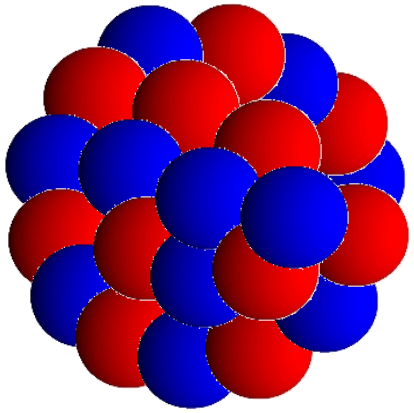
はじめに：核子多体問題について



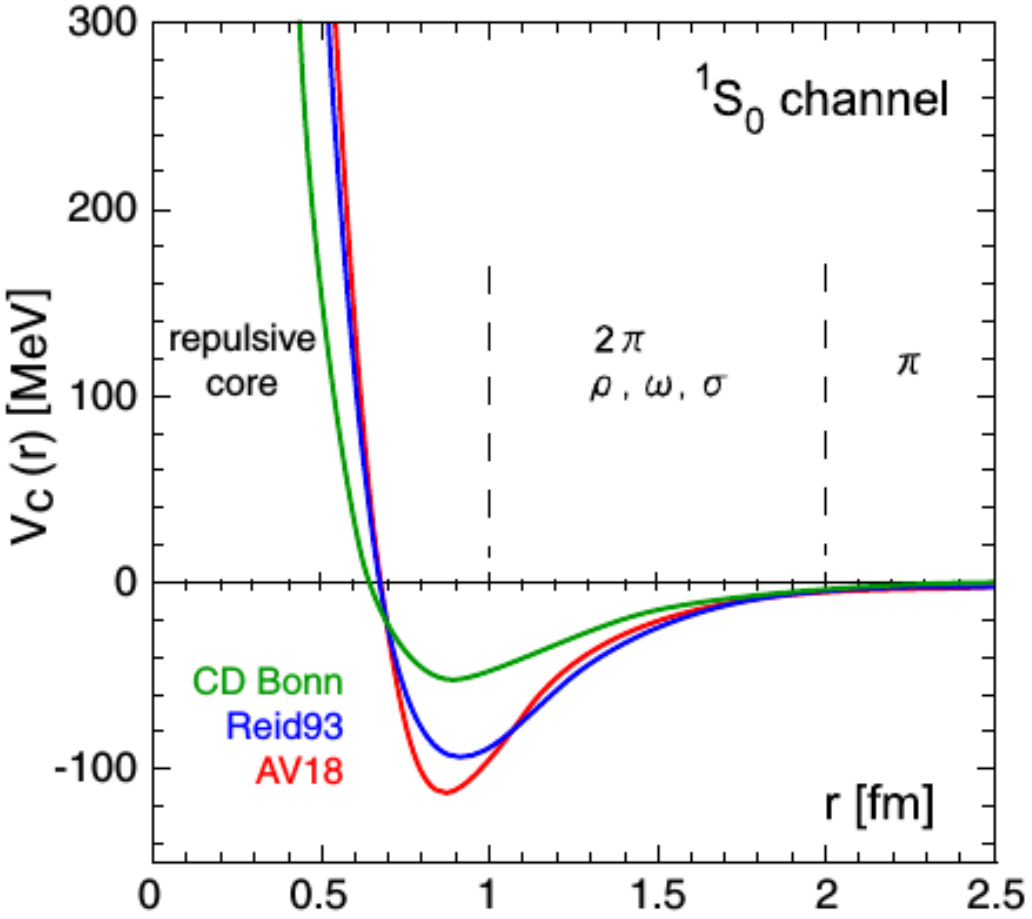
原子核 ＝ 陽子と中性子の多体系

多体のハミルトニアン

$$H = \sum_i T_i + \sum_{i<j} v_{ij} + \sum_{i<j<k} v_{ijk}$$

2体力　　3体力

このハミルトニアンを核子間のパウリ原理を考慮して
どのように（近似的に）解くのか？



N. Ishii, S. Aoki, and T. Hatsuda,
PRL99, 022001 (2007)

強いスピン・アイソスピン依存性:

$$V_C(r) = V_0(r) + V_\sigma(r)\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 + V_\tau(r)\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 + V_{\sigma\tau}(r)(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2)$$

＋テンソル力、スピン軌道力、など

テンソル力

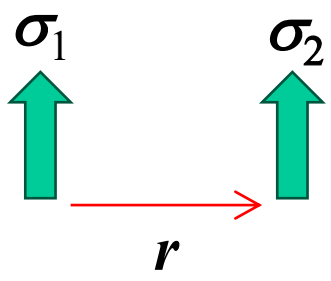
$$S_{12} = \frac{3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{r})}{r^2} - (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)$$

$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{s}_2 = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}_1 + \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}_2$ を用いると

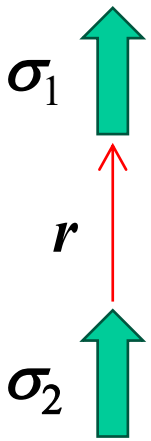
$$S_{12} = \frac{2}{\hbar^2}\left[\frac{3(\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{r})^2}{r^2} - (\boldsymbol{S})^2\right]$$ と書き直すことができる。

→ S=0 ではゼロになる

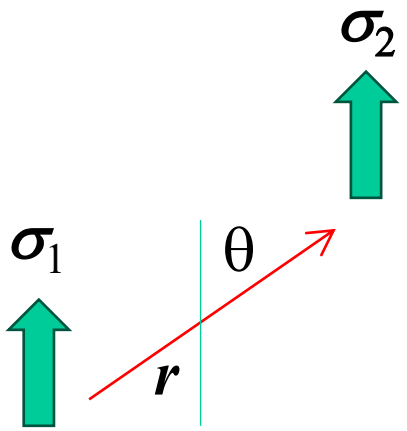
古典的には:



S_{12}=-1

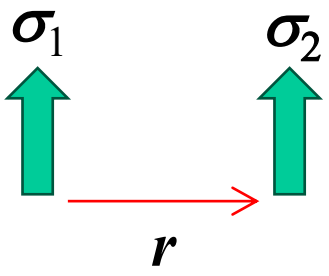


S_{12}=2

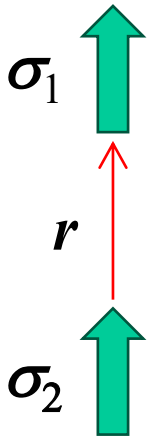


$S_{12}=3\cos^2\theta-1 \sim Y_{20}(\theta)$

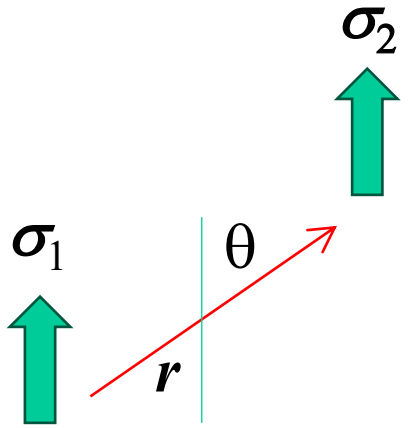
古典的には:



S_{12}=-1



S_{12}=2



S_{12}=3cos^{2}θ-1~ $Y_{20}(\theta)$

量子的には:

$$S_{12} = \frac{3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{r})}{r^2} - (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)$$

$$= 3[[\hat{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{r}}]^{(2)}[\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2]^{(2)}]^{(00)}$$

$$[\hat{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{r}}]^{(2M)} = \sum_{m,m'} \langle 1m1m'|2M\rangle\, \hat{\boldsymbol{r}}_m \hat{\boldsymbol{r}}_{m'}$$

など

テンソルについて

座標系の回転に対し、

$$T_{\lambda\mu} \to \sum_{\mu'} T_{\lambda\mu'} D^{\lambda}_{\mu'\mu}(\Omega)$$

と変換するもの（球面調和関数 $Y_{\lambda\mu}$と同じ変換）。

ベクトル (a_x, a_y, a_z) はランク1(λ=1)のテンソル：

$$\begin{aligned} a_{\pm 1} &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x \pm i a_y) \\ a_0 &= a_z \end{aligned}$$

cf.

