↓

$$\psi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}) - \int d\mathbf{r}'\, G^{(+)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\, V(\mathbf{r}')\, \psi(\mathbf{r}')$$

$$= e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \frac{2\mu}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{r}' \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} V(\mathbf{r}')\, \psi(\mathbf{r}')$$

(note) $r \to \infty$ では

$$k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = k\sqrt{r^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}' + r'^2}$$

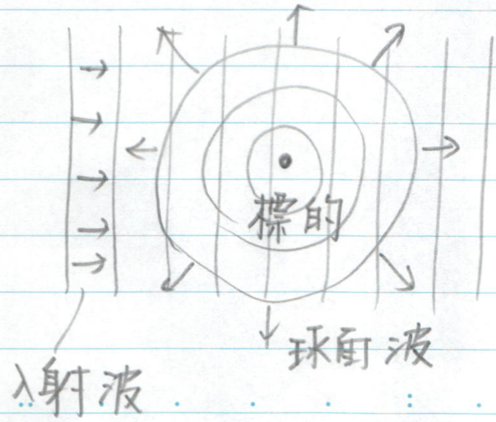
$$\sim kr - \underbrace{\left(k\frac{\mathbf{r}}{r}\right)}_{= \mathbf{k}'} \cdot \mathbf{r}'$$

↓

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \underbrace{- \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r}'\, e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'}\, V(\mathbf{r}')\, \psi(\mathbf{r}')}_{= f(\theta)\ \text{散乱振幅}} \cdot \frac{e^{ikr}}{r}$$

$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \sim r$

$$= \underbrace{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}_{\text{入射波}} + \underbrace{f(\theta)\cdot\frac{e^{ikr}}{r}}_{\text{散乱波(球面波)}}$$



§. 散乱振幅と散乱断面積

散乱波 $\psi_{sc}(r) = f(\theta)\cdot\frac{e^{ikr}}{r}$ に対するフラックス

$$\boldsymbol{j}_{sc} = \frac{\hbar}{2i\mu}\left(\psi_{sc}^{*}\nabla\psi_{sc} - \psi_{sc}\nabla\psi_{sc}^{*}\right)$$

を計算する。

(note) $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ $\qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\downarrow$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

$$z = r\cos\theta \quad \rightarrow \quad \overset{\frac{\partial z}{\partial x}}{0} = \frac{\partial r}{\partial x}\cos\theta - r\sin\theta\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{x\cos\theta}{r^2\sin\theta} = \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi \quad \rightarrow \quad 0 = \frac{x}{r}\sin\theta\sin\varphi + r\cos\theta\cdot\frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi \times \sin\varphi + r\sin\theta\cos\varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$= \sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi + \cos^2\theta\cos\varphi\sin\varphi + r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$= \sin\varphi\cos\varphi + r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \partial_x = \frac{\partial r}{\partial x}\partial_r + \frac{\partial \theta}{\partial x}\partial_\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\partial_\varphi$$

$$= \sin\theta\cos\varphi\,\partial_r + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\,\partial_\theta - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\partial_\varphi$$

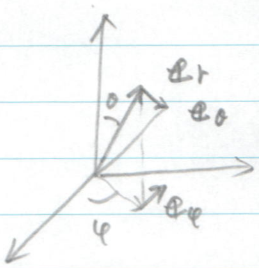
同様に

$$\partial_y = \sin\theta\sin\varphi\,\partial_r + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi\,\partial_\theta + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\partial_\varphi$$

$$\partial_z = \cos\theta\,\partial_r - \frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta$$

$$\Rightarrow \quad \nabla = \left[\sin\theta\cos\varphi\,\partial_r + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\,\partial_\theta - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\partial_\varphi\right]\mathbf{e}_x$$
$$+\left[\sin\theta\sin\varphi\,\partial_r + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi\,\partial_\theta + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\partial_\varphi\right]\mathbf{e}_y$$
$$+\left[\cos\theta\,\partial_r - \frac{1}{r}\sin\theta\,\partial_\theta\right]\mathbf{e}_z$$

