
(長距離力(クーロン力)がはたらいっている証拠)

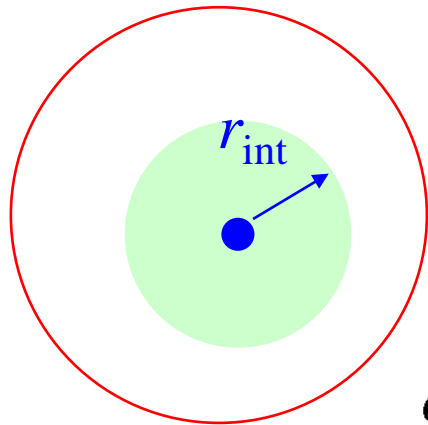
もし、それぞれの核子が近くの $\alpha$ 個の粒子とだけ相互作用するとしたら:

$$B \sim \alpha A/2 \longrightarrow B/A \sim \alpha/2 \text{ (const.)}$$



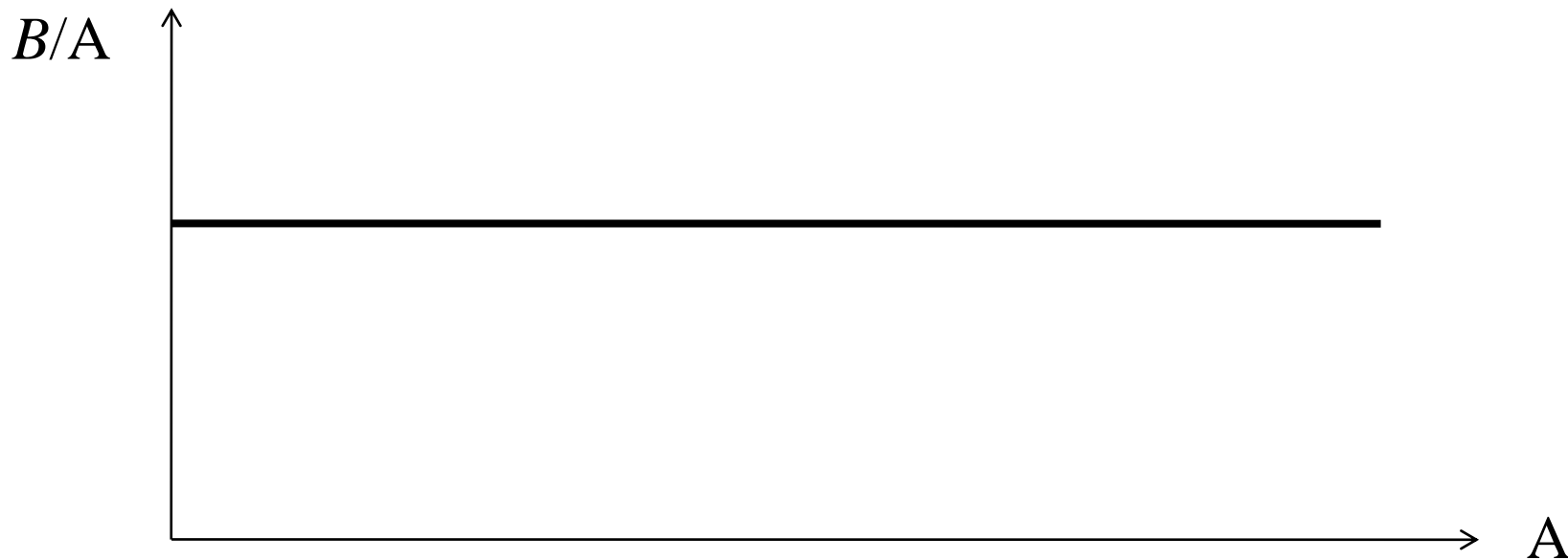
もし、それぞれの核子が近くの $\alpha$ 個の粒子とだけ相互作用するとしたら:

$$B \sim \alpha A/2 \longrightarrow B/A \sim \alpha/2 \text{ (const.)}$$



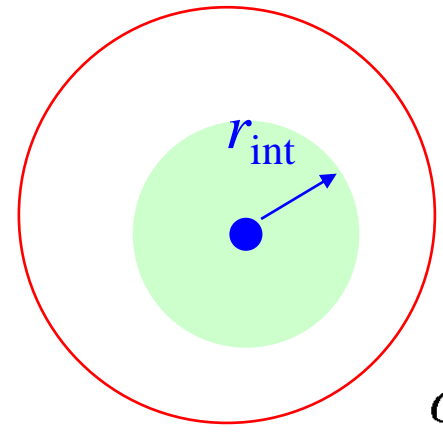
小さな原子核だと

$$\alpha = \frac{4\pi}{3} r_{\text{int}}^3 \cdot \rho$$



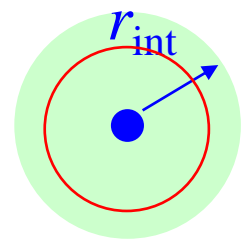
もし、それぞれの核子が近くの $\alpha$ 個の粒子とだけ相互作用するとしたら:

$$B \sim \alpha A/2 \longrightarrow B/A \sim \alpha/2 \text{ (const.)}$$

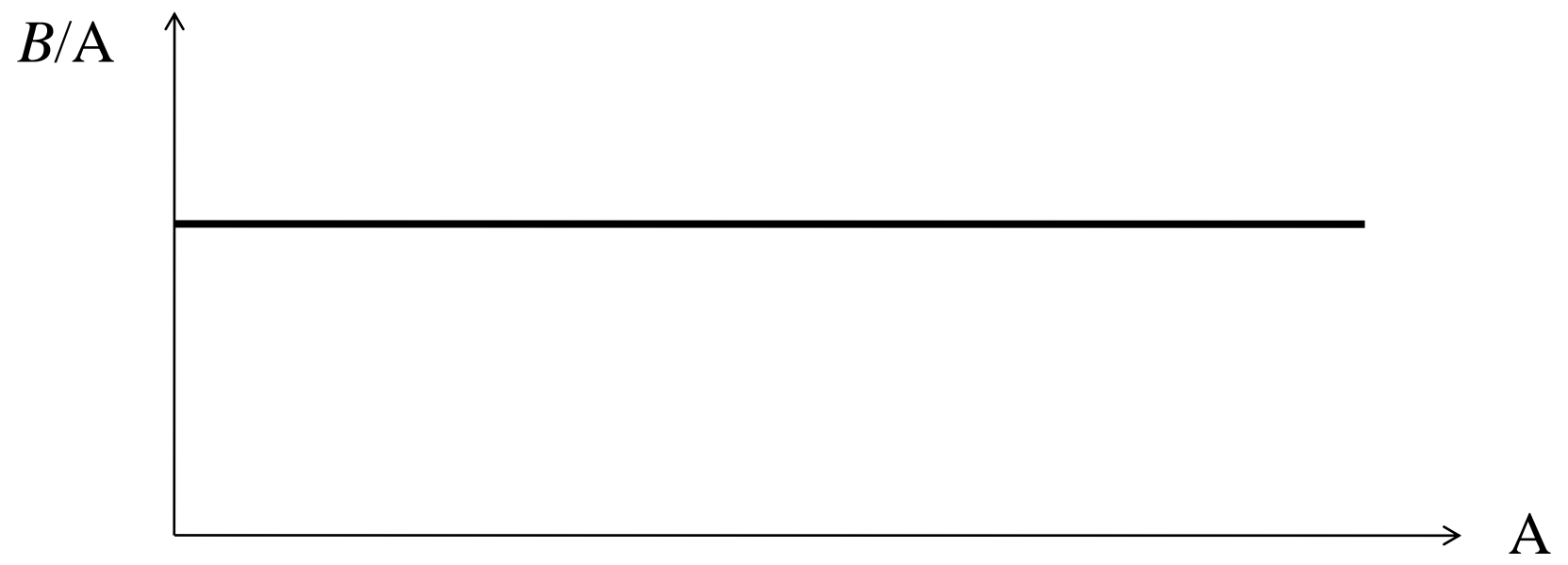


$$\alpha = \frac{4\pi}{3} r_{\text{int}}^3 \cdot \rho$$

小さな原子核だと

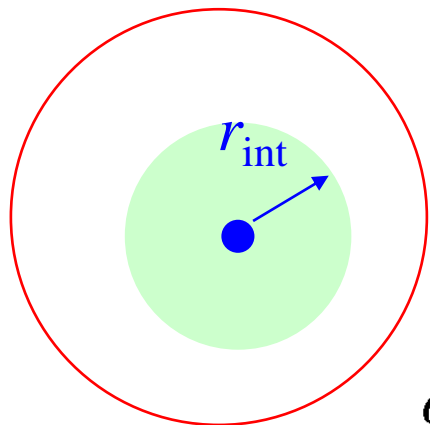


$$\rightarrow B/A \propto A - 1$$



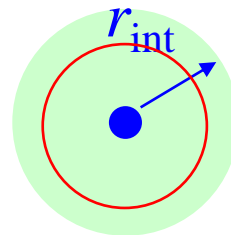
もし、それぞれの核子が近くの $\alpha$ 個の粒子とだけ相互作用するとしたら:

$$B \sim \alpha A/2 \longrightarrow B/A \sim \alpha/2 \text{ (const.)}$$

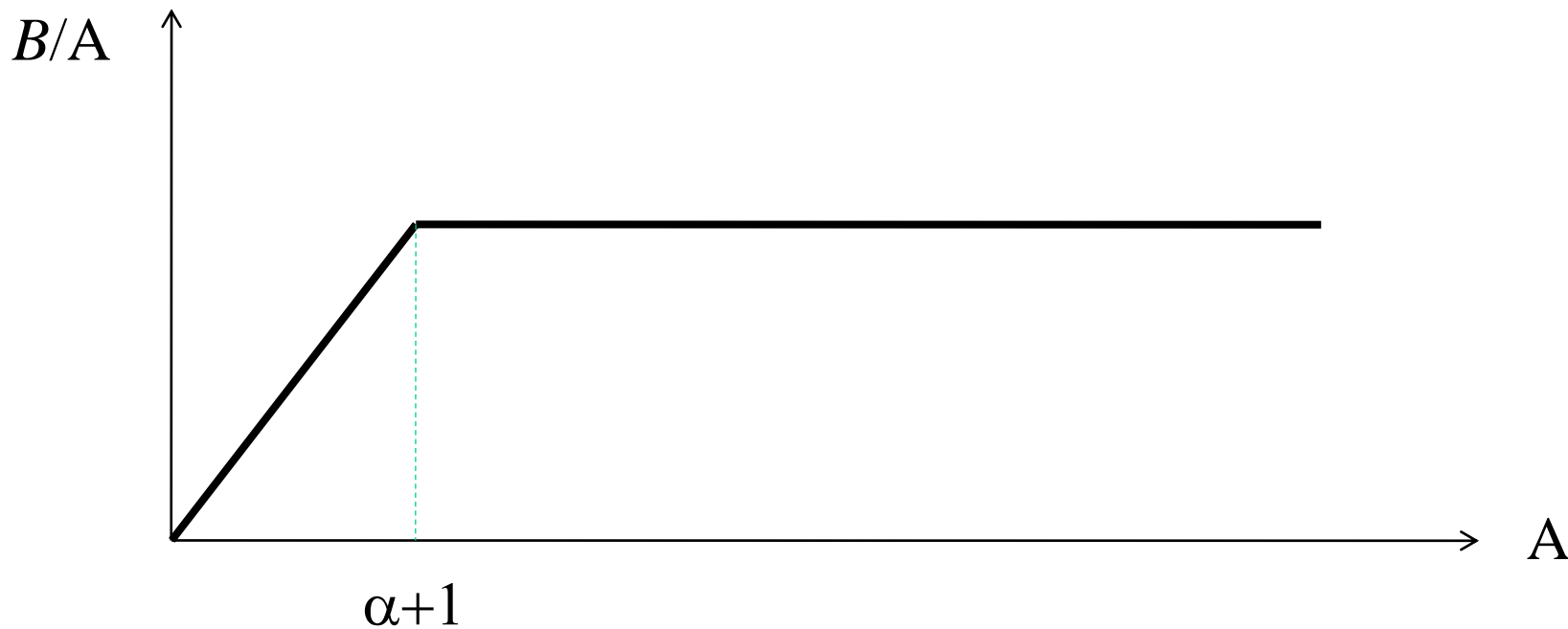


$$\alpha = \frac{4\pi}{3} r_{\text{int}}^3 \cdot \rho$$

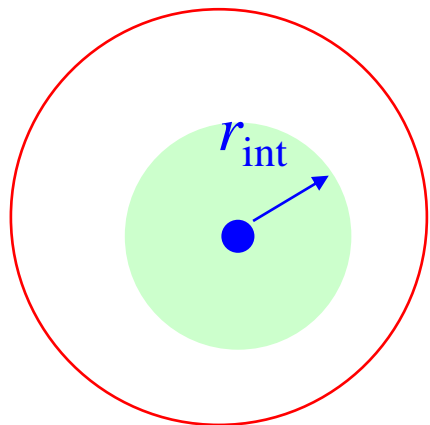
