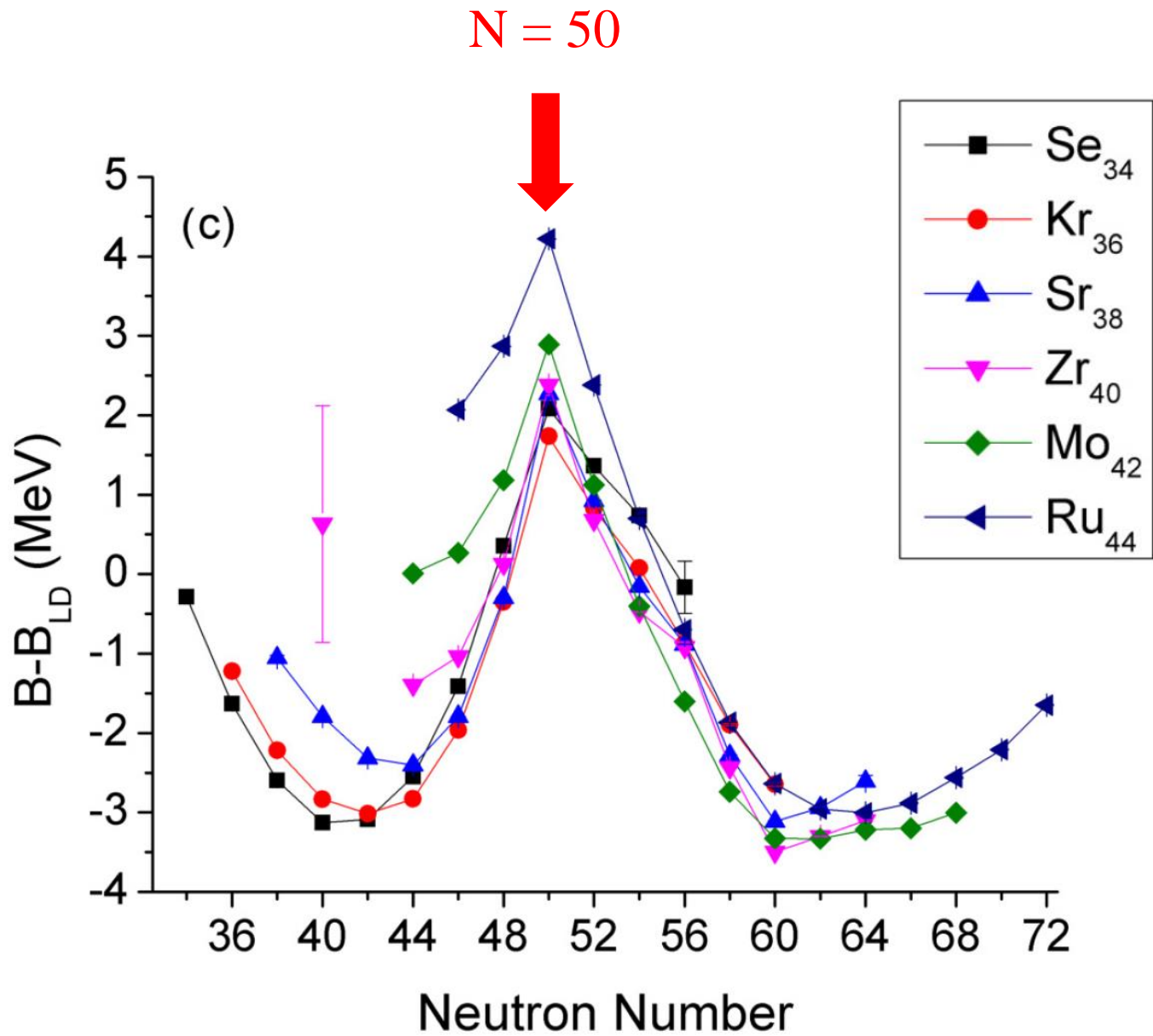


✓ 大体OK、だけど所々にずれ

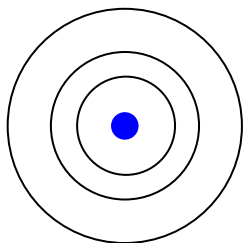
✓ $N, Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$ (魔法数) に対して束縛エネルギー大

→ 「殻構造」



(note) 原子の魔法数 (貴ガス・希ガス)

He (Z=2), Ne (Z=10), Ar (Z=18), Kr (Z=36), Xe (Z=54), Rn (Z=86)



殻構造

原子核の周りを
回る電子の軌道が
埋まると安定に
なる



生命誕生のための幸運な偶然

原子の魔法数

電子の数が 2, 10, 18, 36, 54, 86

元素の周期表

二重閉殻核

1A	2A	3A	4A	5A	6A	7A	8	1B	2B	3B	4B	5B	6B	7B	8		
1 H															2 He		
3 Li	4 Be														10 Ne		
11 Na	12 Mg														18 Ar		
19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr
37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe
55 Cs	56 Ba	L	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg	Tl	Pb	Bi	Po	At	Rn
67 Fr	68 Ra	A															
		L	La	Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu
		A	Ac	Th	Pa	U	Np	Pu	Am	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lr

● 典型金属元素
● 半金属元素
● 非金属元素
● 遷移金属元素
● 希ガス

不活性ガス: He, Ne, Ar, Kr, Xe, Rn

原子核の魔法数

陽子または中性子の数が

2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 の時安定

→ 例えば $^{16}_8\text{O}_8$ (二重閉殻核)

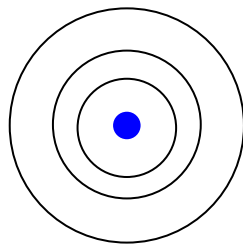
→ 酸素元素は元素合成の過程で数多く生成された

→ しかし、酸素は化学的には「活性」

→ 化学反応により様々な複雑な物質をつくり生命に至った

(note) 原子の魔法数 (貴ガス・希ガス)

He (Z=2), Ne (Z=10), Ar (Z=18), Kr (Z=36), Xe (Z=54), Rn (Z=86)



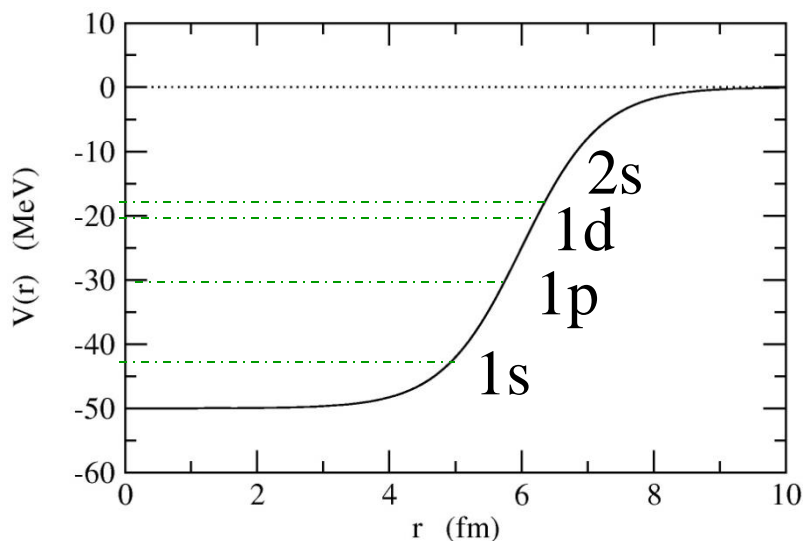
殻構造

原子核の周りを回る電子の軌道が埋まると安定になる

原子核物理における似た試み: ポテンシャル中の独立粒子運動

Woods-Saxon ポテンシャル

$$V(r) = -V_0/[1 + \exp((r - R_0)/a)]$$

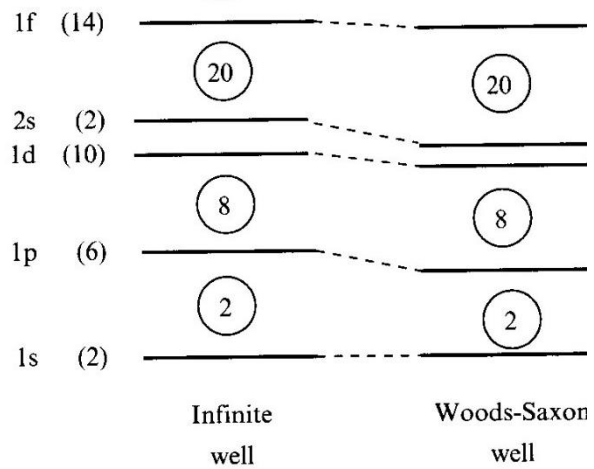


$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) - \epsilon \right] \psi(\mathbf{r}) = 0$$

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \chi_{m_s}$$

縮退度に応じて下のレベルから核子を順番につめていく

Nuclear magic numbers: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126



彦坂忠義

世界に先駆けて原子核の殻模型を提唱
原子力に関する先駆的な研究（原子炉の彦坂模型の提案）



写真提供：彦坂工務店

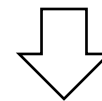
あまりにも研究の時期が「早すぎた」ため
偉大な業績が歴史に埋もれてしまった悲運の科学者 *Hidesaburo Hiyama*

- 1902 愛知県瀬戸郡（現豊橋市）に生まれる *1902-1989*
- 1920 旧制第二高等学校（仙台）入学
- 1926 東北帝国大学理学部物理学科卒業
東北帝国大学助手
- 1934 原子核の殻模型の提唱
- 1939 旧制山口高等学校教授
- 1941 大阪大学秦池正士研究室に内地留学
- 1943 旧制第二高等学校教授
- 1944 原子炉の彦坂模型の提案
- 1945 旅順工科大学教授
- 1949 岩手大学教授
- 1951 新潟大学理学部教授
- 1968 東北学院大学教授（～1977）
- 1989 薨去

