DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY
No.

散乱理論

§. 散乱の基本概念

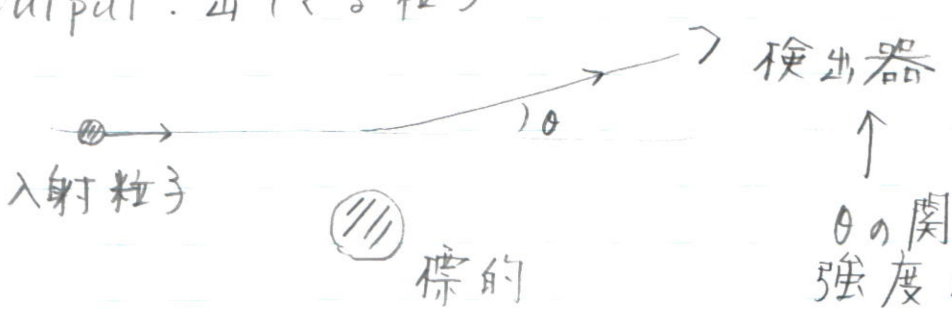
$$\underbrace{\xrightarrow[\text{刺激}]{\text{input}}\ \boxed{\text{対象}}\ \xrightarrow[\text{応答}]{\text{output}}}_{\text{散乱理論}}$$

・古典系（マクロな物体）

input：（太陽からくる）光
output：反射光
波長 → 色
方向 → 形

・量子系（ミクロな物体）

input：（加速器で加速された）入射粒子
output：出てくる粒子

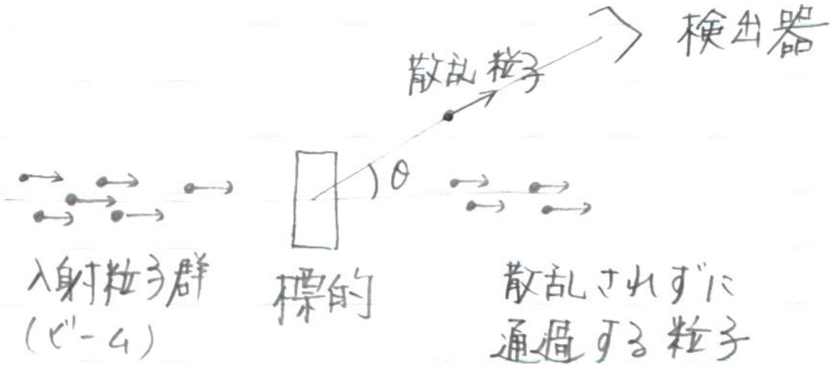


↑
θの関数として粒子強度を測定
↕
散乱断面積

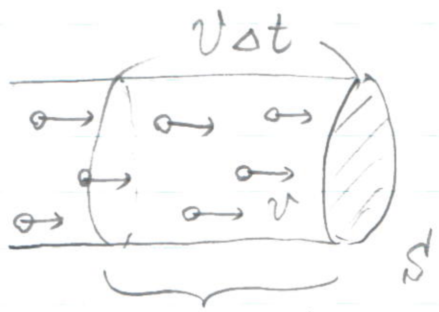
cf. ラザフォード散乱
→ 原子核の発見

DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY

§. 散乱実験と散乱断面積



・流束(フラックス)
　単位時間当たりに単位面積をもつ面を通過する
　粒子の数



この領域にある粒子が時間 Δt の
間に面を通過する。

$$N = S \cdot v\Delta t \cdot \rho$$

ρ：数密度

$$\boxed{j = \frac{N}{S\Delta t} = v\rho}$$

・イベント・レート（単位時間あたりに検出器で検出する粒子数）

$$R \propto \underbrace{N_T}_{\text{標的の個数}}\ \underbrace{j}_{\text{フラックス}} \cdot \underbrace{\varepsilon}_{\text{検出効率}}$$

・散乱断面積

この比例係数を σ（散乱断面積）とする.

$$\boxed{R = N_T\, j\, \sigma}$$

（簡単のため，以下 $\varepsilon = 1$ として議論する。）

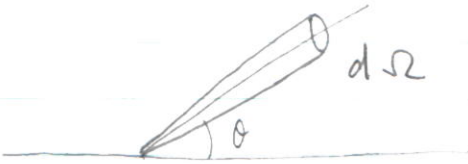
$$\rightarrow \quad \sigma = \frac{R}{N_T} \cdot \frac{1}{j}$$