$$\begin{aligned} rY_{1\pm 1} &\propto \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(x \pm iy) \\ rY_{10} &\propto z \end{aligned}$$

テンソルの合成

$$V_{LM} = [T_{\lambda_1} \times U_{\lambda_2}]^{(LM)} = \sum_{\mu_1,\mu_2} \langle \lambda_1\mu_1\lambda_2\mu_2|LM\rangle \, T_{\lambda_1\mu_1} U_{\lambda_2\mu_2}$$

$$T_{\lambda_1\mu_1} U_{\lambda_2\mu_2} = \sum_{L,M} \langle \lambda_1\mu_1\lambda_2\mu_2|LM\rangle \, V_{LM}$$

テンソルのスカラー積

$$T_\lambda \cdot U_\lambda = \sum_\mu (-1)^\mu \, T_{\lambda\mu} U_{\lambda,-\mu}$$

$$\begin{aligned} a_{\pm 1} &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x \pm i a_y) \\ a_0 &= a_z \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} & -a_1 b_{-1} - a_{-1} b_1 + a_0 b_0 \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \end{aligned}$$

(note)

$$\begin{aligned} [T_\lambda \times U_\lambda]^{(00)} &= \sum_{\mu_1,\mu_2} \langle \lambda\mu_1\lambda\mu_2|00\rangle \, T_{\lambda\mu_1} U_{\lambda\mu_2} = \sum_\mu \frac{(-1)^{\lambda-\mu}}{\sqrt{2\lambda+1}} T_{\lambda\mu} U_{\lambda,-\mu} \\ &= \frac{(-1)^\lambda}{\sqrt{2\lambda+1}} T_\lambda \cdot U_\lambda \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
S_{12} &= \frac{3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{r})}{r^2} - (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \\
&= 3[[\hat{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{r}}]^{(2)}[\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2]^{(2)}]^{(00)}
\end{aligned}
$$

$$
[\hat{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{r}}]^{(2M)} = \sum_{m,m'} \langle 1m1m'|2M\rangle \, \hat{\boldsymbol{r}}_m \hat{\boldsymbol{r}}_{m'}
$$

など

テンソル力

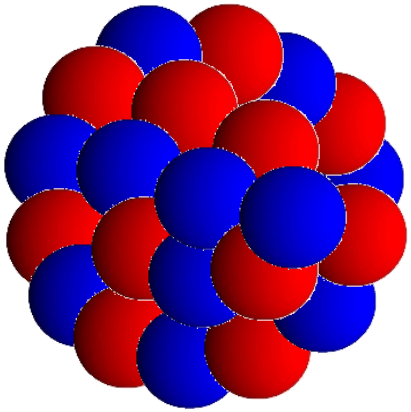
$$S_{12} = \frac{3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{r})}{r^2} - (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)$$

→ S=0 ではゼロになる

- 重陽子（S=1) が束縛し、nn (S=0) が束縛しない理由
- 重陽子のD波成分（四重極モーメント）の説明（4%程度のD波成分）

https://www.eurekalert.org/news-releases/670011

はじめに：原子核の基本的な性質



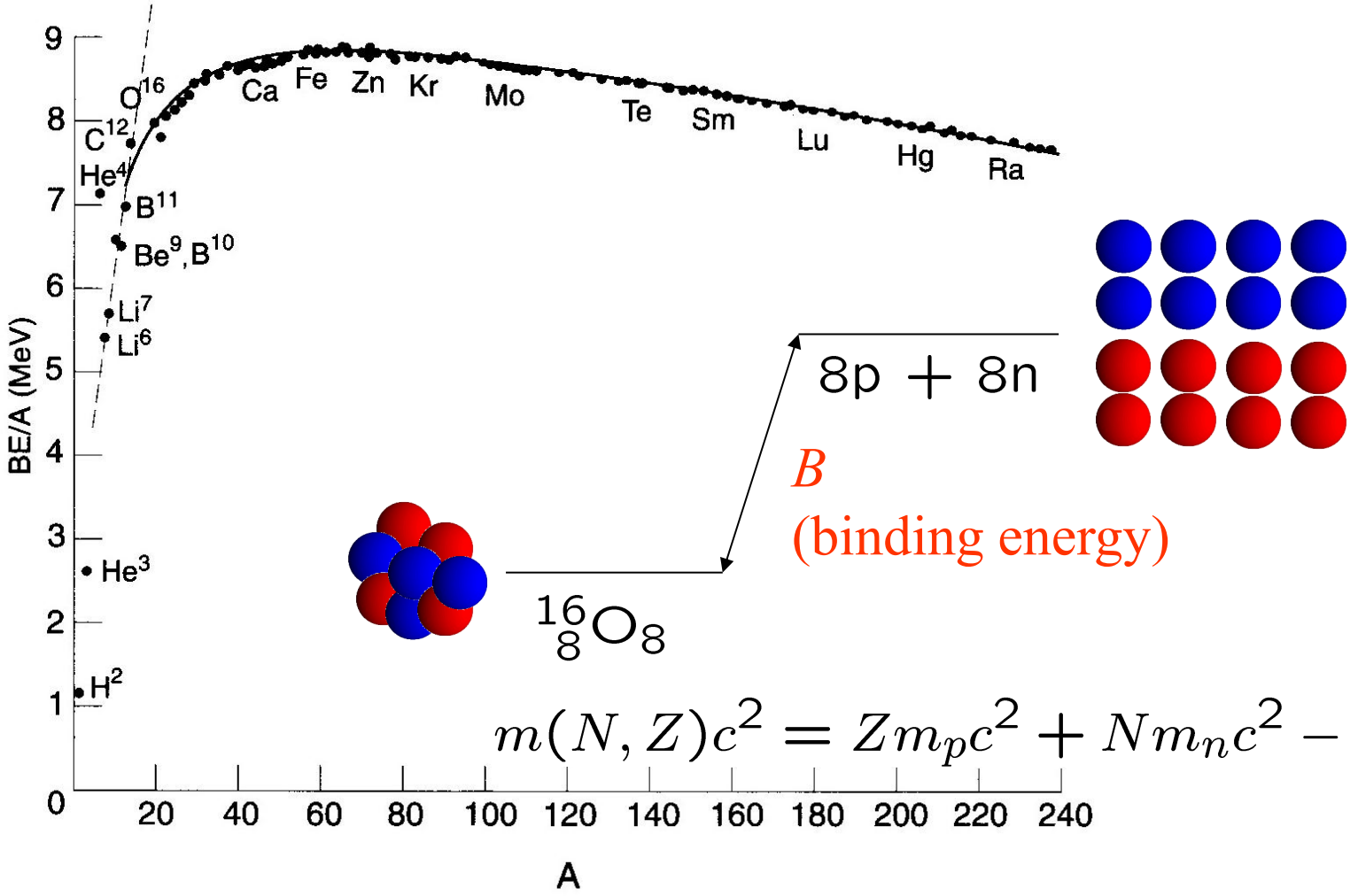
$$H = \sum_i T_i + \sum_{i<j} v_{ij} + \sum_{i<j<k} v_{ijk}$$