彦坂忠義(1902 – 1989)

1934 年

殻模型の考えに基づき
計算を行う



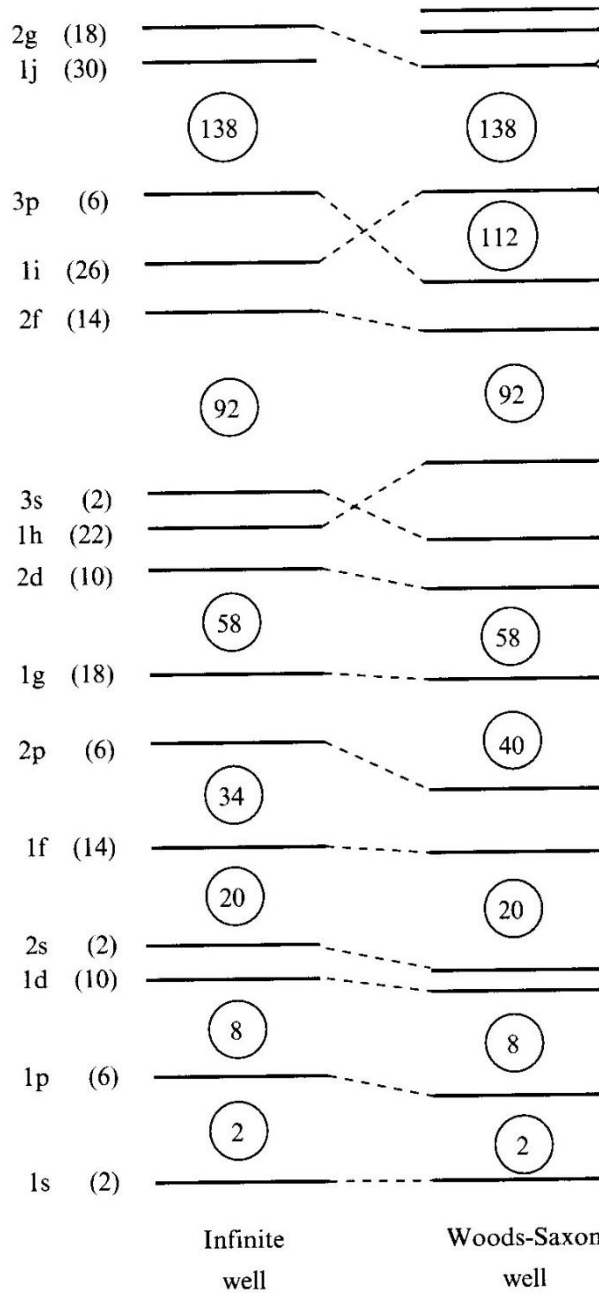
中性子の分離エネルギー、
原子核の安定領域、
磁気モーメント

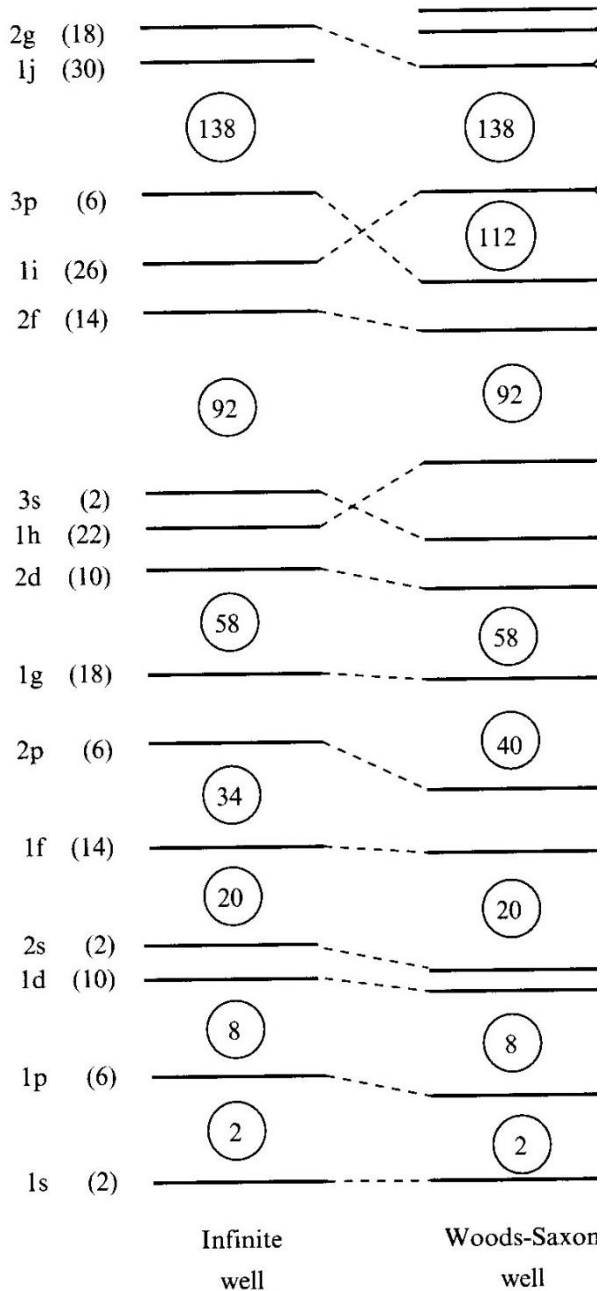
など当時測定されていた
実験データをきれいに説明

（ただし、当時、殻模型の
考えは受け入れられなかつた。）

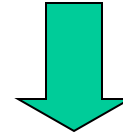
Phys. Rev. に論文を reject をされる。
独語に書き直し、東北大紀要に発表。

Nuclear magic numbers:
2, 8, 20, 28, 50, 82, 126





Woods-Saxon itself does not provide the correct magic numbers (2,8,20,28, 50,82,126).



Mayer and Jensen (1949):
Strong spin-orbit interaction



$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) + V_{ls}(r) \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} - \epsilon \right] \psi(\mathbf{r}) = 0$$

$$V_{ls}(r) \sim -\lambda \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \quad (\lambda > 0)$$

Infinite well Woods-Saxon well

jj 結合殻模型

軌道運動とスピンは独立の自由度

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) - \epsilon \right] \psi(\mathbf{r}) = 0 \implies \psi_{l m m_s}(\mathbf{r}) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \chi_{m_s}$$

スピン・軌道力

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) + V_{ls}(r) \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} - \epsilon \right] \psi(\mathbf{r}) = 0$$

$$\text{(note) } \mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s} \implies \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} = (j^2 - l^2 - s^2)/2$$

l と s を結合して j を組む。

$$\rightarrow j = l \pm 1/2$$

jj 結合殻模型

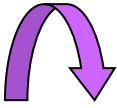
$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) - \epsilon \right] \psi(\mathbf{r}) = 0 \implies \psi_{lmm_s}(\mathbf{r}) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \chi_{m_s}$$

スピン・軌道力

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) + V_{ls}(r) \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} - \epsilon \right] \psi(\mathbf{r}) = 0$$

(note) $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s} \implies \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} = (j^2 - l^2 - s^2)/2$

l と s を結合して j を組む。


$$\begin{aligned} \psi_{jlm}(\mathbf{r}) &= \frac{u_{jl}(r)}{r} \mathcal{Y}_{jlm}(\hat{\mathbf{r}}) \\ \mathcal{Y}_{jlm}(\hat{\mathbf{r}}) &= \sum_{m_l, m_s} \langle l \ m_l \ 1/2 \ m_s | j \ m \rangle Y_{lm_l}(\hat{\mathbf{r}}) \chi_{m_s} \end{aligned}$$

$$j^2 |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = j(j+1) |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle$$

$$j_z |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = m |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle$$

$$l^2 |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = l(l+1) |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle$$

$$s^2 |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = 3/4 |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle$$

jj 結合殻模型

l と s を結合して j を組む。

$$\psi_{jlm}(\mathbf{r}) = \frac{u_{jl}(r)}{r} \mathcal{Y}_{jlm}(\hat{\mathbf{r}})$$

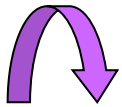
$$j^2 |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = j(j+1) |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle$$

$$j_z |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = m |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle$$

$$l^2 |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = l(l+1) |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle$$

$$s^2 |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = \frac{3}{4} |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle$$

(note) $j = l + s \implies l \cdot s = (j^2 - l^2 - s^2)/2$



$$l \cdot s |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = \frac{1}{2} \left(j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right) |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle$$

$$l \cdot s |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = \frac{l}{2} |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle \quad (j = l + 1/2)$$

$$l \cdot s |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = -\frac{l+1}{2} |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle \quad (j = l - 1/2)$$