小さな原子核だと



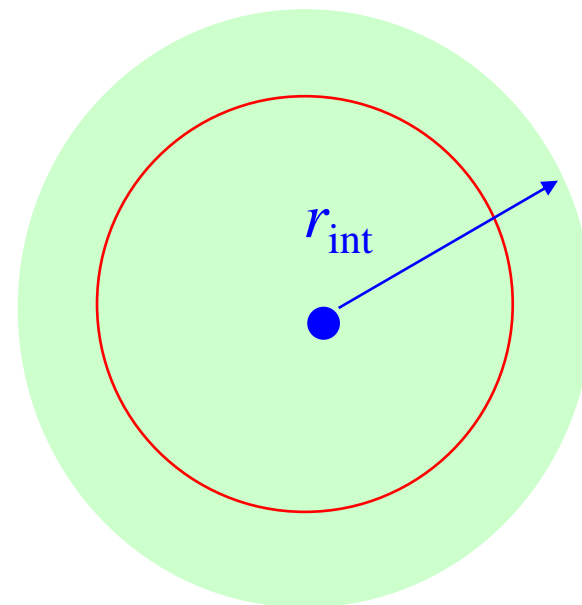
$$\rightarrow B/A \propto A - 1$$



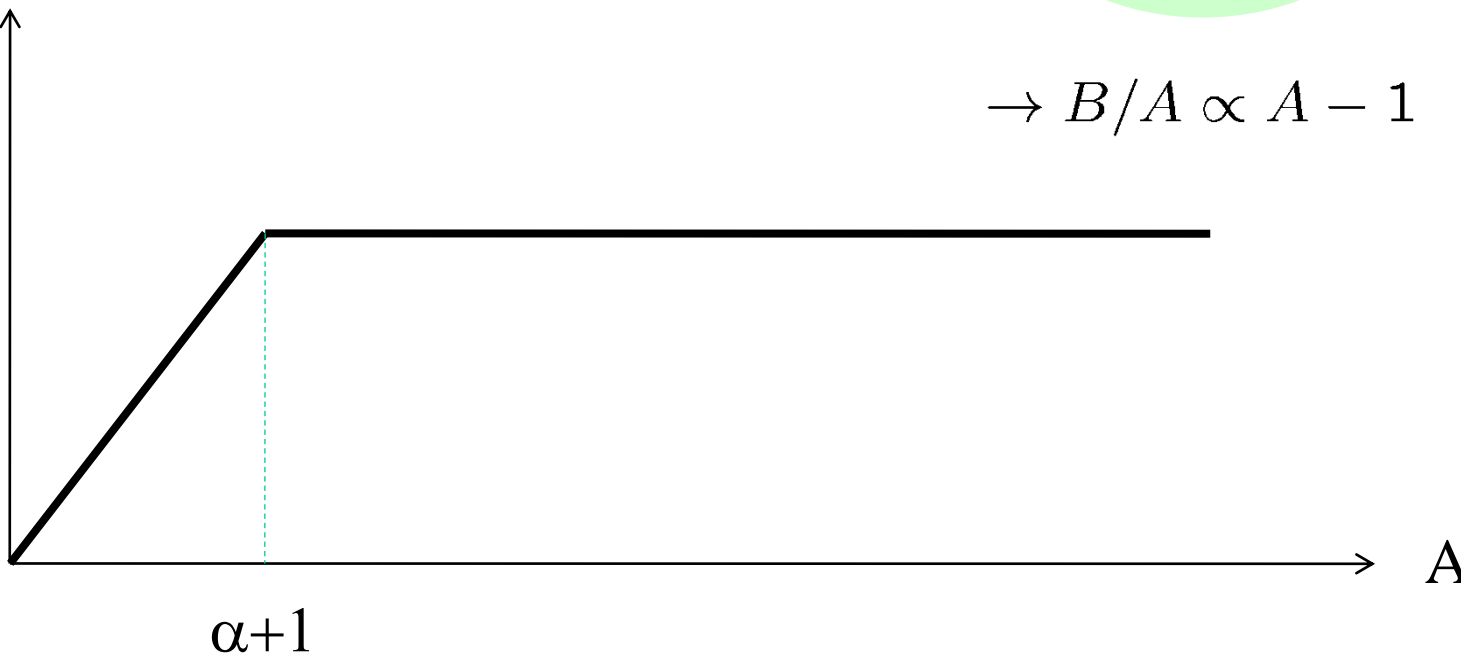
核力



クーロン力

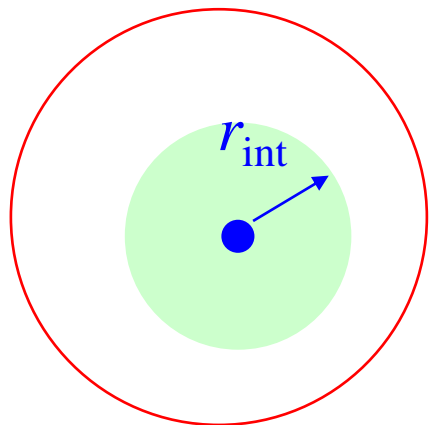


$B/A$