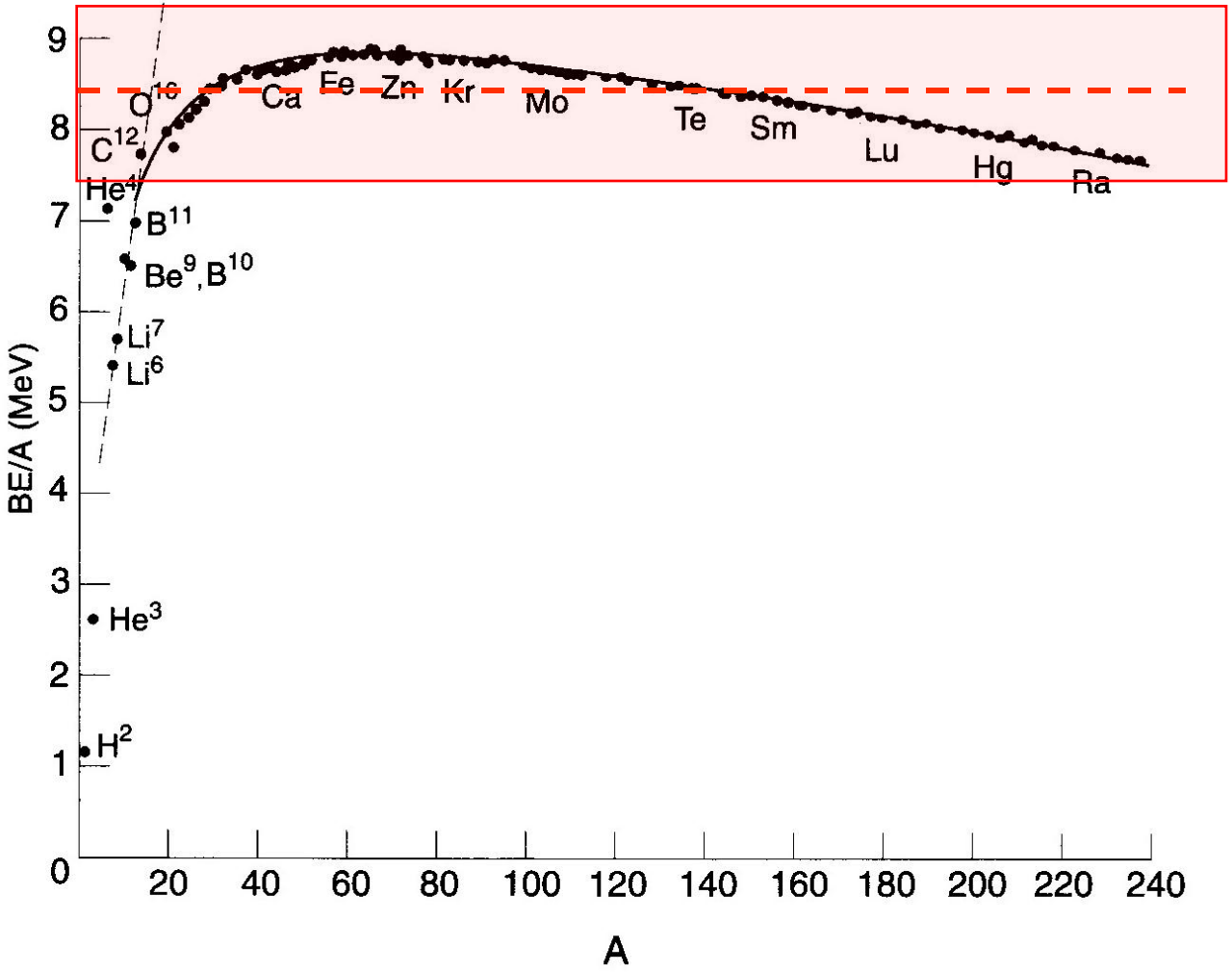
2体力　　3体力

原子核 ＝ 陽子と中性子の多体系

- 基底状態のエネルギー（原子核の質量）？
- 多体系の大きさ（半径）？
- 基底状態の形（変形？）
- 励起スペクトル？
- 原子核と原子核を衝突させると何が起きる？

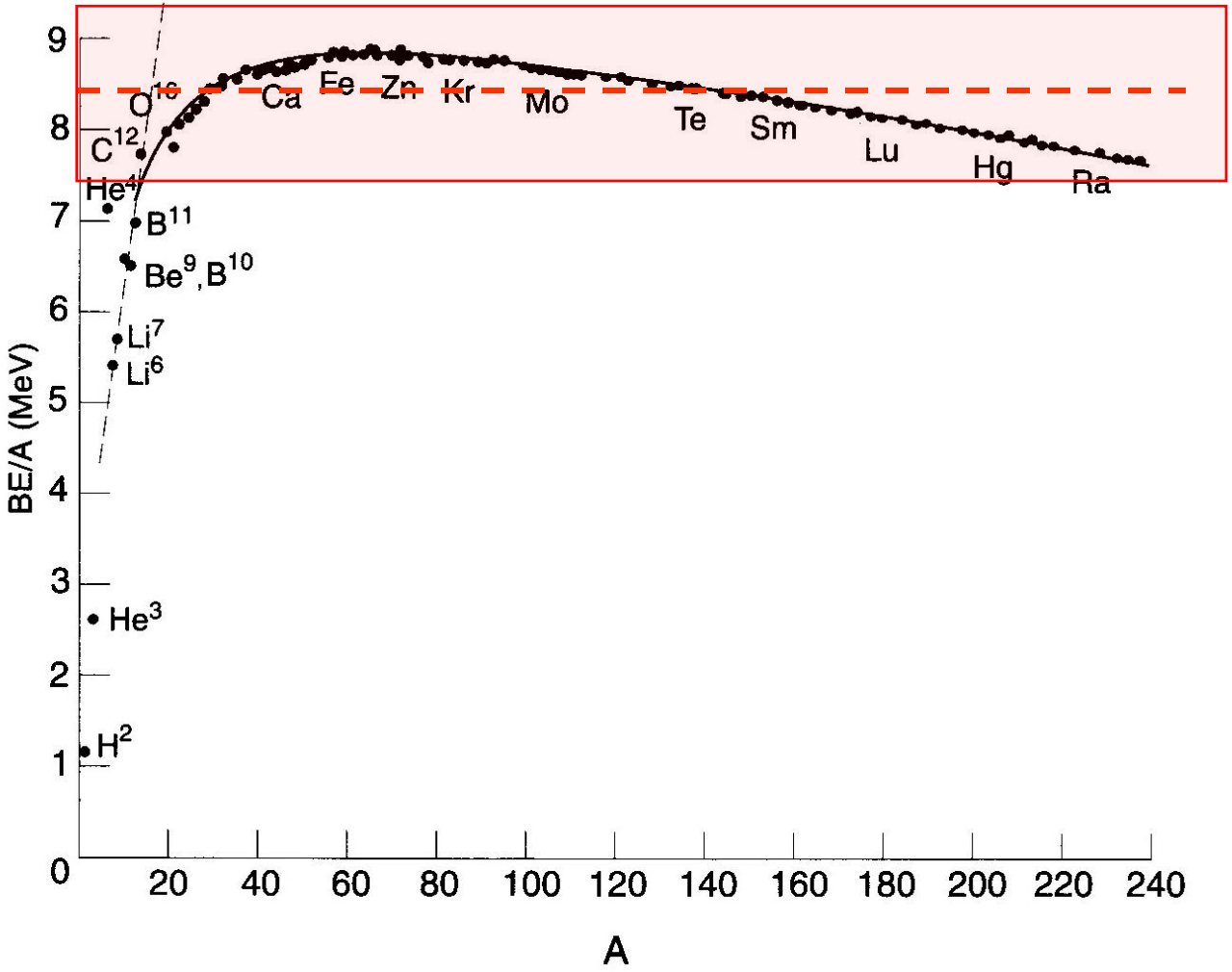
原子核の質量


BE/A (MeV)
A
O16
C12
He4
B11
Be9,B10
Li7
Li6
He3
H2
Ca
Fe
Zn
Kr
Mo
Te
Sm
Lu
Hg
Ra
8p + 8n
B
(binding energy)
16 8O8
m(N, Z)c2 = Zmpc2 + Nmnc2 − B



1. $B(N,Z)/A \sim 8.5$ MeV ($A > 12$)