σ：標的粒子が1つだけある時の反応率を入射フラックスで割ったもの

⟶ 量子力学的取り扱いへ

(note) σ：実験のセットアップに依らない量

・微分散乱断面積



角度 (θ, φ) 方向の微小立体角 $d\Omega$ 内で検出する粒子数

$$dR(\theta,\varphi) = N_T\, j\, \underbrace{\frac{d\sigma}{d\Omega}}_{\text{微分散乱断面積}} \cdot d\Omega \quad \rightarrow \quad \sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY

・断面積の次元

$$R = N_T\, j \cdot \sigma$$

$R = [\text{個}/T]$

$N_T = [\text{個}]$

$j = [\text{個}/T/S]$

$\downarrow\quad \sigma = [S]$　面積の次元

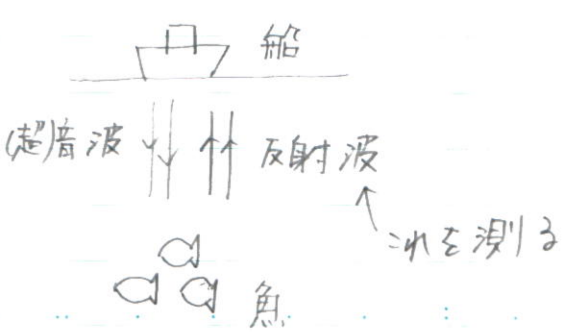
"入射粒子が見る effective な標的粒子の大きさ"

(note) $dR(\theta,\varphi) = N_T\, j \dfrac{d\sigma}{d\Omega} \cdot d\Omega$

$$\rightarrow\quad N_T = \frac{\frac{dR}{d\Omega}}{j\,\frac{d\sigma}{d\Omega}}$$

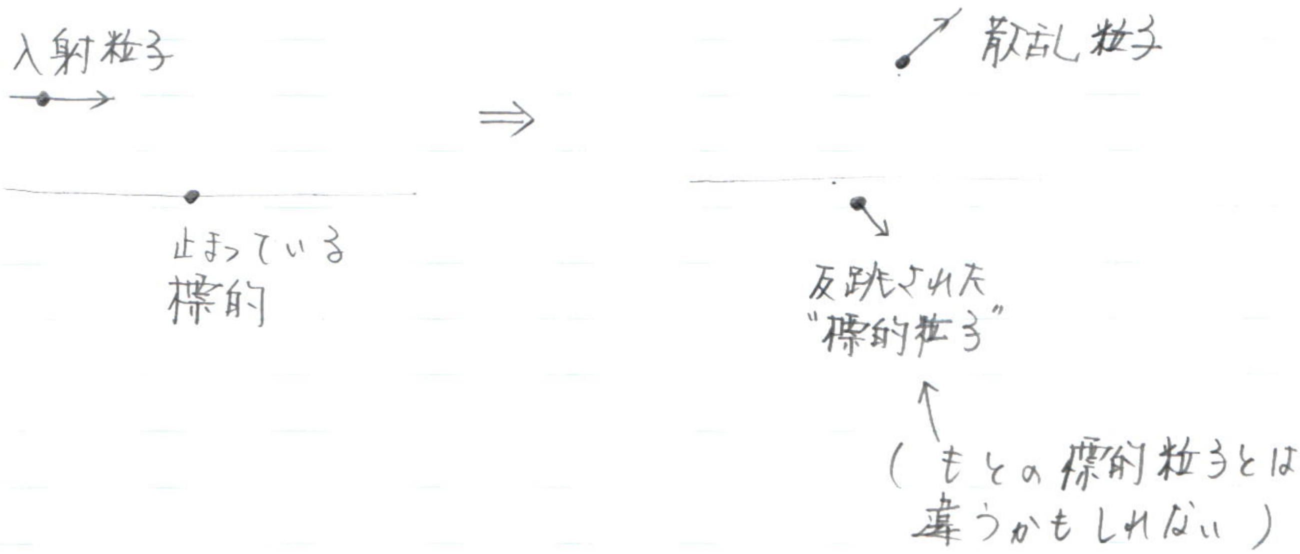
もし $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ を事前に知っていれば $\frac{dR}{d\Omega}$ を測れば N_T がわかる（j は実験でコントロールできる）。

→ 魚群探知器の原理



§. 2体系の量子力学：実験室系と重心系

実験室系



重心系
理論的には重心系で考えた方が簡単

常に2粒子の運動量が逆向きで大きさが等しい
(↔ 重心固定系)