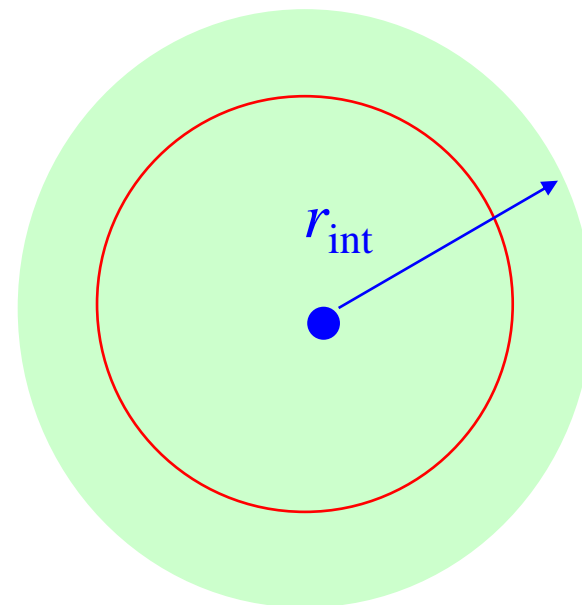


$\rightarrow B/A \propto A - 1$

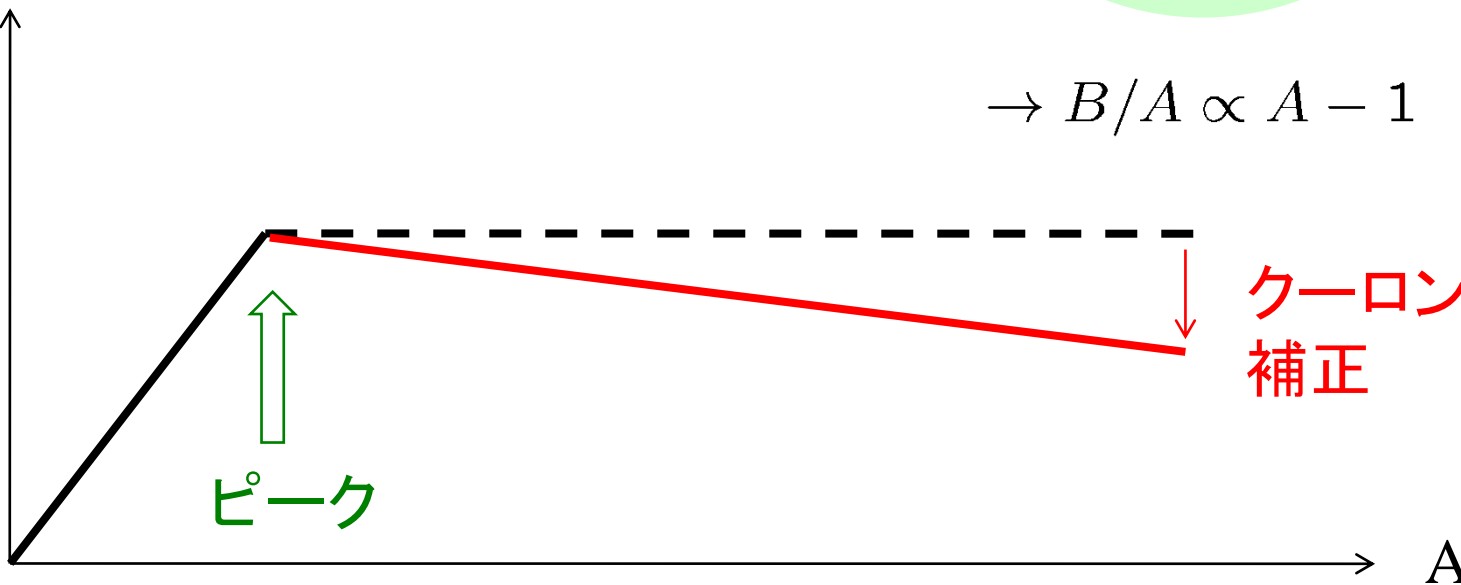
核力



クーロン力



$B/A$

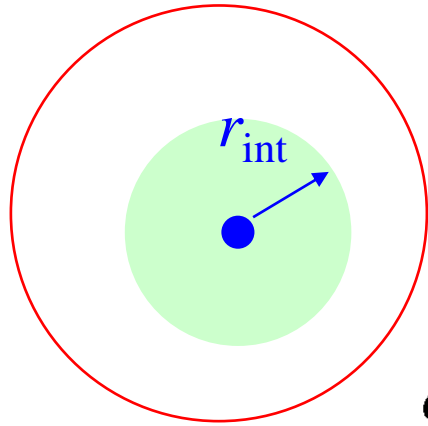


$\rightarrow B/A \propto A - 1$