符号が逆！

jj 結合殻模型

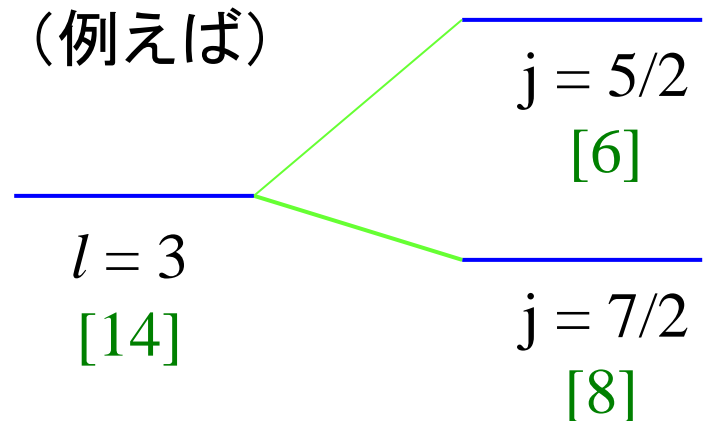
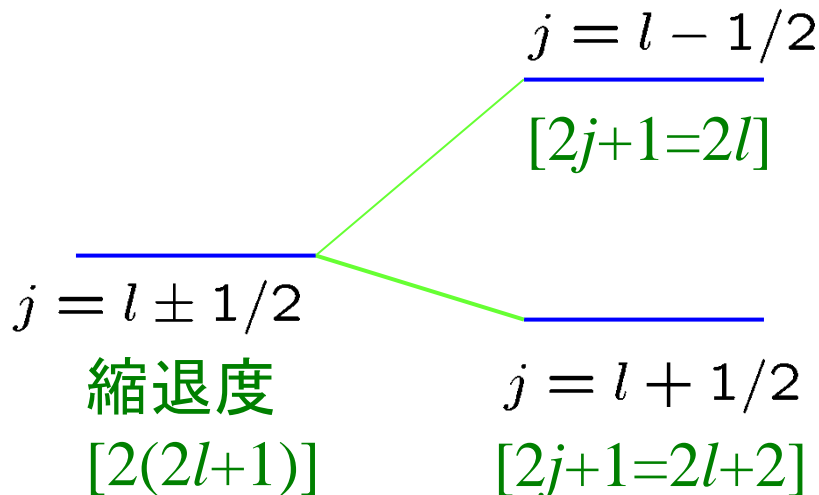
$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) + V_{ls}(r) \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} - \epsilon \right] \psi(\mathbf{r}) = 0$$

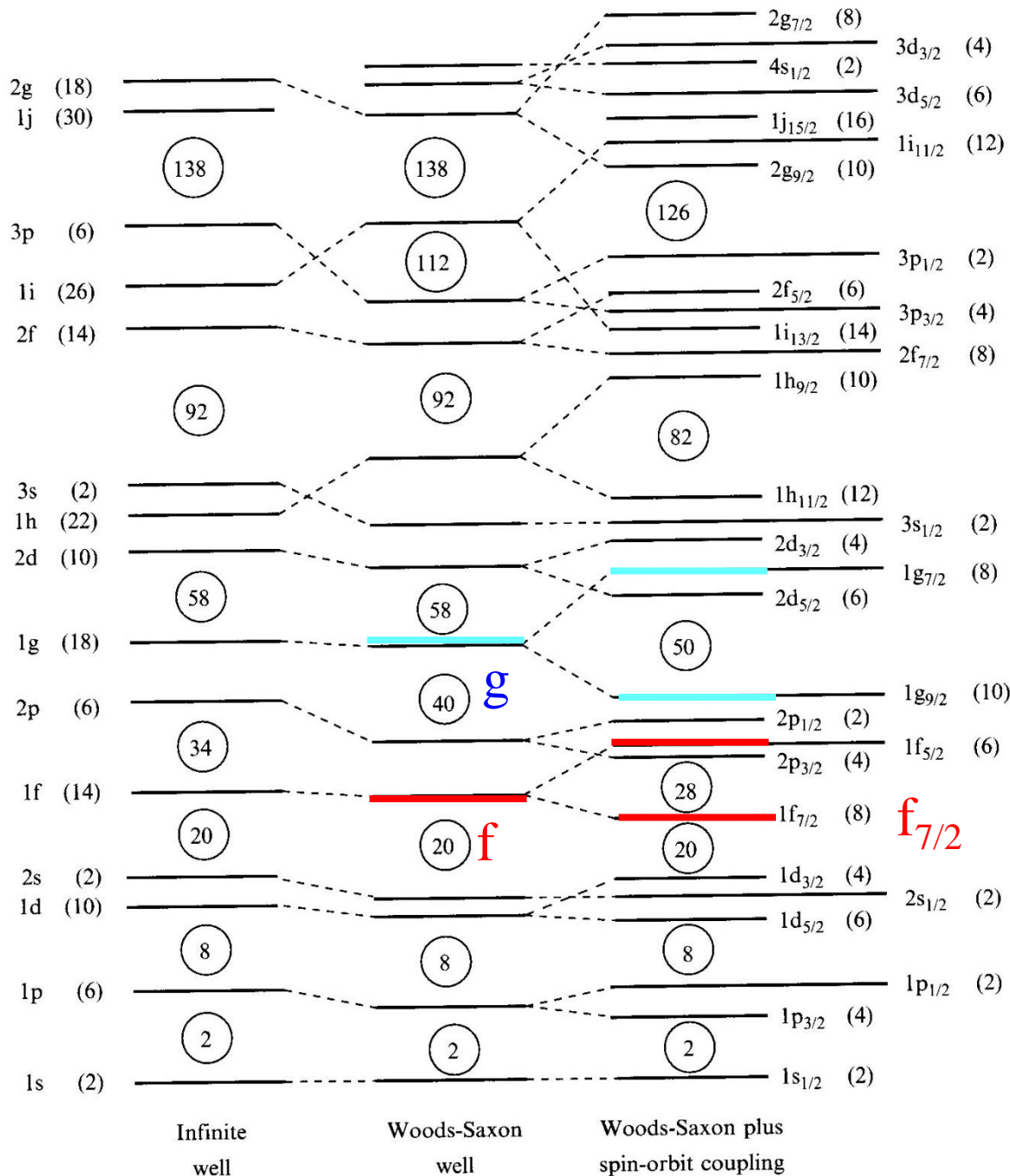
$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{s} |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = \frac{l}{2} |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle \quad (j = l + 1/2)$$

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{s} |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = -\frac{l+1}{2} |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle \quad (j = l - 1/2)$$

符号が逆！

$j = l \pm 1/2$ で準位が分離





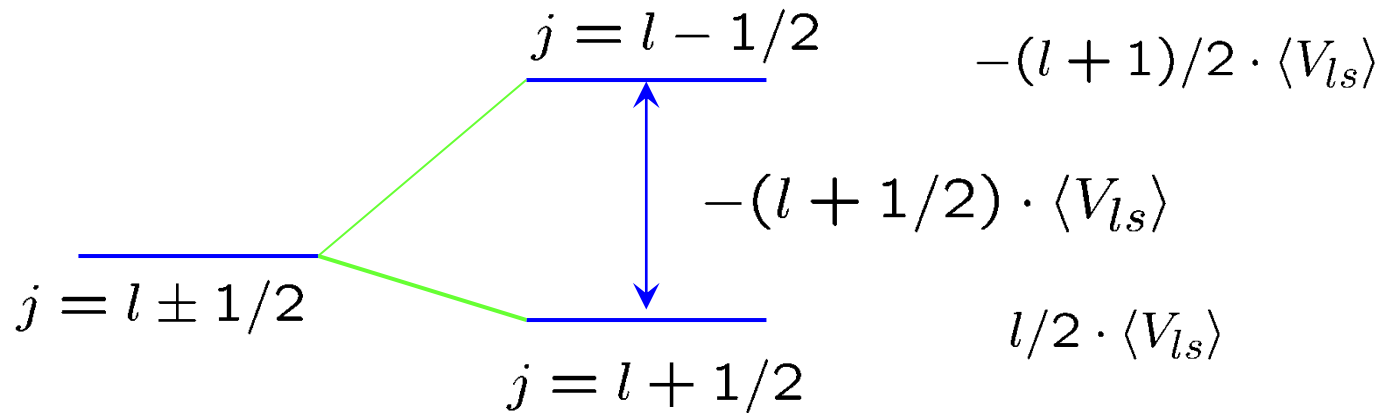
g [18] \rightarrow $g_{7/2}$ [8]
 g [18] \rightarrow $g_{9/2}$ [10]

f [14] \rightarrow $f_{5/2}$ [6]
 f [14] \rightarrow $f_{7/2}$ [8]

jj 結合殻模型

$$l \cdot s |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = \frac{l}{2} |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle \quad (j = l + 1/2)$$

$$l \cdot s |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = -\frac{l+1}{2} |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle \quad (j = l - 1/2)$$



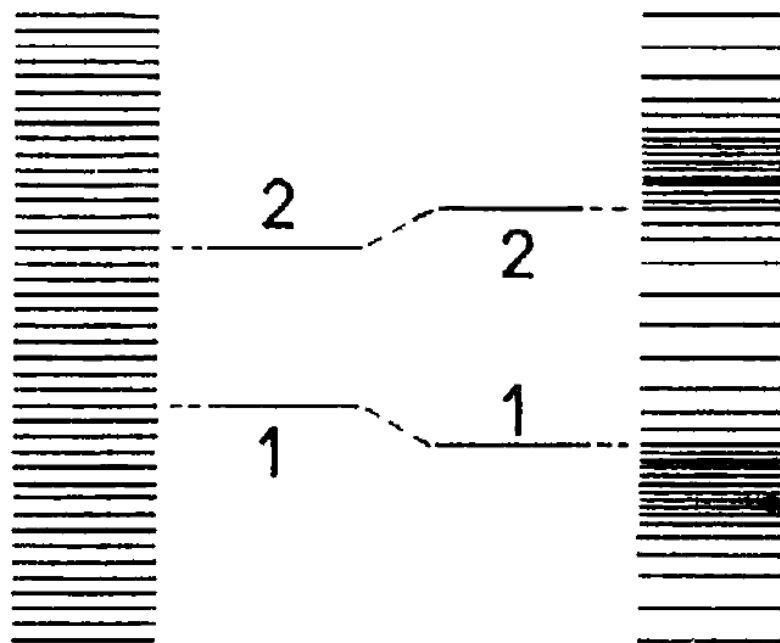
$j = l \pm 1/2$ で準位が分離: l が大きくなればなるほど
分離は大