(note)



$$\begin{cases} \mathbf{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\mathbf{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\mathbf{e}_y + \cos\theta\,\mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\mathbf{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\,\mathbf{e}_y - \sin\theta\,\mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\mathbf{e}_x + \cos\varphi\,\mathbf{e}_y \end{cases}$$

(note) $\nabla\cdot\mathbf{e}_r = \partial_r$, $\nabla\cdot\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{r}\partial_\theta$, $\nabla\cdot\mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi$

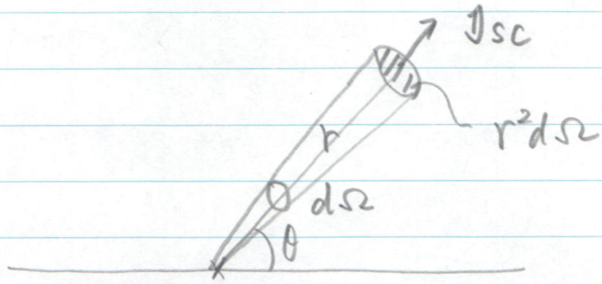
$$\Rightarrow \quad \boxed{\nabla = \partial_r\,\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\partial_\theta\,\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi\,\mathbf{e}_\varphi}$$

$$\downarrow \quad \boldsymbol{j}_{sc} = \frac{\hbar}{2i\mu}\left[f^*(\theta)\frac{e^{-ikr}}{r}\left(\boldsymbol{e}_r\partial_r + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\partial_\theta\right) f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r} - c.c.\right]$$

$$= \frac{\hbar}{2i\mu}\left[f^*(\theta)\cdot\frac{e^{-ikr}}{r}\left\{ f(\theta)\left(\frac{ik}{r}e^{ikr} - \frac{1}{r^2}e^{ikr}\right)\boldsymbol{e}_r + \frac{e^{ikr}}{r^2} f'(\theta)\,\boldsymbol{e}_\theta \right\} - c.c. \right]$$

$$\sim \frac{\hbar}{2i\mu}\cdot 2ik\frac{|f(\theta)|^2}{r^2}\boldsymbol{e}_r \quad (r\to\infty)$$

$$= \frac{k\hbar}{\mu}\cdot\frac{|f(\theta)|^2}{r^2}\boldsymbol{e}_r$$



単位時間に立体角 $d\Omega$ に散乱される粒子数

$$= r^2 d\Omega\cdot\boldsymbol{j}_{sc}\cdot\boldsymbol{e}_r = \frac{k\hbar}{\mu}|f(\theta)|^2 d\Omega$$

$$\downarrow \quad \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{j_{in}}\cdot\frac{k\hbar}{\mu}|f(\theta)|^2 = |f(\theta)|^2}$$

・ボルン近似

$$\psi = \phi - \frac{1}{H_0 - E - i\eta} V \psi$$

$$\sim \phi - \frac{1}{H_0 - E - i\eta} V \phi$$

$$f(\theta) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r}' \, e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}')$$

$$= -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r}' \, e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}'} V(\mathbf{r}')$$

$$= -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \tilde{V}(\vec{q})$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{\mu^2}{4\pi^2\hbar^4} |\tilde{V}(\vec{q})|^2$$

← フェルミの黄金則によるものと
一致

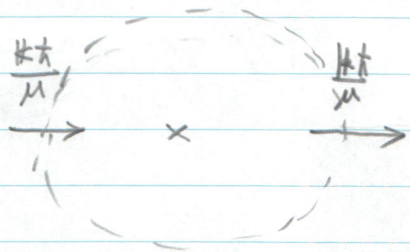
DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY

§. 散乱波はどこから現われる？ ―光学定理―

cf. L. I. Schiff PTP 11 ('54) 288

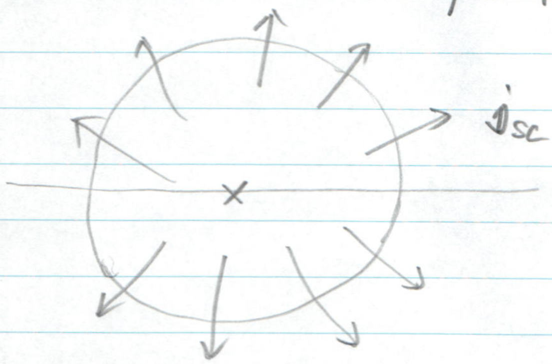
$$\psi(\mathbf{r}) \to e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r} \qquad (r\to\infty)$$

入射波のフラックス ： $\mathbf{j}_{in} = \frac{\mathbf{k}\hbar}{\mu}$



ポテンシャルがないときはこれだけ

ここに散乱波のフラックス ： $\mathbf{j}_{sc} = \frac{k\hbar}{\mu}\frac{|f(\theta)|^2}{r^2}\mathbf{e}_r$ が加わる



このフラックスはどこから現れた？
標的を中心とする大きな球を考えたときに
$\mathbf{j}_{in}$ と $\mathbf{j}_{sc}$ だけではフラックスが保存されていない。
（球に入った以上のフラックスが球から出ている。）

↓

$\psi_{in}(\mathbf{r})$ と $\psi_{sc}(\mathbf{r})$ の干渉が key point.

$$\psi(\mathbf{r}) \to e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2i\mu}\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2i\mu}\Big[\left(e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + f^*(\theta)\frac{e^{-ikr}}{r}\right)$$

$$\times\Big(i\mathbf{k}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + f(\theta)\underbrace{\frac{d}{dr}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)}_{= ik\frac{e^{ikr}}{r} - \cancel{\frac{e^{ikr}}{r^2}}\,\sim 0\ (r\to\infty)}\mathbf{e}_r + \underbrace{\frac{1}{r^2}}_{\sim 0\ (r\to\infty)} e^{ikr}\,\mathbf{e}_\theta\frac{d}{d\theta}f(\theta)\Big)$$

$$- \text{c.c.}\Big]$$

$$\sim \frac{\hbar}{2i\mu}\Big[i\mathbf{k} + ik|f(\theta)|^2\frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r$$

$$+ i\mathbf{k}f^*(\theta)\frac{e^{-ikr(1-\cos\theta)}}{r} + ik\,\mathbf{e}_r f(\theta)\frac{e^{ikr(1-\cos\theta)}}{r}$$

$$- \text{c.c.}\Big]$$

$$= \frac{\hbar\mathbf{k}}{\mu} + \frac{k\hbar}{\mu}\mathbf{e}_r|f(\theta)|^2\frac{1}{r^2}$$

$$\underbrace{\boxed{+\frac{k\hbar}{2\mu}\cdot\frac{1}{r}(\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_k)\Big[f^*(\theta)e^{-ikr(1-\cos\theta)} + f(\theta)\underline{e^{ikr(1-\cos\theta)}}\Big]}}_{\text{干渉項}}$$

$r\to\infty$, $\cos\theta\neq1$ で激しく振動
→ 角度積分をすると $\theta\sim0$ を除きゼロ

(note) $\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi + (V-E)\psi = 0 \\ -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi^* + (V-E)\psi^* = 0 \end{cases}$

$$\downarrow \quad -\frac{\hbar^2}{2\mu}(\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*) = 0$$

$$\Downarrow \quad \nabla\cdot(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) = 0$$

$$\Downarrow \quad \nabla\cdot\boldsymbol{j} = 0$$

ガウスの定理：$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{j}\, d\boldsymbol{r} = \int_S \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{e}_r \underbrace{dS}_{r^2 d\hat{\boldsymbol{r}}}$

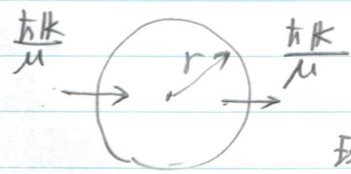
(半径 r の球面上で面積分)

$$\Downarrow \quad \boxed{\int \boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{j}\; r^2 d\hat{\boldsymbol{r}} = 0}$$