クーロンによる補正

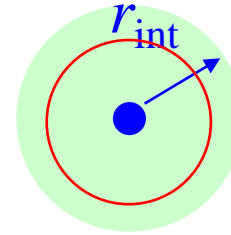
ピーク

# 核力のレンジの見積もり

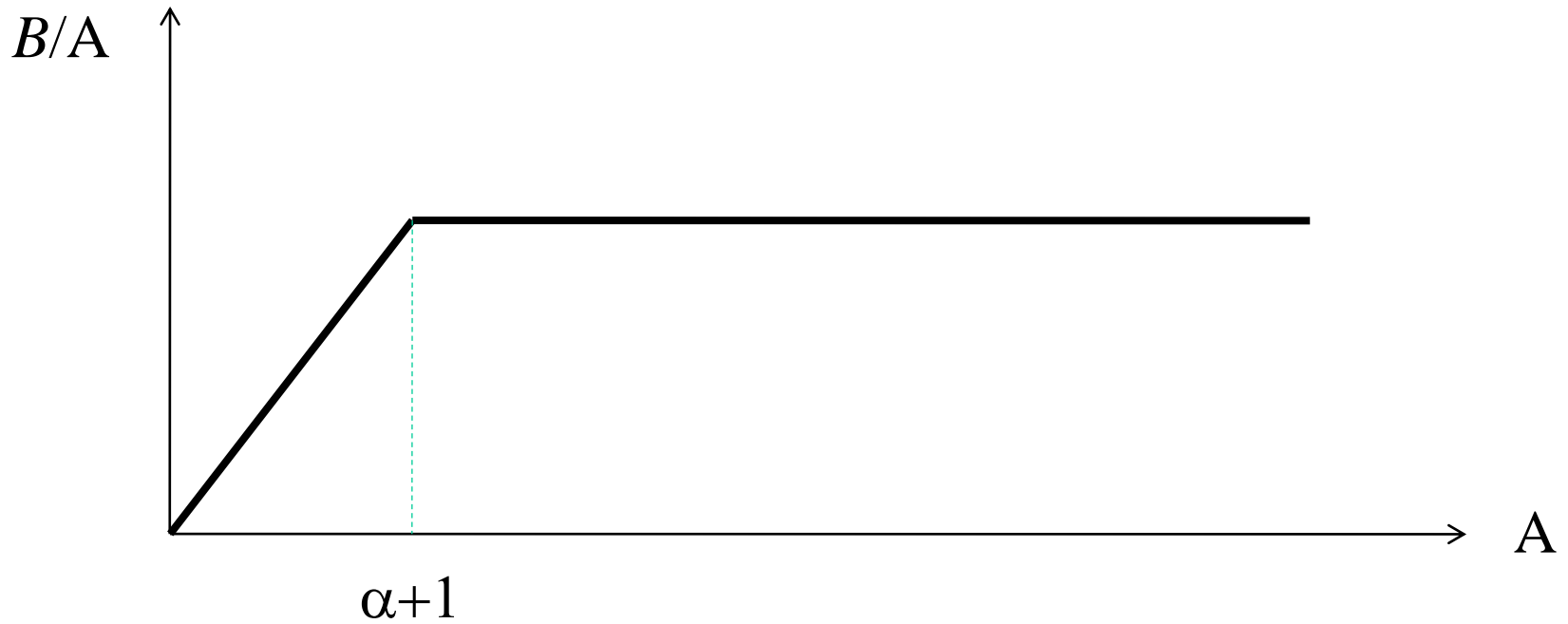


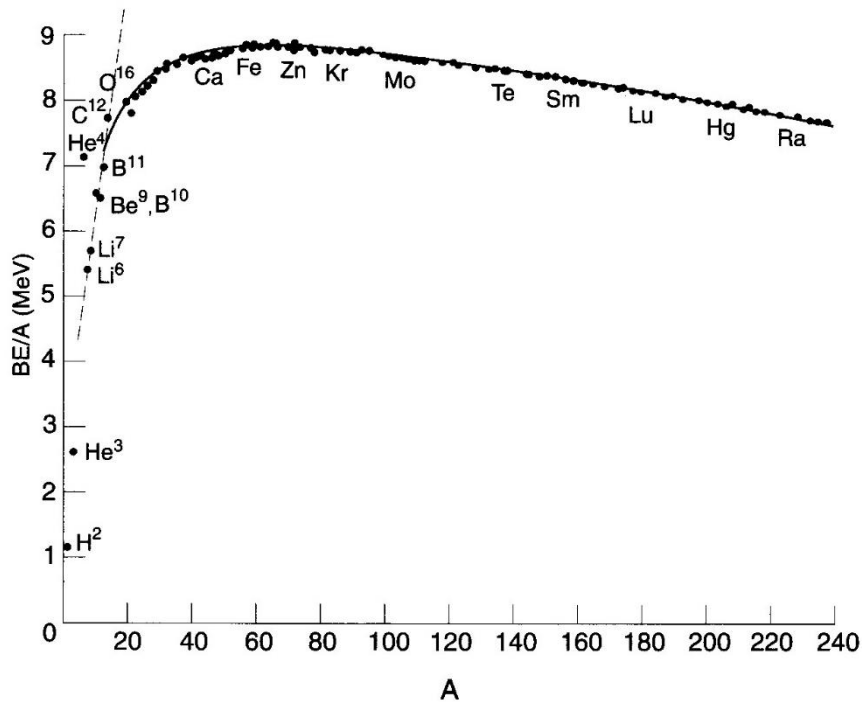
$$\alpha = \frac{4\pi}{3} r_{\text{int}}^3 \cdot \rho$$