* ただし、スピン平均はゼロ:

$$+\frac{l}{2} (2(l+1/2) + 1) - \frac{l+1}{2} (2(l-1/2) + 1) = 0$$

何故、閉殻の原子核は安定になるのか？

準位密度



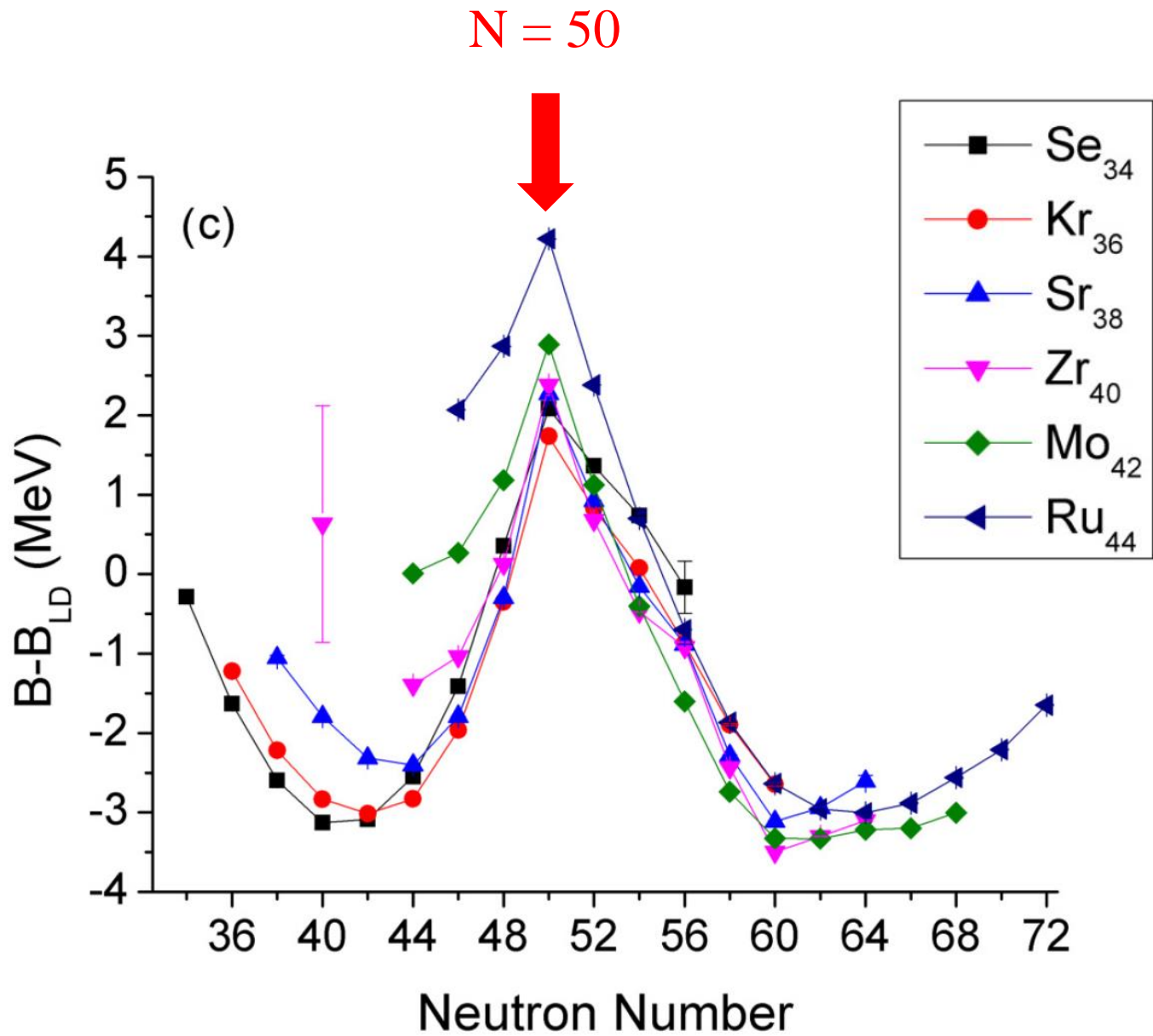
(a)

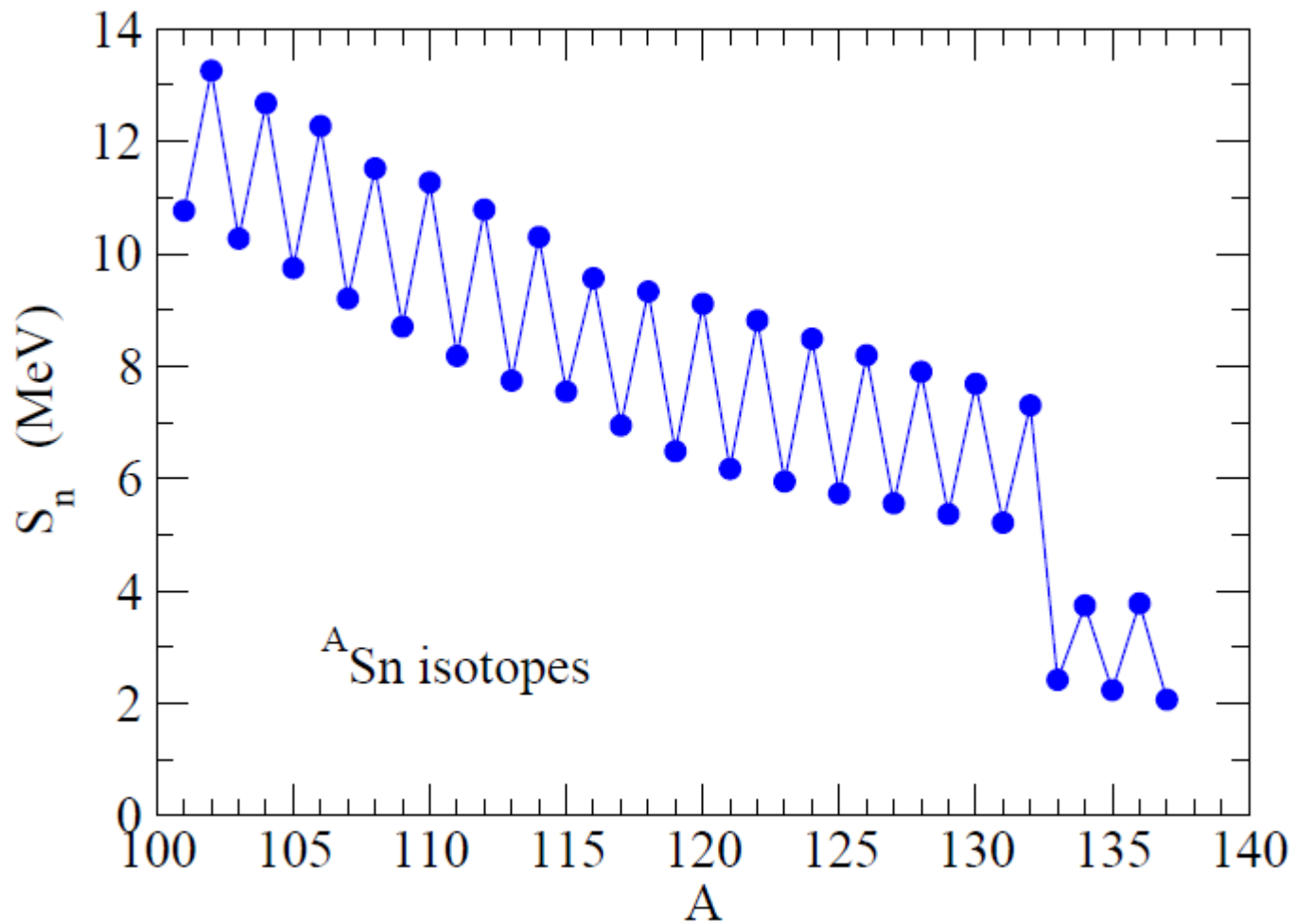
(b)