（ほぼ一定）

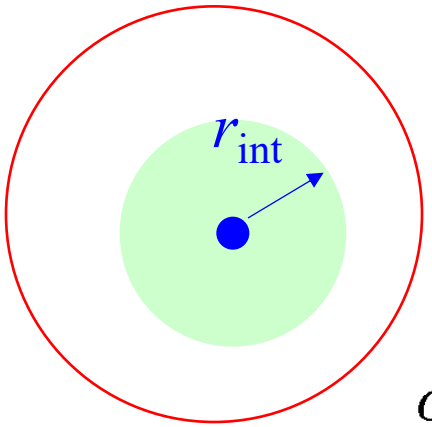


1. $B(N,Z)/A \sim 8.5$ MeV ($A > 12$) ⟺ 短距離力（核子間相互作用）

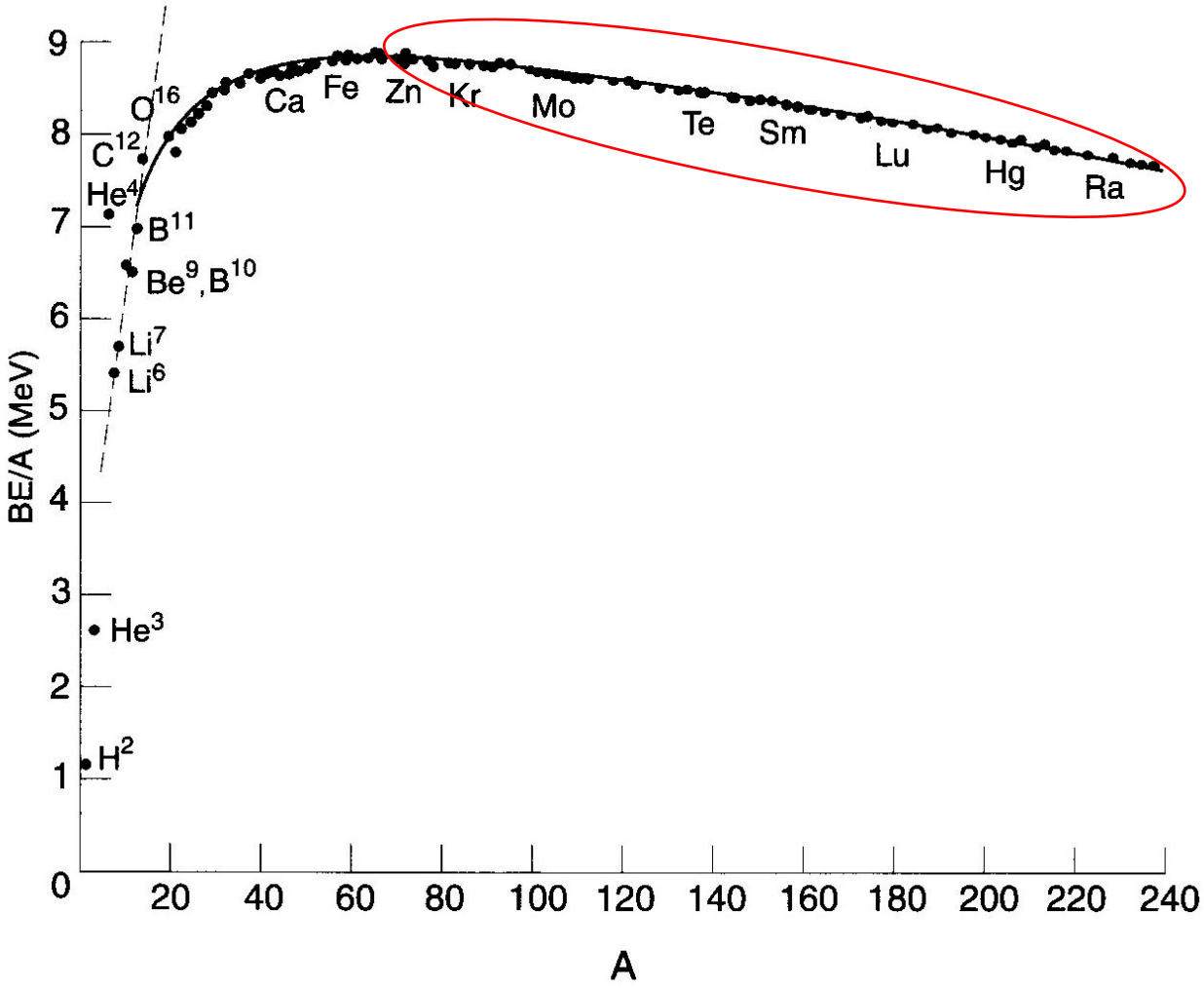
（ほぼ一定）

もし、それぞれの核子が近くのα個の粒子とだけ相互作用するとしたら:

$$B \sim \alpha\, A/2 \longrightarrow B/A \sim \alpha/2 \text{ (const.)}$$



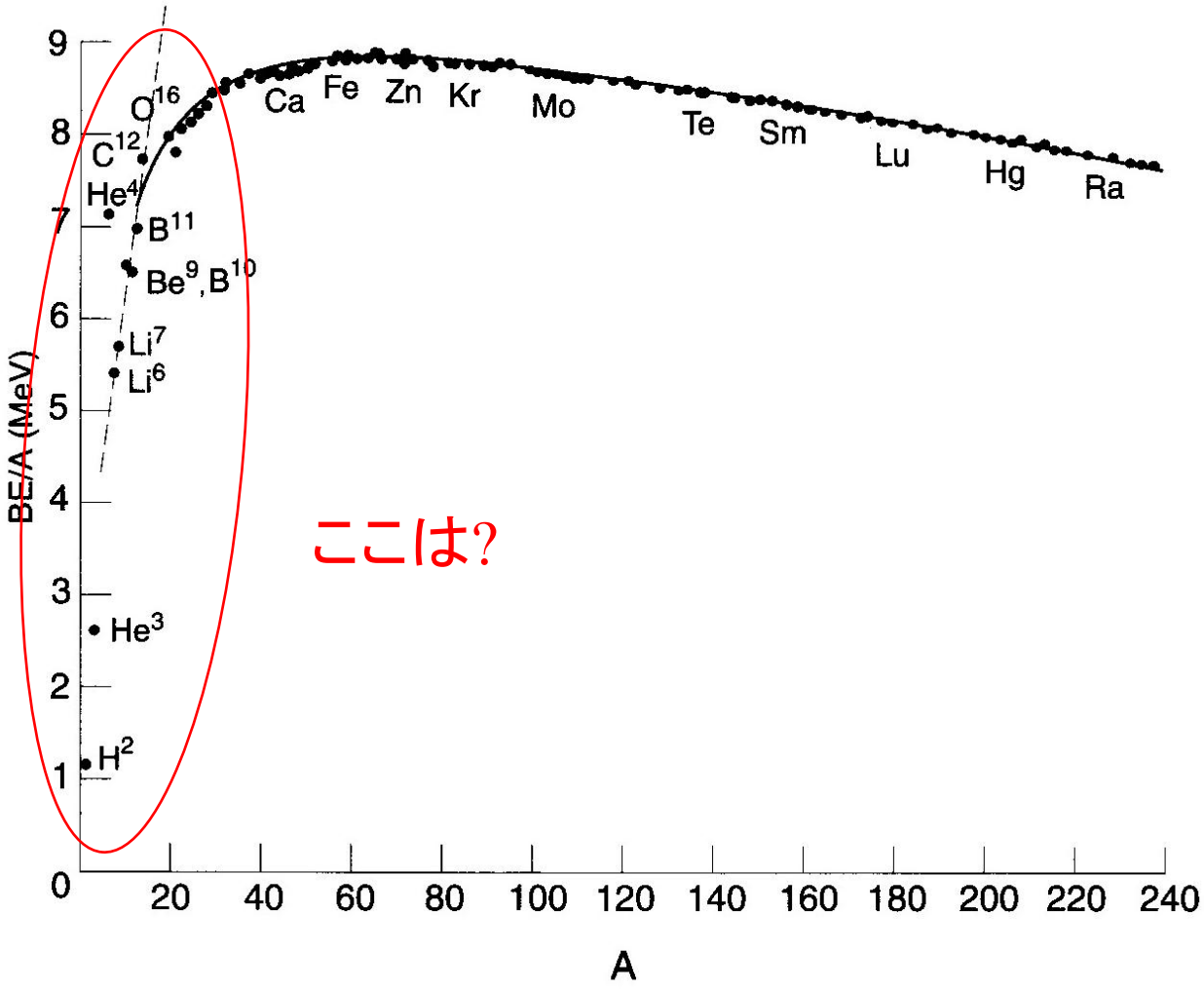
$$\alpha = \frac{4\pi}{3} r_{int}^3 \cdot \rho$$