小さな原子核だと



$$\rightarrow B/A \propto A - 1$$





この図から  $\alpha$  の値を読み取ると、  
 $\alpha \sim 10$  くらい。

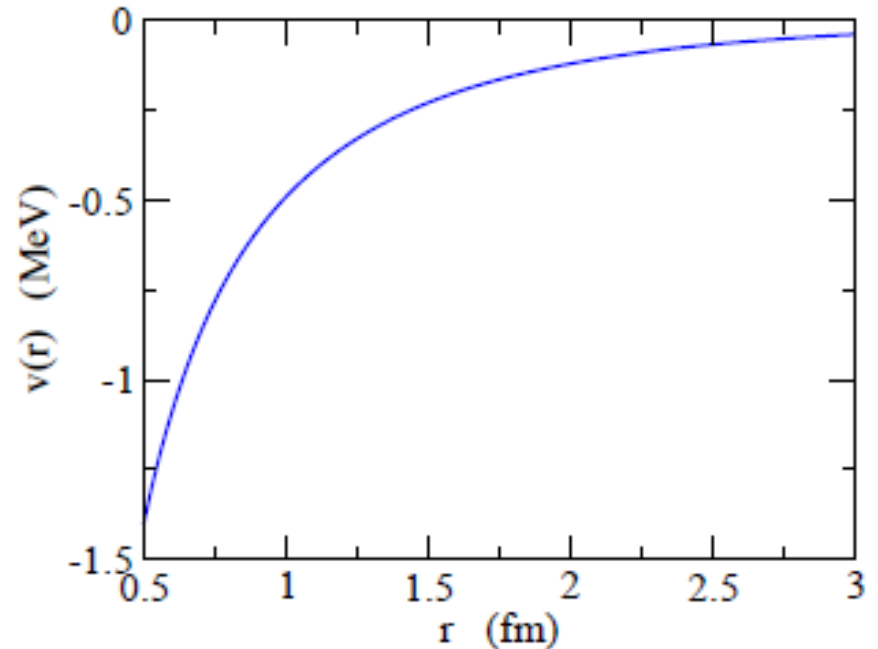


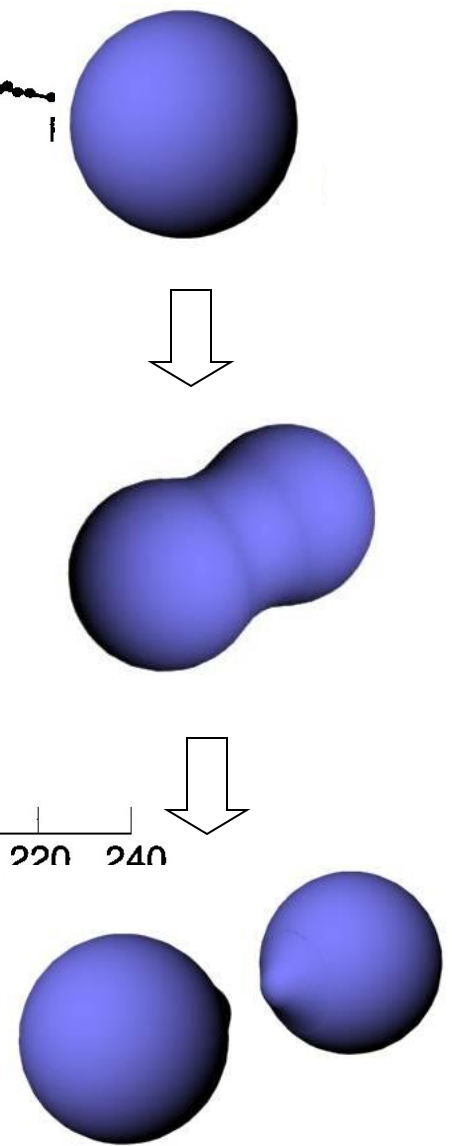
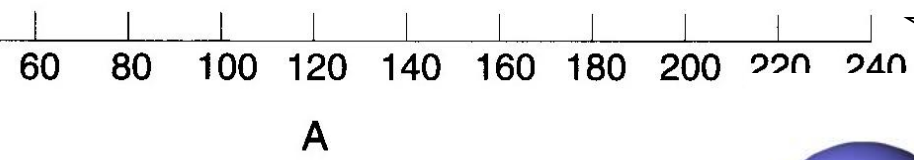
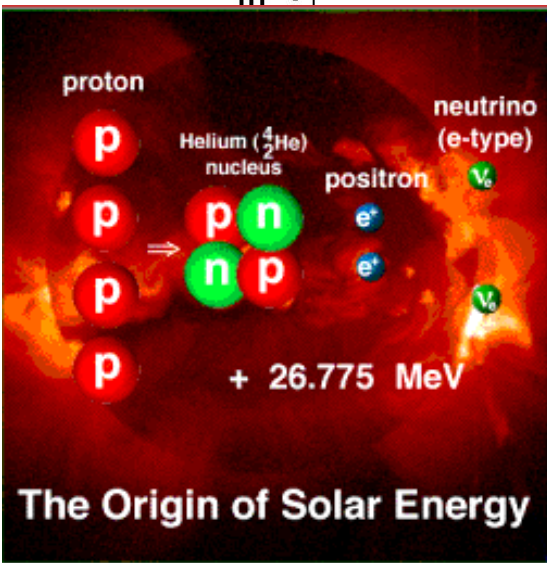
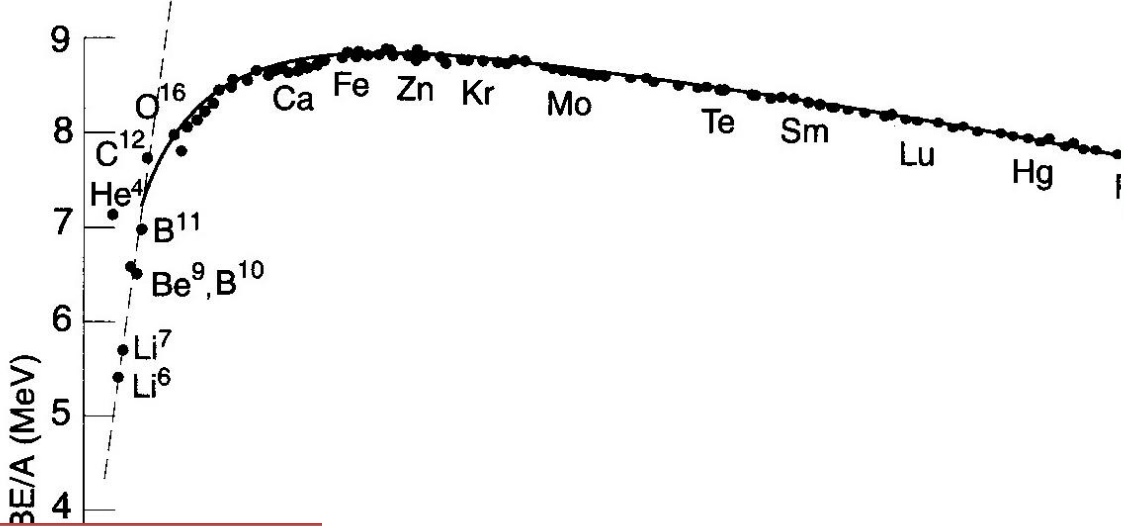
核力の到達距離は、  
 $1.1 \times 10^{1/3} = 2.37 \text{ fm}$  程度。