均一の場合

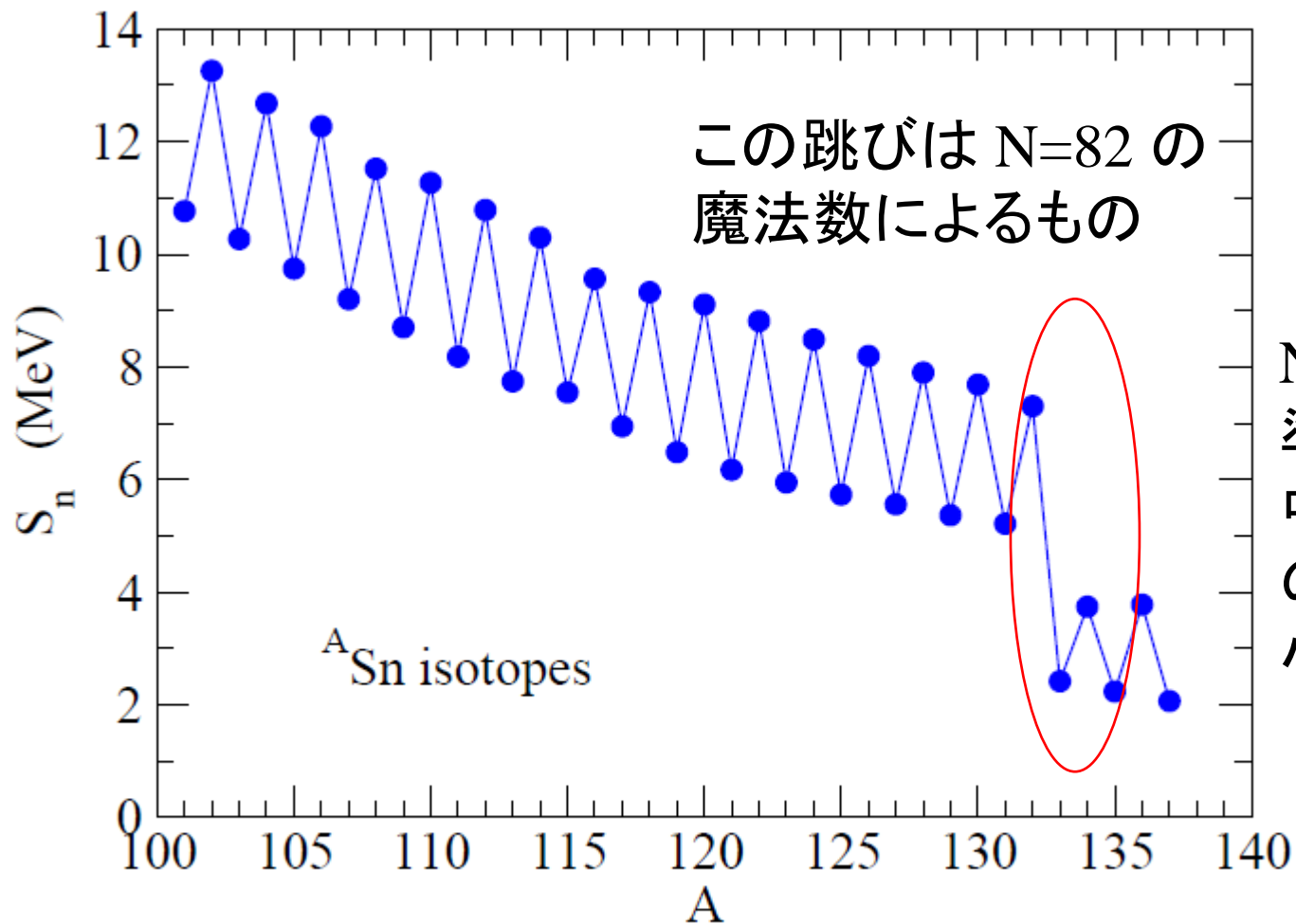
濃淡がある場合

準位密度に濃淡があれば、下から数えて濃淡の終わりまで準位が
つまると(図の1の場合)、均一の場合に比べてエネルギーが小さい





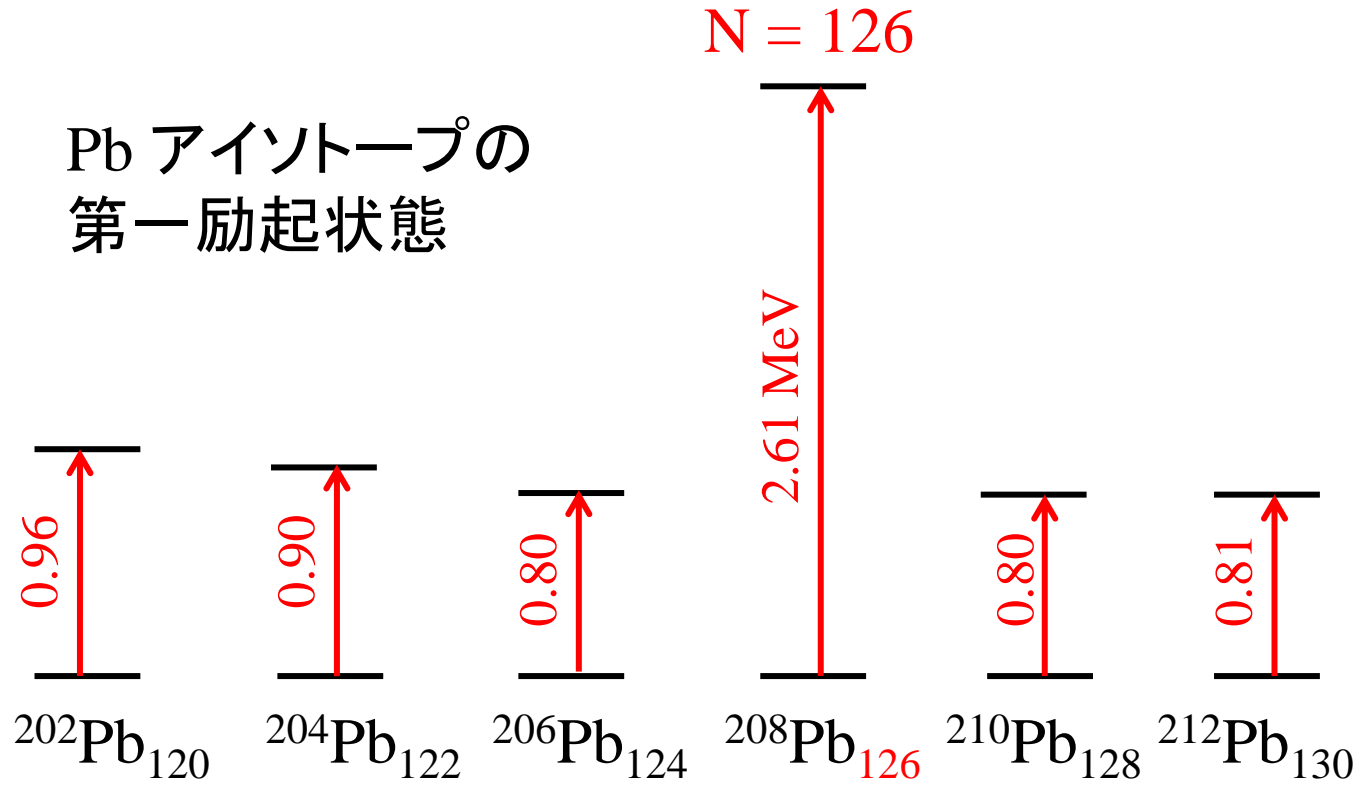
In separation energy: $S_n (A,Z) = B(A,Z) - B(A-1,Z)$



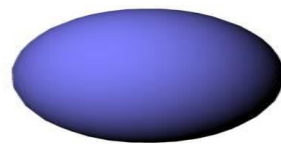
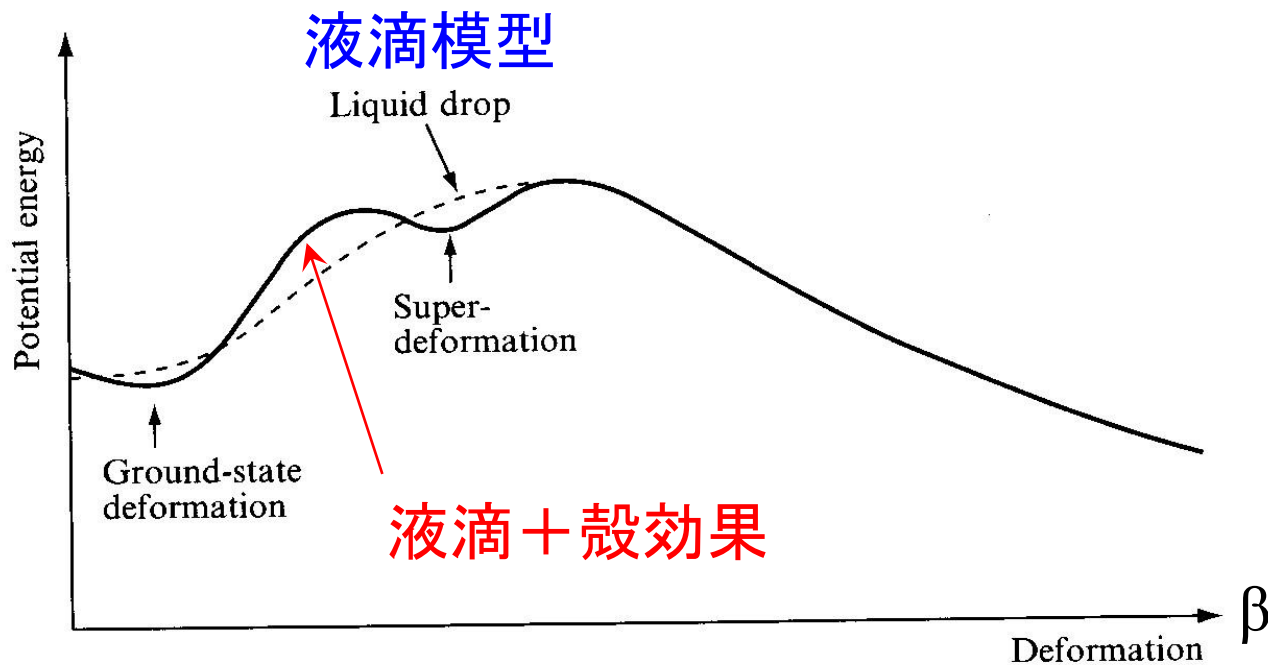
1n separation energy: $S_n (A,Z) = B(A,Z) - B(A-1,Z)$