1. B(N,Z)/A ~ 8.5 MeV (A > 12) ⟺ 短距離力（核子間相互作用）
2. 重い原子核に対してはクーロン力の影響

   ⟵ *B*/*A* が A に比例して減少

   （長距離力（クーロン力）がはたらいている証拠）



1. B(N,Z)/A ~ 8.5 MeV (A > 12) ⟺ 短距離力（核子間相互作用）
2. 重い原子核に対してはクーロン力の影響

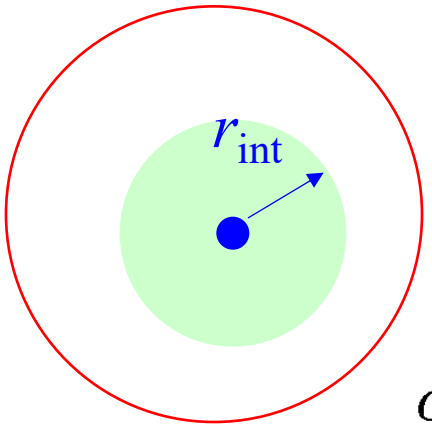
⟵ *B*/*A* が A に比例して減少
（長距離力（クーロン力）がはたらいている証拠）

もし、それぞれの核子が近くのα個の粒子とだけ相互作用するとしたら:

$$B \sim \alpha\, \mathrm{A}/2 \longrightarrow B/\mathrm{A} \sim \alpha/2 \ (\mathrm{const.})$$

もし、それぞれの核子が近くのα個の粒子とだけ相互作用するとしたら:

$B \sim \alpha\, A/2 \longrightarrow B/A \sim \alpha/2$ (const.)

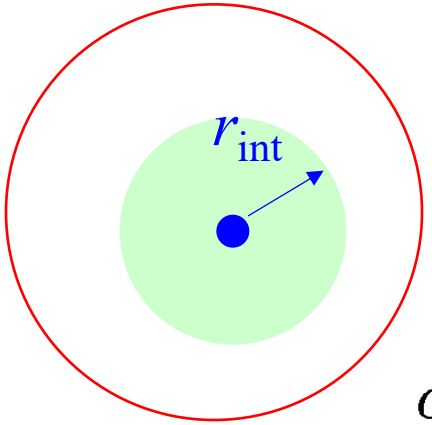


小さな原子核だと

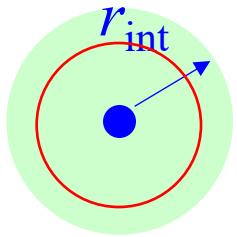
$$\alpha = \frac{4\pi}{3} r_{int}^3 \cdot \rho$$

もし、それぞれの核子が近くのα個の粒子とだけ相互作用するとしたら:

$B \sim \alpha\, A/2 \longrightarrow B/A \sim \alpha/2$ (const.)



小さな原子核だと

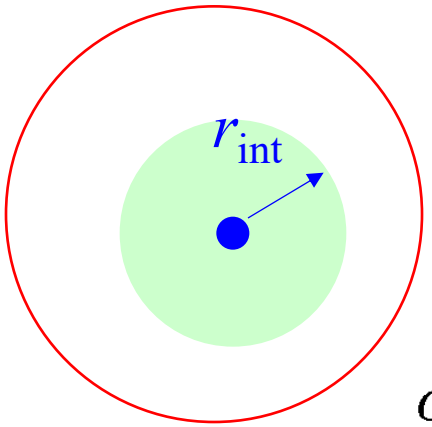


$$\alpha = \frac{4\pi}{3} r_{\mathrm{int}}^3 \cdot \rho$$

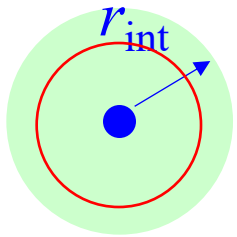
$$\rightarrow B/A \propto A - 1$$

もし、それぞれの核子が近くのα個の粒子とだけ相互作用するとしたら:

$B \sim \alpha\, A/2 \longrightarrow B/A \sim \alpha/2$ (const.)



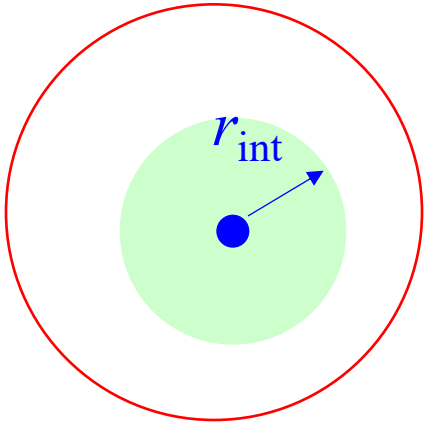
小さな原子核だと



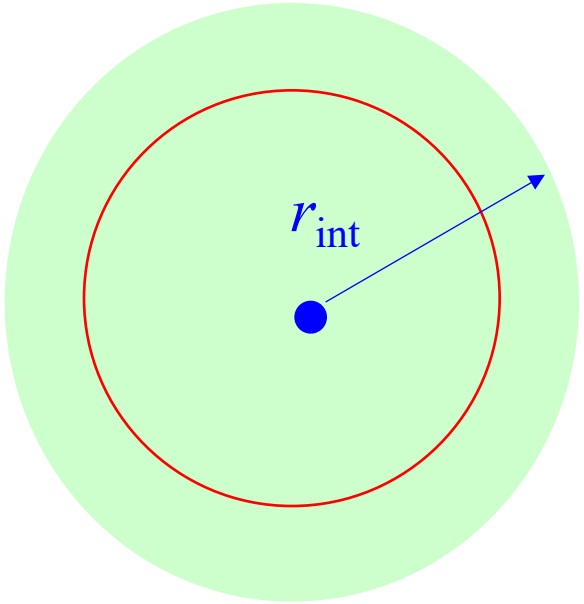
$$\alpha = \frac{4\pi}{3} r_{\mathrm{int}}^3 \cdot \rho$$