※ 標的の質量が無限大なら 実験室系 ＝ 重心系

・2体系の量子力学（復習）

$$H = \frac{\mathbb{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbb{p}_2^2}{2m_2} + V(\mathbb{r}_1 - \mathbb{r}_2)$$

相対座標： $\mathbb{r} = \mathbb{r}_1 - \mathbb{r}_2$

重心座標： $\mathbb{R} = \dfrac{m_1 \mathbb{r}_1 + m_2 \mathbb{r}_2}{m_1 + m_2}$

これと共役な運動量は

$$\mathbb{p} = \frac{m_2 \mathbb{p}_1 - m_1 \mathbb{p}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbb{P} = \mathbb{p}_1 + \mathbb{p}_2$$

（ $\mathbb{p} = \alpha \mathbb{p}_1 + \beta \mathbb{p}_2$ とおいて

$[\mathbb{p}, \mathbb{r}] = \frac{\hbar}{i}$, $[\mathbb{p}, \mathbb{R}] = 0$

となるように α, β を決定。$\mathbb{P}$ も同様。

答えを知っていれば、

$\mathbb{P} = (m_1 + m_2)\dot{\mathbb{R}}$, $\mathbb{p} = \mu \dot{\mathbb{r}}$ ）

↓

$$H = \underbrace{\frac{\mathbb{P}^2}{2M}}_{H_{cm}} + \underbrace{\frac{\mathbb{p}^2}{2\mu} + V(\mathbb{r})}_{H_{rel}} \quad ; \quad M = m_1 + m_2, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY
No.

(note)

$$\frac{\mathbb{P}^2}{2M}+\frac{\mathbb{p}^2}{2\mu}=\frac{(\mathbb{P}_1+\mathbb{P}_2)^2}{2(m_1+m_2)}+\frac{m_1+m_2}{2m_1m_2}\left(\frac{m_2\mathbb{P}_1-m_1\mathbb{P}_2}{m_1+m_2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2(m_1+m_2)}\Big(\mathbb{P}_1^2+\cancel{2\mathbb{P}_1\cdot\mathbb{P}_2}+\mathbb{P}_2^2 + \frac{1}{m_1m_2}\left(m_2^2\mathbb{P}_1^2-\cancel{2m_1m_2\mathbb{P}_1\cdot\mathbb{P}_2}+m_1^2\mathbb{P}_2^2\right)\Big)$$

$$=\frac{1}{2(m_1+m_2)}\left\{\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\mathbb{P}_1^2+\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\mathbb{P}_2^2\right\}$$

$$=\frac{\mathbb{P}_1^2}{2m_1}+\frac{\mathbb{P}_2^2}{2m_2}$$

・実験室系から重心系への変換

lab

相対速度 $\dot{r}=\dot{r}_1=v_{1L}$

重心速度 $\dot{R}=\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\dot{r}_1$

$$=\frac{m_1}{m_1+m_2}v_{1L}$$

$$E_{lab}=\frac{1}{2}m_1(v_{1L})^2$$

$$=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{R}^2+\underbrace{\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2}_{\equiv\, E_{cm}}$$

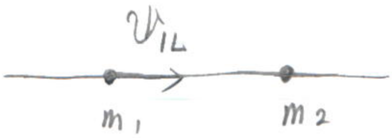
$$E_{cm}=\frac{1}{2}\mu(v_{1L})^2=\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(v_{1L})^2$$

$$=\frac{m_2}{m_1+m_2}E_{lab}$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY
No.

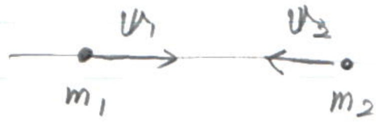
$$E_{lab} = \frac{1}{2} m_1 v_{1L}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2L}^2$$
$$E_{cm} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

lab



$\Longrightarrow$ 速度 $-\dot{R}$ でガリレイ変換

cm

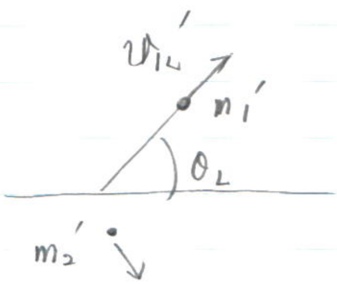


$$v_2 = -\dot{R} = -\frac{m_1 v_{1L}}{m_1+m_2}$$

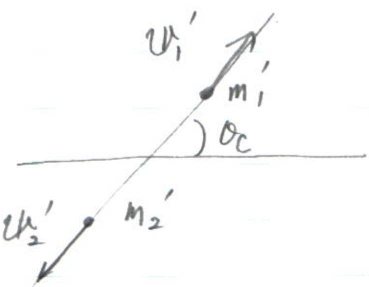
$$v_1 = v_{1L} - \dot{R} = \frac{m_2}{m_1+m_2} v_{1L}$$