他の証拠：第一励起状態の励起エネルギー

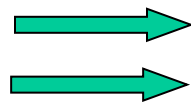
Pb アイソトープの
第一励起状態



殻構造の帰結：原子核の変形



液滴模型
殻効果

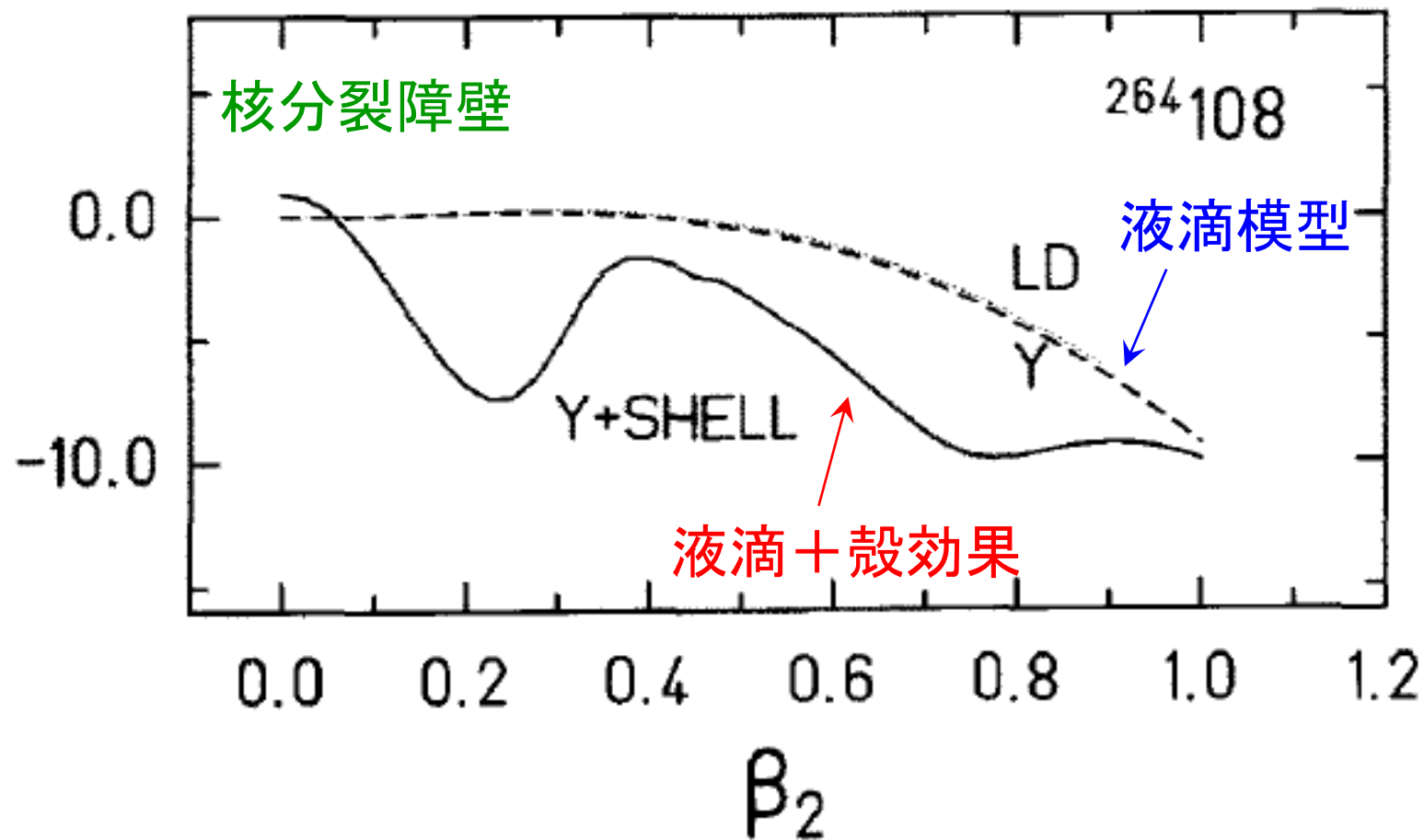


必ず球形

変形状態が基底状態になる場合あり

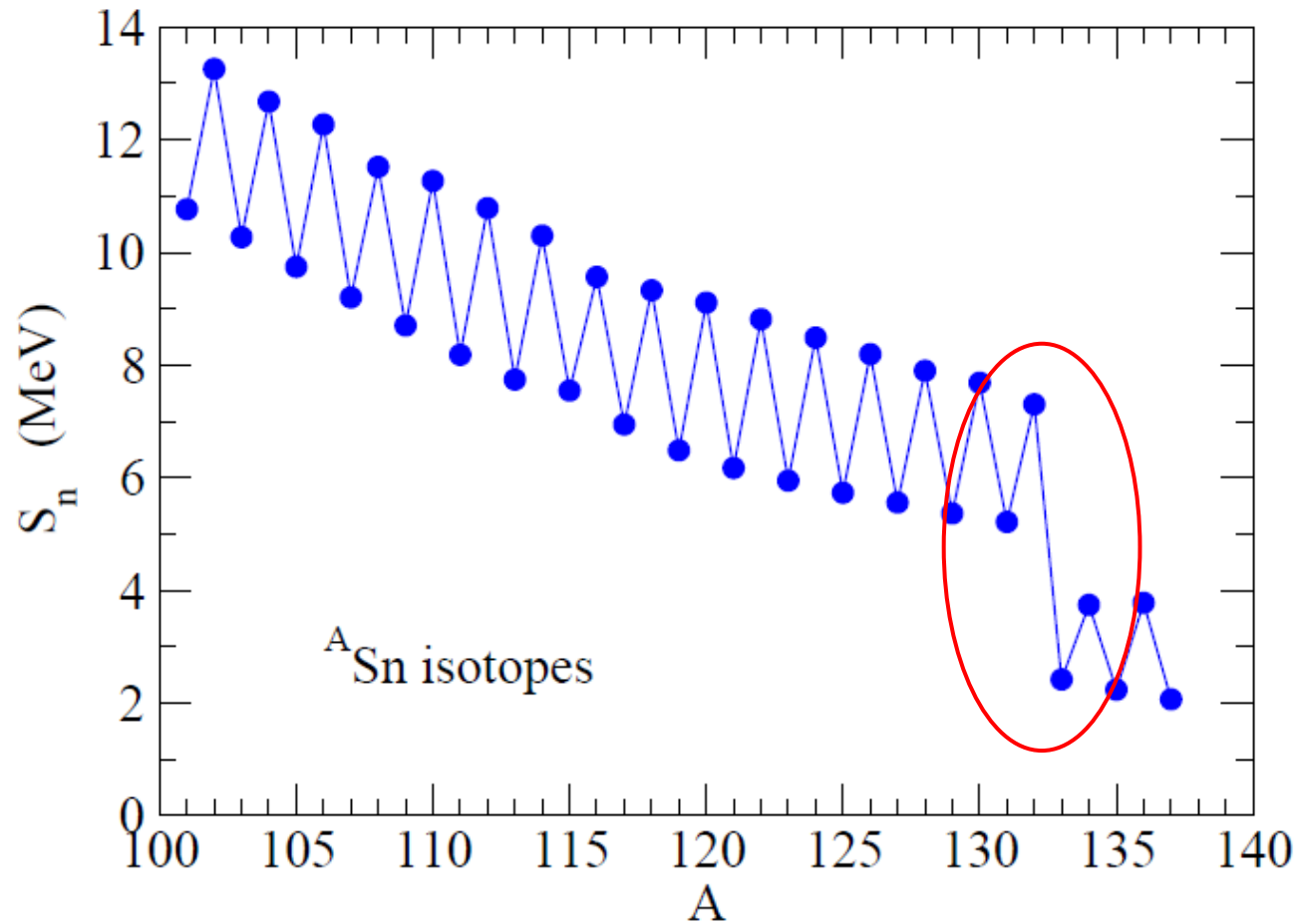
* 後でもう少し詳しく解説します。

殻構造の帰結：超重核の安定化



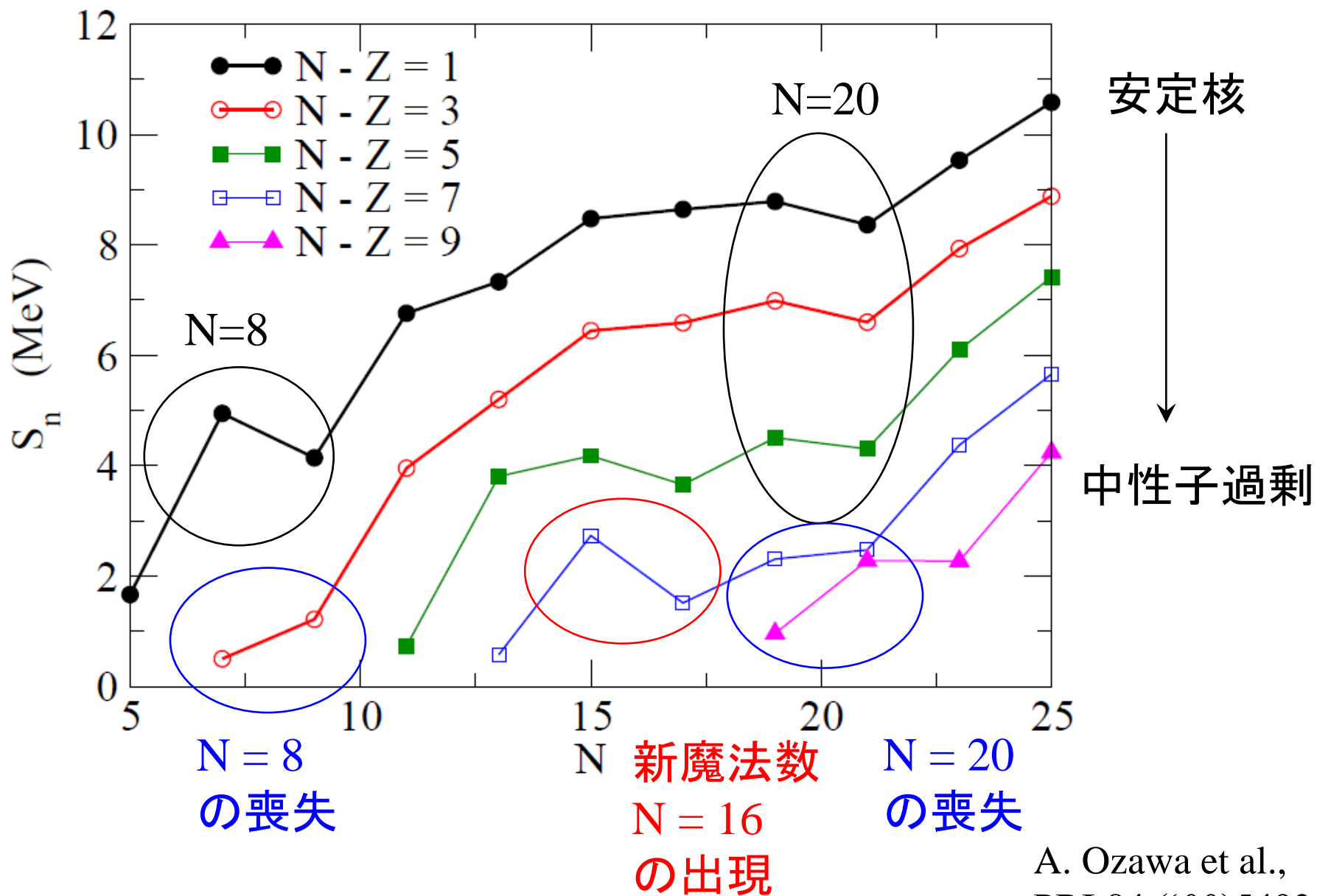
殻効果により核分裂障壁が高くなり原子核が安定化する

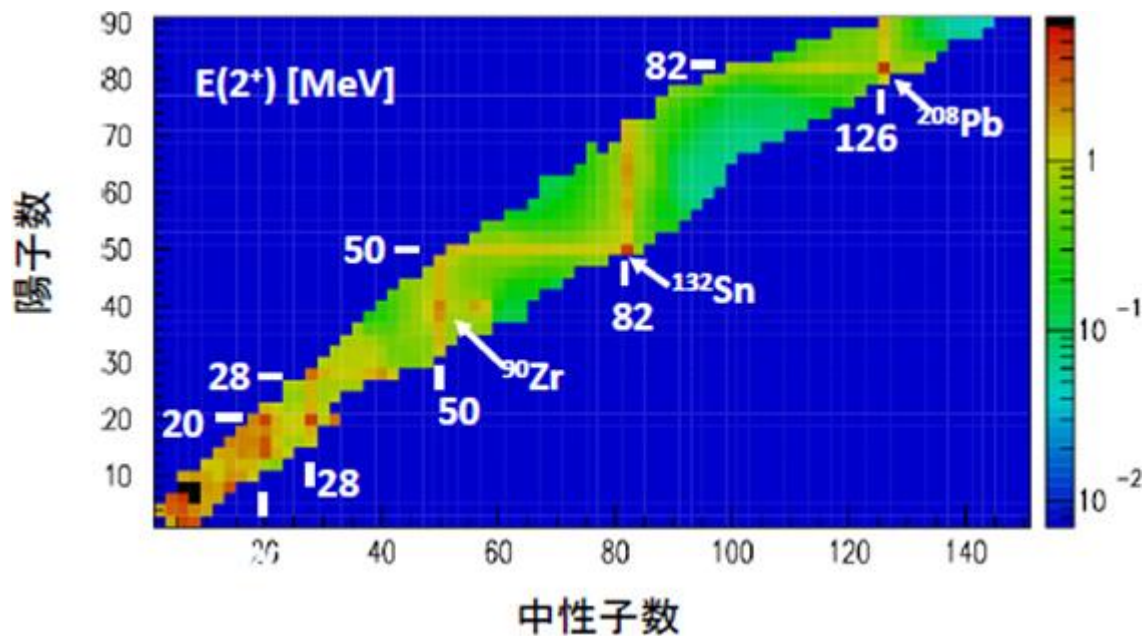
最近の話題: 変化する魔法数



魔法数のところで1中性子分離エネルギーが大きく減少

変化する魔法数





RIBF での実験の成果

魔法数 $N=20, 28$ の喪失
 新魔法数 $N=34$ の出現
 など。

魔法数の変化はテンソル力
 によるものと言われている



Nature, vol. 502 (2013)
 新魔法数 $N=34$ の発見

テンソル力

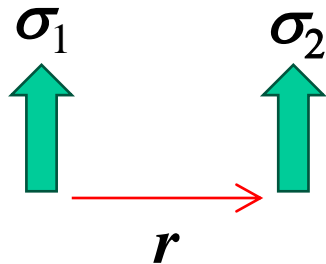
$$S_{12} = \frac{3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{r})}{r^2} - (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)$$