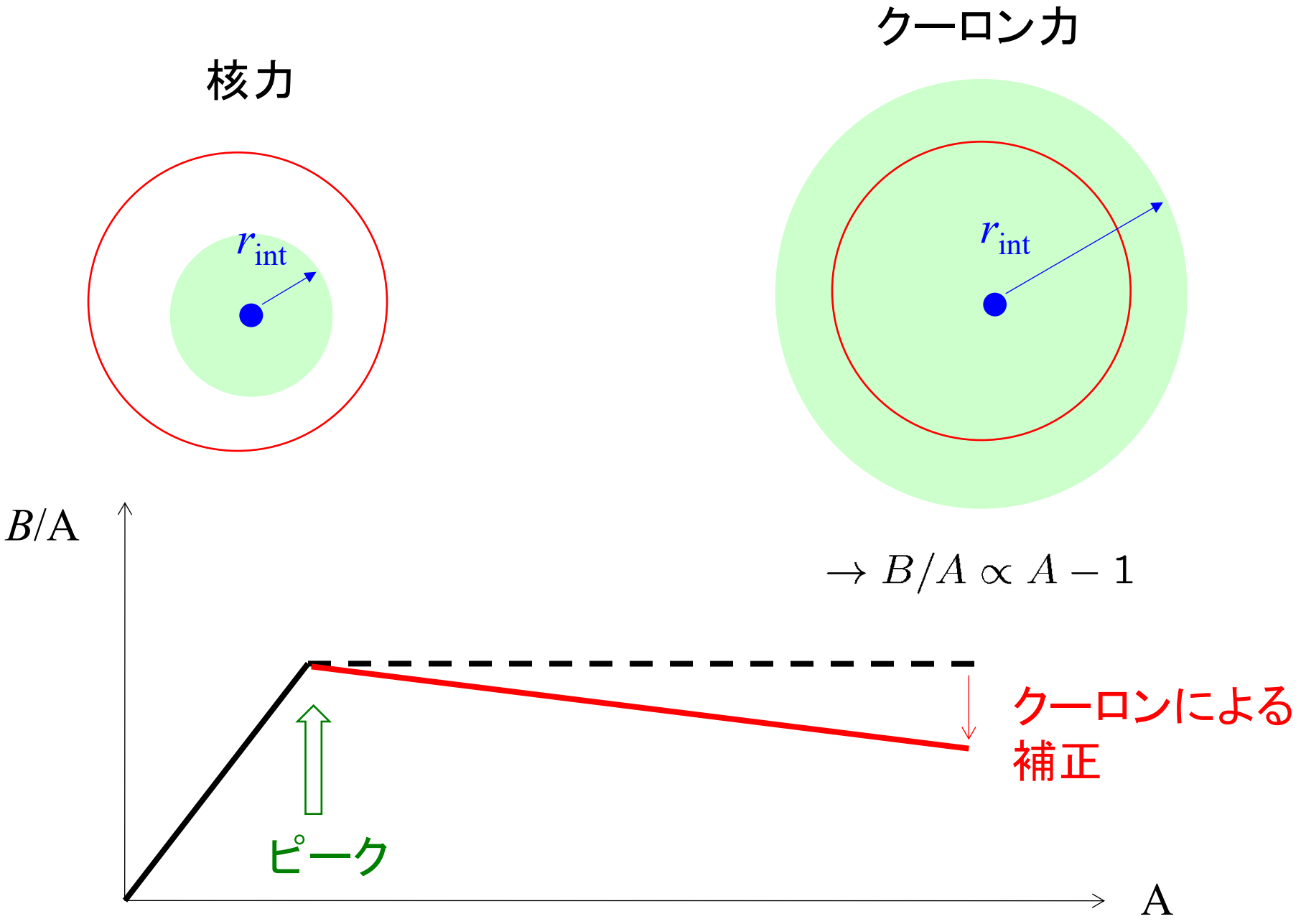
$$\rightarrow B/A \propto A - 1$$

核力

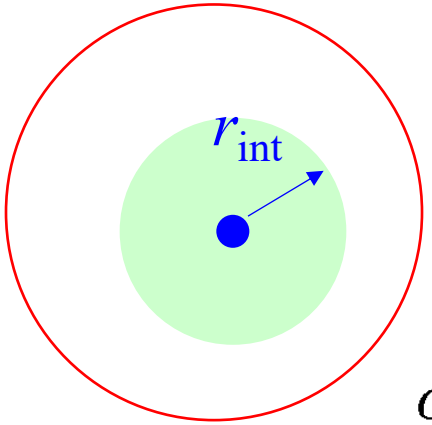


クーロン力



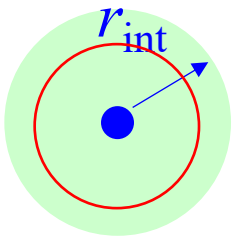

核力
クーロン力
r_{int}
r_{int}
B/A
$\rightarrow B/A \propto A - 1$
クーロンによる
補正
ピーク
A

核力のレンジの見積もり

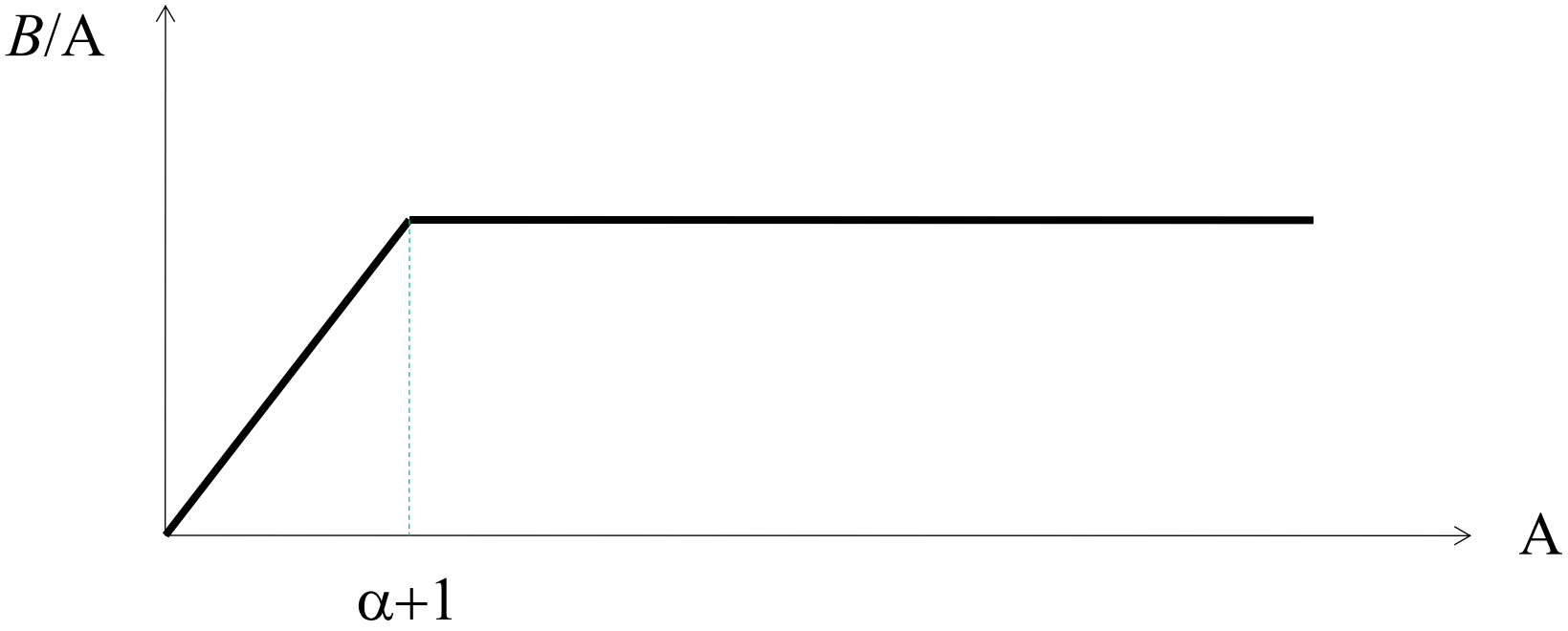


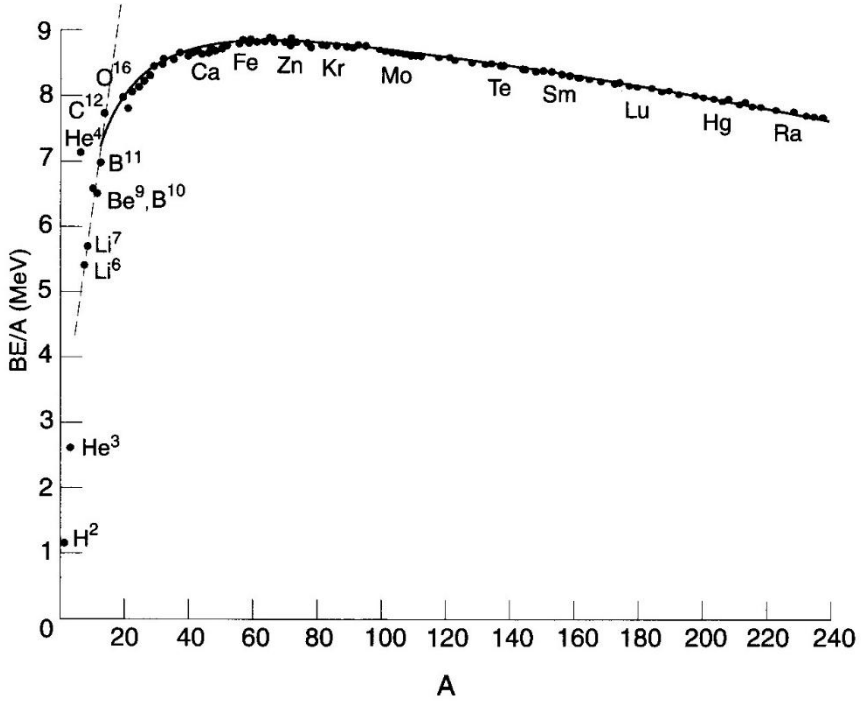
$$\alpha = \frac{4\pi}{3} r_{\mathrm{int}}^3 \cdot \rho$$