$\boldsymbol{j} = \frac{\hbar\boldsymbol{k}}{\mu} + \frac{k\hbar}{\mu}\boldsymbol{e}_r |f(\theta)|^2 \frac{1}{r^2}$ + (干渉項)

$\int \boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{j}\; r^2 d\hat{\boldsymbol{r}}$ を計算する

第1項：$N_1 = \int \frac{\hbar}{\mu} \underbrace{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{e}_r}_{= k\cos\theta} r^2 d\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{k\hbar}{\mu}\cdot r^2 \cdot 2\pi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\cos\theta = 0$



球面に入ったのと同じ量が出ていく

第2項：$N_2 = \frac{k\hbar}{\mu}\int d\hat{\boldsymbol{r}}\, |f(\theta)|^2$

$$= \frac{k\hbar}{\mu}\int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k\hbar}{\mu}\sigma$$

第3項：

$$N_3 = \frac{k\hbar}{2\mu}\cdot\frac{1}{r}\underbrace{\int r^2 d\hat{r}}_{=\,2\pi r^2\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)}(1+\cos\theta)\left[f^*(\theta)\,e^{-ikr(1-\cos\theta)} + f(\theta)\,e^{ikr(1-\cos\theta)}\right]$$

$$= \frac{k\hbar}{2\mu}\cdot 2\pi r\left\{-\frac{1}{ikr} f(\theta)(1+\cos\theta)\,e^{ikr(1-\cos\theta)}\Big|_{\cos\theta=-1}^{1} + \underbrace{\frac{1}{ikr}\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\left[\frac{d}{d(\cos\theta)} f(\theta)(1+\cos\theta)\right]e^{ikr(1-\cos\theta)}}_{\sim O\left(\frac{1}{r}\right)\ \sim 0} + \text{c.c.}\right\}$$

(もう一度部分積分をすると $1/r$ が出てくる。)

$$\sim \frac{k\hbar}{2\mu}\cdot 2\pi \cancel{r}\left(-\frac{2}{ik\cancel{r}} f(0) + \frac{2}{ik\cancel{r}} f^*(0)\right)$$

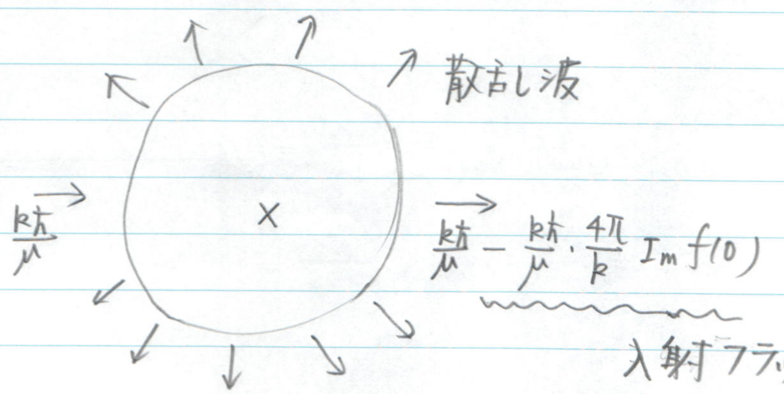
$$= -\frac{2\pi\hbar}{\mu}\cdot\frac{1}{i}\left(f(0) - f^*(0)\right)$$

$$= -\frac{k\hbar}{\mu}\cdot\frac{4\pi}{k}\,\mathrm{Im}\,f(0)$$

$$\Downarrow\quad 0 = N_1 + N_2 + N_3 = \frac{k\hbar}{\mu}\sigma - \frac{k\hbar}{\mu}\cdot\frac{4\pi}{k}\,\mathrm{Im}\,f(0)$$

$$\Downarrow\quad \boxed{\sigma = \frac{4\pi}{k}\,\mathrm{Im}\,f(0)}$$

光学定理



入射フラックスの減少分が
散乱波のフラックスになる。