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{s}_2 = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}_1 + \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}_2 \quad \text{を用いると}$$

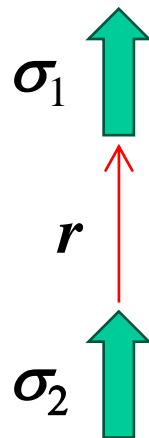
$$S_{12} = \frac{2}{\hbar^2} \left[\frac{3(\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{r})^2}{r^2} - (\boldsymbol{S})^2 \right] \quad \text{と書き直すことができる。}$$

→ $S=0$ ではゼロになる

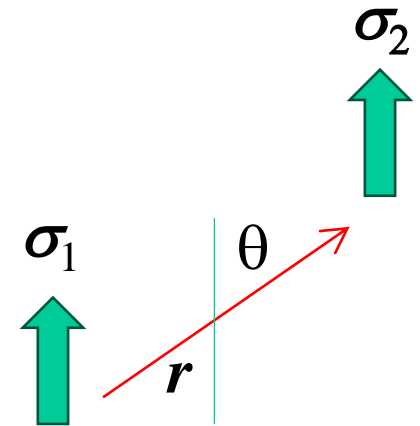
古典的には:



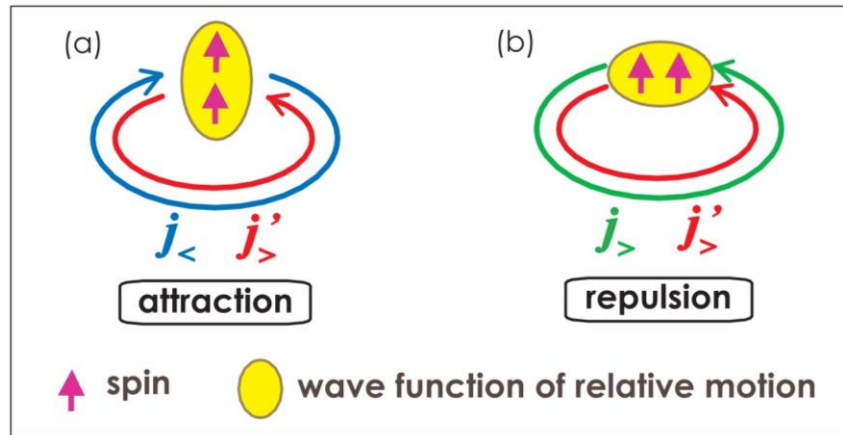
$$S_{12} = -1$$



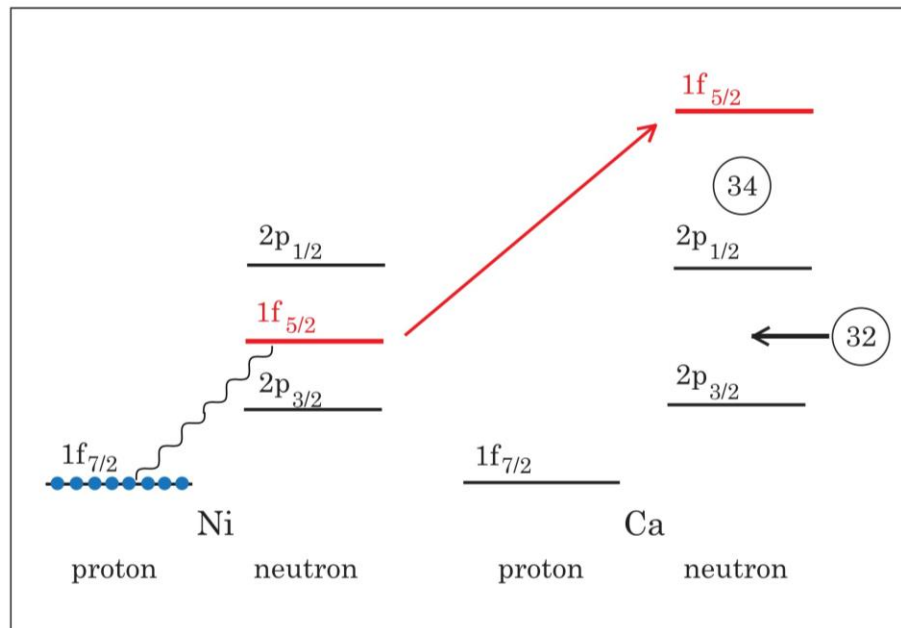
$$S_{12} = 2$$



$$S_{12} = 3\cos^2\theta - 1 \sim Y_{20}(\theta)$$



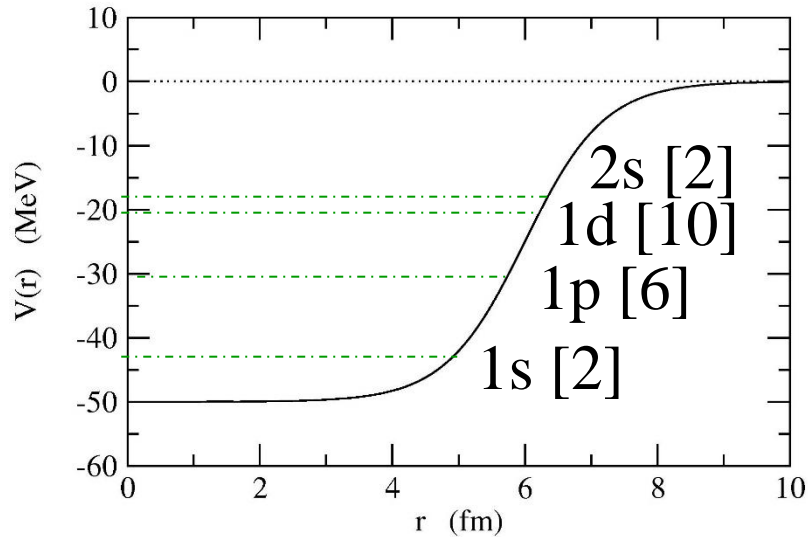
T. Otsuka et al., PRL95, 232502 (2005)