湯川相互作用:

$$v(r) = -g \frac{e^{-\kappa r}}{r}$$

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\hbar}{m_{\pi} c} = 1.41 \text{ fm}$$





1.  $B(A, Z)/A \approx 0.8 \text{ MeV}$  ( $A > 12$ )  $\iff$  Short range
2. Effect of Coulomb force for heavy nuclei
3. Fusion for light nuclei
4. Fission for heavy nuclei



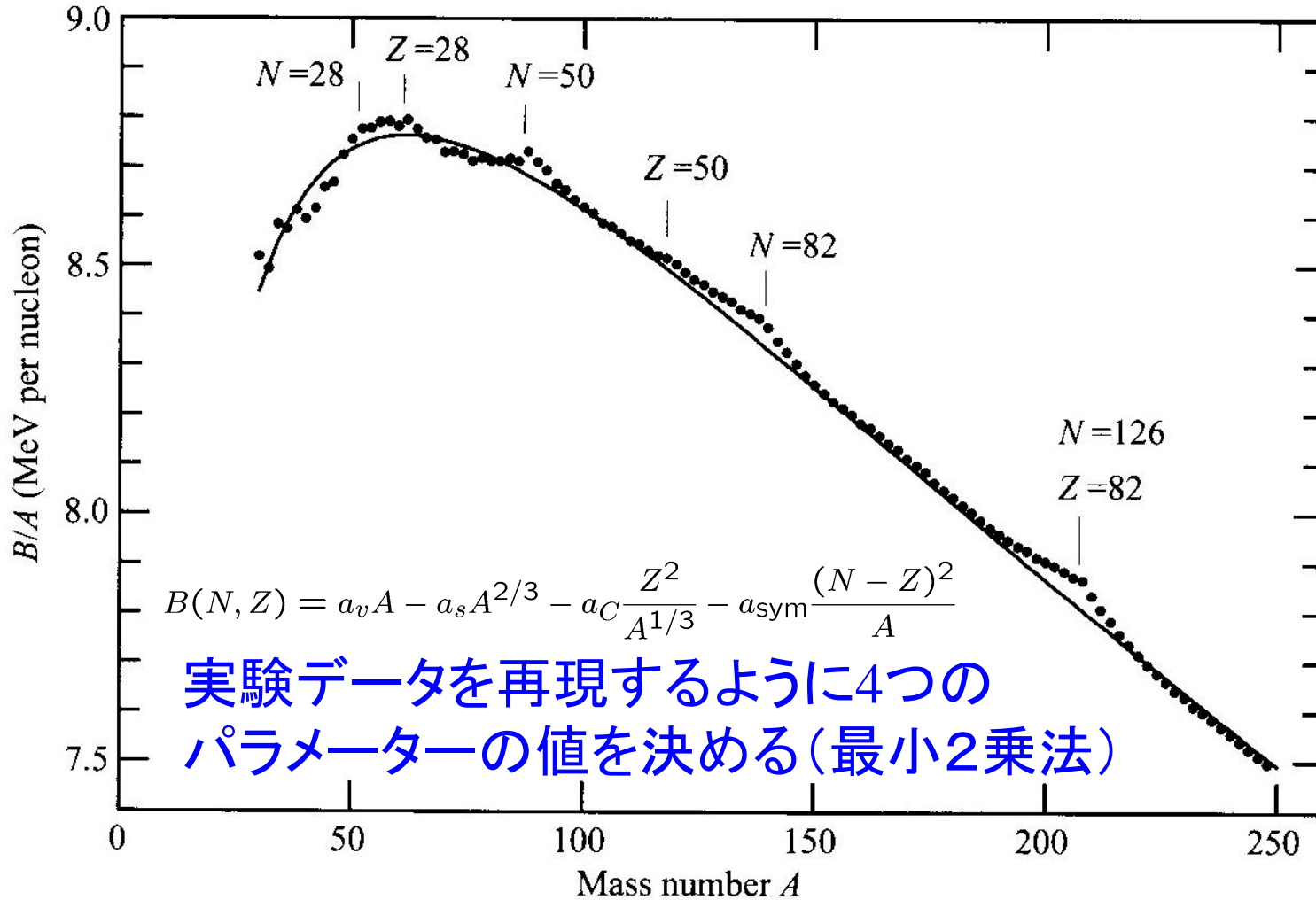
# Semi-empirical mass formula

(Bethe-Weizacker formula: Liquid-drop model)

$$B(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}$$

- Volume energy:  $a_v A$
- Surface energy:  $-a_s A^{2/3}$
- Coulomb energy:  $-a_C Z^2 / A^{1/3}$
- Symmetry energy:  $-a_{\text{sym}} (N - Z)^2 / A$

# どのくらい実験を再現するか？



✓ 大体OK、だけど所々にずれ

✓  $N, Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$  (魔法数)に対して束縛エネルギー大

→ 「殻構造」

$N = 50$