小さな原子核だと



$$\rightarrow B/A \propto A - 1$$





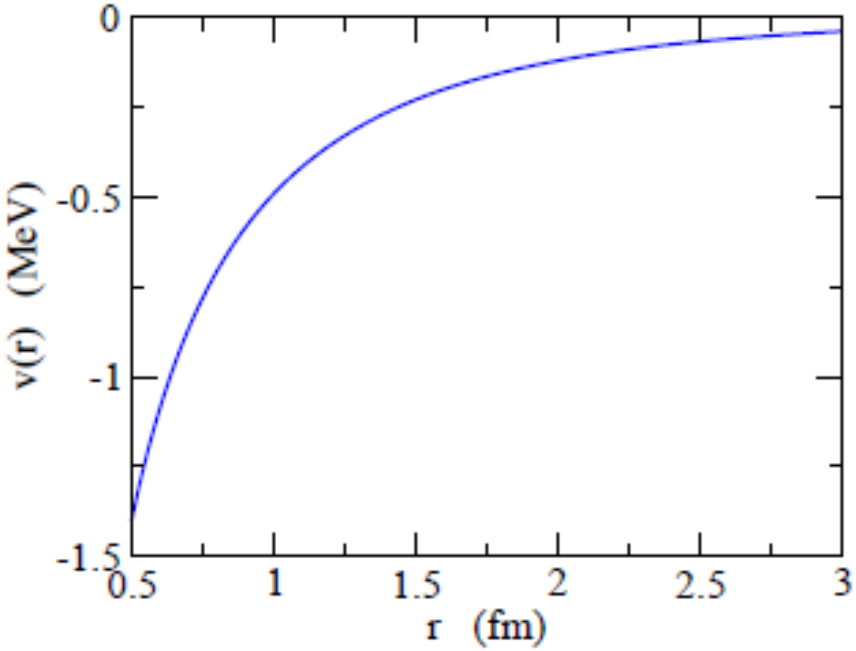
この図から α の値を読み取ると、
α ~ 10 くらい。

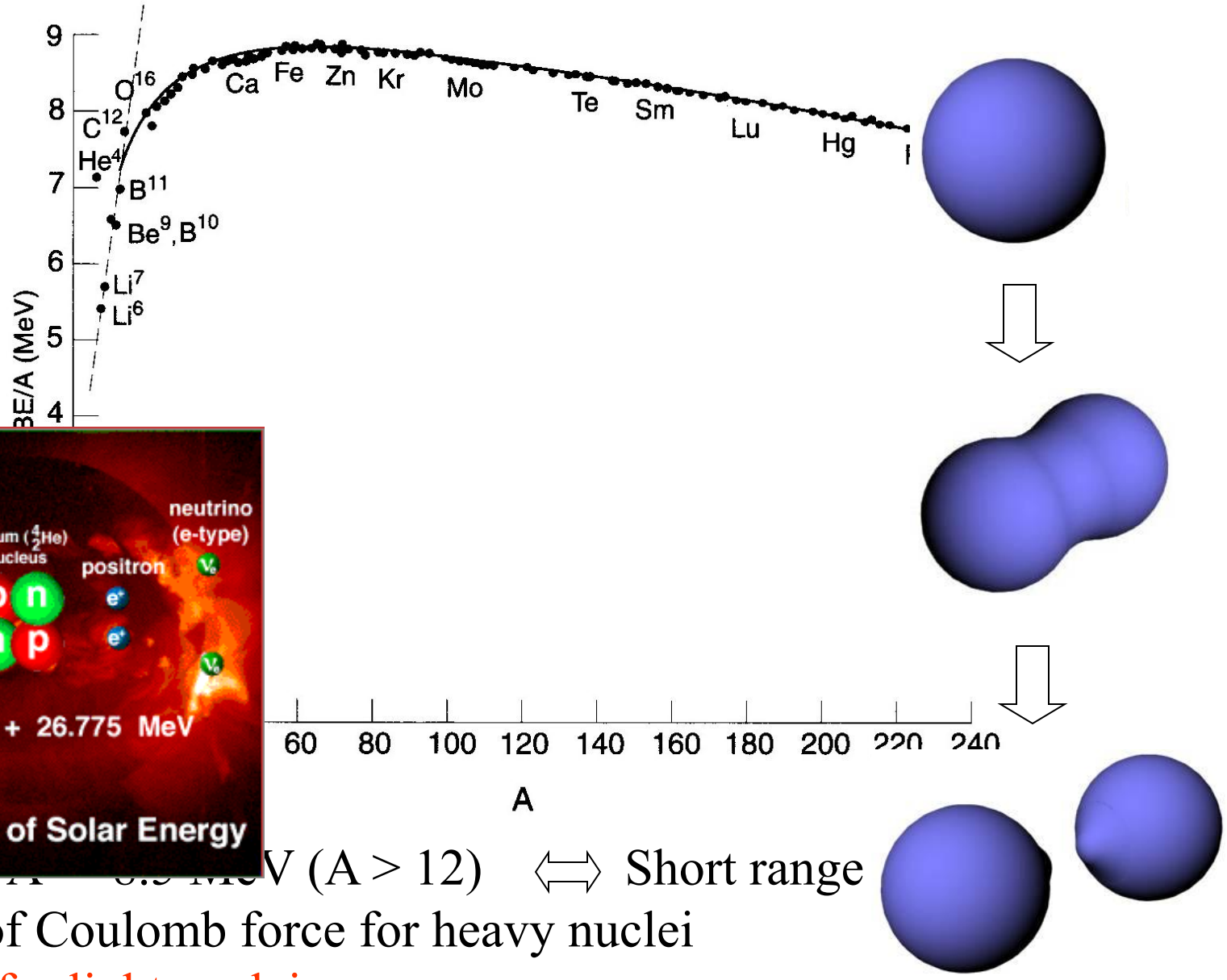
核力の到達距離は、
$1.1 \times 10^{1/3} = 2.37$ fm 程度。

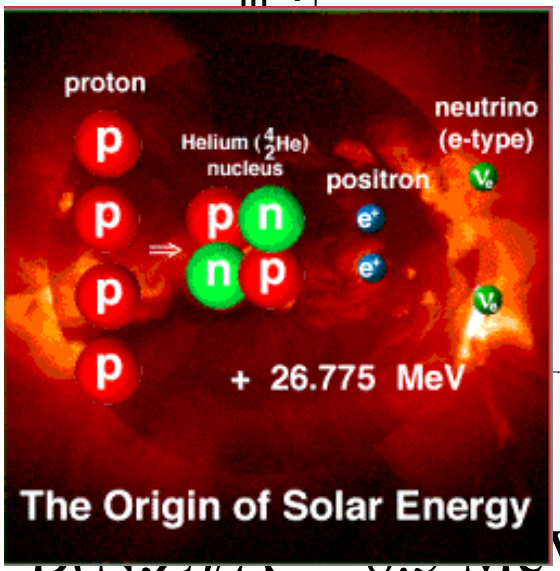
湯川相互作用:

$$v(r) = -g\frac{e^{-\kappa r}}{r}$$

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\hbar}{m_\pi c} = 1.41 \text{ fm}$$







1. B(N,Z)/A ~ 8.5 MeV (A > 12) ⟺ Short range
2. Effect of Coulomb force for heavy nuclei
3. Fusion for light nuclei
4. Fission for heavy nuclei