T. Otsuka et al., RMP92, 015002 (2020)

原子核の殻模型

Shell Model: independent particle motion in a potential well



+ spin-orbit interaction

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) - \epsilon \right] \psi(\mathbf{r}) = 0$$

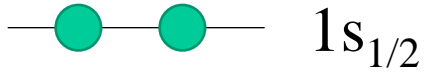
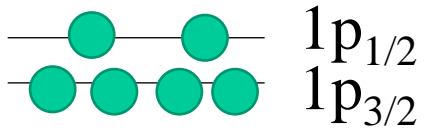
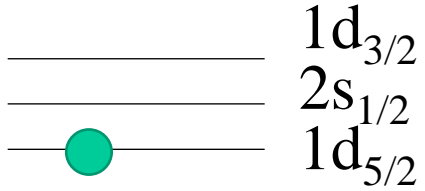
$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{u_l(r)}{r} \mathcal{Y}_{jlm}(\hat{\mathbf{r}})$$

$$\mathcal{Y}_{jlm}(\hat{\mathbf{r}}) = \sum_{m_l, m_s} \langle l m_l \ 1/2 m_s | j m \rangle Y_{lm_l}(\hat{\mathbf{r}}) \chi_{m_s}$$

$$H = \sum_k \epsilon_k a_k^\dagger a_k$$

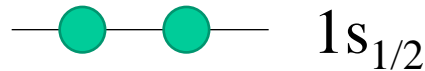
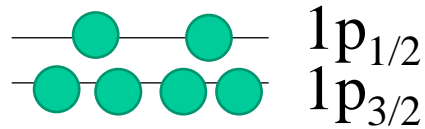
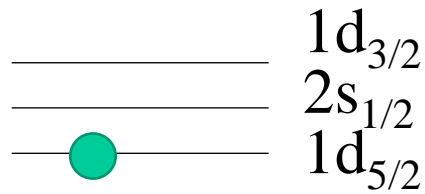
shell model

$$H = \sum_k \epsilon_k a_k^\dagger a_k$$

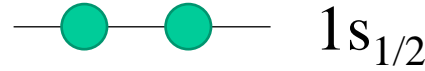
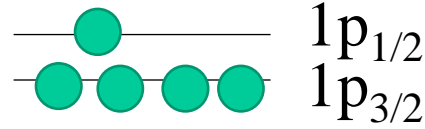
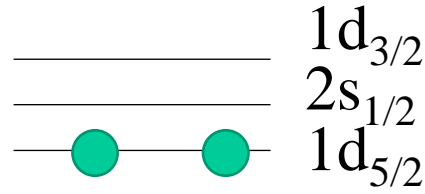


shell model

$$H = \sum_k \epsilon_k a_k^\dagger a_k$$



configuration 1



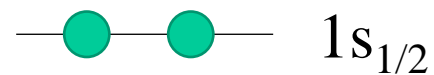
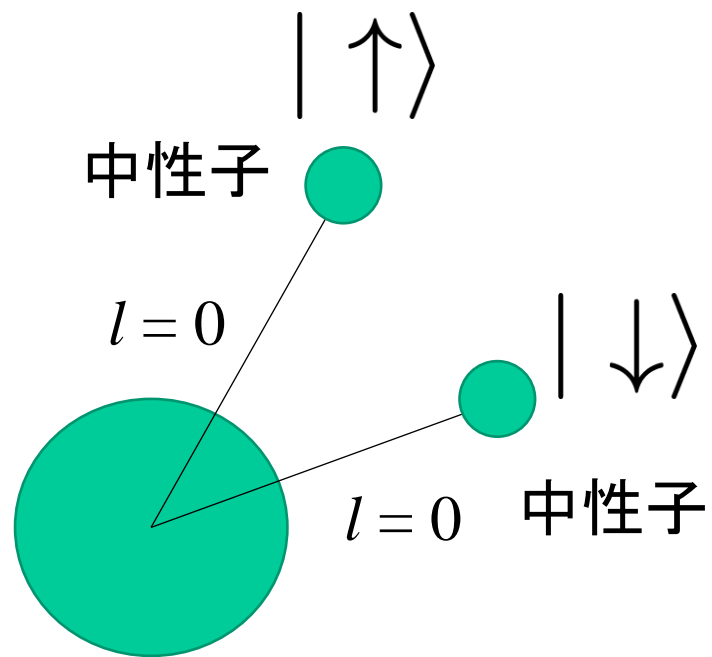
configuration 2

..... several others

angular momentum (spin) and parity for each configuration?

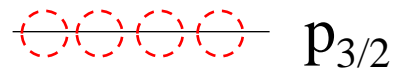
→ let us first investigate a single-j case

the first example: $j = s_{1/2}$



この系の全スピンは何か？

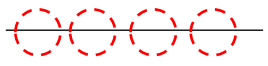
the next example: $j = p_{3/2}$



$p_{3/2}$

can accommodate 4 nucleons

($j_z = +3/2, +1/2, -1/2, -3/2$)



$p_{3/2}$

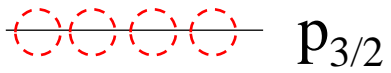
can accommodate 4 nucleons

($j_z = +3/2, +1/2, -1/2, -3/2$)

i) 1 nucleon



$p_{3/2}$



$p_{3/2}$

can accommodate 4 nucleons
($j_z = +3/2, +1/2, -1/2, -3/2$)

i) 1 nucleon

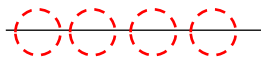


$p_{3/2}$

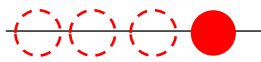



$I^\pi = 3/2^-$

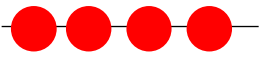
(there are 4 ways to occupy this level)

 $p_{3/2}$ can accommodate 4 nucleons
($j_z = +3/2, +1/2, -1/2, -3/2$)

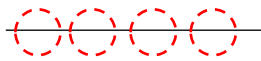
i) 1 nucleon

 $p_{3/2}$  $I^\pi = 3/2^-$
(there are 4 ways to occupy this level)



ii) 4 nucleons

 $p_{3/2}$

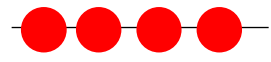

$$I = j_1 + j_2 + j_3 + j_4$$

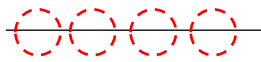
 $p_{3/2}$ can accommodate 4 nucleons
($j_z = +3/2, +1/2, -1/2, -3/2$)

i) 1 nucleon

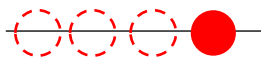

 $p_{3/2}$  $I^\pi = 3/2^-$
(there are 4 ways to occupy this level)

ii) 4 nucleons

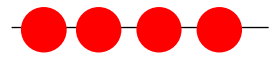

 $p_{3/2}$  $I^\pi = 0^+$
 $I = j_1 + j_2 + j_3 + j_4$ (there is only 1 way to occupy this level)
parity: $(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = +1$


 $p_{3/2}$ can accommodate 4 nucleons
 $(j_z = +3/2, +1/2, -1/2, -3/2)$

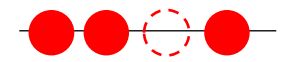
i) 1 nucleon

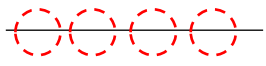

 $p_{3/2}$

 $I^\pi = 3/2^-$
 (there are 4 ways to occupy this level)

ii) 4 nucleons


 $p_{3/2}$

 $I^\pi = 0^+$
 $I = j_1 + j_2 + j_3 + j_4$ (there is only 1 way to occupy this level)
 parity: $(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = +1$

iii) 3 nucleons

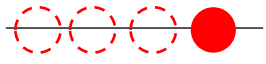

 $p_{3/2}$
 $I = j_1 + j_2 + j_3$



$p_{3/2}$

can accommodate 4 nucleons
($j_z = +3/2, +1/2, -1/2, -3/2$)

i) 1 nucleon



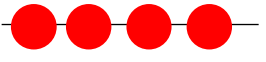
$p_{3/2}$



$$I^\pi = 3/2^-$$

(there are 4 ways to occupy this level)

ii) 4 nucleons



$p_{3/2}$



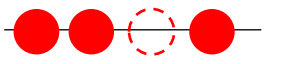
$$I^\pi = 0^+$$

(there is only 1 way to occupy this level)

$$I = j_1 + j_2 + j_3 + j_4$$

parity: $(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = +1$

iii) 3 nucleons



$p_{3/2}$



$$I^\pi = 3/2^-$$

(there are 4 ways to make a hole)

$$I = j_1 + j_2 + j_3$$

parity: $(-1) \times (-1) \times (-1) = -1$