$$\to \quad m_1 v_1 = -m_2 v_2$$

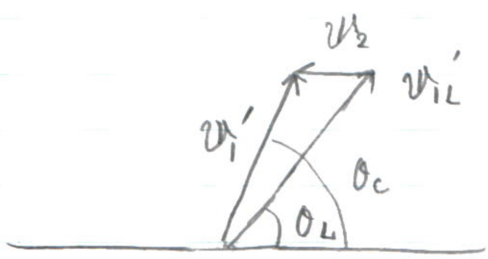
$\Downarrow$



$\longrightarrow$



$\to$



$\to$

$$\begin{cases} v_1' \cos\theta_c = v_{1L}' \cos\theta_L - v_2 \\ v_1' \sin\theta_c = v_{1L}' \sin\theta_L \end{cases}$$

$$\to \quad \tan\theta_L = \frac{v_1' \sin\theta_c}{v_2 + v_1' \cos\theta_c} = \frac{\sin\theta_c}{\frac{v_2}{v_1'} + \cos\theta_c}$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY

エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + m_1 c^2 + m_2 c^2 = \frac{1}{2}m_1' v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2' v_2'^2 + m_1' c^2 + m_2' c^2$$

運動量保存則

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1' v_1' + m_2' v_2' = 0$$

$$\rightarrow v_1 = -\frac{m_2}{m_1} v_2 , \quad v_2' = -\frac{m_1'}{m_2'} v_1'$$

$\downarrow$

$$\underbrace{\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2}_{\substack{\parallel \\ E_{cm}}} + \underbrace{(m_1 + m_2 - m_1' - m_2')c^2}_{\substack{\equiv \\ Q}} = \frac{1}{2}m_1' v_1'^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1'^2}{m_2'} v_1'^2$$

$$= \frac{m_1'}{2}\left(1 + \frac{m_1'}{m_2'}\right) v_1'^2$$

(note) $\quad E_{cm} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_2^2}{m_1} + m_2\right) v_2^2$

$\downarrow$

$$\left(\frac{v_2}{v_1'}\right)^2 = \frac{m_1'}{\cancel{2}}\left(1 + \frac{m_1'}{m_2'}\right) \cdot \frac{1}{E_{cm} + Q} \cdot \frac{\cancel{2}}{\frac{m_2^2}{m_1} + m_2} \cdot E_{cm}$$

$$= \frac{m_1 m_1'}{m_2 m_2'} \cdot \frac{E_{cm}}{E_{cm} + Q} \cdot \frac{m_1' + m_2'}{m_1 + m_2}$$

$$\left(\sim \frac{m_1 m_1'}{m_2 m_2'} \cdot \frac{E_{cm}}{E_{cm} + Q} \qquad \text{if} \quad m_1 c^2 + m_2 c^2 \gg Q \right)$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY

No.

・立体角の変換

$$\tan\theta_L = \frac{\sin\theta_c}{\frac{v_2}{v_1'} + \cos\theta_c} \equiv \frac{\sin\theta_c}{x + \cos\theta_c} \qquad \left(x \equiv \frac{v_2}{v_1'}\right)$$

$$\rightarrow \quad \cos\theta_L = \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\theta_L}} = \sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{\sin\theta_c}{x+\cos\theta_c}\right)^2}}$$

$$= \frac{x+\cos\theta_c}{\sqrt{x^2+2x\cos\theta_c+1}}$$

$$\downarrow \quad \frac{d\Omega_L}{d\Omega_c} = \frac{d(\cos\theta_L)}{d(\cos\theta_c)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+2x\cos\theta_c}} - \frac{1}{2}\frac{2x(x+\cos\theta_c)}{(1+2x\cos\theta_c+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1+\cancel{x^2}+2x\cos\theta_c - x(\cancel{x}+\cos\theta_c)}{(1+2x\cos\theta_c+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1+x\cos\theta_c}{(1+2x\cos\theta_c+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$