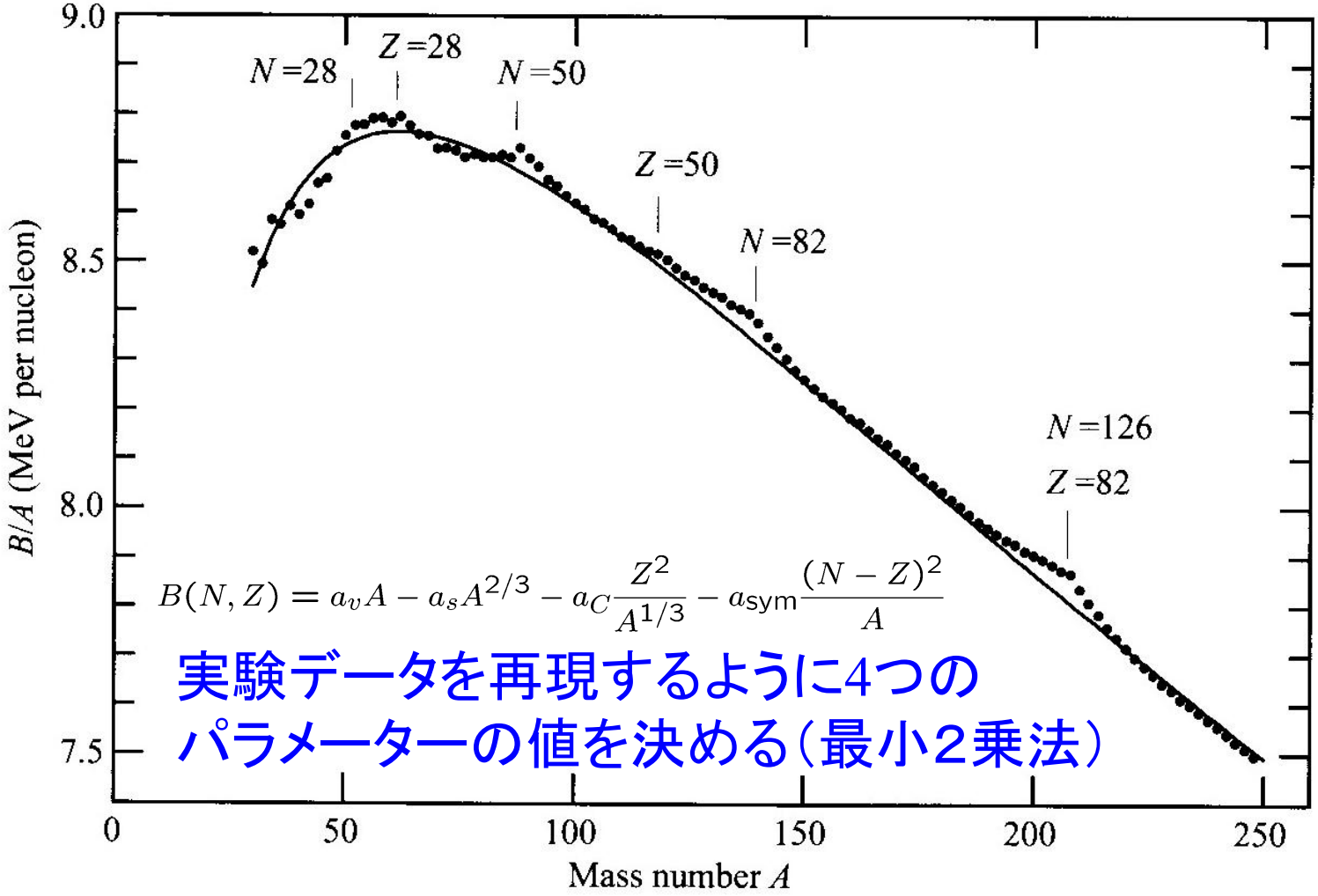
Semi-empirical mass formula

(Bethe-Weizacker formula: Liquid-drop model)

$$B(N,Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\mathrm{sym}} \frac{(N-Z)^2}{A}$$

- Volume energy: $a_v A$
- Surface energy: $-a_s A^{2/3}$
- Coulomb energy: $-a_C\, Z^2/A^{1/3}$
- Symmetry energy: $-a_{\mathrm{sym}}\,(N-Z)^2/A$

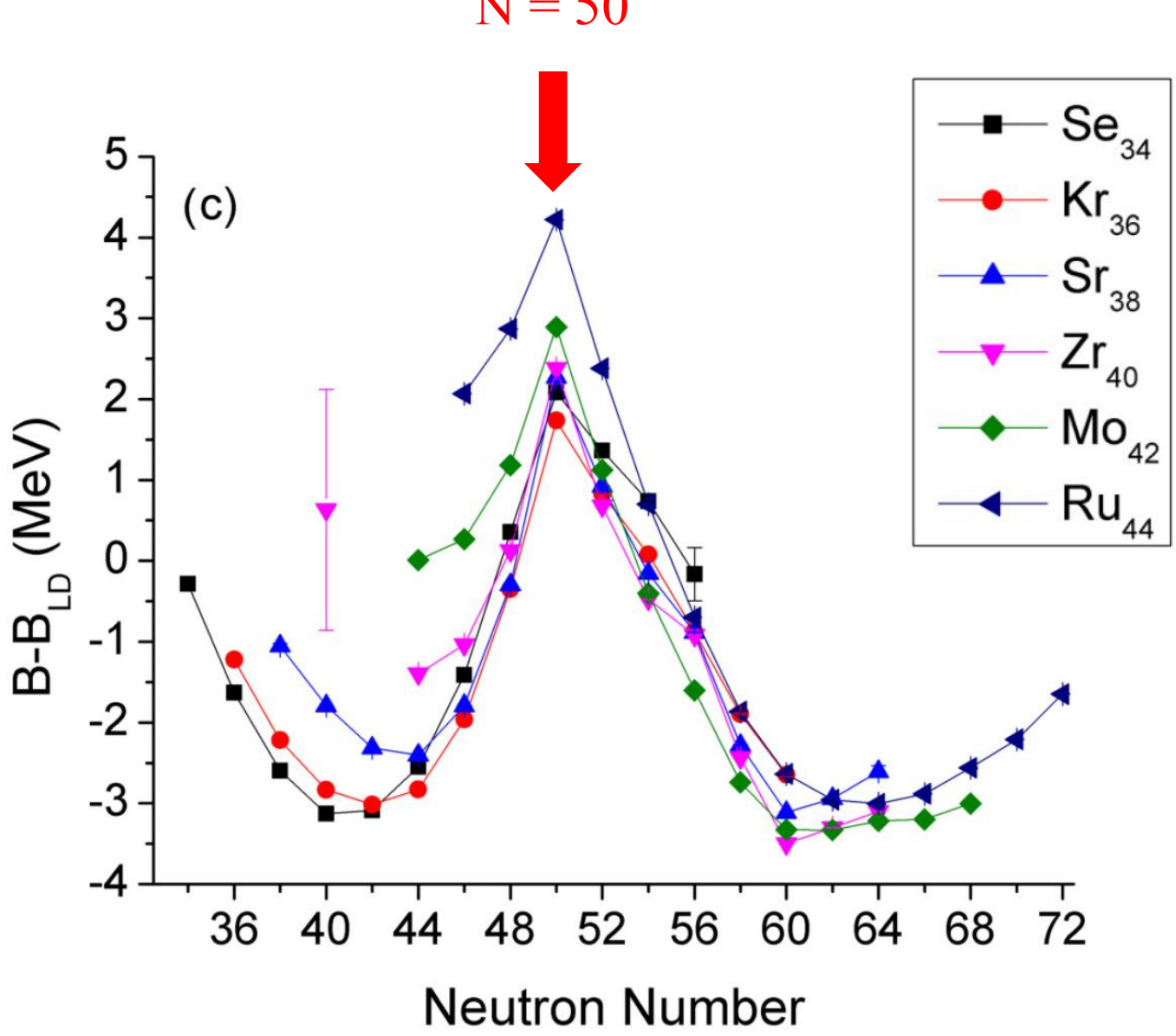
どのくらい実験を再現するか？



✓ 大体OK、だけど所々にずれ

✓ N,Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 (魔法数)に対して束縛エネルギー大

⟶ 「殻構造」



I. Bentley et al., PRC93 (‘16) 044337